arXiv:2303.00407v1 [math.AG] 1 Mar 2023

相对与对数奇点消解

MICHAEL TEMKIN

Contents

1. 引言 1
2. 一般原理 5
3. 对数概形的消解：初步尝试 13
4. 对数算法 24
5. 态射消解 32
6. 梦幻算法 41
7. 拟优概形及其他范畴的消解 55
附录 A. 61
参考文献 62

1. Introduction

这些讲义将构成一本书中的一章，该书基于在奥伯沃尔法赫研讨班上开设的一系列短期课程，探讨奇点消解的最新进展。我原本计划提供一份关于对数消解与半稳定约化的短期课程讲义扩充版，但在撰写过程中，我决定拓宽视野，也讨论非对数方法——包括经典方法和加权（或梦）算法。这样一来，内容与其他章节会有一定交集，但我认为所得益处大于这一不便。那么，我们能获得什么？首先，在撰写对数方法的讲解时，我发现了一种新的视角，能够以相对统一的方式介绍并比较全部四种方法——经典方法、对数方法、非对数加权方法和对数加权方法。即使对于经典算法而言，这一视角也略有新意——我们不使用标记理想（$\mathcal{I}$，d），而是爆破 d-重光滑中心——因此，我们将从重新诠释经典方法开始（假设读者对此已有基本了解），然后依次加入对数层、代数栈理论层和加权层，每次要么得到一种新算法，要么研究尝试为何失败，并为再加入一层以弥补这一失败做好准备。我希望，这种讲述方式不仅遵循了这些方法和层次的发现顺序，也能让内容更易于理解，因为

Key words and phrases. 奇点消解、对数几何、叠、加权爆破。本研究由 BSF 资助项目 2014365 和 2018193 以及 ERC 协同资助 770922 -BirNonArchGeom 提供支持。

我们尝试逐一引入新工具，而不是一次性全部引入。其次，无论如何，本章都应涵盖 Quek 的加权对数方法，因此先从非对数梦幻算法讲起，再加入对数层，并指出所需的对数调整，是合乎情理的。

我们的目标是介绍所有相关的概念、构造和技术，并陈述所有主要结果，包括所有重要的中间结果。笔记中不包含证明。对于一些较为容易的结果，我们将其作为练习并提供提示；对于较难的定理，则提供文献出处，并简要讨论证明的主要思路。因此，可以将这些笔记视为阅读研究论文的简明指南或伴读材料；新方法正是在这些论文中构建出来的： [ATW20a], [ATW20b], [ATW19] （另见 [McQ20], ，不过它使用了不同的语言）以及 [Que22]。

1.1. 历史与动机。 直到几年前，人们所知的关于特征零域中理想主化和簇的消解的基本函子性方法，实质上是唯一的；下文将其称为“经典方法”。该方法是在数十年间从 Hironaka 的原始方法[Hir64], 中提炼而成的。在这项共同且极其长期的努力中，Hironaka 本人（理想指数）、Giraud（最大接触）、Villamayor 和 Bierstone-Milman（典范性）、Włodarczyk（光滑函子性）以及其他人都作出了贡献。尤其是，在 2017 年以前，人们并不清楚是否存在其他算法，特别是那些更简单、更快速或具有更优函子性性质的算法。这些问题本身就具有基础性；鉴于类似的方法在另外两个经典的奇点消解问题中失效，它们显得尤为重要：正特征下的消解，以及（特征零中的）向量场消解。因此，扩大思想和技术的储备，可能对于在这些问题上取得实质性进展至关重要。

超越经典情形的首项进展，是在 [ATW20a] 中为簇构造了经典方法的对数类比，随后又在 [ATW20b]中将其推广到态射（或半稳定约化定理）。这个项目最初有两个动机：1）我们希望得到一个函子半稳定约化定理，尤其能推广到任意赋值环，而不必局限于离散赋值环；2）我们希望阐明对数结构在经典算法中的作用，它虽显而易见，却有些晦涩。这两条思路都指向同一个方向：

1）对于一般赋值环，我们所能期望的最佳结果，是按 Abramovich-Karu 的意义得到半稳定约化（见[AK00] 和 [ALT18]）；这表明我们必须处理任意的 fs 对数结构，而不只是具有自由幺半群的那些结构 $\overline{M}_x$。此外，光滑性、导子、光滑函子性等概念，也应分别由对数光滑性、对数导子、对数光滑函子性等取代。

2）在此背景下，自然会寻求在一般对数光滑簇上进行主化，而不是在带有简单正规交边界（或诱导对数结构）的光滑簇上进行主化。

总而言之，我们不得不以对数框架取代经典框架；令我们惊讶的是，其余部分仿佛是被形势所迫（尽管并不容易发现）。具体而言，结果发现，能够保持对数光滑性的足够一般的对数中心类，只有子簇与单项式中心的交集。相关的对数算法甚至比经典算法更简单，因为不再需要

对对数分层作归纳，但它在一处遇到了瓶颈，坚持要求我们也对由单项式根生成的中心进行爆破。这样的爆破可能并非对数光滑；为了解决这一问题，我们不得不将这类爆破细化为代数栈——加入栈论层是看似技术性却不可避免的解决方案。事实上，我们只是引入了经典加权爆破的一种栈论细化（采用某种特定的权重模式）。请注意，向量场消解中早已发现过类似障碍，而解决方案同样是考虑不可表加权爆破（或任何发挥相同作用的等效工具），参见 [Pan06] 和 [MP13]。

一旦发现了一类能够保持光滑性的新爆破（在代数栈情形下），接下来自然要问：将它们全部用于经典算法，能带来怎样的改进？ [McQ20] (沿用 [MP13]的思路）以及 [ATW19] (沿用 [ATW20a]的思路）分别独立研究了这个问题。与经典情形一样，尽管描述和论证各不相同，最终却得到了同一个算法。令我们颇感意外的是，这种情形下自然的主化算法不涉及任何对数结构，也不需要记忆；它采用一个简单的（事实上是经典的）多重序不变量，并在每次加权爆破之后对其加以改进。此外，由此得到的消解算法也具有相同性质，而且它确实是一种非嵌入方法。最后，人们曾认为这样的算法并不存在（而且它在经典情形下确实不存在，见§ 6.4.8）。基于上述种种原因，我们有时称之为梦算法，尽管（遗憾的是）有些专家认为它不过是旧思想的一种变体，并无本质上的新意.....

最后，我们可以问：在对数情形下是否也存在一种梦算法，尤其是能否由此快速而简单地消解带除子的概形，并证明半稳定约化定理。答案是肯定的。绝对情形已在 [Que22], 中得到处理，而且似乎可以确定，类似的方法也适用于相对情形。

1.2. 概述。现在让我们概述一下这些讲义的内容。

1.2.1. 一般原理。在第 2 节中，我们阐述迄今已知的四种方法共同遵循的一般原理。事实上，现在正是进行这种分类的好时机——我们已经有了几种已知的函子性方法（不同于过去几十年，当时人们只知道本质上唯一的经典方法），但方法的数量仍然不少，因此可以进行这样的推广.....简而言之，令人颇为惊讶的是，每种算法似乎都由我们称为该方法框架的要素充分决定：所研究的几何对象类别、相关的光滑性和导子概念、可在不破坏光滑性的前提下进行爆破的容许中心，以及按照一个（偏序或全序）集合对容许中心所作的初步分类，该集合的元素称为阶、对数阶、加权阶等。对 Z 的消解总是归结为在一个流形 $I_Z \subset \mathcal{O}_X$ 上对 X 进行主化，其中 Z 局部嵌入于该流形；而对 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ 的主化，则归结为对 $\mathcal{I}$进行适当的阶数降低：在此过程中，反复爆破一个包含 $\mathcal{J}$ 且具有尽可能高的阶的容许中心，然后从 $\mathcal{I}$ 的拉回中除去 $\mathcal{J}$ 的拉回。 $\mathcal{I}$。

结果表明，通常被视为主要工具的内容，包括其中较为复杂的部分——最大接触、系数理想、齐次化、嵌入的独立性

等——只要选取适当的框架，就能相当容易地推广到任意情形。而我们在 [ATW20a] 和[ATW19] 中视为技术层面的内容——将簇推广到 DM 叠、引入适当的新中心形式体系，例如（x^2， $y^{3/2}$）等——似乎才是必须谨慎设计的主要选择。选择不当或不充分，往往会导致一个“差一点就成功”的算法在某个出乎意料、看似无关紧要或纯技术性的问题上陷入停滞。

我们以经典算法为例，阐释这些一般原则，从而结束第 2 节：首先展示不使用边界时能做到什么程度，然后再将这一额外层次纳入框架。在这种情况下，最大接触上的阶可能会跳跃，因此方法会陷入困境；于是必须考虑非最大阶的阶数降低。Hironaka 的见解是，只要边界能对例外除子的超额部分进行良好控制，就可以做到这一点。若采用精确的加权中心，便能以更精确的方式清除例外除子；这也解释了为什么基本的加权算法完全不使用边界（或对数结构）。迄今为止，这是唯一一种不使用对数结构的方法。

我们的论述假定读者熟悉经典方法，因此请参阅第 [Fru] 章，以及 [Kol07] 和 [W-lo05] 等常见参考文献。此外， [BM08]中也有一份非常简短清晰的论述（省略了一些证明）。

1.2.2. 对数方法。 接下来的两节将详细解释在 [ATW20a] 中构建的经典方法的对数类比。在第 3 节中，我们尽可能在对数簇的框架内展开（读者可以想见，这是我们研究 [ATW20a] 时最初采用的研究思路）。这一部分的口号是处处加上“对数”：对数簇、对数光滑性、对数光滑函子性、对数导子，以及与之相关的对数阶、对数极大接触和对数系数理想等概念。主要的新意在于，可以考虑如下形式的中心的幂所构成的中心（t_1， ……， t_n， u^{p_1}， ……， u^{p_r}），其中 t_i 是正则参数，而 p_i 是任意单项式。

结果发现，通过这种方式，我们几乎得到了一个完美的算法，它只在一点上失效——这一次，失效同样发生在对非最大对数阶 d进行对数阶约化时；此外，只有当 $\mathcal{I}$ 的对数阶为无穷大时，问题才会出现。此次的解决办法是允许对由库默尔单项式（例如 $u^{p/d}$）定义的 Kummer中心进行爆破。这要求扩展这类理想及其爆破的形式体系。第一项任务在 Kummer étale 拓扑中解决，而第二项则迫使我们考虑代数栈和非可表修改。关于 Kummer中心和爆破的理论在第 4 节开头展开，之后，前面构建的同一对数算法便能完美运行。

第 5 节旨在将绝对对数方法推广到态射上，遵循 [ATW20b]。事实上，只要将绝对对数导子替换为相对对数导子，完全相同的算法便可奏效。唯一重大的新意在于必须将基变换纳入考量。积极的一面是，该算法与任意以对数正则源为底的基变换相容——这是一种新型的函子性。不过，没有不劳而获的好事；另一个新特点是算法可能失效，要使其成功，必须先修改底空间。毫不意外的是，失效再次可能发生在“简单”的单项式

阶段。更令人惊讶的是，我们找不到证明单项化定理的简单方法；该定理保证经过足够大的基变换后，单项式步骤能够成功，见 §5.3。现有证明并非典范，我们预计未来仍有进一步推进的可能。

1.2.3. 加权方法。 最后，在第 6 节中，我们构造了加权算法，将任意 $\mathbb{Q}$-正则（或加权）中心在非对数情形和对数情形下进行爆破。对于非对数情形，我们遵循 [ATW19] ，而对于对数情形，我们遵循 [Que22] 。另请注意，McQuillan 在 [McQ20], 中也构造了相同的算法，但其表述使用了更加依赖坐标的语言，因此与我们的表述相去甚远。其主要思想是，我们希望对形如 $\gamma = (t_1^{q_1}, \ldots, t_n^{q_n})$ 的中心进行爆破，这可能导致奇异的输出；但通过对适当的根进行爆破可以消解这一奇异性 $\gamma^{1/n}$，从而得到一个光滑的、叠论细化的 $Bl_\gamma(X)$。为了使诸如 $\gamma^{1/n}$ 之类的对象有意义，必须引入广义理想这一新形式体系。事实上，处理这一问题有几种方法——赋值 $\mathbb{Q}$-理想、 $\mathbb{Q}$-理想（它们等价于 Hironaka 的特征指数）以及 Rees 代数；我们将在第 §6 的前三个小节中讨论它们及其相互关系。

沿一般的 $\mathbb{Q}$-正则理想进行爆破这一范式，导出了我们所称的梦算法。梦算法引入了一个简单不变量——加权（对数）阶，并通过沿着加权（对数）阶尽可能大的 $\mathcal{I}$-容许 $\mathbb{Q}$-正则中心进行一次爆破来提高它。由此得到我们所称的梦算法：它们不需要历史信息，只需反复执行相同的基本操作，即降低加权（对数）阶。此外，还可得到一种非嵌入消解，其运作方式完全相同——只需爆破概形中唯一最大的 $\mathbb{Q}$-正则中心，这次爆破便会提高不变量。对数加权算法的构造方式非常相似，但采用了对数设定。主要区别在于，还必须将一个单项式部分加入 $\mathbb{Q}$-正则中心，并且应使该部分尽可能小。

1.2.4. 约定。除非另有说明，我们始终在特征为零的基域 k 上工作。

我们所说的爆破始终是指一个态射 $X' = Bl_{\mathcal{I}}(X) \to X$ ，其中理想 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ 是数据的一部分。因此，同一个态射可以对应不同的爆破。稍微宽泛地说，若不指定中心便称态射 f 为爆破，我们始终是指 f 对应于沿某个中心进行的爆破（特别地，它是射影的）。

所有对数概形均为 fs，参见 [Tem22]。

2. General principles

本节将讨论所有已知函子性消解算法共有的原则和特征。具体而言，我们采用一种呈现方式；对于只熟悉经典算法的读者来说，这种方式或许看起来有些奇怪，但它能自然地推广到其他情形。本节最后将简要介绍经典算法，并在新的框架下重新诠释它。

2.1. 框架。

2.1.1. 修改。我们所说的修改，是指一种固有态射 $X' \to X$，它在稠密开子概形（子空间、子代数栈等）上建立同构 $U' = U$。此定义也适用于非约化对象，不过我们通常处理泛点约化的对象。例如，当且仅当其中心处处不稠密时，爆破才是修改。

2.1.2. 算法的基本选择。每种算法都会作出若干基本选择，下面将逐一列出，并称之为该算法的框架。

(0) 算法所处理的几何对象的范畴 $\mathfrak{C}$，这些对象称为空间，以及相应的拓扑。例如，基于固定域或变化域的簇、具有充分导子的概形、解析空间、叠、对数概形等。拓扑可以是扎里斯基 ´、étale、解析拓扑等。(1) 将称为流形的正则空间类，以及正则态射类。例如，光滑簇、正则概形、对数光滑对数簇等；以及基于固定域的簇之间的光滑态射、基于变化域的簇之间的正则态射、对数簇之间的对数光滑态射等。(2) 容许修改类 $f\colon X' \to X$ 具有 X 和 X' 流形。它总是沿容许中心 $\mathcal{J}$（或简称中心）进行爆破的一种变体，因此我们使用记号 $X' = Bl_{\mathcal{J}}(X)$。特别地，拉回 $\mathcal{J}\mathcal{O}_{X'}$ 总是一个真正的可逆理想，它定义例外除子 $E_f \subset X'$。中心本身是适当拓扑中的一个理想，该拓扑可能相当复杂。例如，Kummer ´étale 拓扑或 h-拓扑。(3) 一个主要不变量，其取值于全序集或偏序集，并且大致上对不同类型的容许中心进行分类。我们称它为中心的阶，并将其推广到任意理想如下：理想$\mathcal{I}$在 X 上的阶 $\mathrm{ord}_X(\mathcal{I})$，是一个 $\mathcal{I}$-容许中心的最大阶，也就是说，是满足 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$的容许中心 $\mathcal{J}$。例子包括理想的阶、对数阶，以及加权中心$(t_1^{d_1}, \dots, t_n^{d_n})$的加权阶$(d_1, \dots, d_n)$。(4) 流形上的导子理论。这相当于选择足够大的导子层来进行研究。例如，k-导子或关于 $\mathbb{Q}$的绝对导子。

注 2.1.3. (i) 选项 (0)–(2) 将称为该方法的基本框架。至少在很大程度上，选项 (3) 和 (4) 似乎是由基本框架决定的。

(ii) 关于容许爆破的选择，一般原则是：在中心 $\mathcal{J}$ 应具有简单明确描述这一限制下，应尽可能选择最大的类。在我们所知的情形中，框架似乎基本上决定了一个与之对应的唯一自然算法，而且容许爆破的类越大，所得到的算法就越好。即使在经典情形下，考虑形如$\mathcal{J}^d$的中心也是有益的，其中 $\mathcal{J} = I_V$定义了一个光滑子簇 V。由于 $Bl_{\mathcal{J}^d}(X) = Bl_{\mathcal{J}}(X)$，这看起来可能只是对中心内阶 d 的简单记账，但我们将论证，采用这种形式后，算法的描述不仅更加自然，而且也更类似于对数算法和加权算法；例如参见注 2.3.2。

2.1.4. 函子性。 我们将考虑的所有方法都具有如下强意义下的函子性：它们与满射正规态射相容。特别地，这意味着该方法可以在 ´étale 局部（甚至光滑局部）构造出来，并且一旦完成构造，该方法便通过 ´étale 下降实现整体化。这一事实极大地简化了论证，因为论证本质上都具有局部性质（另见 §2.2.4）。与非满射正规态射的相容性在态射层面成立，但对于爆破主化序列的更精细结构则不成立；我们稍后将讨论这一微妙问题。

注 2.1.5。(i) 从历史上看，最早的典范算法（即与自同构相容的算法）由 Bierstone-Milman 于[BM97] 和 Villamayor 于 [Vil89], 构造，而 Włodarczyk 是首位强调光滑函子性并在构造算法时以重要方式加以运用的人，参见 [W-lo05]。

(ii) 光滑函子性意味着算法相对于任意群概形作用都是等变的，因为特征为零的任意群概形都是光滑的。

2.2. 主化与消解。每种奇点消解方法的主要结果都是一个适当的主化定理，由此可得一个非嵌入式奇点消解定理。

2.2.1. 函子性消解。设 P 是一类正则态射（通常是 $\mathfrak{C}$ 中的所有正则态射）。所谓 $\mathfrak{C}$ 上的 P-函子性消解，是指一条规则 $\mathcal{R}$，它为 $\mathfrak{C}$ 中的每个对象 X 关联一个修改 $\mathcal{R}(X)$: $X_{\text{res}} \to X$，其源为正则的，并且满足：对于 $\mathfrak{C}$ 中任意 P-态射 $Y \to X$，都有 $Y_{\text{res}} = Y \times_X X_{\text{res}}$。给定框架的主要消解定理断言，这样的消解存在。此外，消解态射 $\mathcal{R}(X)$ 是射影的（或是射影态射的非可表示整体商）。事实上，它们自然带有由显式爆破复合而成的结构，但这种因子分解仅与满射正规态射相容。

2.2.2. 函子性主化。设 X 是一个流形， X 上有一个理想 $\mathcal{I}$。若可容许爆破 $X' = Bl_{\mathcal{J}}(X) \to X$ 满足 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$，则称其为 $\mathcal{I}$-可容许的。在这种情况下， $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$ 包含于可逆理想 $I_E = \mathcal{J}\mathcal{O}_{X'}$ 中，因而变换 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'} I_E^{-1}$ 有定义。 $\mathcal{I}$-可容许序列 $f_\bullet$: $X_n \dashrightarrow X_0 = X$ 是一列 $\mathcal{I}_i$-可容许爆破 f_i: $X_{i+1} \to X_i$，满足 $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$，且 $\mathcal{I}_{i+1}$ 是 $\mathcal{I}_i$ 的变换。如果 $\mathcal{I}_n = \mathcal{O}_{X_n}$ 平凡，则称这样的序列为 $\mathcal{I}$ 的主化。

所谓在 $\mathfrak{C}$ 上的 P-函子化主化，是指一条规则：它将流形 X 上的任意理想 $\mathcal{I}$（其中 X 属于 $\mathfrak{C}$）对应到其主化 $\mathcal{P}(\mathcal{I})$: $X_n \dashrightarrow X_0 = X$，且该主化作用于 $\mathcal{I}$，并满足如下条件：对于任意属于 $\mathfrak{C}$ 的 P-态射 $Y \to X$ 以及 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_Y$，序列 $\mathcal{P}(\mathcal{I}')$ 可由 $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ 的拉回 $\mathcal{P}(\mathcal{I}) \times_X Y$ 去掉所有平凡膨胀后得到。主化定理断言，这样的主化存在。

注记 2.2.3. 若 $Y \to X$ 是满射，则 $\mathcal{P}(\mathcal{I}') = \mathcal{P}(\mathcal{I}) \times_X Y$；但一般而言，沿其在 X 中的像与 Y 的像不相交的中心进行的爆破，拉回后会成为平凡膨胀，因而被忽略。

2.2.4. 同步。上述评论表明，主化算法严格来说并非局部的。例如，如果 $X = \cup_{i=1}^n X_i$ 是一个开覆盖，就无法仅凭 $\mathcal{P}(\mathcal{I}|_{X_1}), \ldots, \mathcal{P}(\mathcal{I}|_{X_n})$ 重构 $\mathcal{P}(\mathcal{I})$，而不借助额外的同步数据——即限制之后被移除的那些平凡膨胀。不过，如果 $X' = \coprod_{i=1}^n X_i$ 和 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$，那么所有这些

爆破都会保留在序列 $\mathcal{P}(\mathcal{I}')$ 中；正如我们先前所说， $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ 可以很容易地从 $\mathcal{P}(\mathcal{I}')$ 重构出来。通俗地说，在对 $\mathcal{I}'$ 进行主化时，该方法必须比较 $\mathcal{I}|_{X_i}$ 的奇点，并决定先爆破哪一个（或同时爆破），同时在其他位置插入平凡膨胀。这正是所需的同步数据。

注 2.2.5。 (i) 上述论证表明，考虑非连通流形上的同步主化非常重要；按照 [ALT18] 的术语，这种方法相应地只是“对不交并局部”或准局部的。

(ii) 建立局部构造同步的另一种方法是使用显式不变量，例如 [BM97] 所做的那样。事实上，使用不交并技巧等价于使用抽象不变量，参见 [Tem12，注 2.3。4]。

2.2.6. 重新嵌入原理。所有已知方法都满足另一项重要的函子性性质，称为重新嵌入原理。若对于流形的任意常余维闭浸入 $X' \hookrightarrow X$ 、 $\mathcal{I}'$ 上的理想 X' 及其原像 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ ，爆破序列 $f_\bullet = \mathcal{P}(\mathcal{I})$ 都可由推前爆破序列 $f'_\bullet = \mathcal{P}(\mathcal{I}')$ 得到，则称主化方法 $\mathcal{P}$ 在 $\mathfrak{C}$ 上满足重新嵌入原理；也就是说， $f_\bullet$的中心 $\mathcal{J}_i$ 是 $f'_\bullet$的中心 $\mathcal{J}'_i$ 的原像，并且（对长度作归纳）每个$X'_i \hookrightarrow X_i$ 都是 $X' \hookrightarrow X$的严格变换。

2.2.7. 化归为主化。在所有情形下，适当的奇点消解定理都是主化定理的一个相对容易的推论。笼统地说，一般原理可以表述如下：

原理 2.2.8. 如果在 $\mathfrak{C}$ 上存在满足重新嵌入原理的 P-函子化主化，那么对于来自 $\mathfrak{C}$ 、且局部具有到流形的闭浸入的局部等维且一般约化空间类，存在 P-函子性消奇点 $\mathcal{R}$ 。

对于簇、形式簇或解析空间，可嵌入性假设自动成立，而对于一般的优异概形，该假设才是相关的。局部等维条件用于构造常余维的嵌入。在所有情形下，论证本质上是相同的：为消解空间 Z，先将其局部嵌入流形 X ，再由主化 $\mathcal{I}_Z$ 构造 Z 的消解。笼统地说，在爆破一般点 $\eta \in Z$ 之前，主化必须保证该点是某个容许中心的一般点；在所有方法中，这等价于消解 η 的扎里斯基闭包。此外，由于余维条件， Z 的所有一般点都会在某次爆破 $X_{i+1} \to X_i$ 中同时被爆破，而其中心包含一个不可约分支，该不可约分支是 Z 的严格变换。特别地， $Z_i \to Z$ 是 Z 所诱导的奇点消解。在所有方法中，利用重新嵌入原理以及一个简单计算可以证明嵌入的独立性：最小可能余维的嵌入在 ´etale 局部（或形式局部）是唯一的。

注 2.2.9. (i) 消奇异态射 $Z_i \to Z$ 自然地是沿中心 $\mathcal{J}_j\mathcal{O}_{Z_j}$进行的一系列爆破 $Z_{j+1} \to Z_j$、 $0 \le j \le i-1$ 的复合。在经典消解中，每个中心 $V_j = V$（$\mathcal{J}_j$）都是光滑的，但交集 $V_j \times_{X_j} Z_j$ 可能是奇异的。特别是，将 $Z_i \to Z$ 因子分解为一系列爆破并没有太多信息。

(ii) 所谓的强消解方法构造的消解，是沿光滑中心进行的一系列爆破的复合 $Z_i \dashrightarrow Z_0 = Z$ 。这或许主要的优点在于，对于流形中的任意闭浸入 $Z \hookrightarrow Y$ ，该消解都会自动延拓为流形的一个修改 $Y_i \to Y$ ，其中 Z_i 是 Y_i中的一个闭子概形：只需考虑序列 $Z_i \to Z$的推出 $Y_i \dashrightarrow Y$ 。

(iii) 目前构造强消解的唯一已知方法，是强制要求： $V_j \subseteq Z_j$ 在主化序列中成立，从而整个序列$X_i \dashrightarrow X$ 是序列 $Z_i \dashrightarrow Z$的推前。在经典情形下，这需要在通常的主化基础上做大量额外工作（即所谓希尔伯特–塞缪尔函数的表示，见[BM97]）。我们将看到，在加权奇点消解方法中，强因子分解只是顺带得到的结果。

2.2.10. 奇迹。将消解问题归约为一个看似迥然不同的主化问题，通常被视为一个巧妙绝伦的技巧，甚至是奇迹。不过，我们认为这并不那么令人惊讶。消解存在的一种等价表述是：在泛点约化空间 X 的所有修改中，流形构成一个共尾族。研究流形 X 的修改时，要明确描述所有满足 X' 的流形修改 $X' \to X$ ，是困难的（甚至不可能），因此自然只考虑这类修改中基本且明确的形式——容许爆破及其复合。主化定理断言，对任意理想 $\mathcal{I}$ ，都存在一个容许序列 $X' \dashrightarrow X$ ，使其主化 $\mathcal{I}$；根据膨胀的泛性质，当且仅当态射 $X' \to X$ 经由 $Bl_{\mathcal{I}}(X)$ 因子分解时，这一结论成立。由周氏引理，爆破构成 X 的修改的一个共尾族，因此主化定理不过是断言容许序列构成流形修改的一个共尾族。如此看来，预期这些定理彼此相关、且主化定理更精细，是相当自然的。

注 2.2.11。人们也可能会问，以下弱因子分解猜想是否成立：流形的任意修改都可以分解为容许爆破与吹下的复合。这一猜想提供了更深一层的研究方向。在经典情形中，目前唯一已知的论证是通过大量工作，从高一维上的 $\mathbb{G}_m$-等变主化推导出该猜想。在其他情形下，这仍是一个开放问题，不过我们预期，采用双有理协边和 $\mathbb{G}_m$- 等变主化的类似方法，也应当行之有效。若能检验这一方法是否适用于半稳定模型和态射，将尤其有意思。

2.2.12. 阶数降低。初步来说，主化是通过连续的阶数约化过程实现的：通过爆破阶为 d 的中心，降低 $\mathcal{I}$ 的阶 $d = \mathrm{ord}_X(\mathcal{I})$。在非加权算法中，这个问题被归结为在一个最大接触超曲面上降低阶数。然而，经过这种约化后，阶数可能会跳升，因此出于归纳的需要，还必须解决这样的问题：对于不变量的任意固定值 $e \leq d$ ，仅通过爆破 e-中心，将 $\mathcal{I}$ 的阶降低到 e 以下。这会导致变换中例外除子的累积，因此必须使用对数结构加以控制——确保例外除子是单项式，并主要通过组合方法处理它。事实上，这是算法中唯一可能存在一定灵活性的地方。

在加权算法中，阶数降低通过一次加权爆破完成，因此这正是我们所说的梦算法——无需历史记录，每次爆破都独立于其余步骤，并进一步降低不变量。然而，要论证存在唯一的最大 $\mathcal{I}$-容许中心，过程相当复杂，而且同样要用到极大接触理论和齐次化。特别是，这种方法在正特征下完全失效。

2.3. 经典算法：初次尝试。 经典方法已在第 [Fru], 章中详细讨论过，因此我们假定读者熟悉其主要思想和构造；我们的目标是在本节前面描述的一般范式下，对其进行简要的重新诠释。稍后，我们将以大致相同的思路发展对数算法。在 §2.3 中，我们将讨论在没有边界的情况下能做些什么，以及这种尝试会在哪些地方失效。不过，我们将要描述的所有构造都与此相关；在下一小节中，我们只需将边界作为框架的一个附加层加入即可。为简单起见，我们研究 k-簇。

2.3.1. 框架。考虑簇在 k 上的范畴 $\mathfrak{C}$；流形是光滑簇，算法将具有光滑函子性。容许中心的形式为 $\mathcal{J} = I_V^d$，其中 $I_V \subset \mathcal{O}_X$ 是子流形$V \subset X$ 的理想，且 $d \geq 1$。我们称这样的中心为 d-中心。可容许膨胀是中心的通常爆破。导子理论由层$\mathcal{D}_X = \mathrm{Der}^{X/k}$（$k$-导子的层）以及微分 k 阶数至多为 d 的算子层 $\mathcal{D}_X^{(\leq d)}$ 给出。中心的主要不变量就是 $\mathcal{I}^d$ 的重数 d。任意理想 $\mathcal{I}$ 在 x 处的阶，是满足 $\mathcal{I}_x \subseteq \mathcal{I}_V^d$ 的最大 d。显然，只需取中心 $V = \{x\}$，便得到阶的通常定义。

注 2.3.2. 经典做法只考虑 1-中心，使用标记理想（$\mathcal{I}$, d），并在沿着位于阶至少为 d的点的轨迹内部的光滑中心 V 进行爆破后，使用 d-变换。这等价于我们的可容许条件 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J} = I_V^d$，以及相对于沿着 $\mathcal{J}$的爆破所作的通常变换。因此，我们只是对经典构造给出一种略有不同的解释。

2.3.3. 导子。理想的导子为描述算法的所有基本要素（边界除外）提供了一种方便的方式：

(1) $\mathcal{I}$ 在 X 上的最大阶 $\mathrm{ord}_X(\mathcal{I})$ 是满足$\mathcal{D}_X^{(\leq d)}(\mathcal{I}) = \mathcal{O}_X$的最小数 d。点 $x \in X$ 处 $\mathcal{I}$ 的阶的计算方式类似。(2) 对 $\mathcal{I}$ 在 x 处的最大接触，是任何在 x 处局部具有形式 $V(t)$且满足 $t \in \mathcal{D}_X^{(\leq d-1)}(\mathcal{I}_x)$的闭光滑子概形 $H \hookrightarrow X$。(3) 齐次化系数理想是导子的加权和的齐次化，这些导子按其阶加权：

$$\mathcal{C}(\mathcal{I}) = \sum_{a \in \mathbb{N}^d \,:\, \sum_{i=0}^{d-1} a_i(d-i) \leq d!} \prod_{i=0}^{d-1} \left(\mathcal{D}_X^{(\leq i)}(\mathcal{I})\right)^{a_i}.$$

[1]我们使用中心的重数这一概念，而不用阶，以避免与用于定义它的理想的一般阶混淆。这样做是合理的，因为 V（$\mathcal{I}^d$）在其任意一点处的经典重数都是 d。

注记 2.3.4. 通常的系数理想仅使用 $\mathcal{I}$ 的导子的相应次幂来定义，但齐次化版本整于它，因此可以替代使用。齐次化系数理想由 Koll´ar 引入，参见 [Kol07，§3。54]。它们涵盖了 Włodarczyk 的齐次化过程，参见 [W-lo05，§2。9]。

2.3.5. 阶数降低。若 $e \leq d = \mathrm{ord}(\mathcal{I})$，则 $\mathcal{I}$ 的一个 e-阶数降低是沿 e-中心 $X_n \dashrightarrow X_0 = X$ 进行的$\mathcal{I}$-容许爆破序列，满足 $\mathrm{ord}^{X_n}(\mathcal{I}_n) < e$。

注 2.3.6. 通常，人们通过爆破光滑中心来降低标记理想（$\mathcal{I}, d$）的阶，而 d 表示在每次变换中要提出的例外除子的幂。这两种表述是等价的。

2.3.7. 极大阶情形。经典主化的主要循环通过迭代地进行阶数降低来处理 $e = d$ —— 即所谓的极大阶情形。在这种情况下，极大接触理论蕴含：对于任意极大接触H（它局部存在），从 H 推到 X，可在 $\mathcal{I}$ 的阶数降低与 $\mathcal{C}(\mathcal{I})|_H$的阶数 $d!$降低之间建立一一对应，因此我们可以按维数归纳。此外，对于任意其他极大接触H'，$\mathcal{C}(\mathcal{I})$在 H 和 H' 上的限制可通过一个 ´étale对应相互对应，因此该构造与选择无关，并可整体化。

2.3.8. 一般阶 e-约化。可能出现 $\mathrm{ord}_H(\mathcal{C}(\mathcal{I})|_H) > d!$ 的情况，因此归纳法要求我们也考虑非极大阶情形。诀窍是通过控制累积的例外除子，将问题化归为极大阶情形；为此，需要在框架中再增加一层——边界。

2.4. 经典算法：边界。

2.4.1. 框架。事实上，我们不再处理流形 X，而是处理对 (X, E)，其中边界（或例外除子）E 是一个简单正规交叉除子。在某些版本中，还会通过历史函数对 E 的不可约分支排序。我们通过要求 V 与 E 简单正规交叉，来限制容许中心 $\mathcal{J} = I_V^d$ 的集合；随后，$X' = Bl_{\mathcal{J}}(X)$ 上的边界 E' 由 E（旧边界）的原像与 $X' \to X$（新边界）的例外除子合并而成。这保证了 E' 是简单正规交叉的。不过，我们仍须应对两个主要由以下事实引起的复杂问题：所用的是所有导子，而非那些保持 E 不变的导子，因此所有构造都不适配 E，必须在很大程度上手动修正。幸运的是，可以通过两个技巧做到这一点。

2.4.2. 去除旧边界。第一个复杂之处在于，最大接触H 不一定与 E横截，因此 $E|_H$ 不一定是一个边界。通过沿旧边界的最大重数分层对 $\mathcal{I}$ 进行迭代降阶，将 H 与旧边界分离，即可解决这一问题。这个技巧迫使我们引入一个次级不变量 s —— 自创建最大接触以来保留下来的旧边界分支数目。因此，（未归一化的，见下文）总不变量为（d_0, s_0；$d_1, s_1, \ldots$），而不只是阶数序列（$d_0, d_1, \ldots$）。

2.4.3. 归一化次数。此外，通常通过$q_i = d_i/\prod_{j<i}(d_j - 1)!$ 对阶进行归一化，使得 $q_0 = d_0$，但其他次数可以是非整的。特别地，Bierstone 和 Milman 作出了这一选择，见[BM97]，，而 [ATW19]，中也作出了这一选择，但 [ATW20a]中没有。例如，更自然的是，a_1，0；a_2，0；…；a_n，0；∞）是 $V(t_1^{a_1} + \ldots t_n^{a_n})$ 的归一化不变量。我们在对数算法和加权算法中也将采用归一化选择。在后一种情形中，这是一个“不假思索”的选择。

2.4.4. 伴随理想。将 $\mathcal{I}$ 的阶 e 降低，是通过把它拆分为最大可逆单项式因子 $\mathcal{N}$ 与剩余非单项式部分（称为干净部分）的乘积 $\mathcal{I}^{\mathrm{cln}}\mathcal{N}$ 来完成的。在 $\mathrm{ord}_X(\mathcal{I}^{\mathrm{cln}}) \geq e$ 之前，我们只需对 $\mathcal{I}^{\mathrm{cln}}$ 应用最大阶约化。要进一步推进，我们还应考虑 $\mathcal{N}$，以及阶同时受 $\mathcal{I}^{\mathrm{cln}}$ 和 $\mathcal{N}$ 影响这一事实。幸运的是，$\mathcal{N}$ 的贡献沿着 E 的分层局部恒定，因此同样可以通过沿分层仔细处理来设计阶数降低。从技术上说，这是通过伴随理想的技巧实现的。最后，当 $\mathcal{I}^{\mathrm{cln}} = \mathcal{O}_X$ 时，就用纯组合方法消解 $\mathcal{I} = \mathcal{N}$。

注 2.4.5。(i) 经典算法的结构比最近发现的算法更复杂。这可能主要是因为边界并未完全融入框架——导子并不保持边界，而且边界的范畴意义也不那么明显。从某种意义上说，边界是以临时方式添加的一层，且各种不相容问题也都是以临时方式解决的。

(ii) [BM08] 指出，层 $\mathcal{D}_{(X,E)}$ 对数导子在多种构造中的表现都比 $\mathcal{D}_X$好得多，其中包括导子变换的链式法则；但仍必须使用 $\mathcal{D}_X$，因为它能计算阶。

2.4.6. 对数结构。事实上，边界确实有范畴论上的解释——经典主化中真正用到的是由 E 定义的对数结构 $\mathcal{M}(\log(E))$，而不是除子。特别地，单项式理想是利用对数结构定义的，而容许爆破 $(X', E') \to (X, E)$ 是对数概形之间的态射，而非概形-除子对之间的态射。因此，经典主化中的流形实际上是具有自由幺半群$\overline{\mathcal{M}}_x$ 的对数光滑对数概形 X（等价地，X 是光滑的）。此外，诱导的消解 f: $Z_{\mathrm{res}} \to Z$自动满足以下条件：f 的例外除子是简单正规交叉除子。事实上，在流形 X上对 I_Z 进行主化时，若严格变换 Z_{res} 的 Z 被爆破，那么它与边界E 简单正规交叉，且不包含于 E中，因此 $E|_{Z_{\mathrm{res}}}$ 是简单正规交叉的。最后，从非空的 E 开始进行主化，也可以消解嵌入对数概形 Z，使得幺半群 $\overline{\mathcal{M}}_z$ 是自由的。

我们已经说明，经典算法具有某些对数方面。然而，它对对数光滑态射并不具函子性，只适用于特殊形式的对数结构，也不使用对数导子。能否去除对数结构上的限制，并以对数光滑函子性的方式开展工作？这个自然问题是促使我们开展研究的主要动机之一，而这项研究最终使我们发现了将在后续各节中构造的对数算法。

3. Resolution of logarithmic schemes: a first attempt

通过转向对数框架——对数概形、对数光滑函子性、对数导子等——可以得到对数算法。这使框架变得更加复杂，但也带来诸多优势：主化算法变得更简单、更快速，函子性更强，而且该方法可推广到态射。主要的技术难点在于，必须将范畴扩展到代数栈，或者改为考虑会增加维数的余边界膨胀 [W-lo]，。

本节将介绍簇的对数几何所提供的所有奇点消解工具，但不涉及代数栈。这样可以使论述更加简洁，并阐明算法；在下一节中，单独加入代数栈理论这一层也会很容易。为了熟悉 ´étale 拓扑，本节中我们不再假设对数结构是扎里斯基的。本节末尾，我们将构造一个潜在的算法，并找出在不使用代数栈时该算法失效的唯一之处。

3.1. 框架。 我们首先介绍流形以及对数主化中的容许爆破。再次提醒读者，本卷第 [Tem22] 章提供了相关导论和一般记号。

3.1.1. 对数概形。我们所研究的基本几何范畴，是域 k 上有限型 fs 对数概形的范畴，其中 k 的特征为零；特别地，所有纤维积都是饱和的。

3.1.2. 对数光滑函子性。我们将默认检查（或至少提及）我们方法的所有基本要素都与对数光滑态射相容。这将保证我们所构造的奇点消解和主化对于所有对数光滑态射都是函子性的。

3.1.3. 流形。我们将对数流形定义为 k 上的对数光滑对数簇。回顾一下，这与经典的环面嵌入簇相同，并且 ´étale 局部地具有 $X = \mathrm{Spec}(k[P][t_1, \dots, t_n])$ 的形式，其对数结构由托里克幺半群 P 给出。我们将任意严格闭浸入 $V \hookrightarrow X$ （其中 V 是对数流形）称为子流形。对数光滑性的基本性质表明，这些概念具有对数光滑函子性：

引理3.1.4. 设 $Y \hookrightarrow X$ 是对数簇的严格闭浸入， $f\colon X' \to X$ 是对数光滑态射，且 $Y' = Y \times_X X'$。若 X 是对数流形，且 Y是对数子流形，则 X' 是对数流形，且 Y' 是对数子流形。若 f 是满射，则反过来也成立。

3.1.5. 参数。任意对数流形 X 都是对数正则的，因此[Tem22，§3.4.6]中的描述适用。回顾一下，对数分层是正则的（即使对数结构不是扎里斯基的，它们也有良好定义，见 [Tem22，练习 3.2.2(ii)]）。设C 为包含点 x的对数层。若$t \in \mathcal{O}_{X,\,x}$ 在$\mathcal{O}_{C,\,x}$中的像是正则参数，我们就称其为正则参数。类似地，若 t_1、……、$t_n \in \mathcal{O}_{X,\,x}$在 x 中的像在$\mathcal{O}_{C,\,x}$ 中构成正则参数族，则称它们在 x 处构成正则参数族。我们所说的 x处的完备参数族（t_1、……、t_n、u），是指正则参数族t_1、……、$t_n \in \mathcal{O}_{X,\,x}$以及单项式图表 $u\colon P = \overline{\mathcal{M}}_{\overline{x}} \to \mathcal{O}_x$；$p \in P$的像记作 u^p。当且仅当对数结构在 x处是扎里斯基的，后者才存在，因此

一般来说，完备参数族仅在 ´étale 局部存在。无论其在 P中的算术性质如何， u^P 中的任意元素都视为单项式参数。

练习 3.1.6. 设 X 是一个对数流形， x 是一个闭点，且 $l = k(x)$。此外，设 u: $P = \overline{\mathcal{M}}_{\overline{x}} \to \mathcal{O}_x$ 是一个单项式图表。

(i) 证明 $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{O}_{X,x}$ 是正则参数族，当且仅当$\mathcal{O}_{X,x} = l[\![P]\!][\![t_1, \dots, t_n]\!]$；而且，当且仅当态射 $X \to \mathrm{Spec}(k[P][t_1, \dots, t_n])$ 在 x处是´étale。

(ii) 证明 $V \hookrightarrow X$ 在 x 处是余维为 r 的子流形，当且仅当存在正则参数族 $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{O}_{X,x}$， 使得 $V = V(t_1, \dots, t_r)$ 在 x 处成立。

3.1.7. 容许中心。对于一个理想 $\mathcal{I}$，令 $\mathcal{I}^{(d)}$ 表示其 d 次幂的整闭包 $(\mathcal{I}^d)^{\mathrm{nor}}$。容许中心，或简称中心，是一种理想，它局部具有形式 $\mathcal{J} = (t_1, \dots, t_r, u^{p_1}, \dots, u^{p_s})^{(d)}$，其中 $t_1, \dots, t_r$ 是正则参数的部分族， $u^{p_1}, \dots, u^{p_s}$ 是单项式，且 $d \geq 1$。因此，与经典算法一样，容许中心是由参数定义的理想，但我们在单项式生成元方面拥有大得多的灵活性。

注 3.1.8. (i) 含有 $d = 1$ 的容许中心也称为次单项式理想，因为它们对应于子流形上的单项式理想。它们在局部可表示为 $\mathcal{I} + \mathcal{N}$，其中 $\mathcal{I} = (t_1, \dots, t_r)$ 是某个子流形的理想，而 $\mathcal{N} = (u^{p_1}, \dots, u^{p_r})$ 是单项式理想。

(ii) 上述表示中的单项式理想 $\mathcal{N}$ 是唯一的，但 $\mathcal{I}$ 的选取以及相应子流形 $V = V(\mathcal{I})$ 并不唯一。例如，对于任意元素 f， $\mathcal{J} = (t, u^p)$ 也可以表示为 $(t + fu^p, u^p)$。

3.1.9. 重数。任何具有上述表示且幂为 d 的容许中心称为 d-中心。如果 $r \geq 1$, 则该中心不是单项式中心， d 唯一确定，并且我们将 $\mathcal{J}$ 的重数定义为 d。如果 $r = 0$, 则该中心是单项式中心，它必定是 1-中心，但对于有限多个其他幂，它也可以是 d-中心；我们将其重数定义为无穷大。重数为中心提供了一种合理的分类方式，并且将成为该方法的主要不变量。

注记 3.1.10。我们稍后会看到，对数主化可能会一味坚持将单项式中心视为一个 d-中心，而不要求该中心与 d 之间存在任何关系。这一要求在对数流形上行不通；为了解决这个问题，我们必须转而使用叠。

3.1.11. 可容许爆破。设 X 为对数流形， D 为环面除子，即 $X \setminus D$ 是对数结构的平凡性轨迹。回忆一下， X 的对数结构是除子型的，也就是说， $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}(\log D)$。设 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ 为一个理想。若 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$，则中心 $\mathcal{J}$ 是 $\mathcal{I}$-容许的；而 $\mathcal{I}$-容许爆破是沿着 $\mathcal{I}$-容许中心 $\mathcal{J}$ 进行的正规化爆破 $f\colon X' = Bl_{\mathcal{J}}^{\mathrm{nor}}(X) \to X$ ，其对数结构 $\mathcal{M}_{X'} = \mathcal{M}(\log D')$由除子 $D' = f^{-1}(D \cup V(\mathcal{J}))$诱导。理想的变换按通常方式定义为 $\mathcal{I}' = (\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'})(\mathcal{J}\mathcal{O}_{X'})^{-1}$。注意，与经典奇点消解框架中的边界类似，新的对数结构由旧对数结构和例外除子诱导。

注 3.1.12. (i) 沿着 $\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{J}^{(d)}$ 的正规化爆破由推论A.1.2给出相同结果。不同之处在于容许性和变换的概念。此外，沿着 $\mathcal{J}^d$ 和 $\mathcal{J}^{(d)}$ 的爆破所对应的变换由引理A.1.1可知相同，但只有使用 $\mathcal{J}_{(d)}$才能得到正确的容许性版本。例如，可以通过对 $\mathcal{J}^{(d)}$ 进行爆破来主化，无论是沿着$\mathcal{J}^d$ 还是 $\mathcal{J}_{(d)}$；但除非 $\mathcal{J}^d$ 是整闭的，否则 $\mathcal{J}_{(d)}$ 不是 $\mathcal{J}^d$-容许的。

(ii) 另一种更经典但等价的方法是使用标记理想（$\mathcal{I}$， d），而非理想，并且只使用 1-中心 $\mathcal{J}$。在这种情况下， $\mathcal{J}$若（$\mathcal{I}$， d）满足 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}^{(d)}$，则称其为可容许的，而变换定义为 $\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$（$\mathcal{J}\mathcal{O}_{X'}$）$^{-d}$。这是[ATW20a] 和 [ATW20b], 中使用的语言，但在 [ATW19], 引入一般加权中心后，我们的定义似乎更自然。

我们对容许中心的选择很自然，但要验证其正确性，仍需进行一些计算：

引理 3.1.13. 设 X 是一个对数流形， $X' \to X$ 是一次可容许膨胀。那么 X' 也是一个对数流形。

证明是直接的——模型情形通过本质上是托里克计算的方法处理，一般情形则通过适当选择覆盖得到。足够谨慎时，该方法也适用于 X 为任意对数正则对数概形的情形，参见[ATWo20，引理 5.2。3], 但为简单起见，我们只考虑簇的情形。

练习 3.1.14。 请补全以下引理 3.1.13的证明概要中的细节

(i) 当 $X = \mathbb{A}^n_P = \mathrm{Spec}(k[P][t_1, \ldots, t_n])$、对数结构由托里克幺半群 P 给出且中心具有$\mathcal{J} = (t_1, \ldots, t_m, u^{p_1}, \ldots, u^{p_r})$的形式时，问题归结为模型情形。事实上，沿 $\mathcal{J}_{(d)}$进行的爆破与沿 $\mathcal{J}$进行的爆破相同，因此可以假设 $\mathcal{J}$是一个 1-中心；于是，在 ´étale 局部地，我们只需选取参数 $t_1, \ldots, t_n, u$: $P \to \mathcal{O}_X$，使得 $\mathcal{J}$由若干参数的消失生成。考虑到模型对数概形 $\mathbb{A}^n_P$的诱导 ´étale 态射 ϕ。然后， ´étale 下降以及爆破和正规化与 ´étale 态射 ϕ 的相容性表明，只需研究沿由相同参数生成的理想对源进行的爆破即可。

（ii）在模型情形中，爆破描述如下：
（a）若为 $s = t_i$，则 s-图为

$$X_s = \mathrm{Spec}(k[P_s][t'_1, \ldots, t'_{i-1}, t'_{i+1}, \ldots, t'_n]),$$

其中，对于 $j \le m$为 $m < j \le n$，对于 P_s 为 $P^{\mathrm{gp}} \oplus \mathbb{Z}q$，而 P是由 q、$p_i - q$以及元素 $u^q = t_i$生成的 的子幺半群的饱和。对数结构由 扩展。

（b）若为 $s = u^{p_j}$，则 s-图为 $X_s = \mathrm{Spec}(k[P_s][t'_1, \ldots, t'_n])$，其中，对于 $t'_j = t_j/s$为 $j \le m$，对于 $t'_j = t_j$ 为 $m < j \le n$，而 P_s 是由元素 $p_1 - p_j$、 ..... 、 $p_r - p_j$ 在 P 上生成的 P^{gp} 的子幺半群的饱和。

该引理也可以用另一种标准方法证明，这在某些情况下很有益处。我们不需要使用这种方法，因此仅在旁注中概述其思路。

注 3.1.15。我们将用对数爆破来描述 $Bl_{\mathcal{J}}(X)^{\mathrm{nor}}$。首先，在局部进行时，将对数结构扩充直和项 $\oplus_{i=1}^m \mathbb{N}\log(t_i)$。这会得到一个新的对数概形 Y，它仍然是对数流形。随后，中心 $\mathcal{J}$ 变为单项式，并考虑饱和的对数爆破 $Y' =$

$LogBl_{\mathcal{J}}(Y)^{\mathrm{sat}}$。态射 $Y' \to Y$是对数光滑的，因此 Y'也是对数流形。特别地，它是正规的，因此 Y'也是 Y的正规化爆破。特别地， $\underline{X'} = \underline{Y'}$ 以及定义 X' 的对数结构的除子，是从 Y' 的除子中去除与 $V(t_i)$对应的除子的严格变换后得到的——在 s图上，有 $D_{X'} = D_{Y'} \setminus \cup_{i=1}^{m} V(t_i/s)$。简单计算可知，所得对数概形 X' 确实是对数光滑的，因为局部幺半群分裂为 $\overline{\mathcal{M}}_{Y',\, y} = \overline{\mathcal{M}}_{X',\, y} \oplus \mathbb{N}^r$，其中自由直和项由满足 $y \in V(t_i/s)$的元素 $\log(t_i/s)$生成。

3.1.16. 容许爆破的函子性。设 X 是一个对数流形。对数光滑态射 $f\colon X' \to X$ 在对数分层之间诱导一个光滑态射，因此，点 $x \in X$ 处的正则参数族拉回后，在任意点 $x' \in f^{-1}(x)$ 处都是正则参数的部分族。这意味着容许中心的拉回仍是容许中心。对数光滑态射不必是平坦的，因此它们与爆破的相容性并非自动成立。不过，利用对数光滑态射的图以及上述对容许爆破的显式描述，可以很容易地得到以下结果

引理 3.1.17. 若 $X' \to X$ 是对数流形之间的对数光滑态射，且 $\mathcal{J}$ 是 X 上的容许中心，则 $\mathcal{J}' = \mathcal{J}\mathcal{O}_{X'}$ 是 X' 上的容许中心，并且 $Bl_{\mathcal{J}'}(X') = Bl_{\mathcal{J}}(X) \times_X X'$（纤维积取在饱和范畴中）。

3.1.18. $\mathcal{I}$-容许序列。给定一个理想 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$，所谓 $\mathcal{I}$-容许爆破序列，或简称 $\mathcal{I}$-容许序列，是指由容许爆破组成的序列 $f_\bullet\colon X_n \dashrightarrow X_0 = X$，其中心为 $\mathcal{J}_i \subseteq \mathcal{O}_{X_i}$，且每个$\mathcal{J}_i$ 都是 $\mathcal{I}_i$-容许的，其中 $\mathcal{I}_i$ 是 $\mathcal{I}_{i-1}$ 和 $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$的变换。

我们还需要以下特殊情形。设 $d \geq 1$ 是一个自然数。若每个 $\mathcal{J}_i$ 都是一个 d-中心，则称 $f_\bullet$ 为一个 $\mathcal{I}$-容许 d-序列。所谓 $\mathcal{I}$-容许 ∞-序列，仅指任意一个 $\mathcal{I}$-容许序列，其中心为单项式，且不附加任何其他限制。引理 3.1.17显然蕴含了 $\mathcal{I}$-容许序列的函子性：

引理 3.1.19. 若 $X' \to X$ 是对数流形之间的对数光滑态射，$\mathcal{I}$ 是 X 上的一个理想，且 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$，而 $f_\bullet\colon X_n \dashrightarrow X_0 = X$ 是一个以 $\mathcal{J}_i \subseteq \mathcal{O}_{X_i}$为中心的 $\mathcal{I}$-容许序列（分别为 d-序列），则其拉回 $f_\bullet \times_X X'\colon X'_n \dashrightarrow X'_0 = X'$ 是一个以 $\mathcal{J}_i\mathcal{O}_{X'_i}$为中心的 $\mathcal{I}'$-容许序列（分别为 d-序列）。

3.1.20. 对数主化。 $\mathcal{I}$ 的主化是一个带有 $\mathcal{I}_n = \mathcal{O}_{X_n}$的 $\mathcal{I}$-可容许序列。对数奇点消解理论的主定理指出，存在簇的对数主化，它对所有对数光滑态射具有函子性，并满足重新嵌入原理。我们将在稍后、正确的栈论框架建立之后对其进行表述。

3.1.21. 环境对数流形的唯一性。 与经典情形一样，对数簇可以嵌入对数流形中，而且最小嵌入在étale 覆盖下唯一，并且在本质上由切空间控制。对此的详细表述和证明见 [ATW20a，§7。1], 下面简要总结并概述论证思路。

引理 3.1.22. 设 Z 是一个等维对数簇，其对数结构在点 $z \in Z$ 处为扎里斯基型。设 $P = \overline{\mathcal{M}}_z$、 $r = \mathrm{rk}(P)$ 和 $n = \dim(m_{C_z,\, z}/m^2_{C_z,\, z})$ 分别为 C_z 在 z 处的余切空间的维数，其中 $C_z = V(P^+)$ 是 z 处的对数层。

(i) 存在一个严格闭浸入，将 z 的邻域 U 映入一个对数流形 X。

(ii) 在 z 处局部，任意到流形中的严格闭浸入 $Z \hookrightarrow X$ 都可分解为经由一个维数为 $n+r$ 的闭子流形的映射。特别地， $n+r$ 在 z 处局部具有最小嵌入维数。

(iii) 在 z 处局部，任意两个到维数为 $n+r$ 的流形中的嵌入 $Z \hookrightarrow X_1$、 $Z \hookrightarrow X_2$，都可由一个嵌入支配，该嵌入映入一个对数流形 X'，且该对数流形在 X_1 和 X_2 上是 étale 的。

(iv) 给定一个嵌入 $Z \hookrightarrow X$，任意对数光滑的 Z-概形 Z' 都可在 étale 局部嵌入到一个对数光滑的 X-概形 X' 中，使得 $Z' = X' \times_X Z$。

练习 3.1.23. 按照以下思路证明上述引理：

(i) 若 $u\colon P \to \mathcal{M}_z$ 是一个幺半群图表，且 t_1、…、 $t_n \in \mathcal{O}_{Z,z}$ 是一些元素，它们的像张成了 C_z 在 z 处的余切空间，那么诱导的态射 $Z \to X_0 = \mathrm{Spec}(k[P][t_1, \dots, t_n])$ 是非分歧的，因此在 z 处局部地经过一个闭浸入分解为某个 étale X_0-概形 X。

(ii) $Z \to \mathrm{Spec}(k[P])$ 在 z 处的相对余切空间维数为 n，因此最小嵌入维数为 $n+r$。若 X 的维数大于 $n+r$，那么 z 处余切空间之间的映射有非平凡的核，因此该核中的一个非零元素可提升为元素 $t \in \mathcal{I}_{Z,z} = \mathrm{Ker}(\mathcal{O}_{X,z} \to \mathcal{O}_{Z,z})$。这个 t 是一个参数，因此 $V(t)$ 是一个包含 Z 的子流形。

(iii) 将 (ii) 应用于嵌入 $Z \hookrightarrow X_1 \times X_2$，从而得到一个最小嵌入 $Z \hookrightarrow X$，其在 X_1 上 étale 且为 X_2。

(iv) 在 étale 局部，我们可以将 $Z' \to Z$ 分解为一个 étale 态射 $Z' \to Z'' = Z_P[Q] \times \mathbb{A}^m$ 与到 Z 的投影的复合。该投影可直接提升为 $X'' = X_P[Q] \times \mathbb{A}^m \to X$，然后 $Z' \to Z''$ 就是某个适当的 étale 态射 $X' \to X''$ 的拉回。

3.1.24. 化归为对数主化。 引理 3.1.22 将对数簇的奇点消解化归为对数流形上的主化。这类似于经典论证，详细论述见 [ATW20a， §7。2]，我们在此概述该论证。

假设 Z 是一个局部等维的对数簇，并且一般点处对数光滑（即， Z 是泛点约化的，且对数结构在一般点处平凡）。由于任意 fs 对数结构在 étale 局部都是扎里斯基的，根据 3.1.22(i)，存在一个 étale 覆盖 $Z' \to Z$，使得 Z' 可以严格闭浸入一个对数流形 X。将 X 的某些不可约分支乘以 $\mathbb{A}^m_k$ 后，我们可以假设 Z' 在 X 中具有常余维。于是， $\mathcal{I}_{Z'}$ 的主化 $X_n \dashrightarrow X_0 = X$ 同时爆破 Z' 的严格变换的所有泛点，设爆破为 $X_{m+1} \to X_m$。在此阶段， Z' 的严格变换是中心 $V(\mathcal{J}_m)$ 的一个不可约分支 Z'_m；事实上，它甚至是一个对数流形，因为中心的单项式部分在其泛点处是平凡的。因此， $Z'_m \to Z'$ 是一个具有对数光滑源的对数簇之间的射影双有理态射。

根据 3.1.22 的 (ii) 和 (iii)，以及对数主化所满足的重新嵌入原理，该消解与嵌入及其余维无关。此外，这种消解与对数光滑态射相容，因此， $Z'' = Z' \times_Z Z'$ 与两个投影 $Z'' \to Z'$ 相容；根据 étale 下降，该消解 $Z'_{\mathrm{res}} \to Z'$ 下降为一个射影双有理态射 $Z_{\mathrm{res}} \to Z$。由于对数流形 Z'_{res} 是 étale 在 Z_{res} 上的 étale 态射，后者也是一个对数流形，因此 $Z_{\mathrm{res}} \to Z$ 是一个消解。最后，所得消解与

任意对数光滑态射的相容性，由对数主化的对数光滑函子性并利用3.1.22 (iv) 得出。

3.2. 对数导子与对数阶。

3.2.1. 对数导子层。 框架的最后一项选择如下：我们将在对数流形上使用对数 k-导子 X（参见 [Tem22, §4.2.3]），记作 $\mathcal{D}_X = \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$。注意，对数 k-导子层是秩为 $d = \dim(X)$ 的局部自由层，并且可以用参数显式描述。自然地，这种描述分为经典部分——对应于正则参数的导子，以及对数部分——对应于单项式的对数导子。

习题 3.2.2. 设 $t_1, \ldots, t_n, u : P \to \mathcal{O}_{X,x}$ 是 x 处的一族参数。

(i) 证明，对于 $1 \le i \le n$，存在唯一的对数导子 $(\partial_i, \delta_i = 0) \in \mathcal{D}_{X,x}$，使得 $\partial_i(t_i) = 1$ 且 $\partial_i(t_j) = 0$，其中 $j \ne i$。将此导子记为∂_{t_i}，或简记为 ∂_i。证明，对于任意加法同态 $\phi : P_{\mathrm{gp}} \to \mathcal{O}_{X,x}$，存在唯一的对数导子 (∂_ϕ, ϕ)，使得对任意 i，都有 $\partial_\phi(t_i) = 0$。特别地，对于单项式 $p \in P$，有$\partial(u^p) = \phi(p)u^p$。此对数导子记为 ∂_ϕ。

(ii) 此外，证明 $\mathcal{D}_{X,x}$ 是自由模；若 $\phi_1, \ldots, \phi_r$ 是 $\mathrm{Hom}(P_{\mathrm{gp}}, k)$（甚至是 $\mathrm{Hom}(P_{\mathrm{gp}}, \mathbb{Z})$）的基，则 $\partial_1, \ldots, \partial_n, \partial_{\phi_1}, \ldots, \partial_{\phi_r}$ 是$\mathcal{D}_{X,x}$的基。

3.2.3. 对数微分算子。 $\mathcal{O}_X$ 上的对数微分算子代数是由 $\mathcal{O}_X$ 模 $\mathcal{D}_X$ 生成的 $\mathcal{O}_X$-代数 $\mathcal{D}_X^\infty$。它自然地由子模 $\mathcal{D}_X^{\le i}$ 滤过，其中包含阶至多为 i的算子。局部地，其元素是 $\mathcal{O}_X$ 上的 $\partial_1, \ldots, \partial_n, \partial_{\phi_1}, \ldots, \partial_{\phi_r}$ 的次数至多为 i的多项式。对于理想$\mathcal{I}$，我们常考虑其第 i导子理想 $\mathcal{D}_X^{\le i}(\mathcal{I})$。显然，$\mathcal{D}_X^{\le i}(\mathcal{D}_X^{\le j}(\mathcal{I})) = \mathcal{D}_X^{\le i+j}(\mathcal{I})$。这些概念与对数光滑态射的相容性如下：

引理 3.2.4. 设 $f : X' \to X$ 是对数流形的对数光滑态射，且$\mathcal{D}_{X'/X} = \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{X'}, \mathcal{O}_{X'})$。那么，

(i) 序列

$$0 \to \mathcal{D}_{X'/X} \to \mathcal{D}_{X'} \to f^*(\mathcal{D}_X) \to 0$$

是自由 $\mathcal{O}_{X'}$-模的正合序列，因此它局部可分裂。

(ii) 若 $\mathcal{I}$ 是 X 上的理想，且 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$，则对任意$i \le \infty$，$\mathcal{D}_{X'}^{\le i}(\mathcal{I}') = \mathcal{D}_X^{\le i}(\mathcal{I})\mathcal{O}_{X'}$。

第一条结论由对数光滑态射的对数导子的显式描述得出（我们对对数流形给出的描述可推广到态射）。第二条结论成立，是因为 $\mathcal{D}_{X'/X}(\mathcal{I}) = 0$，故由莱布尼茨法则有 $\mathcal{D}_{X'/X}(\mathcal{I}') \subseteq \mathcal{I}'$。

3.2.5. 对数阶。利用层 $\mathcal{D}_X$，可以定义通常阶的对数类比。具体而言，给定一个理想 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ 和一个点 $x \in X$，$\mathcal{I}$ 在 x 处的对数阶 $\mathrm{logord}_x(\mathcal{I})$ 是满足 $\mathcal{D}_X^{\le d}(\mathcal{I})_x = \mathcal{O}_{X,x}$ 的最小数 d。若不存在这样的 d，则令 $\mathrm{logord}_x(\mathcal{I}) = \infty$。当且仅当微分饱和 $\mathcal{D}_X^\infty(\mathcal{I})$ 在 x 处非平凡时，才会出现这种情况；也就是说，$\mathcal{D}_X^\infty(\mathcal{I})_x \subsetneq \mathcal{O}_x$。

例题/练习 3.2.6. (i) 每个单项式 u 的对数阶都是无穷大，因为对于任意对数导子 ∂，$u|\partial(u)$。

(ii) 形式局部地，$f \in \mathcal{O}_{X,\,x}$ 可表示为 $f = \sum_{p\in P,\ i\in\mathbb{N}^n} c_{i,\,p} u^p t^i$ 其中$c_{i,\,p} \in k$(y)，且对数阶$_x(f)$是满足 $c_{i,\,0} \neq 0$ 的最小 $d = i_1 + \cdots + i_n$。

(iii) 元素在 x 处是正则参数（分别是单位），当且仅当其在 x 处的对数阶等于 1（分别等于 0）。

(iv) 对数阶$_x(\mathcal{I})$ = 对数阶$_x(\mathcal{I}^{\mathrm{nor}})$，且 $d\cdot$对数阶$_x(\mathcal{I})$ = 对数阶$_x(\mathcal{I}^d)$。

注 3.2.7. (i) 上述练习表明，在 x 处的对数阶只需通过经典导子 $\partial_1, \ldots, \partial_n$ 计算（或者也可以使用由 $\partial_1, \ldots, \partial_n$ 生成的子模 $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{D}_{X,\,x}$ 计算），而导子 δ_ϕ 无关紧要。不过，$\mathcal{F}_x$ 取决于参数的选择，而使用整个 $\mathcal{D}_X$ 则可以避免选择。

(ii) 此外，我们想强调，模 $\mathcal{F}_x$ 在容许爆破下的变换中表现不佳——有时它们太小。例如，若 $X = \mathrm{Spec}(k[x,y])$ 配备对数结构 $\mathbb{N}\log(x)\oplus\mathbb{N}\log(y$，那么在原点处没有正则参数 O（对数层是零维的），并且$\mathcal{F}_x = 0$。然而，在单项式爆破 O 中的 $X' = Bl_O(X$的原像包含一些点 z，其对数结构由 $\mathbb{N}\log(x-y$生成，参见 [Tem22，例 4.1。5]。这样的点 z 也有一个正则参数，并且 $\mathcal{F}_z$ 是一维的（且取决于参数的选择）。

3.2.8. 最大对数阶。理想 $\mathcal{I}$ 的最大对数阶为

$$\mathrm{logord}_X(\mathcal{I}) = \max_{x\in X} \mathrm{logord}_x(X).$$

我们前面给出的（最大）对数阶定义源自 [ATW20a]。不过，从理念上说，它与中心的重数以及理想所导出的主要不变量一致，见§2.1.2(3)。

练习 3.2.9。(i) 容许中心的重数 $\mathcal{J}$ 对任意 $x \in V$（$\mathcal{J}$）都等于 logord$_x(\mathcal{J})$。

(ii) 对于 X 上的任意理想 $\mathcal{I}$，logord$_x(\mathcal{I})$ 等于满足以下条件的 $d \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ 的最大值：$\mathcal{I}$ 包含于一个重数为 d 的中心中。

3.2.10. 与经典阶的关系。事实上，对数阶有一个非常简单的几何解释：理想的对数阶就是它在对数层上的限制的阶。

引理 3.2.11。设 X 是一个对数流形，$C \hookrightarrow X$ 是一个对数层，$x \in C$ 是一个点，$\mathcal{I}$ 是 X 上的一个理想。那么 logord$_x(\mathcal{I})$ = ord$_x(\mathcal{I}\mathcal{O}_C)$。

习题 3.2.12. 注意到 $\mathcal{D}_X$ 保持单项式理想，因此得到一个自然的限制映射 $\mathcal{D}_X \to \mathcal{D}_C = \mathrm{Der}(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_C)$。证明它是满射，并推导出 $\mathcal{D}^{\leq d}(\mathcal{I})\mathcal{O}_C = \mathcal{D}_C^{\leq d}(\mathcal{I}\mathcal{O}_C)$。特别地，$\mathcal{D}^{\leq d}(\mathcal{I})_x = \mathcal{O}_{X,\,x}$ 当且仅当 $\mathcal{D}_C^{\leq d}(\mathcal{I}\mathcal{O}_C)_x = \mathcal{O}_{C,\,x}$，从而得到该引理。

由于对数光滑态射诱导对数分层之间的光滑态射，引理以及阶的通常光滑函子性蕴含了对数阶的对数光滑函子性：

推论 3.2.13. 若 $f\colon X' \to X$ 是对数流形之间的对数光滑态射，$\mathcal{I}$ 是 X 上的理想，且具有诱导映射 logord$(\mathcal{I})\colon X \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$，并且 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$，则 logord$(\mathcal{I}')$ = logord$(\mathcal{I})$ $\circ f$。

3.3. 对数阶约化。与经典算法类似，对数主化以归纳方式进行，且主循环会降低最大对数阶。其主要区别在于，存在对数阶为无穷大的非零理想。我们将看到，只需进行一次单项式爆破即可解决这一问题。一旦对数阶有限，经典理论的直接类似步骤便可奏效，其中包括最大接触和系数理想的对数类似步骤。

3.3.1. 对数阶约化。对于任意的 $d \le l = \operatorname{logord}_X(\mathcal{I})$，所谓通过对数阶 d-约化，是指一个 $\mathcal{I}$-容许的 d-序列 $X_n \dashrightarrow X_0 = X$，使得 $\operatorname{logord}_{X_n}(\mathcal{I}_n) < d$。

注 3.3.2. (i) 在 [ATW20a] 中，采用了一种等价定义，其风格与经典阶约化相同；该定义通过标记理想（d（$\mathcal{I}$，d）（仅限有限个 d）来编码，并且只使用重数为 1 或无穷大的中心、 d-容许性和 d-变换。

(ii) 注意，$\operatorname{logord}_{X_n}(\mathcal{I}_n) < d$ 当且仅当不存在 $\mathcal{I}_n$-容许的d-中心。因此，对数阶 d-约化就是一个极大的（就截断而言） $\mathcal{I}$-容许的 d-序列。

(iii) 最自然且基本的情形是 $d = l$；如同在经典算法中一样，我们称之为极大阶情形。这正是极大接触理论适用的情形，但出于归纳上的原因，必须处理一般情形。

3.3.3. 单项式包。理想 $\mathcal{I}$ 在 X 上的单项式包，是包含 $\mathcal{I}$ 的最小单项式理想 $\mathcal{M}(\mathcal{I})$。根据定义，它是最小的单项式 $\mathcal{I}$ 容许中心。

引理 3.3.4. 对数流形 X 上的任意理想 $\mathcal{I}$，其微分饱和与单项式包一致： $\mathcal{D}_X^\infty(\mathcal{I}) = \mathcal{M}(\mathcal{I})$。

由于任意单项式理想在 $\mathcal{D}_X$ 作用下保持不变，因此也是微分饱和的，故有包含关系 $\mathcal{D}_X^\infty(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{I})$。这一等式可在形式局部地情形下验证。一种证明见 [ATW20a，定理 3.4。2], 我们概述另一种证明，其思路与[ATW20b命题 3.4 第一部分证明中的论证相近。3]下面的练习颇为困难，因此我们的提示实际上是整个论证的概要。

习题 3.3.5. 设 P 是一个尖锐环面幺半群， l 是一个域，且 $A = l[\![P]\!][\![t_1, \ldots, t_n]\!]$。设 $\mathcal{D}^\infty$ 是由 $\partial_i = \partial_{t_i}$ 和 ∂_ϕ 生成的微分 l-算子代数 $A \to A$，其中 $\phi \in \operatorname{Hom}(P, {}_{\mathrm{gp}} l)$。那么对于任意 $f = \sum_{d \in \mathbb{N}^n,\ p \in P} c_{d,\ p} t^d u^p$，理想 $(\mathcal{D}^\infty(f))$ 等于由元素 $c_{d,\ p} u^p$ 生成的单项式理想。（提示：同样，包含关系显然成立，因此只需证明 $(\mathcal{D}^\infty(f))$ 包含每个 $c_{d,\ p} u^p$。设 $\mathcal{D}_t^\infty$ 是同时为 t-对数的算子构成的子代数，即由元素 $t_i\partial_i$ 和 ∂_ϕ 生成的子代数。任意单项式 $c_{d,\ p} t^d u^p$ 都是任意单项式算子的特征向量

$$\partial = \prod_{i=1}^{n} (t_i \partial_i)^{a_i} \cdot \prod_{j=1}^{r} \partial_{\phi_j}^{b_j}.$$

证明：若 f 是有限和，则存在一个单项式算子 ∂，它相对于 f的所有非零单项式 $c_{d,p} t^d u^p$ 具有不同的特征值，并由此推出，仅 $\partial^m(f)$中元素的 l-线性张成就已包含所有单项式$c_{d,p} t^d u^p$。然后利用连续性去掉有限性假设： $f = f_{<n} + f_{\ge n}$

其中 $f_{\geq n} \in m_A^n$，上述论证经过修正后仍然成立，修正项属于m_A^n，因为 $\partial(m_A) \subseteq m_A$。最后，应用导子 ∂_i 消去 t_i 的幂，便得到每个$c_{d,p}u^p$ 都属于$(\mathcal{D}^\infty(f))$。)

由引理 3.3.4 和 3.2.4(ii) 可得，单项式包具有函子性。

推论 3.3.6. 若 $X' \to X$ 是对数流形之间的对数光滑态射，$\mathcal{I}$ 是 X上的理想，且 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$，则 $\mathcal{M}(\mathcal{I}') = \mathcal{M}(\mathcal{I})\mathcal{O}_{X'}$。

3.3.7. 使对数阶有限。单项式包的非平凡性可以判定最大对数阶是否为无穷大，因此自然会预期，对其进行爆破会使 $\operatorname{logord}_X(\mathcal{I})$ 有限。

引理 3.3.8. 设 X 是一个对数流形，$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ 是一个理想，其单项式包为 $\mathcal{N} = \mathcal{M}(\mathcal{I})$。令 $X' = Bl_{\mathcal{N}}(X) \to X$ 为沿 $\mathcal{N}$ 的 $\mathcal{I}$- 可容许膨胀，且 $\mathcal{I}'$ 为 $\mathcal{I}$ 的变换。那么 $\operatorname{logord}_{X'}(\mathcal{I}') < \infty$。

事实上，单项式爆破 $X' \to X$ 是对数 ´étale，因此由推论 3.3.6$\mathcal{N}' = \mathcal{M}(\mathcal{I}\mathcal{O}'_X)$ 与可逆理想 $\mathcal{N}\mathcal{O}_{X'}$及 $\mathcal{I}' = (\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'})\mathcal{N}'^{-1}$相同。因此，$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{I}')\mathcal{N}'$，并且由 $\mathcal{N}'$的极小性，$\mathcal{I}'$的单项式包是平凡的：$\mathcal{M}(\mathcal{I}') = \mathcal{O}_{X'}$。引理得证。

证明该引理还有一种更具体的方法。它对于理解清除单项式部分的机制很有启发性，因此我们在下面概述这一方法。

习题 3.3.9. 设 $x \in X$ 是 $x' \in X'$ 的像，$f_1, \ldots, f_m$ 是 $\mathcal{I}_x$ 的生成元，且 $f_i = \sum_{p,j} c_{i,j,p} t^j u^p$ 是它们在 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} = l[\![P]\!][\![t_1, \ldots, t_n]\!]$ 中的展开式。那么由习题 3.3.5 可知，$\widehat{\mathcal{N}}_x$ 由所有单项式 $s = c_{i,j,p}u^p$ 生成，其中 $c_{i,j,p}$ 非零。证明，在沿着 $\mathcal{N}_x$ 对 $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_x)$ 进行爆破的 s-图上，f_i 的变换 $s^{-1}f_i$ 的阶有上界 $|j| = j_1 + \cdots + j_n$，因此这次爆破使 $\mathcal{I}_x$ 的变换的阶变为有限。

3.3.10. 系数理想。一旦 $d = \operatorname{logord}_X(\mathcal{I})$ 有限，我们便可定义 $\mathcal{I}$ 的（对数）系数理想为加权和 $\mathcal{C}(\mathcal{I}) = \sum_{a=0}^{d-1} (\mathcal{D}_X^{\leq a}(\mathcal{I})\ d-a)$，其中我们使用以下齐次化定义来定义带有权重元组 $l = (l_1, \ldots, l_n)$ 的理想 $\mathcal{I}_1, \ldots, \mathcal{I}_n$ 之和：

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathcal{I}_i, l_i) = \sum_{a \in \mathbb{N}^n \mid (a,l) \leq l_1 \ldots l_n} \mathcal{I}_1^{a_1} \cdots \mathcal{I}_n^{a_n}.$$

注记 3.3.11。齐次化和在 [ATW20b，§5.1。7]中引入。在通常的定义中（ [ATW20a，§5.2(1)], 中也采用了该定义），考虑的是较小的加权和理想 $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{I}_i^{d/d_i}$，其中 $d = d_1 \ldots d_n$。正如注记 2.3.4中所述，使用这两个版本是等价的，不过在技术上，使用齐次化版本可能更方便。

3.3.12. 极大接触。假设 $\mathcal{I}$ 是对数流形 X 上的一个理想，并且$d = \operatorname{logord}_X(\mathcal{I}) < \infty$。若子流形 $V \hookrightarrow X$ 在任意满足 $\operatorname{logord}_x(\mathcal{I}) = d$ 的点 $x \in X$ 附近都具有形式 $V = V(t)$，其中$t \in \mathcal{D}_X^{\leq d-1}(\mathcal{I})_x$，则称其为$\mathcal{I}$ 的最大接触。显然，在任意满足 $\operatorname{logord}_x(\mathcal{I}) = d$的点 $x \in X$ 附近都存在最大接触：由于 $\mathcal{D}_X^{\leq d}(\mathcal{I}_x) = \mathcal{O}_x$，存在 $t \in \mathcal{D}_X^{\leq d-1}(\mathcal{I})_x$，使得 $\mathcal{D}_X(t)$包含 $\mathcal{O}_x$的一个单位。这个元素的对数阶为1，因此它是 x 处的一个正则参数，而 $V(t)$在 x的邻域内是一个对数流形。

3.3.13. 关键结果。极大接触理论总结在以下两个定理中。这里我们只陈述并讨论这些定理。其论证与经典算法中的类似步骤非常接近，稍后将予以概述。第一个定理确立了构造对数阶约化时按维数归纳的方法：

定理 3.3.14. 设 X 是一个对数流形，$\mathcal{I}$ 是 X 上的一个理想，且 H 是 $\mathcal{I}$ 的一个最大接触。那么，具有中心 $\mathcal{J}_i^{(d)}$ 的 $X_n \dashrightarrow X_0 = X$ 的一个可容许 d 爆破序列是 $\mathcal{I}$-可容许的，当且仅当对任意 $0 \le i \le n-1$，都有 $I_{H_i} \subset \mathcal{J}_i$，其中 $H_i \hookrightarrow X_i$ 是 H 的严格变换，且具有中心 $(\mathcal{J}_i|_{H_i})^{(d!)}$ 的诱导可容许 $d!$-序列 $H_n \dashrightarrow H_0 = H$ 是 $\mathcal{C}(\mathcal{I})|_H$-可容许的。

鉴于注记 3.3.2(ii)，d 的对数阶约化 $\mathcal{I}$ 与 d 的对数阶 $\mathcal{C}(\mathcal{I})|_H$!-约化之间存在自然的一一对应关系。因此，在极大阶情形下，X 上的对数阶约化问题可归结为超曲面上的一个对数阶约化问题，但后者不一定具有最大阶，因为 $\mathcal{C}(\mathcal{I})|_H$ 的对数阶可能严格大于 $d!$。事实上，它甚至可能是无穷大。

第二个定理保证，在 X 上得到的对数阶约化不依赖于最大接触的局部选择，因此具有函子性并可整体化。它是如下断言的一个 ´étale 精化：对于任意一对最大接触，X 沿它们的形式完备化之间存在保持系数理想的同构。

定理 3.3.15. 假设 X 是一个对数流形，$\mathcal{I}$ 是 X 上的一个理想，且 X 上的 $d =$对数阶$_X(\mathcal{I}) < \infty$；又设 H_1、H_2 是 $\mathcal{I}$ 的两个最大接触。那么存在一对 ´étale 覆盖 p_i: $X' \to X$, $i = 1, 2$，使得 $p_1^{-1}\mathcal{C}(\mathcal{I}) = p_2^{-1}\mathcal{C}(\mathcal{I})$,$p_1^* H_1 = p_2^* H_2$，并且对于任意 $\mathcal{I}$-可容许的 d序列 $X_n \dashrightarrow X_0 = X$，其相对于 p_1 和 p_2 的拉回相同。

注 3.3.16. 在经典主化中，有两种方法可以证明最大接触的独立性。一种是 Włodarczyk 的齐次化方法，该方法在上述定理中被推广到对数情形；另一种是 Hironaka 技巧，即对标记理想的等价关系作精细定义，参见 [BM08]。Hironaka 技巧也可以推广到对数情形，相关工作见 [ATW20b，§7。2]。

3.3.17. 非极大阶情形。上一节说明了如何处理极大阶情形。接下来需要利用极大阶情形构造一般对数阶 d-约化。若 logord$(\mathcal{I}) = l \ge d$，则可通过将理想分解为有限对数阶的清洁部分与可逆单项式理想的乘积来完成，其依据是以下观察：

引理 3.3.18. 设 X 是一个对数流形，带有理想 $\mathcal{IN}$，其中 $\mathcal{I}$ 的对数阶为最大对数阶 l，且 $\mathcal{N}$ 是可逆单项式，并设 $1 \le d \le l$。假设 $X' = X_n \dashrightarrow X_0 = X$ 是一个 $\mathcal{I}$-容许的 l-序列，其中心为 $\mathcal{J}_i^{(l)}$，并令 $\mathcal{I}'$ 表示 $\mathcal{I}$的变换。那么，同一态射序列也构成一个以 $\mathcal{J}_{(d)\,i}$ 为中心的 $\mathcal{IN}$-容许d-序列，其变换具有形式 $(\mathcal{IN})' = \mathcal{I}'\mathcal{N}'$，其中$\mathcal{N}'$ 是可逆单项式。

事实上，通过归纳法，该断言可归结为长度为一的序列，此时$\mathcal{N}' = \mathcal{N}\mathcal{I}_E^{l-d}$，其中 E是例外除子。

鉴于该引理，只需应用由清洁部分相对于 $l, l-1, \ldots, d$ 的对数阶约化中的极大阶情形所产生的序列，并将

该序列中的 l-中心、 $l-1$-中心等替换为相应的 d-中心。这样会得到一个可逆单项式因子，最后可通过一次爆破将其消去。

3.4. 缺口。乍看之下，我们已经具备了将这些要素结合起来构成可行算法所需的一切，但还有一种情况尚未讨论……也就是说，如果 $\mathrm{logord}_x(\mathcal{I})$ 是无穷大，那么对数阶 d-约化会发生什么？在阶为无穷大的情形下，我们的方法是爆破单项式包 $\mathcal{N}=\mathcal{M}(\mathcal{I})$，但此处中心必须是一个 d-中心。有时 $\mathcal{N}$ 是一个 d-中心，但有时却不是……乍看之下，人们或许会以为这个障碍并不严重，应该可以采用另一种方法。因此，我们将从最简单的例子开始，说明若不修改基本框架，就无法继续推进。此外，我们也将借此机会与经典算法作一些比较。

例 3.4.1. 我们将在 $X=\mathrm{Spec}(k[t,u])$上以对数结构 $\mathbb{N}\log(u)$主化理想。用 O 表示原点。

(i) 设 $\mathcal{I}=(t+u^2)$。在这种情况下，$\mathrm{logord}_O(\mathcal{I})=1$, $H=V(t)$ 是最大接触， $\mathcal{C}(\mathcal{I})=(t,u^2)$，且理想 $\mathcal{C}(\mathcal{I})|_H=(u^2)$ 是单项式理想，因此通过对其进行爆破即可将其主化。根据定理 3.3.14 $\mathcal{I}$，沿着 (t,u^2) 进行一次爆破即可将其主化。作为比较，注意到不带对数结构的经典算法会使用相同的最大接触和系数理想，但会“对 u 爆破两次”，因此中心为 (t,u) 和 (t',u')。

(ii) 设 $\mathcal{I}=(t^2+u^2)$。在这种情况下，$\mathrm{logord}_O(\mathcal{I})=2$, $H=V(t)$ 是最大接触， $\mathcal{C}(\mathcal{I})=(t^2,tu,u^2)$，且理想 $\mathcal{C}(\mathcal{I})|_H=(u^2)$ 是单项式理想，通过对 2-中心 (u^2) 进行爆破即可将其主化。因此，沿着 (t,u) 进行一次爆破即可将 $\mathcal{I}$ 主化。在这种情况下，经典算法的操作方式相同。唯一的区别是，它也可以取 $V(u)$ 作为最大接触，但在对数情形下这是不允许的。

(iii) 最后，令 $\mathcal{I}=(t^2+u)$。那么，$\mathrm{logord}_O(\mathcal{I})=2$, $H=V(t)$ 是最大接触， $\mathcal{C}(\mathcal{I})=(t^2,u)$，而理想 $\mathcal{C}(\mathcal{I})|_H=(u)$ 是单项式的，并通过爆破中心 (u) 将其主化；该中心不是 2-中心。我们陷入了困境。在这种情况下，经典算法的做法完全不同，因为通常阶为 1，经典的最大接触是 $V(u)$，而不是 $V(t)$。

3.4.2. 对数光滑性的推论。事实上，例子 (ii) 和 (iii) 通过一个对数-´étale 覆盖相关联。具体而言，考虑 (iii) 中的 X 和 $\mathcal{I}$、 X 的库默尔覆盖 $Y=\mathrm{Spec}(k[t,v=u^{1/2}])$，以及理想 $\mathcal{I}'=\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}=(t^2+v^2)$。根据对数光滑函子性， $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{I}'$ 的主化必须相容，而 $\mathcal{I}'$ 的主化通过爆破 (t,v) 完成。这使我们别无选择——$\mathcal{I}$ 的主化 $X'\to X$ 应当是对中心 $(t,u^{1/2})$ 的爆破，无论这意味着什么，使得 $Y'=X'\times_X Y$ 作为 fs 对数概形。幸运的是，函子性方面的考量不仅表明该方法在基本框架下陷入困境，也指出了应如何扩展这一框架：

注释 3.4.3. (i) 首先，显然 X' 应当是 μ_2作用下 Y' 的商；由于概形商并非对数光滑，我们必须取代数栈意义下的商——这是获得一个（不可表示的）修改 $X'\to X$，使得 $Y'=X'\times_X Y$ 属于 fs 范畴的唯一途径。

(ii) 其次，这也提示了一种形式化如下形式中心的概念的方法：$(t_1,\dots,t_n,\mathcal{N}^{1/d})$，其中 $\mathcal{N}$ 是单项式。与爆破类似，它们

在添加足够多的单项式根后定义良好，因此我们只需在 Kummer ´étale 局部工作（参见 [Tem22，§4.4]），这样任意单项式中心都成为一个 d-中心，其中 d是任意自然数。对于理想，这种形式化甚至更简单，无需引入代数栈（不过对代数栈同样有意义）。

在下一节中，我们将沿着这些思路扩展对数框架，转而采用对数轨形并引入 Kummer 理想和爆破；随后，本节的所有构造都将立即得到推广，从而导出一个对数主化算法。

3.4.4. 单项式民主。作为本节的总结，我们从对数光滑函子性推导出一条原则，它解释了经典算法与对数算法之间的大多数差异。若 $P \hookrightarrow Q$ 是托里克幺半群的嵌入，则同态 $Y = X_P[Q] \to X$ 是对数光滑的，而函子性意味着， X 上 $\mathcal{I}$ 的主化应当拉回为 Y 上 $\mathcal{I}\mathcal{O}_Y$ 的主化。特别地，关于单项式 $p \in P$ 算术性质的信息，例如知道 p 是否是 P 中的平方，不能被对数光滑函子性算法利用。通俗地说，这意味着单项式 $p \in P$“不知道”自己属于哪个幺半群；这也可以用奥威尔风格的以下“单项式民主”原则来表述：所有单项式一律平等。特别是，这条原则解释了为什么与经典算法不同，我们允许在容许中心的定义中使用任意一组单项式生成元，也解释了为什么单项式的对数阶必须是无穷大。宽泛地说，该算法用经典方法处理正则参数，而不区分单项式参数——它只是构造单项式包，并一次性将其爆破。

需要指出的是，如果只构造光滑函子性方法，也可以采用其他次序。例如，在带边界的加权消解中，按 1_+对单项式参数排序，见 [W-lo，注 2.3。14]。

4. The logarithmic algorithm

我们现在的目标是扩展这一框架，将叠、Kummer 理想和爆破纳入其中，最后描述对数主化算法。

4.1. 框架。为了扩展这一框架，我们必须转向叠，并进一步发展 Kummer ´étale 局部化技术。

4.1.1. 几何对象。我们将在 k 上有限型 fs 对数 DM 叠的 2-范畴中工作，并将这样的 X 称为对数轨形，前提是它对数光滑。因此，对数流形是可表示的对数轨形，而对数轨形将在对数 DM 叠的范畴中扮演流形的角色。对数光滑子叠将称为子轨形，其理想称为子轨形理想。

处理叠时，默认拓扑是 ´étale，因此 $\mathcal{O}_X$ 及其理想、层 $\mathcal{D}_X$等都是 ´étale 层。这是基于这样一个事实：在概形的情形下， $\mathcal{O}_X$、 $\mathcal{D}_X$、 $\mathcal{D}_X^\infty$等实际上都是 ´étale 层（甚至是平坦层），因此它们的构造可以推广到 DM 叠。

注 4.1.2. (i) 回顾一下，对数结构的通常定义是 ´étale 局部的，因此可推广到 DM 叠。或者，也可以通过下降来定义：若一个代数栈$\mathcal{X}$ 有一个光滑表示 $X_0 \to \mathcal{X}$ 和 $X_1 = X_0 \times_{\mathcal{X}} X_0$，那么 $\mathcal{X}$ 上的对数结构等同于 X_0 上的一个对数结构 $\mathcal{M}_0$ 以及拉回之间的一个同构

$p_0^*\mathcal{M}_0 \widetilde{\to} p_1^*\mathcal{M}_0$ 满足通常的余循环条件。后一种定义也适用于任意 Artin 叠。

（ii）可以考虑更宽或更窄的范畴，主要限制是它们应当对下文定义的库默尔膨胀封闭。特别是，可以在任意 Artin 叠上工作，也可以将范围限制为具有有限对角化惯性群的 DM叠，正如 [ATW20a]中所做的那样。我们的选择与 [ATW20b], 相同：这是仍可使用 ´étale 拓扑，且证明的所有细节都完全相同的最一般情形。

4.1.3. 库默尔理想。库默尔理想就是库默尔 ´étale 拓扑中的结构层理想。对于任意对数叠 X，记 X_{ket} 为位于 X 之上的对数叠所成的范畴，其中态射 $X' \to X$ 是库默尔 ´étale 的。将满射态射规定为覆盖，即可在 X_{ket}上得到一个 Grothendieck 拓扑。按通常方式定义的结构预层 $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{ket}}}$，即 $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{ket}}}(U) = \Gamma(\mathcal{O}_U)$，实际上是一个层；这是 Niziol 的库默尔下降结果所保证的，参见[Niz08，命题 2。18]。一个库默尔理想是一个理想 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{X_{\mathrm{ket}}}$。此类理想可进行所有常见运算：求和、求积等。此外，微分算子层是库默尔的，因此可以对理想取导数；我们将沿用同一记号 $\mathcal{D}_X^{\leq d}(\mathcal{I})$。

任意理想 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_X$ 都生成 Kummer 理想 $\mathcal{J}_{\mathrm{ket}} = \mathcal{J}\mathcal{O}_{X_{\mathrm{ket}}}$，根据 Kummer 下降，$\mathcal{J}_{\mathrm{ket}}$ 在 $\mathcal{O}_X$ 上的限制为 $\mathcal{J}$。在这种情况下，我们称 Kummer 理想 $\mathcal{J}_{\mathrm{ket}}$ 为普通理想，并滥用记号，也将其记为 $\mathcal{J}$。如果一个 Kummer 理想在 Kummer 局部由单项式生成，则称其为单项式理想。

注 4.1.4. 在 [ATW20a] 中也假设理想是有限生成的，但这不会造成任何区别。我们只考虑通常理想和容许中心，它们由有限生成理想通过算术运算和饱和得到。饱和的结果通常不是有限生成的 Kummer 理想，但仍然很容易控制。

例/练习 4.1.5. (i) 如果 $p \in \Gamma(\mathcal{M}_X)$ 是全局单项式，且 $d \geq 1$ 在 X 上可逆（特征为零时这自动成立），那么理想 (p) 是唯一确定的可逆 Kummer 单项式理想 $(p^{1/d})$ 的 d 次幂。事实上，在 Kummer 局部，该理想由 p 的 d 次方根生成。

(ii) 任意有限生成的 Kummer 单项式理想都在 ´étale 局部具有如下形式：$(p_1^{1/d}, \ldots, p_r^{1/d}) := (p_1^{1/d}) + \cdots + (p_r^{1/d})$，其中 p_i 为单项式。

(iii) 更一般地，对于单项式理想 $\mathcal{J}$，令 $\mathcal{J}^{1/d}$ 为由 $\mathcal{J}$的单项式生成元的d次根生成的理想。它是一个单项式 Kummer 理想，其d次幂整于 $\mathcal{J}$。

(iv) 举一个有限生成单项式理想 $\mathcal{J}$ 的例子，使其作为 Kummer 理想的饱和不是有限生成的。（提示：可以取带有对数结构 $\mathbb{N}\log(u) + \mathbb{N}\log(v)$ 的 $X = \mathrm{Spec}(k[u,v])$，以及 $\mathcal{J} = (u,v)$。那么，它在 Kummer 拓扑中的饱和包含所有形如 $((u^a v^b)^{1/(a+b)})$ 的 Kummer 理想，其中$a, b \geq 1$，因而不是有限生成的。）

4.1.6. 容许中心。 定义与对数概形的定义相同。1-中心是形如 $\mathcal{I} + \mathcal{N}^{\mathrm{sat}}$ 的 Kummer 理想，其中 $\mathcal{I}$是子轨形理想（见4.1.1），而 $\mathcal{N}$ 是有限生成单项式 Kummer 理想。一个 d-中心具有如下形式： $\mathcal{J} = \mathcal{J}_1^{(d)} = (\mathcal{J}_1^d)^{\mathrm{nor}}$，其中 $\mathcal{J}_1$ 是一个 1-中心。任何非单项式中心都是

一个 d-中心，对应唯一的 d；而根据习题 4.1.5(iii)，任何单项式中心都是任意 $d \geq 1$ 的 d-中心。事实上，无需使用更复杂的整闭包运算，也可以用饱和和理想上的算术运算来描述 $\mathcal{J}$，见 [ATW20a，引理 4.3.2(1)]。

练习 4.1.7. 证明 $(\mathcal{I}+\mathcal{N})^{(d)} = \sum_{i=0}^{d} \mathcal{I}^i(\mathcal{N}^{d-i})^{\mathrm{sat}}$。（提示：该断言是 Kummer 局部的，因此只需考虑 X 是一个对数流形且 $\mathcal{N}$ 是一个单项式理想的情形。然后通过 $\oplus_{i=1}^{n}\mathbb{N}\log(t_i)$ 增加对数结构，其中 $\mathcal{I}=(t_1,\dots,t_n)$，该断言归结为以下标准引理：单项式理想是饱和的，当且仅当它是整闭的。）

4.1.8. 库默尔爆破：两种方法。 这里有几种可能的定义。第一种构造由 [ATWo20，§5.4] 引入，并用于第一种对数主化算法 [ATW20a] 中。该构造遵循注记 3.4.3（1）中的思路——取一个适当的 Galois Kummer 覆盖，在其上中心变成通常的理想，对其进行爆破，然后再除以 Galois 群。微妙之处在于，为了使这一过程独立于覆盖，所得商应当是栈论商与概形商的混合物（即栈论商的部分粗化）。Rydh 很快在 [ATW20a] 撰写后提出了一种更简单且更一般的定义，该定义使用栈论 Proj 构造；以下我们将采用这一定义。它曾用于 [ATW20b]，并且可以很容易地推广到任意加权爆破。由于该定义已在章节 [Abr]，中得到研究，我们在此仅快速回顾其要点。

4.1.9. 栈化 Proj 构造。设 X 是一个概形，$\mathcal{A}=\oplus_{d=0}^{\infty}\mathcal{A}_d$ 是一个有限生成的分次 $\mathcal{O}_X$-代数。那么 $Y=\mathrm{Spec}_X(\mathcal{A})\to X$ 是一个 $\mathbb{G}_m$-等变态射，其中 X 上的作用是平凡的。无关理想 $\mathcal{A}_{\geq 1}=\oplus_{d=1}^{\infty}\mathcal{A}_d$ 的零点集 $V=V(\mathcal{A}_{\geq 1})$ 是不动点集。特别地，$Y\setminus V$ 上的作用具有 μ_d 形式的稳定子群，并且通常的概形论商存在（无需使用几何不变量理论）。通常的 Proj 构造将 $\mathcal{A}$ 对应到概形论商 $\mathrm{Proj}_X(\mathcal{A})=(Y\setminus V)/\mathbb{G}_m$，并舍弃有关稳定子群的信息。在代数栈的范畴中，自然会考虑更精细的栈化 Proj 构造，它给出代数栈意义下的商 $\mathcal{P}roj_X(\mathcal{A})=[(Y\setminus V)/\mathbb{G}_m]$。根据定义，$\mathrm{Proj}_X(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{P}roj_X(\mathcal{A})$ 的粗模空间。

4.1.10. 图表与稳定子群。 栈化 Proj 构造在底空间上是局部的，并且由一些图粘合而成；这些图在代数栈意义下细化了通常的 Proj 的图表。详情见章节 [Abr]，这里只简要回顾一下。

练习 4.1.11. 假设 $X=\mathrm{Spec}(B)$ 且 $A=\oplus_{d=0}^{\infty}A_d$ 是一个有限生成的分次 B-代数，并令 $\mathcal{Z}=\mathcal{P}roj_B(A)=[Y/\mathbb{G}_m]$，其中 $Y=\mathrm{Spec}(A)\setminus V$。

(o) 对任意齐次 $s\in A_d$，s-图 $\mathcal{Z}_s=[Y_s/\mathbb{G}_m]$ 是 $\mathcal{Z}$ 的一个开子栈；而对于齐次元素 $s_1,\dots,s_n\in A$，$\mathcal{Z}=\cup_{i=1}^{n}\mathcal{Z}_{s_i}$ 成立，当且仅当 $(s_1,\dots,s_n)$ 的根基与无关理想 $A_{\geq 1}$ 相同。

(i) 考虑 $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$-分次环 $A_s/(s-1)$，其第 i 个齐次分量与 $(A_s)_{i+jd}$ 同构，其中 $j\in\mathbb{Z}$ 任意。于是 $\mathcal{Z}_s=[\mathrm{Spec}(A_s/(s-1))/\mu_d]$，特别是，其惯性群阶有 μ_d 的上界。此外，我们看到，当 $\mathcal{A}$ 由 1 次齐次元素生成时，通常的 Proj 构造与栈化 Proj 构造在经典情形下重合。

例 4.1.12. (i) 若 $\mathcal{J}$ 是 X 上的理想，且 $\mathcal{A} = \oplus_{d=0}^{\infty}\mathcal{J}^d$，则 $X' = \mathcal{P}roj_X(\mathcal{A})$ $= \mathrm{Proj}_X(\mathcal{A}) = Bl_{\mathcal{J}}(X)$ 是沿 $\mathcal{J}$ 对 X 进行的通常的爆破。对 $\mathcal{J}^n$ 进行爆破，我们得到相同的态射 $X' \to X$，但例外除子乘以了 n。

（ii）利用栈化 Proj，我们还可以爆破 $\mathcal{J}^{1/n}$ 的一个类似步骤。具体而言，考虑 $\mathcal{A} = \oplus_{d=0}^{\infty}\mathcal{A}_d$，其中 $\mathcal{A}_d = \mathcal{J}^{\lceil d/n \rceil}$，方括号表示向上取整为整数。于是 $\mathcal{X}' = \mathcal{P}roj_X(\mathcal{A})$ 是从 X' 得到的根栈，其通过从例外除子 n 中提取 $\mathcal{J}\mathcal{O}_{X'}$-根得到。这个根理想应被视为沿 $\mathcal{J}^{1/n}$ 爆破的例外除子，并且，$\mathcal{X}' \to X$ 是满足以下条件的泛态射： $\mathcal{J}$ 的拉回是可逆理想的 n-次幂。不过，这一条件应谨慎表述，参见 [QR、定理 3.2.11 和推论 3.2。12]。

4.1.13. 向栈的延拓。 栈化 Proj 构造的一个重要特征是它可以延拓到代数栈。通常的 Proj 构造通过标准的 ´étale 下降延拓，但处理 $\mathbb{G}_m$-商需要额外的论证，参见章节 [Abr]。

4.1.14. Kummer 爆破。给定一个对数 DM 叠 X，令 $\pi\colon X_{\mathrm{ket}} \to X$ 表示位点限制。因此，给定 X 上的 Kummer 理想 $\mathcal{J}$，通过 $\pi_*\mathcal{J}$，我们将其在 X上的限制记为该对象。例如，如果 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 是仿射的，那么 $\pi_*\mathcal{J}$ 就只是 A 的理想 $\mathcal{J}(X)$。现在，我们通过 $X' = \mathcal{P}roj(\mathcal{R}_{\mathcal{J}})^{\mathrm{nor}}$ 定义 Kummer 爆破，其中 $\mathcal{R}_{\mathcal{J}} = \oplus_{d=0}^{\infty}\pi_*(\mathcal{J}^d)$ 是 $\mathcal{J}$ 的 Rees 代数。显然，当 $\mathcal{J}$ 是通常的理想时，这就归结为正规化爆破的通常定义。Kummer 理想 $\mathcal{I}_E = \mathcal{J}\mathcal{O}_{X'_{\mathrm{ket}}}$ 是一个可逆的（通常）理想，因为如同在经典情形中一样，它在 s-图 X'_s 上的限制是可逆理想 (s)，其中 $s \in \mathcal{J}^d(X)$。特别地，例外除子 E 按通常方式定义；如果该爆破是 $\mathcal{I}$-可容许的，即 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$，那么变换 $\mathcal{I} = (\mathcal{I}\mathcal{O}_X)\mathcal{I}_E^{-1}$ 也有定义。

最后，如 §3.1.11 中所述，我们赋予 X' 对数结构 $\mathcal{M}_{X'} = \mathcal{M}(\log(D'))$，该结构由除子 $D' = f^{-1}(D) \cup E$ 诱导，其中 $f\colon X' \to X$ 是爆破，而 D 在 X 上定义对数结构（由除子构造对数结构 $\mathcal{M}(\log(D'))$ 与 ´étale 态射相容，因而可扩展到 DM 叠）。对数 DM 叠 $(\underline{X}', \mathcal{M}_{X'})$ 称为沿 Kummer 理想 $\mathcal{J}$ 对 X 的爆破，记作 $Bl_{\mathcal{J}}(X)$。

4.1.15. 容许爆破。我们仅在 $\mathcal{J}$ 是容许中心时使用上述构造。该运算的主要性质是源空间对数光滑，且爆破与对数光滑态射相容：

定理 4.1.16. 设 X 为对数轨形，设 $\mathcal{J}$ 是 X 上的可容许 Kummer 中心，并设 $X' = Bl_{\mathcal{J}}(X)$。

(i) 爆破 $X' \to X$ 是适当双有理态射，具有有限可对角化相对惯性群；它在 $V(\mathcal{J})$ 的补集上是同构。

(ii) X' 是对数轨形。

(iii) 对数光滑函子性：若 $Y \to X$ 是对数光滑态射，则$Bl_{\mathcal{J}\mathcal{O}_{Y_{\mathrm{ket}}}}(Y) = X' \times_X Y$，其中的乘积取自 fs 范畴。

(iv) ´Etale下降：若 $X \to Y$ 是一个严格 ´Etale覆盖，且 $\mathcal{J}$ 在$X \times_Y X$ 上的拉回彼此相同，则 $\mathcal{J}$ 是 Y上某个可容许 Kummer 中心 $\mathcal{I}$ 的拉回，而 $X' \to X$ 是可容许膨胀 $Bl_{\mathcal{I}}(Y) \to Y$的饱和拉回。

定理的(i)部分对任意 Kummer 膨胀均成立。(ii)和(iii)部分的证明与习题 3.1.14 类似——利用 ´Etale下降，可将命题归约到模型概形与容许中心的情形，然后进行显式的（本质上是环面）计算。由(iii)部分可知，只需在(iv)部分下降中心。该命题是 ´在 Y 上Etale局部成立， $Y\to$因此我们可以假设它具有图 $_P$A $X_P[\frac{1}{d}P]=Y_P[\frac{1}{d}P]\times_Y X$。然后 d，取 $\mathcal{J}$足够大，就能得到 $X_P[\frac{1}{d}P]$是 ´上的一个理想。由$Y_P[\frac{1}{d}P]$Etale下降可知，它是 Y上的一个理想的拉回。容易看出，该理想是容许中心，因此它在 Y上给出一个可容许 Kummer 中心。

现在，让我们通过一个具体案例说明 (iii) 中的函子性是如何发挥作用的，说明对于 Kummer覆盖，叠结构如何消失，以及这与饱和拉回有何关系。事实上，所有这些在例3.4.1中已经可以从对数流形和理想上清楚地看出。

例4.1.17。(i) $Y=$ 带有由 v and$\mathcal{I}=(t,v)$ 生成的对数结构的 Spec$(k[t,v]$。爆破 $Y'=Bl_{\mathcal{I}}(Y)$ 的 v-图 Y'_v 按通常方式计算为：$Y'_v=$ 带有 $t'=t/v$ 以及由 v 生成的对数结构的 Spec$(k[v,t']$。

(ii) $X=$带有由 u and $\mathcal{J}=(t,u^{1/2})$ 生成的对数结构的 Spec$(k[t,u]$。根据练习 4.1.11 中的图描述， $X'=Bl_{\mathcal{J}}(X)$ 的 $u^{1/2}$-图 $X'_{u^{1/2}}$ 描述如下。Rees 代数是分次代数 $\oplus_{d=0}^{\infty}k[t,u]z^d$ 的分次子代数 $\mathcal{R}_{\mathcal{J}}=k[t,u,tz,uz,uz^2]$，而 $u^{1/2}$-图对应于 uz^2-图。因此， $X'_{u^{1/2}}$ 是 $W=$Spec$(\mathcal{R}_{\mathcal{J}}/(uz^2-1))$ 的 μ_2-商，其中

$$\mathcal{R}_{\mathcal{J}}/(uz^2-1)=k[t,u,x=tz,y=uz]/(y^2-u,xy-t)=k[x,y].$$

我们看到，新坐标为 $y=u^{1/2}$ 和 $x=t/y$，这与容许爆破的坐标非常类似，而 μ_2 由于它们的分次为 1，因而通过取负号作用于 x 和 y 。特别地，带有对数结构 $\mathbb{N}\log(y^2)$ 的粗商 W/μ_2 =Spec$(k[y^2,xy,y^2]$ 不是对数光滑的，而代数栈意义下的细化 $X'_{u^{1/2}}=[W/\mu_2]$ 是对数光滑的（甚至是光滑的）。

(iii) 通过 $v^2=u$ 定义态射 $Y\to X$。那么 $\mathcal{I}=\mathcal{J}\mathcal{O}_Y$，事实上 Y' 很容易看出是 $X'\times_X Y$ 的饱和。乍看之下， $X'\to X$ 是一个非可表态射，但其基变换 $Y'\to Y$ 却是可表示的，这似乎颇为矛盾，因为对于 ´étale 覆盖而言不可能发生这种情况；但在这里， $Y\to X$ 是对数´étale 的，并且该基变换是饱和的。实际上，在此情形下，非饱和基变换 $X'\times_X Y$ 具有非平凡的叠结构（与 (v^2) 的平方根相关的根栈），但其饱和 Y' 是一个概形。

4.2. 算法。

4.2.1. 第 *§§3.2–3.3* 节的结果。 定理 4.1.16 完成了对数主化框架的构造。一旦完成这一步，§3 中的几乎所有结果和证明都可以几乎逐字地推广，因为局部证明都是 ´étale-局部的。特别地，完全以相同的方式定义 $\mathcal{I}$-可容许序列（库默尔爆破）、主化、对数阶和对数阶 d-约化、极大接触与系数理想，并建立定理3.3.14 和3.3.15、引理3.3.4、3.3.8、3.2.11等的类似步骤。

4.2.2. 对数阶约化。以下定义与经典情形中的定义相同。

定义 4.2.3。（i）对数轨形 X 上理想 $\mathcal{I}$ 的对数阶 d-约化，是一个 $\mathcal{I}$-容许的 d-序列 $f_\bullet$： $X_n \dashrightarrow X_0 = X$，满足 $\operatorname{logord}_{X_n}(\mathcal{I}_n) < d$。对数轨形范畴在 k 上的一个对数阶约化，将如上所述的任意 X、$\mathcal{I}$、d 关联到一个对数阶约化 $f_\bullet = \mathcal{F}(\mathcal{I}, d)$。

(ii) 若对于任意如上所述的 X、$\mathcal{I}$、d 以及对数光滑态射 $Y \to X$， $\mathcal{I}\mathcal{O}_Y$ 的对数阶 d-约化都是$\mathcal{I}$的对数阶 d-约化的缩约拉回，即 $\mathcal{F}(\mathcal{I}\mathcal{O}_Y, d)$可由 $\mathcal{F}(\mathcal{I}, d)\times_X Y$删去所有平凡膨胀而得到，则对数轨形范畴 k 上的对数阶约化 $\mathcal{F}$ 具有对数光滑函子性。

(iii) 若对于余维为常数的对数轨形闭浸入 $Y \hookrightarrow X$ 以及 X 上的理想 $\mathcal{I}$ （满足 $I_Y \subseteq \mathcal{I}$），序列 $\mathcal{F}(\mathcal{I},1)$可由 $\mathcal{F}(\mathcal{I}\mathcal{O}_Y,1)$推前得到（也就是说，在 Y的严格变换上爆破相同的库默尔中心），则 $\mathcal{F}$ 满足重新嵌入原理。

现在我们可以表述对数阶约化定理。它是该理论的主要结果，并蕴含对数主化定理和对数消奇点定理。

定理 4.2.4。在 k 上的对数轨形范畴中，存在一种对数阶约化方法 $\mathcal{F}$，它具有对数光滑函子性，并满足重新嵌入原理。

对数主化的定义类似，但它仅依赖于 X 和 $\mathcal{I}$（而不依赖于 d）；允许使用任意 $\mathcal{I}$-容许中心，并且最终得到对数阶$_{X_n}(\mathcal{I}_n) = 0$（即 $\mathcal{I}_n = \mathcal{O}_{X_n}$）。对数光滑函子性和重新嵌入原理完全相同。对数主化定理是定理4.2.4 的一个直接推论，只需取 $d = 1$即可。

定理 4.2.5。在 k 上的对数轨形范畴中，存在一种对数主化方法 $\mathcal{P}$，它具有对数光滑函子性，并满足重新嵌入原理。

最后，§3.1.24 中的论证推出如下对数解奇异化结果。

定理 4.2.6. 存在一种对数消奇异化方法 $\mathcal{R}$，它将任意有限型、一般光滑且局部等维的对数 DM 叠 X （定义在 k 上）对应到一个双有理态射 $\mathcal{R}(X)$： $X_{\mathrm{res}} \to X$，且该态射 X_{res} 是对数光滑的；对于任意对数光滑态射 $Y \to X$，在 fs 范畴中有 $Y_{\mathrm{res}} = X_{\mathrm{res}} \times_X Y$。

注 4.2.7. (i) 即使 X 是一个簇，态射 $X_{\mathrm{res}} \to X$ 几乎总是不可表示的，尤其不是射影态射。不过，它属于一类态射，这类态射是射影态射类的一种自然的不可表示扩展——射影态射的整体商类。特别地，相对粗空间 $(X_{\mathrm{res}})^{\mathrm{cs}/X}$ 在 X上是射影的。然而，$(X_{\mathrm{res}})^{\mathrm{cs}/X}$ 不一定是对数光滑的，并且可能具有商奇点。

(ii) 可以典范地解消（X_{res}）$^{\mathrm{cs}/X}$，甚至可以通过所谓的去叠化过程在代数栈层面上完成。具体而言，存在一种光滑函子性的方法，构造进一步的修改 $X' \to X_{\mathrm{res}}$，使得相对粗空间 $X'_{\mathrm{cs}/X}$ 对数光滑，且态射 $X'_{\mathrm{cs}/X} \to X$ 是射影的，参见 [Abr]。这一步无法以对数光滑函子性的方式完成。

4.2.8. 对数阶降低算法。 定理 4.2.4 的证明通过按维数归纳构造所需的算法，并验证该算法

满足所有要求的性质。因此，假设当 $\dim(X) \leq n-1$ 时，算法已经构造完成；现在来构造 $\dim(X) = n$时的算法。输入数据由一个理想 $\mathcal{I}$ 和一个自然数 $d \geq 1$ 组成。输出将是一个 $\mathcal{I}$-可容许的 d-序列

$$X' \to X_n \dashrightarrow X_{n-1} \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow X_1 \to X,$$

其中第一个和最后一个箭头是单项式爆破，而箭头$X_{i+1} \dashrightarrow X_i$ 表示由一系列 $\mathcal{I}_i$-容许的非单项式爆破构成的完整 d序列，并且满足以下条件：最终变换满足 $\operatorname{logord}_{X'}(\mathcal{I}') < d$；每个中间变换 $\mathcal{I}_i \subseteq \mathcal{O}_{X_i}$ 可分解为 $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}_i^{\mathrm{cln}}\mathcal{N}_i$，其中 $\mathcal{N}_i$ 是可逆单项式，且 $d_i = \operatorname{logord}_{X_i}(\mathcal{I}_i^{\mathrm{cln}})$有限；并且有 $d_1 > d_2 > \cdots > d_{n-1} \geq d > d_n$。

初始清理步骤。此步骤使对数阶有限，并且由沿着 d中心 $\mathcal{J}^{(d)}$进行的一次爆破构成，其中 $\mathcal{J} = \mathcal{M}(\mathcal{I})^{1/d}$。显然， $\mathcal{J}_{(d)}$是 $\mathcal{M}(\mathcal{I}$的整闭包，因此该爆破具有相同的效果，并且根据引理3.3.8，变换 $\mathcal{I}_1$ 具有有限对数阶。特别地， $\mathcal{N}_1$ 是平凡的。

正则步骤。 此步骤以 $\mathcal{I}_i = \mathcal{I}_i^{\mathrm{cln}}\mathcal{N}_i$ 和 $d_i \geq d$ 为输入，并输出一个 d-序列 $f_\bullet^d$: $X_{i+1} = Y_m \dashrightarrow Y_0 = X_i$，它按照引理 3.3.18 的意义与 d_i-序列 $f_\bullet^{d_i}$: $Y_m \dashrightarrow Y_0 = X_i$ 相关，并降低 $\mathcal{I}_i^{\mathrm{cln}}$的对数阶。由引理 3.3.18 该序列输出 $\mathcal{I}_{i+1} = \mathcal{I}_{i+1}^{\mathrm{cln}}\mathcal{N}_{i+1}$，且 $d_{i+1} < d_i$。

d_i-序列 $f_\bullet^{d_i}$按如下方式构造。在 ´的 etale 局部工作时，我们可以假设存在一个到 $\mathcal{I}$ 的最大接触 H，并且根据归纳假设，理想 $\mathcal{C}(\mathcal{I})|_H$ 具有一个对数阶 $d_i!$-约化 $g_\bullet$: $H_m \dashrightarrow H_0 = H$，其中心为$\overline{\mathcal{J}}_{(d!)\,j}$。我们定义 $f_\bullet^{d_i}$为中心为 $\mathcal{J}_{(d)\,j}$ 的序列，其中 $\mathcal{J}_j$ 是 $\overline{\mathcal{J}}_j$ 在满射 $\mathcal{O}_{Y_j} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{H_j}$下的原像。因此，若在 Y_j 上局部有 $H_j = V(t)$，且 $H_{j+1} \to H_j$的中心为 $(t_1, \ldots, t_r, u^{p_1}, \ldots, u^{p_s})^{(d_j!)}$，那么 $Y_{j+1} \to Y_j$的中心为 $\mathcal{J}_j = (t, t_1, \ldots, t_r, u^{p_1}, \ldots, u^{p_s})^{(d_j)}$，相应的 $f_\bullet^d$的中心为 $(t, t_1, \ldots, t_r, u^{p_1}, \ldots, u^{p_s})^{(d)}$。

根据定理 3.3.14 序列 $f_\bullet^d$ 确实是一个对数阶 d-约化 $\mathcal{I}_i$，根据定理3.3.15 它与选择无关，并且可从 ´étale 局部构造下降。

最终清理步骤。这是显然的——我们只需重复清理步骤，但这次 $\mathcal{M}(\mathcal{I}_n) = \mathcal{N}_n$，因此只需爆破 d-中心 $\mathcal{N}_n = (\mathcal{N}_n^{1/d})^{(d)}$。于是，$X' = X_n$ 且 $\mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_n^{\mathrm{cln}}$符合要求。

4.2.9. 算法的论证。由构造显然可知，所得到的 $X' \to X$ 序列是 $\mathcal{I}$ 的对数阶 d约化——它首先使对数阶变为有限，然后将清洁部分的对数阶降低到 d以下，最后移除可逆单项式部分。该算法与对数光滑态射 $Y \to X$ 的相容性源于我们构造中的所有基本要素都具有对数光滑函子性，正如推论 3.3.6 和 3.2.13、引理 3.2.4(ii)等中所述。最后，只需在 ´étale-局部地检验重新嵌入原理，因此可以假设 $X \hookrightarrow Y$ 是对数轨形的纯余维一闭浸入，而 $\mathcal{I}'$ 是 $\mathcal{O}_Y$中 $\mathcal{I}$ 的原像。于是 $\operatorname{logord}_Y(\mathcal{I}') = 1$ 且X 是 $\mathcal{I}'$的最大接触，因此根据算法的正则步骤， $\mathcal{F}(\mathcal{I}', 1)$ 是 $\mathcal{F}(\mathcal{I}, 1)$的推前，这正是重新嵌入原理所断言的内容。

备注 4.2.10。我们已经指出，对数主化是通过应用带有 $d = 1$的对数阶约化得到的。类似于对数阶约化的论证，通过迭代应用最大阶约化，可以稍微更快地进行主化。这样看起来可能更自然，因为无需执行最终清理步骤，但其缺点是，这样的算法不满足重新嵌入原理。

4.2.11. 不变量。我们将对数阶约化 $\mathcal{F}(\mathcal{I}, d)$构造为爆破序列 $X_{i+1} \dashrightarrow X_i$的复合，这些序列可由严格递减序列$\mathrm{logord}(\mathcal{I}_i^{\mathrm{cln}})$参数化。特别地，第一个阶段编号为 ∞，最后一个阶段的编号严格小于 d ，为方便起见将其替换为0；所有正则步骤则由一个有限数 $d_i \geq d$编号。第一步和最后一步都是单项式爆破，而每个正则步骤都对应于 $\mathcal{C}(\mathcal{I}_i^{\mathrm{cln}})|_{H_i}$的对数阶 $d_i!$-约化。我们按$\dim(X)$归纳法定义 $\mathcal{F}(\mathcal{I}, d)$的一次独立爆破的不变量如下：第一步的爆破（若非平凡）具有不变量(∞)；最后一步的爆破（若非平凡）具有不变量(0)；第 i个正则序列的爆破具有不变量$(d_i, \mathrm{inv}_{H_i})$，其中$\mathrm{inv}_{H_i}$表示 $\mathcal{C}(\mathcal{I}_i^{\mathrm{cln}})|_{H_i}$的相应对数阶 $d_i!$-约化序列的不变量。

每个未归一化不变量都具有 $(d_0, d_1, \ldots, d_n, *)$ 的形式，其中 $d_0 \geq d$,$d_{i+1} \geq d_i!$ 且 $* \in \{\infty, 0\}$。根据不变量长度的归纳法，以及 $\mathrm{logord}_{X_i}(\mathcal{I}_i^{\mathrm{cln}})$ 严格递减这一事实，我们得到：序列中的每次单独爆破确实都会使不变量的值减小。因此，归一化不变量 $(q_0, q_1, \ldots, q_n, *)$ 也同样如此，其中 $q_i = d_i / \prod_{j<i}(d_j - 1)!$。

注记 4.2.12. (i) 该算法由嵌套循环组成：外层循环使 logorder d_0 的值减小，下一层循环使第一最大接触 H_1 （及其变换）上的系数理想 d_1 的阶减小，依此类推。这个不变量仅用于标示我们在这一系列循环中的位置。

(ii) 第一次爆破的未归一化不变量总是形如 $(d_0, .., d_n, d_{n+1} = \infty)$，其中 d_i 是限制在第 i 次迭代最大接触上的 i 次迭代系数理想的对数阶。

4.2.13. 与经典算法的比较。经典主化算法更复杂、速度也更慢，但使用的基本操作更简单。以下是这两种算法的主要区别：

0) 经典算法的组合步骤相当繁重，并使用例外分量的阶。在我们的情形中，与之类似的步骤是在最终清理步骤中进行一次爆破。

1) 经典算法每次转到最大接触时，都必须分离边界。这是因为最大接触与边界的交可能不理想。这个分离通过一个关于边界分支数量的独立循环来完成，因此算法正则步骤的实际归一化不变量形如 $(q_0, s_0;\ q_1, s_1; \ldots)$。与此不同，对数算法选择与对数结构相适配的最大接触。

2）经典算法使用正则参数和例外参数来计算阶。因此，清洁部分可能已经得到解决，而整个 $\mathcal{I}$ 的阶仍大于 d。这就迫使我们使用伴随理想，而不能只处理清洁部分。在对数算法中，则可以放心地忽略单项式因子。

∞）经典算法从不以初始清理步骤开始，其不变量也从不为（∞）（除非 $\mathcal{I}=0$），但当 $\mathcal{C}$（$\mathcal{I}$）在最大接触 H 上的限制为零、因而其阶为无限时，会应用这一步的类似步骤。在经典算法中，这种情况也通过以无限次数结束不变量串来编码。当且仅当 $\mathcal{I}=$（I_H）^{d}时，这种情况才会出现；此时，只需对 H 进行一次爆破，就能主化 $\mathcal{I}$。

4.3. 其他对数框架。简言之，对数消解理论适用于任何具有足够丰富的导子层的对数空间背景——这些导子层足以区分正则参数与对数参数；所得方法对于对数正则态射具有函子性。这包括带有对数结构的各种解析空间范畴，以及具有足够多对数导子的概形或形式概形。

5. Resolution of morphisms

本节旨在概述 [ATW20b], 中的结果，其中，对数去奇异方法被推广到相对情形，并得到了对数概形之间态射的函子性消解。与前文一样，这项工作的一个重要部分是建立框架。简而言之，研究的是相对对数轨形上的主化 $f\colon X\to B$，其带有对数正则 B，并使用相对对数导子层 $\mathcal{D}_{X/B}=\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_B}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$来定义相对对数阶、极大接触和系数理想。借助这一语言，可以直接推广主化算法。因此，本文的论述将十分简要，我们通常只会指出第§3–4节中的哪项论证需要在相对情形下作出调整。

相对情形中唯一真正的新特点是，基变换应当纳入算法之中。一方面，相对于任意基变换，该算法都是函子性的，因此确实是一个真正的相对算法。另一方面，该算法可能在给定的 B上失败，只有在进行足够大的基变换之后才会成功 $B'\to B$。其证明基于一种新的工具——单项化定理，参见 [ATW20b，定理 3.6。13]与之前一样，为简便起见，我们将考虑 f 为有限型的情形，并仅在最后对更一般的设定作几点评论。

5.1. 框架。 相对框架的构造占据了 [ATW20b] 中的第 2 节和第 4 节，内容相当繁重。这在很大程度上是由于考虑了不一定是有限型的对数正则态射。在这种情况下，需要求层 $\mathcal{D}_{X/B}$ 足够“庞大”。对于域上的有限型 DM 叠而言，态射自动是对数光滑的，而层 $\mathcal{D}_{X/B}$是预期秩的局部自由层，因此情形得以简化。尽管如此，我们仍愿意简要提及所有所需的要素，并仅提供[ATW20b]的参考。

5.1.1. 几何对象。 这次，自然地，一个基本对象是一个态射 $f\colon X\to B$ 从有限型 fs 对数 DM 叠到 k上。原则上，我们旨在构造一种纯相对算法，它应适用于任意目标；但出于技术原因，我们必须限制在 B 对数光滑的情形，参见[ATW20b，注释 1.2.9 和 3.1。11]。无论如何，算法只有在进行足够大的基变换后才能成功，因此实质上这只是将我们限制在一般点处对数光滑的目标这一情形，另见 [ATW20b，注释 1.2。9]。为简化表述，我们假设

that B 是一个对数流形（即它也是一个概形）；不过，利用底空间上的 ´étale 下降，很容易将所有内容推广到 B 是一个代数栈的情形。

我们将考虑态射之间的两类态射：1）仅有B-态射（目标相同）；2）基变换态射（或图表） $f' \to f$，其中 f'： $X' = X \times_B B' \to B'$，且乘积取自 fs 范畴。在情形（2）中，我们称 $X' \to X$ 为基变换态射。

若 f 是对数光滑的，我们称其为相对轨形。若此外 f 是可表示的，则称其为相对流形。照例，任意态射 $Z \to B$ 的消解将通过在 étale 局部将其嵌入相对流形 f： $X \to B$，并在相对 B-流形 X上主化 I_Z 而得到。我们将使用相对对数导子层 $\mathcal{D}_{X/B} = \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_B}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$。

5.1.2. 尖态射。 ATW20b 中的一些论证 [ATW20b]仅适用于我们现在要介绍的一种特殊形式的对数光滑态射。我们称态射f： $X \to B$ 在点 处是尖的，若对于一个位于 $x \to X$ 上方的几何点 $\overline{x}$ 以及 x，同态 $\overline{b} = f(\overline{x})$ 是单射。对数光滑态射中一个典型的非尖例子是对数爆破，见 $\overline{M}_{\overline{x}} \to \overline{M}_{\overline{b}}$Tem22，例 4.1。[Tem225]。因此，下面这个事实并不令人意外。

练习 5.1.3. 设 f: $X \to B$ 是底空间为 k 且目标为对数光滑的对数簇之间的态射。证明存在一个对数爆破 $B' \to B$，使得基变换 f': $X' \to B'$ 是一个尖态射。（提示：首先，对 f 的一个图 $\mathsf{A}_Q \to \mathsf{A}_P$ 解决这一问题，其中有一个单射 $P \hookrightarrow Q$ （注意，幺半群不必是尖的）。然后利用 X 的拟紧性，以及以下事实：对数爆破构成一个滤过族；而且，对于对数光滑簇，对数爆破可以从开子簇延拓，因为单项式子概形的闭包仍是单项式的。）

注 5.1.4. 事实上，通过对底空间进行对数爆破，可以实现更多目标：可以使 f 满足整性，即对于每个满足 $\overline{b} = f(\overline{x})$ 的 $\overline{x} \to X$， $P = \overline{M}_{\overline{b}}$ 且 $Q = \overline{M}_{\overline{x}}$，同态 $P \to Q$ 是整的。关于后面这些概念的几种等价表述，请参见 [Kat89, Proposition 4.1]。特别地，这意味着 f 是平坦的（假设 f 是对数光滑的，见 [Kat89, 4.5]），并且在集合意义下， Q 分解为 $P \times Q/P^{\mathrm{gp}}$，其中 Q/P^{gp} 表示 Q 在 $Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}$ 中的像。此类对数爆破的存在性，是 Raynaud-Gruson 平坦化定理的一种组合类比，不过其证明相当初等，见 [ATW20b, Proposition 3.6.11(i)] 及其中的参考文献。本文不会用到整化定理。

5.1.5. 参数。 回顾一下，我们已在 [Tem22，§5.2.10]定义了态射的对数纤维这一概念 f: $X \to B$。一般定义使用代数栈 $\mathbf{Log}_B$，但对于尖锐的 f，对数纤维不过是f的纤维的对数分层，参见 [Tem22，练习 5.2。11]。

设 f: $X \to B$ 是对数簇之间的对数光滑态射，并假设在 $x \in X$ 和 $b = f$（x）处的对数结构均为扎里斯基的。我们称 f在 x处的一个相对参数族为一个族（t， q），其中 $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathcal{O}_{X,\, x}$映到对数纤维 x 上的一个正则参数族（根据对数光滑性假设，该纤维是光滑的），而 $q_1, \ldots, q_r$映到 Coker($P^{\mathrm{gp}} \to Q^{\mathrm{gp}}$) $\otimes \mathbb{Q}$的一个基。我们分别称 t_i和 q_j 为正则参数和单项式参数。

5.1.6. 形式描述。有时，与对数光滑态射打交道会更加方便，尤其是因为它们具有简单的形式描述。

引理 5.1.7. 假设 $f\colon X \to B$ 是对数簇的对数光滑态射，f 在点 $x \in X$ 处是尖的，并且 X 和 B 的对数结构分别在 x 和 $b = f$ 处是扎里斯基的（x）。固定相容的单项式图表 $P = \overline{M}_b \to \mathcal{O}_b$ 和 $Q = \overline{M}_x \to \mathcal{O}_x$，$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 固定定义域 k（x）$\hookrightarrow \mathcal{O}_x$ 以及 k（b）$\hookrightarrow \mathcal{O}_b$，并固定一族正则参数 t_1，……，$t_n \in \mathcal{O}_{x\circ}$ 则（$\widehat{\mathcal{O}}_b$）$_P[\![Q]\!][\![t_1$，……，$t_n]\!]\widehat{\otimes}_{k(b)}k$（$x$）$= \widehat{\mathcal{O}}_{x\circ}$

与许多类似的陈述一样，由参数及其定义域的选取所诱导的自然同态很容易看出是满射的（它在剩余域和余切空间上诱导满射同态），而单射性则可通过比较相对维数得到。参见 [ATW20b，引理 2.3。14]详情见此处。

5.1.8. 子轨形。 f的相对子轨形：$X \to B$ 是一个严格闭子叠$Y \hookrightarrow X$，且在 B上对数光滑。与绝对情形一样，´在 étale 局部，子轨形由正则参数的消失给出。所使用对数纤维而非对数分层后，该论证本质上相同。下面的习题是对叠 Log$_B$的宣传。对于尖态射，只需使用对数概形和图表的“低技术”便可直接解决；但使用叠 Log$_B$ 的“高技术”的一般解法反而更简单。

练习 5.1.9. 证明：若 $f\colon X \to B$ 是对数光滑簇之间的对数光滑态射，且 $Y \hookrightarrow X$ 是一个相对 B子流形，那么对于任意点 $y \in$Y，都存在正则相对参数 $t_1, \ldots,$ $t_n \in \mathcal{O}_{X,\ y}$，使得 X/B的 $Y = V(t_1, \ldots, t_r)$在 y处局部成立。（提示：利用 X 和 Y在 Log$_B$ 上对数光滑，且它们在 B 上的对数纤维就是在 Log$_B$上的纤维。）

5.1.10. Kummer 中心与爆破。相对 d中心是形如 $\mathcal{J} = (\mathcal{I} + \mathcal{N})^{(d)}$的理想，其中 $\mathcal{I}$是子轨形理想（也就是说，$Y = V(\mathcal{I})$是 X的相对子轨形），而 $\mathcal{N}$是单项式 Kummer 理想。由于 B 是对数流形，X 是 k 上的对数轨形，而 Y是它的对数子轨形。特别地，$\mathcal{J}$ 是 §4.1.6 意义下通常的d中心，并且沿相对中心$\mathcal{J}$ 的 Kummer 膨胀就是 §4.1.14 中定义的沿 $\mathcal{J}$ 的 Kummer 膨胀。这一技巧为我们省去了相对情形下的一些工作，但为了证明下面的结论，仍须利用中心相对于 B 处于特殊位置这一点

引理 5.1.11. 假设 $X \to B$ 是一个带有对数光滑 B 的相对轨形，且 $\mathcal{J}$ 是 X 上的一个相对 d-中心。那么 $X' = \mathrm{Bl}_{\mathcal{J}}(X) \to B$ 也是一个对数轨形。

利用 ´étale 下降，证明可归结为一个显式的图表计算，类似于练习3.1.14中概述的论证。必要的细化在于，现在模型情形的形式为 Spec($A_P[Q][t_1, \ldots, t_n]$) $\to$ Spec(A)，其中 P和 Q生成对数结构，而 $t_1, \ldots, t_n$是一个相对参数族，其中的一个子族用于定义中心。

5.1.12. 相对对数阶。理想 $\mathcal{I}$ 在相对 B-轨形 X 上点 x 处的相对对数阶定义如下：设 $S = S_x$ 为包含 x 的对数纤维，则 logord$_{X/B,x}(\mathcal{I})$:= ord$_{S,x}(\mathcal{I}|_S)$。与绝对情形一样（见习题 3.2.12），相对对数阶可以利用相对对数导子计算。与前文一样，我们用 logord$^{X/B}(\mathcal{I})$ 表示 X 上 $\mathcal{I}$ 的最大相对对数阶，并将 $\mathcal{I}$ 的对数阶视为函数 logord($\mathcal{I}$)：$X \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$。

习题 5.1.13. (i) 证明 $\mathcal{D}_{X/B}$ 限制为 S 上的导子层，并由此推出 $\mathrm{logord}_{X/B,\,x}(\mathcal{I})$ 是满足 $\mathcal{D}^{(\leq d)}_{X/B}(\mathcal{I}_x) = \mathcal{O}_x$ 的最小数 d。（提示：利用对数光滑态射 $X \to B$ 的对数纤维和相对对数导子分别是光滑态射 $X \to \mathrm{Log}_B$ 的通常纤维和相对导子。）

(ii) 假设 X 是一个簇。证明：$t \in \mathcal{O}_{X,\,x}$ 是 x 处的相对参数，当且仅当 $\mathrm{logord}_x(t) = 1$。

5.1.14. 基变换函子性。我们讨论过的所有基本构造，包括相对对数导子、中心、Kummer 爆破以及相对对数阶，都与任意基变换 $g\colon B' \to B$ 相容，其中 B' 是光滑的（这是由于我们的一般限制），但态射不必是光滑的（甚至可以将 B' 收缩为一个点）。

引理 5.1.15. 设 $B' \to B$ 是对数 k-流形之间的一个态射，设 $f\colon X \to B$ 是一个对数轨形，其拉回为 $f'\colon X' \to B'$，基变换态射为 $g\colon X' \to X$；设 $\mathcal{I}$ 是 X 上的一个理想，其拉回为 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$；设 $\mathcal{J}$ 是 X 上的一个 d-中心，其拉回为 $\mathcal{J}' = (\mathcal{J}\mathcal{O}_{X'_{\mathrm{ket}}})^{\mathrm{nor}}$。那么 $\mathcal{D}_{X'/B'} = g^*\mathcal{D}_{X/B}$，$\mathrm{logord}(\mathcal{I}') = \mathrm{logord}(\mathcal{I}) \circ g$，$\mathcal{J}'$ 是一个 d-中心，并且 $\mathrm{Bl}'_{\mathcal{J}}(X') = \mathrm{Bl}_{\mathcal{J}}(X) \times_X X'$。

事实上，所有这些性质都可轻易地从显式的局部描述（对数光滑态射、爆破的图等）推出。此外，也容易看出，若 X 是一个簇，且 (t, q) 是 $x \in X$ 处一族正则的单项式相对参数，那么它们的拉回 (t', q') 在 $x' \in X'$ 上方的任意 x 处构成一族正则的单项式相对参数。参见 [ATW20b, 2.4.9, 2.7.2, 2.8.14(i)4.2.20(iv)]。

5.1.16. 对数光滑函子性。对于 B-轨形之间的对数光滑态射，也有类似的相容性。

引理 5.1.17. 设 B 是一个对数 k-流形，设 $f\colon X \to B$ 和 $f'\colon X' \to B$ 是对数轨形，设 $g\colon X' \to X$ 是一个对数光滑 B-态射，设 $\mathcal{I}$ 是 X 上的一个理想，其拉回为 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$，并设 $\mathcal{J}$ 是 X 上的一个 d-中心，其拉回为 $\mathcal{J}' = (\mathcal{J}\mathcal{O}_{X'_{\mathrm{ket}}})^{\mathrm{nor}}$。则自然同态 $\mathcal{D}_{X'/B'} \to g^*\mathcal{D}_{X/B}$ 是满射且局部分裂，$\mathrm{logord}(\mathcal{I}') = \mathrm{logord}(\mathcal{I}) \circ g$，$\mathcal{J}'$ 是一个 d-中心，且 $\mathrm{Bl}_{\mathcal{J}'}(X') = \mathrm{Bl}_{\mathcal{J}}(X) \times_X X'$。

参见 [ATW20b、2.4.11、2.7.6、2.8.15(i) 和 4.2.20(v)]。与库默尔膨胀的相容性源于其对数 k-流形类比中的相应结论，但关于相对参数和对数阶的情形稍微微妙一些，需要谨慎处理：如果 g 在 $x' \in X'$ 处并非尖锐，且 $x = g(x')$，那么在 x 处，某些对数参数的拉回会变得线性相关，而在 x' 处则应移除某些对数参数，并添加一些“额外的”正则参数。此外，在这种情况下，x' 的对数纤维与 f 的对数纤维之间的关系也并不简单。不过，在 f' 处的一族正则相对参数，会拉回到 x 处一族正则相对参数的某个子族，而这足以证明 x' 在对数纤维之间诱导正则态射，参见 g ATW20b、2.7.6 和 2.7。7]与 g 相容的相对对数阶结论也随之得到。

5.2. 算法。 框架建立后，消解、主化和阶数降低算法的构造方式与截面 4.2 中的完全相同，只是使用相对概念而非绝对概念。我们将在

自动驾驶模式下回顾所有这些内容，指出发生新现象的唯一一点，并继续阐述主要定理。

5.2.1. 化归为主化。设 $g\colon Z \to B$ 是一个对数结构为扎里斯基型的对数簇态射。那么对任意点 $z \in Z$，都存在一个邻域U，它可严格闭浸入到一个对数光滑的 B-概形 X中。事实上，局部考察即可，不妨设 f由图 $\mathbf{A}_Q \to \mathbf{A}_P$建模，其中 $Q = \overline{M}_z$ 且 $P = \overline{M}_b$，对于 $b = g(z)$。设 $t_1, \dots, t_n \in \mathcal{O}_z$是一族映到 $Z \to B_P[Q]$ 在 z处纤维的余切空间的一组基的元素，则诱导的态射$Z \to X_0 = \mathbf{A}^n \times B_P[Q]$ 在 z 处是严格且非分歧的，因此在 z 的一个邻域 U上，该态射可分解为一个严格闭浸入 $U \hookrightarrow X$与一个严格 ´étale 态射 $X \to X_0$的复合。显然， X 相对于B 的相对维数是可能的最小值；更仔细地论证可以证明，除去一个´étale 对应关系，这个将 U 严格闭嵌入到相对对数B流形中的最小闭嵌入是唯一的，参见 [ATW20b, §8.2]。

现在，与经典情形或绝对对数情形中的论证相同，可以证明：在 B-流形上的理想函子性主化，蕴含对 B 上局部等维且一般点处对数光滑的 log B-概形（或代数栈）的函子性消解。

5.2.2. 极大接触与系数理想。设 $X \to B$ 是一个相对对数流形， $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ 是一个理想， $x \in X$ 是一个点，且 $d = \operatorname{logord}_x(\mathcal{I}) < \infty$。那么， x 处的极大接触与系数理想的定义与 §3.3 中相同：在 x 处与 $\mathcal{I}$ 的一个极大接触是任意 $H = V(t)$, 其中 $t \in \mathcal{D}^{(\le d-1)}_{X/B}$ 是 x 处的一个正则相对参数；系数理想是齐次化和$\mathcal{C}(\mathcal{I})$ $= \sum_{a=0}^{d-1} (\mathcal{D}^{\le a}_{X/B}(\mathcal{I})\ d - a)$。

此外，在极大阶情形下 $d =$ 对数阶$_{X/B}(\mathcal{I})$，关于对数阶3.3.14 和3.3.15 等价性的定理有精确的类似结果：关于 d-约化的 $\mathcal{I}$ 和对数阶 $d!$-约化的 $\mathcal{C}(\mathcal{I})|_H$唯一性的论证也有精确的类似结果，并且关于 H 和 $\mathcal{C}(\mathcal{I})|_H$ 在 ´étale 对应意义下的唯一性也是如此。论证也完全相同。

最后，非极大阶情形可通过引理3.3.18的精确类似结果归约到极大阶情形。总之，在有限相对对数阶的情形下，算法及其论证与第 3 节和第 4 节所讨论的绝对情形完全相同。

5.2.3. 一个复杂之处。我们还需考虑最简单的情形应该是什么——即对数阶为无穷大的情形，而这一情形再次证明并非那么简单。在绝对情形下，我们必须引入 Kummer 爆破来处理这一问题，而现在看来，算法恰恰可能在这一步失败.....

因此，假设 $\operatorname{logord}_x(\mathcal{I}) = \infty$，并且我们正在寻找一种相对对数阶$d$-约化。在这种情况下，在 x 处的局部，任何 $\mathcal{I}$-容许中心 $\mathcal{J}^{(d)}$ 的相对对数阶都是无限的，也就是说，它是单项式的。因此，在我们的框架内唯一能做的就是爆破整个单项式包 $\mathcal{N} = \mathcal{M}(\mathcal{I})$（或其饱和），并将其视为带有 $\mathcal{J} = \mathcal{N}^{1/d}$ 的 d-中心 $\mathcal{J}_{(d)}$——很容易看出，爆破任何更大的单项式理想都不会使相对对数阶变为有限。如果爆破这个理想后相对对数阶仍不是有限的，那么算法就会失败。

另一方面，对数阶无穷大可由微分饱和$\mathcal{D}^{\infty}_{X/B}(\mathcal{I})$检测（并加以控制），而它包含于 $\mathcal{N}$。在绝对情形下，引理3.3.4 保证$\mathcal{D}^{\infty}_{X}(\mathcal{I}) = \mathcal{N}$，由此可轻易得出，其对数阶为

经爆破 $\mathcal{I}$ 后，其变换会下降 $\mathcal{N}$，参见引理3.3.8。在相对情形下，我们只使用相对导子的子模 $\mathcal{D}_{X/B} \subseteq \mathcal{D}_X$，也就是说，我们没有非平凡的方法对 B上的函数的拉回进行求导。特别地，算法失效的一个典型例子是 $\mathcal{I}$ 是一个非单项式理想的拉回$\mathcal{I}_0$ ，其位于 B上。

例 5.2.4. 任取一个 B ，其具有一个非零真理想 $\mathcal{I}_0$ ，且其单项式包是平凡的： $\mathcal{M}(\mathcal{I}_0) = \mathcal{O}_B$。例如，取带平凡对数结构的 B ，并任取一个真理想。考虑带有由 B 诱导的对数结构的 $X = \mathbb{A}^n_B = \mathrm{Spec}_B(\mathcal{O}_B[t_1, \ldots, t_n])$。

(i) 那么，对于理想 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0\mathcal{O}_X$，主化会失败，因为对数阶$\mathrm{ord}^{X/B}(\mathcal{I}) = \infty$ ，但 $\mathcal{M}(\mathcal{I}) = \mathcal{O}_X$。

(ii) 更一般地，对于任意 $0 \leq m \leq n$，理想 $\mathcal{I}' = \mathcal{I} + (t_1, \ldots, t_m)$ 的主化都会失败。这一次，算法的前 m 步只是限制到迭代极大接触上，随后算法就会到达 (i) 中所述的情形并失败。例如，若 $B = \mathrm{Spec}(k[b])$ 且 $X = \mathrm{Spec}(k[t])$，那么 $\mathcal{I}' = (t, b)$ 的相对主化会失败。也可以直接看出这一点：$\mathcal{I}$ 不包含在任何相对中心中：绝对算法会爆破中心 (t, b)，但它不是相对中心（更糟的是，爆破 (t, b) 会产生一个在 B上并非对数光滑的对数概形）。

5.2.5. 基变换。上述例子也指出了解决问题的一种方法：如果 $\mathcal{I}_0$ 是单项式，那么 $\mathcal{I}'$ 就是一个相对中心，我们可以自由地对其进行爆破（特别是，结果仍然在底空间上对数光滑）。因此，很自然地会想到，通过扩大 B 上的对数结构，可以改善这种情况。当然，这样的操作可能会使 B 不再对数光滑，因此一般还应修改其底层概形。事实证明，只需修改底空间 B，确实就能将 $\mathcal{D}_{X/B}$ 饱和理想单项化。我们现在陈述这个单项化定理，并将其证明的讨论推迟到第 5.3 节。我们称对数流形之间的态射 $f\colon B' \to B$ 是沿 $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_B$ 的爆破，若在概形论意义下有 $\underline{B'} = Bl_{\mathcal{J}}(\underline{B})$，且 B' 上的对数结构由例外除子 E_f 从 B 上的对数结构诱导而来；也就是说，定义这些对数结构的除子 $D \subset B$ 和 $D' \subset B'$ 满足关系 $D' = f^{-1}(D) \cup E_f$。

定理 5.2.6. 设 B 是 k上的对数流形， $f\colon X \to B$ 是一个对数轨形，并设 $\mathcal{I}$ 是 X 上的一个理想，使得 $\mathcal{D}_{X/B}(\mathcal{I}) \subseteq \mathcal{I}$。那么存在一个对数流形态射 $g\colon B' = Bl_{\mathcal{J}}(B) \to B$，使得 g 是一次爆破，且拉回 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$ 是一个单项式理想，其中 $X' = X \times_B B'$。此外，还可以使 g 的中心 $\mathcal{J}$ 在 B中 $V(\mathcal{I})$ 的概形像之外为单项式的。

注 5.2.7。 如果 $B = \mathrm{Spec}(k)$ 或 B 是曲线，并且其任意一点处的对数结构都非平凡，那么任何一个 $f(V(\mathcal{I})$以外中心为单项式的爆破 $B' \to B$ 都没有作用（因为修改 $f(V(\mathcal{I}$的唯一方式是增加对数结构）。因此，在这种情况下，该定理仅断言 B 是单项式；当 $\mathcal{I}$ 是一个点时，我们便得到引理 3.3.4。特别是，对于这样的底空间， B 我们下面将要陈述的主要结果无需对 B进行任何修改。

5.2.8。 相对对数阶约化。 第一个主要结果涉及相对对数阶 d约化，其定义仿照定义 4.2.3 ，将 $\mathcal{I}$-容许中心替换为 $\mathcal{I}$-容许 B-相对中心。

定理 5.2.9. 存在一种方法 $\mathcal{F}$ ，其输入为一个对数轨形$f\colon X \to B$，其中 B 是对数流形， $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ 是一个理想， $d \geq 1$是一个数；该方法要么失败，要么输出一个 $\mathcal{I}$ 的相对对数阶 d 约化 $\mathcal{F}(f,\mathcal{I},d)\colon X' \dashrightarrow X$，满足以下条件。

(i) 存在性：存在一个爆破 $B' \to B$，其在 $f(V\mathcal{I})$ 之外的中心是单项式的，使得 B' 是对数流形，并且 $\mathcal{F}$在 $f'\colon X' = X \times_B B' \to B', \mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$ 和 d上不会失败。

(ii) 基变换函子性：若 $\mathcal{F}$在 $f,\mathcal{I},d$上不会失败，则对于任意具有 fs 基变换 $f'\colon X' = X \times_B B' \to B'$和$\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$的对数流形态射 $B' \to B$，有 $\mathcal{F}(f',\mathcal{I}',d)$ 可由 $\mathcal{F}(f,\mathcal{I},d) \times_X X'$通过省略所有平凡膨胀得到（特别是，它不会失败）。

(iii) 对数光滑函子性：若 $\mathcal{F}$ 在 f、$\mathcal{I}$、d 上不失效，则对任意满足 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$ 的对数光滑 $g\colon X' \to X$，都有 $\mathcal{F}(f\circ g,\mathcal{I}',d)$ 是由 $\mathcal{F}(f,\mathcal{I},d) \times_X X'$ 去除所有平凡膨胀后得到的。

(iv) 对于 B-轨形之间余维恒定的闭浸入 $X \hookrightarrow X'$，重新嵌入原理成立。

用更经典的标记理想语言表述（$\mathcal{I}$， d），这就是 [ATW20b，定理 7.1。1]。该算法的构造与其绝对类比完全相同（并且当 B =Spec(k) 时，是其特例），见 §4.2.8。相对算法中的新结论与基变换有关，即 (i) 和 (ii)。由于框架中的所有要素都满足基变换函子性，(ii) 的证明很直接，见引理 5.1.15。存在性通过以下归纳方式证明。回顾一下，§4.2.8 中的算法会生成一个 $\mathcal{I}$-可容许的 d-序列

$$Y \to X_n \dashrightarrow X_{n-1} \dashrightarrow \ldots \dashrightarrow X_1 \to X,$$

其中第一次爆破使对数阶变为有限值，而序列 $X_{i+1} \dashrightarrow X_i$通过归纳法构造（利用极大接触），并降低清洁部分的对数阶，直至其降至 d 以下。

在相对情形中，每一步都有可能失败。然而，如果 $\mathcal{D}^{\infty}_{X/B}(\mathcal{I})$ 是单项式，则第一步必然成功；根据单项化定理 5.2.6，经过适当的爆破 $B' \to B$ 后即可达到这一条件。因此，令 $X' = X \times_B B'$ 和 $\mathcal{I}' = \mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$，我们有 $\mathcal{D}^{\infty}_{X'/B'}(\mathcal{I}') = \mathcal{D}^{\infty}_{X/B}(\mathcal{I})\mathcal{O}_{X'}$ 是单项式，从而 $\mathcal{F}(f',\mathcal{I}',d)$ 的第一步不会失败。此外，对于任意进一步的基变换 $B'' \to B'$，情况也同样如此。根据归纳假设， $\mathcal{F}(f',\mathcal{I}',d)$ 的第二步在适当的爆破 $B'' \to B'$ 后成功；根据定理的断言 (ii)，经过任意进一步的爆破后该步骤也仍然成功，依此类推。最后，我们得到一个爆破序列 $B^{(n)} \dashrightarrow B$ （可表示为一次爆破），使得除最后的清洁步骤外，所有步骤在基变换 $B^{(n)} \to B$ 后均成功。还需注意，最后的清洁步骤爆破的是一个例外除子，因此会自动成功。

注 5.2.10. 将单项化定理作为黑箱使用，所需的基变换 $B' \to B$ 由 $\mathcal{F}$ 以典范（事实上，是简单的算法式）方式决定。然而，目前单项化定理的证明是存在性的，且相当困难，见下文 §5.3 中的讨论。

5.2.11. 相对主化。 在前一个定理中取 $d = 1$，便得到相对主化定理 [ATW20b，定理 1.2。6]。

定理 5.2.12。在目标为 k 上的对数流形的相对对数轨形范畴上，存在一种相对对数主化方法 $\mathcal{P}$，它具有基变换函子性和对数光滑函子性，满足重新嵌入原则，并且在对 B 进行足够多次中心在 $f(V(\mathcal{I}))$ 外为单项式的爆破后，对每个 $(f: X \to B, \mathcal{I})$ 均能成功。

5.2.13. 相对去奇异化。 最后，通过 §5.2.1中讨论的通常方法，上述定理推出如下函子半稳定约化定理，另见 [ATW20b，定理 1.2。12]。

定理 5.2.14。存在一种相对去奇异化方法 $\mathcal{R}$，其输入为一般点处对数光滑态射 $g: Z \to B$，其中 $Z \to B$ 是 k-簇，带有一个局部等维的 Z 和一个对数光滑的 B；该方法要么失败，要么输出一个叠理论修改 $Z' \to Z$，使得 $Z' \to B$ 为对数光滑，并满足以下条件。

(i) 存在性：存在一个爆破 $B' = Bl_{\mathcal{J}}(B) \to B$，使得 B' 是对数流形；对于任意开对数子概形 $U \subseteq B$，只要限制 $Z \times_B U \to U$ 是对数光滑的，$\mathcal{J}|_U$ 就是单项式的；并且 $\mathcal{R}$ 在基变换g'上不会失效：$Z' = Z \times_B B' \to B'$。

(ii) 基变换函子性：若 $\mathcal{R}$ 在 g上不会失效，那么对于任意具有 fs 基变换 g': $Z' = Z \times_B B' \to B'$ 的对数流形态射 $B' \to B$，我们有$\mathcal{R}(g') = \mathcal{R}(g) \times_B B'$。

(iii) 对数光滑函子性：若 $\mathcal{R}$ 在 g上不会失效，那么对于任意对数光滑h: $X' \to X$，我们有 $\mathcal{R}(g \circ h) = \mathcal{R}(g) \times_X X'$。

注 5.2.15。 (i) 上述定理可视为任意底空间上的半稳定约化定理的一种弱形式。通过复杂但纯粹组合的方法，可以对对数光滑态射 $Z' \to B$ 进行对数爆破 $Z'' \to Z'$，从而使得 $Z'' \to B$ 成为所谓的半稳定态射，参见[ALT18]。当 B 为一维时，这恰好就是[KKMSD73]的半稳定约化。

(ii) 迄今为止，定理 5.2.14是唯一已知的与基变换相容的态射消解（或半稳定约化），即使在 B 的维数为 1 时也是如此。特别地，在底空间上使用诺特逼近，可将半稳定约化定理推广到任意赋值环上，不一定是离散赋值环。证明后一个结果是发展对数消解方法的主要动机之一。

5.2.16. 去叠化。 与绝对情形一样，相对主化和去奇异方法的输出是叠理论修改。通过使用规范相对去叠化过程，可以得到进一步的修改 $X'' \to X'$（分别为 $Z'' \to Z'$），使得相对粗空间 $X''_{\mathrm{cs}/X}$（分别为 $Z''_{\mathrm{cs}/Z}$）在 B上对数光滑。这提供了可表示的主化和去奇异方法，但它们仅具有光滑函子性，见 [ATW20b，定理 1.2。14]。

5.3.单项化定理。 最后，我们来讨论单项化定理的证明。[ATW20b，§3] 中的论证出人意料地复杂，今后很可能还会有所改进，因此我们只会

概述主要思路。单独提出单项化定理这一概念或许并非最佳选择，更自然的做法可能是将单项化与主化交织起来。我们将在本节末尾讨论一些支持这一观点的论据。

5.3.1. dim(B) ≤ 1 的情形。我们先讨论一个简单但已非常有用的情形，即 dim(B) ≤ 1。回想一下， B 是点的情形已在引理 3.3.4 （以及习题 3.3.5 ）中确立。事实上，曲线的情形也类似。在 B 上局部考虑，只需考察 B =Spec(R)的情形，其中 R 是一个域或带有一致化元 π 的离散赋值环，而对数结构由$\mathbb{N}$log(π)生成。此外，单项式性满足形式下降： $\mathcal{I}$ 在 $x \in$ X 处是单项式，当且仅当 $\mathcal{I}$ 在 $\mathcal{O}_x$ 处是单项式（我们利用完备化同态是平坦的，因此理想 $\mathcal{I}_x$ 由其形式完备化唯一确定），所以我们只需证明 $\mathcal{I}$ 是单项式。最后，这个断言在 X上是 étale-局部的，因此可以假设对数结构是扎里斯基的。现在，该断言归结为以下形式计算。这是一道难题，我们将概述论证的主要思路。

习题 5.3.2. 假设 $R = k[\![\pi]\!]$ 是一个完备离散赋值环，其对数结构由 $P = \mathbb{N}$log(π) 生成，并且

$$A = R_P[\![Q]\!][\![t_1, \ldots, t_n]\!]\widehat{\otimes}_k l = l[\![Q]\!][\![t_1, \ldots, t_n]\!]$$

其中 $P \hookrightarrow Q$ 是尖幺半群的嵌入， l/k 是域扩张。考虑由两类对数导子生成的模 $\mathcal{D} \subseteq \mathrm{Der}_R(A, A)$：(i) $\partial_i = \partial_{t_i}$ 在 l, Q上消失，且对每个 t_j 都有 $j \neq i$ 并满足 $\partial_i(t_i) = 1$；(ii) 对任意ϕ： $Q^{\mathrm{gp}} \to \mathbb{Z}$满足 $\phi(P) = 0$的导子 ∂_ϕ在 l上消失，对每个 t_i都有，并且在 Q上的限制为 ϕ 。证明任意 $\mathcal{D}$-稳定理想 $I \subseteq A$ （即 $\mathcal{D}(I) \subseteq I$）都是单项式理想。（提示：将习题 3.3.5 的证明改用于此情形。首先，使用其中相同的论证，证明 I 由形如$c = \sum_i c_i q_i$的元素生成，其中 $c_i \in l^\times$ 和 q_i 在 $Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}} \otimes \mathbb{Q}$ 中的像相同（与习题 3.3.5 不同，我们无法用 R-导子区分来自 P 的元素）。选取 i_0，使得对于任意 i， $q_i - q_{i_0}$都是 Pgp 中的非负元素（非正式地说， $q_i = q_{i_0} + r\pi$满足 $r \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$），并证明对于任意 i都有 $q_i - q_{i_0} \in Q$ 。由此推出，对于某个单位 $u \in A^\times$，有 $c = uq_{i_0}$ ，因此 I 是单项式理想。)

5.3.3. 一般情形。 若 B 任意，则可从同一方法入手，但必须绕过各种技术性难题。一个小问题是，如果 x 在纤维中不是闭的，且 $l = k(x)$ 在 $k(b)$ 上不是代数的，那么还应考虑“常数”方向上的导子。更严重的障碍是，导子无法控制代数扩张 l/k 以及 $Q^{\mathrm{gp}}/P^{\mathrm{gp}}$的挠。在形式计算中，假设这些障碍都是平凡的；一般情形则通过 Kummer 下降和共尾性论证化归为此情形，见[ATW20b，引理 3.5.8、3.6。3]此外，在形式情形下只能证明 I 由一个理想 $J \subseteq \mathcal{O}_b$ 生成，而这正是利用导子所能得到的极限——根据连续性， $\mathcal{O}_b$-导子在 $\mathcal{O}_b$上消失。

然而，如果 J 是一个集，那么它就是理想 $J \subseteq \mathcal{O}_b$ 的完备化，而对 B 上的 J 进行爆破后，我们即可实现单项化。当 $f(V(I))$ 是 B 的闭点有限并时，情况自动成立；一般情形则通过对 $f(V)$ 的维数应用归纳法来处理——首先构造一次爆破，使其

在 $f(V)$ 的泛点处将 $\mathcal{I}$ 单项化，然后再在剩余环轨迹的泛点处进行单项化，依此类推。

以下注释较为技术性，读者可以放心略过。

注 5.3.4. 相对主化的框架是为任意对数光滑态射 $f\colon X \to B$而构造的，包括并非尖锐的态射。有时这使得构造变得更加复杂，不过通常只需处理态射 $X \to \mathbf{Log}_B$即可。相比之下，单项化定理的证明仅在 f 尖锐时才适用（为求简便，[ATW20b第 3] 节中甚至有一处假设其为整的）。因此，必须先对底空间进行足够大的单项式爆破，最终得到的单项化爆破在 $f(V(\mathcal{I}))$ 之外也可能是非平凡的（尽管仍是单项式的）。我们不知道能否改进这一点。因此，相对主化和奇点消解主要定理~~的表述也~~受到同样的限制。事实上，即使以一个尖锐态射 f开始主化， X 的典型容许爆破也不再是底空间上的尖锐态射；每当算法需要修改底空间时，也会修改态射不尖锐的单项式轨迹。

5.3.5. 基变换的典范性。 在 [ATW20b]中证明的单项化定理是存在性的。一个自然的问题是，是否能够以典范（或函子性）的方式找到 $B' \to B$ 这一修改。答案似乎是肯定的，但详细推导结果证明非常繁琐，我们尚未将其整理到令人满意的形式。此外，所得方法虽然具有典范性，却可能难以实际实现。其主要原因在于，问题并非局部的——在 $b \in B$ 处的情形取决于 X 在 b 上的整个纤维，而该纤维甚至不必是连通的。因此，这种方法不可能类似于通常的嵌入主化。

6. The dream algorithms

对数方法中使用的库默尔中心具有如下形式

$$(t_1, \dots, t_r, u^{p_1/d}, \dots, u^{p_s/d}),$$

其中 u^{p_i} 是单项式。这也可以看作带权重（1，.....， 1， d，.....， d）的加权爆破，或沿着（t_1^d，.....， t_r^d， u^{p_1}，.....， u^{p_s}）进行通常爆破的一种代数栈论精化，因此下面的问题是自然的：既然我们已经可以使用代数栈论方法，是否能够使用任意权重？是否可以爆破形如（$t_1^{d_1}$，.....， $t_r^{d_r}$）的中心？事实上，我们已经在 [Abr] 中看到，确实存在一种对流形进行此类加权爆破的自然代数栈论定义，其输出是一个轨形（下面将简要回顾一些细节）。

下一个问题是，将任意加权爆破纳入基本框架是否会带来一种新的算法。这正是我们在发现对数主化之后所研究的问题，而结果多少有些出人意料。从某种意义上说，它好得过头了：加权主化（以及消解）完全不需要对数结构（或边界），并且通过每次加权爆破来降低一个自然的简单不变量。换言之，我们得到了一个没有内部结构/记忆的“理想”算法——它只是反复寻找具有最大可能不变量的容许中心，并对其进行爆破。著名的惠特尼伞例子表明，这样的算法在

经典框架中并不存在，但我们在 [ATW，§3.4] 中看到，在尖点处进行一次加权爆破就能改善奇点。

此外，还可以考虑对数情形下的一般加权中心，这便引出了对数梦算法。该算法由 Quek 在 [Que22] 绝对情形下发展而来。

6.1. 加权爆破。加权算法中的主要新要素是加权爆破。因此，我们先简要回顾其定义、历史背景和现代形式化表述。主化算法只对光滑簇 X 进行爆破，但我们将尽量在最大的一般性下表述定义和结论，使其适用时无需作重大修改——通常，这一一般性是指约化簇或正规簇。

6.1.1. 加权爆破。设 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 是一个光滑仿射簇，设 t_1、……、$t_d \in A$ 是 X 上的函数，并且在 $V = V$ 的每一点处构成一组正则参数的部分族（t_1、……、t_d）（换言之，V 是纯余维为 d 的光滑簇），再设 w_1、……、$w_d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$。与 t_1、……、t_d 及权重 w_1、……、w_d 相关联的经典加权爆破 $X' \to X$，由图 $X'_i = \mathrm{Spec}(A_i)$ 粘合而成，其中 A_i 是由满足 $\sum_{j=1}^d n_j w_j \geq n w_i$ 的分式 $(\prod_{j=1}^d t_j^{n_j})/t_i^n$ 生成的 A 子代数在 A_{t_i} 中的正规化。

练习 6.1.2. (i) 验证 $X' = Bl_{\left(t_1^{l_1},\ldots,t_d^{l_d}\right)}(X)^{\mathrm{nor}}$，其中 $l_i \geq 1$ 的选取满足：对任意 i，$l_i w_i$ 都是同一个数 N。换言之，

$$(w_1 : w_2 : \ldots : w_d) = (l_1 : l_2 : \ldots : l_d)^{-1}.$$

(ii) 验证沿着 (x, y)，以权重 $1, n$ 对 $\mathrm{Spec}(k[x, y])$ 进行爆破，会产生一个 A_{n-1}（′ 型奇点（在 étale 局部看起来如同 $uv = w^n$）。

6.1.3. 代数栈意义下的细化。为了能在主化过程中自由使用加权爆破，应修改其定义，使结果光滑。与对数算法一样，这可以通过对经典定义进行代数栈意义下的细化来实现。最直接的方法类似于 §4.1.8 – 局部考虑由 $s_i = t_i^{1/w_i}$ 生成的伽罗瓦覆盖 $Y \to X$，其中 $1 \leq i \leq d$，以及爆破 $Y' = Bl_{(s_1,\ldots,s_d)}$，然后将加权爆破定义为代数栈意义下的商 $X' = [X'/G]$，其中$G = \prod_{i=1}^d \mu_{w_i}$。

这种定义的缺点在于，与加权爆破的经典定义类似，它非常临时且依赖坐标。要将其推广到整体情形并不容易，更不用说 $\mathcal{I}$-容许性等概念了。其原因在于，直观上，加权膨胀中心是形如 $(t_1^{1/w_1}, \ldots, t_d^{1/w_d})$ 的对象，但这种记法需要形式化。因此，解决方案应从引入广义理想这一概念开始，让这类对象能够在其中存在。

6.1.4. 赋值理想。与 Kummer 理想类似，我们可以尝试考虑 τ 上的一种恰当拓扑，其中通过提取参数的根生成的覆盖是开覆盖，并考虑 $\mathcal{O}_{X_\tau}$ 中的理想。由于这类覆盖甚至不必是平坦的，因此考虑 h-拓扑，或由开覆盖、有限覆盖和修改生成的等价拓扑，似乎最为自然。事实证明，这些拓扑的点很容易描述——它们是 $k(X)^a$ 上以

X 为中心的赋值，因此我们可以采用赋值理想这个更为直观的定义，下面将对此作回顾。我们先从一个更具体的情形开始，其中不提取根。

练习 6.1.5. 对于一个约化簇 X ，考虑黎曼–扎里斯基空间

$$\mathrm{RZ}(X) = \mathfrak{X} = \lim_{X_i \to X} X_i,$$

其中极限是在局部环空间范畴中对所有修改 $X_i \to X$ 取的。特别地， $|\mathfrak{X}| = \lim_i |X_i|$ ，而 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 是$\mathcal{O}_{X_i}$ 到 $\mathfrak{X}$的拉回的余极限。

(0) 证明 $\mathrm{RZ}(X) = \coprod_{i=1}^n \mathrm{RZ}(X_i)$，其中 $X_1, \ldots, X_n$ 是 X的不可约分支。

（i）证明 [Tem10 §3.2] 中的以下结果：若 X 是整的，则对每个$x \in \mathfrak{X}$ ，环 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\, x}$ 都是 $k(X)$ 的一个赋值环，其中心位于 X 上。由此推得， $\mathfrak{X}$ 的点与中心位于 X 上的 $k(X)$ 的赋值环之间存在双射对应。

（ii）证明，由修改和扎里斯基覆盖生成的拓扑中的理想与 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$的理想之间存在双射对应。特别地，有限生成理想 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 可由 X的某个修改 X_i 上的一个理想 $\mathcal{I}_i$ 生成。此外，$\mathcal{I}$ 是可逆的，并且 $\mathcal{I}_i$ 可以取为可逆的。（提示：可以利用赋值环中的有限生成理想都是主理想这一事实，也可以利用任意理想在爆破后都会变成可逆理想这一事实。）

（iii）假设 X 是正规的。证明，两个理想 $\mathcal{I}$、$\mathcal{J}$ 在 $\mathfrak{X}$ 上诱导出相同的理想，当且仅当 $\mathcal{I}^{\mathrm{nor}} = \mathcal{J}^{\mathrm{nor}}$。（提示：若 $\mathcal{I}^{\mathrm{nor}} = \mathcal{J}^{\mathrm{nor}}$，则它们拉回到 $Bl_{\mathcal{I}}(X)^{\mathrm{nor}}$ 后就已经相同。反过来，证明 $\mathcal{I}^{\mathrm{nor}} = \cap_{x \in \mathfrak{X}} \mathcal{I}\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\, x}$，这与整环 A 的整闭包等于所有包含 A的 $\mathrm{Frac}(A)$ 赋值环的交这一事实类似。）

此外， $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 中的有限生成理想可以通过值层 $\Gamma = \Gamma_{\mathfrak{X}} = k(X)^\times / \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^\times$ 的一个截面来描述，甚至可以通过其正部分 $\Gamma_+ = (\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \setminus \{0\})/\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}^\times$ 的一个截面来描述。这为定义此类理想提供了最基本的方法，并且很容易将理想上的各种运算转译为截面的语言：

练习 6.1.6。（i）证明， $x \in \mathfrak{X}$ 处的茎 Γ_x 是赋值环 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\, x}$的值群，而 $\Gamma_{+,\, x}$ 是非负元素构成的子幺半群。

（ii）证明，同态 $(\mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \setminus \{0\}) \twoheadrightarrow \Gamma_+$ （分别为 $k(X)^\times \twoheadrightarrow \Gamma$）在 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ 的有限生成理想与幺半群 Γ_+ 的可逆理想之间诱导出双射对应；后者又与生成元 $s \in \Gamma_+(\mathfrak{X})$ 之间存在双射对应，其中生成元是 Γ_+的整体截面。证明，同样地， Γ 的截面与 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$的分式理想相对应。

(iii) 设 $I = (f_1, \ldots, f_n)$ 是 $X = \mathrm{Spec}(A)$ 上的理想， $\mathcal{I}$ 是 $\mathfrak{X}$ 上诱导出的理想，其关联截面为 $v_I \in \Gamma_+(X)$。证明 $v_I = \min_i v_i$，其中 v_i 是与 (f_i) 对应的截面，也就是说， $v_i(x) = v_x(f_i)$，其中 v_x: $k(X)^\times \to \Gamma_x$ 是 $x \in \mathfrak{X}$ 的赋值。还要证明，对于任意 $1 \le i \le n$ ，由 $v_I = v_i$ 给出的轨迹由以 f_i-图为中心的 $Bl_I(X)$ 的赋值组成。

(iv) 证明 $v_{I+J} = \min(v_I, v_J)$ 以及 $v_{IJ} = v_I + v_J$。特别地， $v_{I^n} = n v_I$。还要证明 $v_I \le v_J$ 当且仅当 $J \subseteq I^{\mathrm{nor}}$。（提示：根据练习 6.1.5(iii) $v_I = v_J$当且仅当 $I^{\mathrm{nor}} = J^{\mathrm{nor}}$。）

(v) 设 $X = \mathrm{Spec}(k[x, y])$。求表示 $s_1 = \min(v_x, v_y)$ 和 $s_2 = \max(v_x, v_y)$ 的理想。（提示：由于 $s_1 + s_2 = v_x + v_y$，截面 s_2 应由

类似 $(xy)I^{-1}$ 的对象表示，其中 $I=(x,y)$。后者无法由 X 上的理想表示，但在修改 $X'=Bl_I(X)$ 上则完全合理。）

注 6.1.7。 $\Gamma_+(\mathfrak{X})$ 的元素称为赋值理想。我们刚刚看到，它们确实编码了有限生成理想，而且赋值理想的形式体系极其简单。

6.1.8. 赋值 $\mathbb{Q}$-理想。由于赋值理想是非常简单的对象，因此很容易从中提取根：赋值 $\mathbb{Q}$-理想是层 $\Gamma_{\mathbb{Q},+}$ 的一个截面，它是 Γ_+ 在 $\Gamma_{\mathbb{Q}}=\Gamma\otimes\mathbb{Q}$ 中的饱和。与上一节一样，我们可以运用相同的形式体系来处理赋值 $\mathbb{Q}$-理想——基本操作包括求和、取最小值以及乘以一个正有理数。

我们不需要下面这条关于赋值$\mathbb{Q}$-理想的其他解释的注记。

注 6.1.9。（i）赋值 $\mathbb{Q}$-理想是在足够精细的修改上的有效 $\mathbb{Q}$-Cartier 除子。

(ii) 在特征零的情形下，可以将赋值 $\mathbb{Q}$理想视为 h理想。

例 6.1.10. (i) 若 f_1、……、 $f_n\in\mathcal{O}_X(X)$是全局函数，且 q_1、……、 $q_n\in\mathbb{Q}_{>0}$，则我们将使用便于理解的记号（$f_1^{q_1}$，……， $f_n^{q_n}$） $=\sum_{i=1}^n(f_i)^{q_i}$ 表示赋值理想 $\gamma=\min_{1\le i\le n}q_iv_{f_i}$。

(ii) 现在假设 X 是光滑的。若 γ 满足：在 X 上局部存在一个表示 $\gamma=(t_1^{q_1}$，……，$t_n^{q_n})$，使得 γ的支撑 $V(t_1$，……，$t_n)$是余维为 n的光滑子簇，则称 γ 为 X上的 $\mathbb{Q}$-正则中心。若可以选择一种表示，使每个 i都满足 $q_i=1/w_i$，则称该中心为光滑加权中心；若此外（w_1，……， w_n） $=1$，则称光滑加权中心是约化的。元组 $\mathrm{w}=(w_1$，……， $w_n)$称为权重元组。

如果一个 $\mathbb{Q}$-正则中心的支撑具有余维 2 或更高，那么选择正则参数的方式有很多种。例如，对于任意自然数 $n\ge q$， $V(x,y^q)=V(x+y^n,y^q)$。不过，权重是良定义的。

练习 6.1.11。证明，重数 q_1、…、 $q_n\in\mathbb{Q}_{>0}$ 由 $\mathbb{Q}$-正则中心 $\gamma=(t_1^{q_1}$、…、 $t_n^{q_n})$ 唯一确定。

6.1.12。赋值 $\mathbb{Q}$-理想的爆破。对于正规簇 X 上的任意赋值 $\mathbb{Q}$-理想$\gamma\in\Gamma_{\mathbb{Q},+}(\mathfrak{X})$，可以关联一个分次 $\mathcal{O}_X$-代数 $\mathcal{R}_\gamma=\oplus_{d\ge0}\mathcal{R}_d$，称为 γ 的 Rees 代数，并定义为 $\mathcal{R}_d(U)=\{f\in\mathcal{O}_X(U)|\ v_f\ge d\gamma|_{\mathfrak{U}}\}$，其中$\mathfrak{U}=\mathrm{RZ}(U)\subseteq\mathfrak{X}$。于是沿着 γ 对 X 进行爆破，就是该 Rees 代数的栈论 Proj： $Bl_\gamma(X)=\mathcal{P}roj_X(\mathcal{R}_\gamma)$。

注记 6.1.13。 每个 $\mathcal{R}_d$ 都是 X上的一个理想，它是 d次幂理想（$\gamma\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$）^{d}的推前。因此，我们对 Rees 代数及其爆破的定义，正是 4.1.14 中库默尔爆破定义的类似步骤。

练习 6.1.14。 设 X 是一个带有赋值 $\mathbb{Q}$-理想 γ 的正规簇，其特殊形式为 $\gamma=(f_1^{1/d_1}$，……， $f_n^{1/d_n})$（这些是来自 §6.2 下文中的 $\mathbb{Q}$-理想或理想指数）。

(i) 代数 $\mathcal{R}_\gamma$ 是整闭的，并且在 $\mathcal{O}_X$ 上有限生成。

(ii) 如果 $\gamma=v_{\mathcal{I}}$ 对于通常理想 $\mathcal{I}\subseteq\mathcal{O}_X$，那么 $\mathcal{R}_\gamma=\oplus_{d\in\mathbb{N}}\mathcal{I}^{(d)}=(\oplus_{d\in\mathbb{N}}\mathcal{I}^d)^{\mathrm{nor}}$ 是 $\mathcal{I}$ 的通常 Rees 代数的整闭包。特别地， $Bl_\gamma(X)=Bl_{\mathcal{I}}(X)^{\mathrm{nor}}$，并且即使对于与 $\mathcal{I}=(t_1,t_2^2)$ 相关联的赋值中心，它也是奇异的。

(iii) γ 对应于 $X'=Bl_\gamma(X)$ 上的一个通常可逆理想。

6.1.15. 光滑加权爆破。 我们所说的 光滑加权爆破是指对 X 进行光滑加权中心爆破。此类爆破的结果是光滑叠，这与沿任意 $\mathbb{Q}$-约化中心进行的爆破不同。以下结果可通过直接的图表计算得到（例如参见 [ATW，§3.6]）。

练习 6.1.16. (i) 设 $w=(w_1,\dots,w_n)\in\mathbb{N}^n_{\geq 1}$ 是一组权重，且 $\gamma=(t_1^{1/w_1},\dots,t_n^{1/w_n})$ 是 X 上的一个光滑加权中心。那么 $X'=Bl_\gamma(X)$ 是一个光滑 DM 叠，其第 i 个图上的稳定子群是 μ_{w_i} 的子群。光滑加权中心 γ 在 X' 上变为通常的可逆理想，记作 $\gamma\mathcal{O}_{X'}$。

(ii) 若 $d\geq 1$ 且 $\gamma'=d^{-1}\gamma=(t_1^{1/dw_1},\dots,t_n^{1/dw_n})$，那么 $Bl_{d^{-1}\gamma}$ 是从 $Bl_\gamma(X)$ 提取 $\gamma\mathcal{O}_{X'}$ 的第 d 个根所得到的根栈。

6.1.17. 关联加权爆破。加权算法使用某些 $\mathbb{Q}$-正则中心，包括所有具有自然重数的中心；这些中心对应于通常理想。对这样的中心进行爆破可能会得到一个奇异簇，因此我们应改用叠论细化。诀窍是对中心的一个适当的根进行爆破。

定义 6.1.18. 假设 $\gamma=(t_1^{q_1},\dots,t_n^{q_n})$ 是一个 $\mathbb{Q}$-正则中心。选择表示 $q_i=a_i/b_i$，其中 $(a_i,b_i)=1$，并令 $a=\mathrm{lcm}(a_1,\dots,a_n)$。那么 $a^{-1}\gamma=(t_1^{q_1/a},\dots,t_n^{q_n/a})$ 是与 γ 相关的光滑加权中心，而 $X'=Bl_{a^{-1}\gamma}(X)$ 是相应的加权爆破。我们将使用记号 $X'=wBl_\gamma(X)$。

注 6.1.19. 爆破 $Bl_\gamma(X)$ 是加权爆破 $wBl_\gamma(X)$ 的部分粗化。缩放因子 $a=\mathrm{lcm}(a_1,\dots,a_n)$ 的选取使得叠论细化 $wBl_\gamma(X)$ 光滑，并且使叠结构的增加尽可能小。

6.2. $\mathbb{Q}$-理想与理想指数。 原则上，$\mathbb{Q}$-理想的赋值形式体系 [ATW19] 已足以满足我们的需求。本节内容在后文中不会用到，但研究较小的 $\mathbb{Q}$-理想类也颇有启发，因为它们确实在这里发挥作用，尤其是它们将理想指数和标记理想的经典概念形式化了。这些概念只有在正规概形上才具有良好的性质，因此我们将讨论范围限定于这一情形。另请参阅 [Que22，§2.2]以及 [W-lo，§2.1]。

6.2.1. $\mathbb{Q}$-理想。正规概形 X 上的 $\mathbb{Q}$-理想，是一种赋值 $\mathbb{Q}$-理想，它在 X 上局部具有 $\gamma=\min(d_i^{-1}v_{f_i})$ 的形式，其中 f_i 是函数。用另一种记法，$\gamma=(f_1^{1/d_1},\dots,f_n^{1/d_n})$。特别地，一个 $\mathbb{Q}$-正则中心是一个 $\mathbb{Q}$-理想。从某种意义上说，$\mathbb{Q}$-理想推广了通常理想，正如赋值 $\mathbb{Q}$-理想推广了赋值理想一样；下面的练习将这一观点形式化。

练习 6.2.2。(i) 设 γ 是一个赋值 $\mathbb{Q}$-理想。证明它是通常理想（即 $\gamma=v_{\mathcal{I}}$ 对于某个理想 $\mathcal{I}$），当且仅当 γ 既是赋值理想，也是一个 $\mathbb{Q}$-理想。特别地，γ 是一个 $\mathbb{Q}$-理想，当且仅当对于某个 d，$d\gamma$ 是一个理想。

(ii) 证明 $\mathbb{Q}$-理想的乘法幺半群是唯一可除的，因此它是整闭理想幺半群的可除包。特别地，$\mathbb{Q}$-理想可以放心地表示为 $\mathcal{I}^{1/d}$，其中 $\mathcal{I}$ 是一个理想（或其整闭包）。

(iii) 标记理想 $(\mathcal{I}, d)$ 可以看作 $\mathbb{Q}$-理想 $\mathcal{I}^{1/d}$：证明这种对应与标记理想的通常运算——包含关系、乘法和求和（齐次化或非齐次化）——相一致。

(iv) 举一个赋值理想的例子，它不是 $\mathbb{Q}$-理想。（提示：可以取 $X = \mathrm{Spec}(k[x,y])$ 和 $\gamma = \max(0, \min(v_x, v_y - v_x))$——这是与 $Bl_{(x,y)}(X)$ 上的理想 $(x, y/x)$ 对应的赋值理想。然后，包含γ 的最小 $\mathbb{Q}$-理想是 $\min(v_x, v_y)$。）

注 6.2.3。(i) 事实上，$\mathbb{Q}$-理想的概念不过是 Hironaka 的理想指数概念的一种形式化。正如我们所见，这可以通过两种方式实现：要么将它们视为特殊形式的赋值 $\mathbb{Q}$-理想，要么将它们视为在整闭包意义下考察的通常理想的根。

(ii) 标记理想的经典阶约化（$\mathcal{I}, d$）现在可以形式化为：通过爆破光滑中心$\mathcal{J}$并除去它们的拉回，将 $\mathbb{Q}$-理想 $\mathcal{I}^{1/d}$ 的阶降至 1 以下。我们在§2.3 中的解释是：通过爆破中心 $\mathcal{J}^d$，将 d 自身的阶 $\mathcal{I}$ 降至 1 以下。这两种解释仅在正规化方面有所不同。

6.2.4. 正规化爆破。对 $\mathbb{Q}$-理想进行正规化爆破，以保持在正规概形范畴中，可得到如下泛性质，见 [QR，定理 3.4。3]。

定理 6.2.5. 设 $\mathcal{I}^{1/d}$ 是正规簇 X 上的一个 $\mathbb{Q}$-理想，且 $X' = Bl_{\mathcal{I}^{1/d}}(X)^{\mathrm{nor}}$是正规化爆破，则 $\mathcal{I}^{1/d}\mathcal{O}_{X'}$ 是一个可逆理想，并且 $f\colon X' \to X$是具有此性质的正规概形之间的泛态射：若 $g\colon T \to X$ 是正规概形的一个态射，且 $g^{-1}(X \setminus V(\mathcal{I}))$ 在 T 中稠密，则 g 至多有一种经由 f 的因子分解；并且当且仅当 $\mathcal{I}^{1/d}\mathcal{O}_T$是一个可逆理想时，这种因子分解存在。

特别地，我们得到了练习 6.1.16（ii）的一般化。

注 6.2.6. 该泛性质立即表明，沿 $\mathcal{I}^{1/d}$ 的正规化爆破可以利用通常的正规化爆破 $Y = Bl_{\mathcal{I}}(X)^{\mathrm{nor}} \to X$ 以及正规化根栈构造 $Bl_{(\mathcal{I}\mathcal{O}_Y)^{1/d}}(Y) \to Y$来描述：前者使 $\mathcal{I}$ 的拉回变为可逆，后者提取其 d次根。

6.3. Rees 代数与 Rees 爆破。为了以最精确的方式描述非嵌入解消，我们还应考虑非正规簇，以及由环境流形上的加权爆破所诱导的、作用于这些簇的加权爆破。Rydh 在其关于叠的 Nagata 紧化的研究中发展了这一理论，随后 Quek-Rydh 在 [QR]中进一步发展了这一理论。我们必须转而使用任意（非正规）Rees 代数的语言。读者可以放心跳过本节（或只略读一下）；本节只会用于以最精确的方式表述非嵌入加权消解。

6.3.1. Rees 代数。这些 $\mathbb{Q}$-理想也可以用另一种经典对象——Rees 代数来解释。与 [QR], 中一样，我们所说的簇 上的 Rees 代数 X 是一个有限生成的分次 $\mathcal{O}_X$-代数

$$R = \oplus_{d\in\mathbb{N}} I_d t^d \subseteq \mathcal{O}_X[t]$$

使得 $I_0 = \mathcal{O}_X$，且理想 I_d 构成一个递减序列：$I_n \subseteq I_m$，其中 $m \leq n$（当 R 正规时，后一条件自动成立）。我们将 R 的支撑定义为$V(R) = V(I_1)$。对于任意 $n \geq 1$，我们有 $I_1^n \subseteq I_n \subseteq I_1$，因此 $V(I_n) = V(R)$。

如果 R 正规，那么必然 X 正规，且 I_1 整闭。反过来，如果 X 正规，那么 Rees 代数的正规化 R^{nor} 也是定义在 X 上的 Rees 代数（对于一般概形，还应假设 X 是拟优的，或至少是 Nagata）。特别地，对于正规概形 X 上的任意赋值 $\mathbb{Q}$-理想 γ，我们有 $\mathcal{R}_\gamma$ 是正规 Rees 代数。反方向上的自然构造，将赋值$\mathbb{Q}$-理想 $\gamma_R = \min_{d\geq 1} d^{-1}v_{I_d}$与 Rees 代数 R 对应起来。事实上，它是一个 $\mathbb{Q}$-理想，并且可以用生成元具体描述：若 R由 $\mathcal{O}_X$上的 $f_1t^{d_1}$，……，$f_nt^{d_n}$生成，则 $\gamma_R = \min(d_1^{-1}v_{f_1}$，……，$d_n^{-1}v_{f_n})$。

练习6.3.2. 证明，对于正规簇 X 上的任意 Rees 代数 R，γ_R 是使其 Rees 代数等于 R 的最小赋值 $\mathbb{Q}$ 理想。由此推导，构造 γ_R 和 R_γ 在正规 Rees 代数与 $\mathbb{Q}$ 理想之间建立了一一对应，其中定义在 X 上。还可推导出，对于任意满足 $R = \mathcal{R}_\gamma$ 的赋值 $\mathbb{Q}$ 理想 γ，γ_R 是满足 $\gamma_R \leq \gamma$ 的最大 $\mathbb{Q}$ 理想。

回想一下，$\mathbb{Q}$ 赋值理想 γ 的爆破由其 Rees 代数 $R = \mathcal{R}_\gamma$ 决定，因此它与沿 $\mathbb{Q}$ 理想 γ_R 的爆破一致。因此，正规簇上的加权爆破理论完全可以用 $\mathbb{Q}$ 理想或 Rees 代数来描述。要将其推广到非正规簇，应使用非整闭的 Rees 代数。

6.3.3. 拉回。对于任意正规概形之间的态射 $Y \to X$ 以及 X 上的一个 $\mathbb{Q}$-理想 $I^{1/d}$，可定义其拉回 $(I\mathcal{O}_Y)^{1/d}$，为简便起见，我们也将其记作 $I^{1/d}\mathcal{O}_Y$。容易看出，这一运算定义良好。此外，对于任意概形之间的态射 $Y \to X$ 以及 X 上的一个 Rees 代数 $R = \oplus_d I_d$，可定义拉回 $R\mathcal{O}_Y = \oplus_d I_d\mathcal{O}_Y$。

6.3.4. Rees爆破。对于簇 X 上的任意 Rees 代数 R，可关联爆破 $X' = \mathcal{P}roj_X(R)$。它带有例外除子 E'，其可逆理想记作 $I_{E'}$。具体而言，对于 $a_dt^d \in R_d$，将 $I_{E'}$ 限制到相应的图 $[\mathrm{Spec}(R[(a_dt^d)^{-1}])/\mathbb{G}_m]$，对应于$\mathbb{G}_m$-等变理想 (t^{-1})，其中 $t^{-1} = a_dt^{d-1}/a_dt^d \in R[(a_dt^d)^{-1}]$。

6.3.5. 加权爆破的泛性质。加权爆破具有某种泛性质，类似于通常爆破所满足的性质，但也更加微妙。证明是直接计算，参见 [QR，定理 3.2。9]。

定理 6.3.6. 设 X 是一个簇，R 是 X 上的一个 Rees 代数，其加权爆破为 $f\colon X' = Bl_\gamma(X) \to X$，支撑为 $V = V(R)$。那么：

(0) f 是 X 上的一个同构 $\qquad \setminus V$.

(i) $I_d\mathcal{O}_{X'} \subseteq I_{E'}^d$，当 d 足够可整除时取等号（事实上，只需 d 能被一组生成元的权重整除）。

(ii) 若 $h\colon T \to X$ 是一个态射，且 $h^{-1}(X\setminus V)$ 概形稠密，那么 h 经由 X' 的分解范畴等价于满足 $I_d\mathcal{O}_T \subseteq I_T^d$ 的可逆理想 I_T；当 d 足够可整除时取等号。

6.3.7. 严格变换。设 $Y \to X$ 是簇的一个态射，且 R 是 X 上的 Rees 代数，满足 $V = V(R)$，那么 严格变换 是指相对于爆破 Y 的 $X' = Bl_R(X) \to X$ 中 $X\setminus V$在$Y\times_X X'$中的原像的概形闭包。与经典情形一样，泛性质很容易推出严格变换的以下描述，参见 [QR，推论 3.2。14]。

推论 6.3.8. 设 $Y' \to X'$ 是态射 $h\colon Y \to X$相对于 Rees 爆破 $X' = Bl_R(X) \to X$ 的严格变换。那么 $Y' = Bl_{R\mathcal{O}_Y}(Y)$。此外，当且仅当 h 平坦时， $Y' = Y \times_X X'$；而当且仅当 h 是闭浸入时， $h'\colon Y' \to X'$ 是闭浸入。

6.3.9. $\mathbb{Q}$-正则中心。最后，我们希望在任意簇 Z 上定义 $\mathbb{Q}$-正则中心。对于函数 $f_i \in \Gamma(\mathcal{O}_Z)$ 的元组 $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ 以及正有理数 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ 的元组，考虑 Rees 代数 $R_{\mathbf{f},\ \mathbf{q}} = \oplus_d I_d$，其中每个 I_d 都由所有满足 $l_1/q_1 + \ldots + l_n/q_n \geq d$ 的单项式 $f_1^{l_1} \dots f_n^{l_n}$ 生成。我们将 Z 上重数为 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ 的 $\mathbb{Q}$-正则中心定义为局部具有如下形式的 Rees 代数：$R_{\mathbf{f},\ \mathbf{q}}$使得对于任意 $z \in V(R)$， $f_1, \dots, f_n$ 在 m_z/m_z^2 中的像线性无关，且集合的像

$$\{f_1^{l_1} \dots f_n^{l_n} \mid l_1/q_1 + \ldots + l_n/q_n < 1\}$$

在 $\mathcal{O}_z/I_1\mathcal{O}_z$ 中线性无关。

相应的加权爆破是指对 Rees 代数进行爆破，该代数是将权重平移至 $a^{-1}\mathbf{q}$ 后得到的，其中 $a \geq 1$ 是满足每个 q_i/a 都具有 $1/w_i$ 形式的最小自然数。局部地，该代数由元素 $f_1 t^{w_1}$、……、 $f_n t^{w_n}$ 生成。

这些定义与到流形中的闭浸入相容：

练习 6.3.10。沿用上述记号，并固定一个闭浸入 $Z \hookrightarrow X$，其具有光滑的 X。

(i) 证明 R 可延拓为 X 上的一个 $\mathbb{Q}$-正则中心，具体如下：任取一组参数 t_1、……、 t_n，它们定义在 X 上，且限制到 f_1、……、 f_n，并考虑 $\mathbb{Q}$-正则中心 $\gamma = (t_1^{q_1}, \dots, t_n^{q_n})$。则 $R = R_\gamma \mathcal{O}_Z$。特别地，沿 R 对 Z 作 Rees 爆破，所得结果是 $Bl_\gamma(X) \to X$ 的严格变换。

(ii) 此外，请证明从几何意义上说， $V(\gamma)$ 包含于 Z，其含义是，对于 $\mathcal{I} = I_Z$， $\gamma \leq v_{\mathcal{I}}$。

(iii) 反过来，请证明，任何满足 $\gamma \leq v_{\mathcal{I}}$ 的 X 上的 $\mathbb{Q}$-正则中心 γ，在 Z 上的限制都是一个 $\mathbb{Q}$-正则中心。

(iv) 最后，请证明若 Z 是正规的，则 R^{nor} 对应于 $\mathbb{Q}$ 理想 $(f_1^{q_1}, \dots, f_n^{q_n})$。

6.4. 非对数加权算法。本节将概述最简单的理想主化——不带边界的情形。

6.4.1. 加权框架。几何对象只是有限型 k 上的 DM 叠，并使用通常的光滑性以及导子层 $\mathcal{D}_X = \mathrm{Der}_k(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$。容许中心是 $\mathbb{Q}$-正则中心；若满足 $\gamma \leq v_I$（非正式地说，这意味着 $\mathcal{I} \subseteq \gamma$），则这样的中心 γ是$\mathcal{I}$-容许的。容许爆破是与这类中心相关联的加权爆破。

6.4.2. 加权阶。为了完善这一框架，还需要对中心进行分类并引入一个不变量。为此，我们总是对参数排序，使重数元组单调递增： $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$。自然地，中心的不变量 w-ord($\gamma$) 定义为有序元组 $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$，并为这些不变量组成的集合赋予字典序，其中较短的序列更大，例如，$(2) > (2, 2)$（或者，也可以在每个字符串末尾加上 ∞，使该不变量更接近经典的不变量）。

练习 6.4.3. 验证该不变量具有单调性：如果 $\gamma \leq \gamma'$，那么 w-ord(γ) $\leq$w-ord(γ')。

对于任意真理想 $\mathcal{I}$，我们定义加权阶

$$\text{w-ord}_X(\mathcal{I}) = \max_{\gamma \leq v_{\mathcal{I}}} \text{w-ord}(\gamma),$$

其中，最大值取遍所有 $\mathcal{I}$-容许的 $\mathbb{Q}$-正则中心。点处的加权阶定义为在所有邻域上取最小值：

$$\text{w-ord}_x(\mathcal{I}) = \min_{x \in U} \text{w-ord}_U(\mathcal{I}|_U).$$

为完整起见，我们也定义极端情形下的不变量：w-ord($\mathcal{O}_X$) = (0)，以及当 $V(\mathcal{I})$ 包含 X 的一般点时，w-ord($\mathcal{I}$) = ()。

6.4.4. 加权阶约化。现在我们可以表述加权框架的主要性质，它们完全决定了算法的内容。事实上，结果表明，第一个加权爆破存在唯一的候选，而且仅这次爆破就能降低加权阶。

定理 6.4.5. 设 X 是一个有限型光滑 DM 叠，定义在 k 上，并设 $\mathcal{I}$ 是 X 上的一个理想。

(i) 加权阶 w-ord$_X(\mathcal{I})$ = $(q_1, \ldots, q_n)$ 满足以下整性条件：$q_1 \in \mathbb{N}$ 且 $q_{i+1} \prod_{j=1}^{i} (q_j - 1)! \in \mathbb{N}$，其中 $2 \leq i \leq n$。

(ii) 存在唯一的 $\mathcal{I}$-容许中心 γ，使得 w-ord(γ) = w-ord$_X(\mathcal{I})$，并且 $V(\gamma)$ 包含所有满足 w-ord$_x(\mathcal{I})$ = w-ord$_X(\mathcal{I})$ 的点 $x \in X$。

(iii) 设 γ 为 (ii) 中所述的中心，$X' = wBl_\gamma(X)$ 为相应的加权爆破（定义 *6.1.18*），而 $\mathcal{I}' = (\gamma \mathcal{O}_{X'})^{-1} \mathcal{I} \mathcal{O}_{X'}$ 为 $\mathcal{I}$的变换。则加权阶$_{X'}(\mathcal{I}')$ < 加权阶$_X(\mathcal{I})$。

(iv) 该中心关于这一对 $(X, \mathcal{I})$ 光滑函子性地依赖。

6.4.6. 加权主化。定理的 (i) 部分表明，w-ord$_X$ 的不变量集合是 $\{0\} \cup (\cup_{n \in \mathbf{N}} \mathbb{Q}^n_{>0})$ 的一个良序子集，因此，通过迭代加权阶约化，最终得到唯一一个不变量为零的理想——单位理想。这给出了关于加权主化的主要结果。

定理 6.4.7. 存在一种主化方法 $\mathcal{F}$，它为有限型光滑 DM 叠 X 上的任意理想 $\mathcal{I}$（其基域为 k）关联一个光滑加权爆破序列 $\mathcal{F}(\mathcal{I})$：$X' = X_n \dashrightarrow X_0 = X$，使得以下条件成立。

(i) 该序列是一个主化：$\mathcal{I}_n = \mathcal{O}_{X_n}$ 且每个 $X_{i+1} \to X_i$ 都是 $\mathcal{I}_i$-可容许的，其中 $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$，而 $\mathcal{I}_{i+1}$ 是 $\mathcal{I}_i$ 在 $0 \leq i \leq n-1$下的变换。

(ii) 该序列关于这一对（$X, \mathcal{I}$）光滑函子性地依赖：对于任意满足 $\mathcal{J} = \mathcal{I}\mathcal{O}_Y$ 的光滑态射 $Y \to X$，序列 $\mathcal{F}(\mathcal{J})$由拉回序列 $\mathcal{F}(\mathcal{I}) \times_X Y$ 通过省略所有空的加权爆破得到。

(iii) 该方法不需要历史（我称之为梦想方法）：每个加权爆破 $X_{i+1} \to X_i$ 仅取决于（$X_i, \mathcal{I}_i$），而不取决于满足 $j < i$的（$X_j, \mathcal{I}_j$）。

6.4.8. 梦想破灭时的例子。在经典情形下，不存在理想的主化算法。通常的论证是，在惠特尼伞 $Z = V(x^2 - y^2 z) \hookrightarrow \mathbf{A}^3 = X$ 上爆破一个尖点会产生另一个尖点，因此不记录历史就会陷入无限循环。然而，沿着 $V(x, y)$ 爆破 X 可以消解奇点，这使得这个例子不够有说服力。下面是

Włodarczyk 最喜欢的一个例子，它避免了这一问题。设 $X = \mathbf{A}^4 = \mathrm{Spec}(k[x,y,z,t])$ 和 $Z = V(x^2 - yzt)$，特别地，$G = S_3$ 通过置换 y, z, t 对其作用。Z 的奇点轨迹是 y、z 和 t 轴的并集，而原点 O 是唯一包含 O 且位于奇点轨迹中的 S_3-不变光滑中心。与惠特尼伞的情形一样，爆破 O 会产生同类型的另一个奇点（实际上，在不同的图表上会出现 3 个奇点，并由 S_3 置换）。这说明，不存在一种无记忆光滑函子化主化，它只对光滑中心进行爆破。

练习 6.4.9. 证明 0 处的加权阶为 (2, 3, 3, 3)，dream 算法对 $(x^{1/3}, y^{1/2}, z^{1/2}, t^{1/2})$ 进行爆破，且加权阶在此次爆破后下降。

6.4.10. 加权消奇异化。与经典情形一样，若 $Z \hookrightarrow X$ 是一个常余维的闭泛约化子叠，则 $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_X$ 的主化会在同一次爆破 $X_{n+1} \to X_n$ 中爆破 Z 的严格变换的所有不可约分支。这意味着 Z 的严格变换 $Z_n \hookrightarrow Z$ 是光滑的，因此 $Z_n \to Z$ 是一个消解。按照通常的论证，利用极小嵌入在 ´etale 对应意义下的唯一性，可得一种光滑函子性去奇点化方法，适用于有限型、局部等维且泛点约化的代数栈，其基底为 k。

6.4.11. 回到概形。通过去叠化可以移除叠结构。由此得到一种新的去奇异方法，它比经典方法更高效，但不具备新的理论性质。不过，我们现在将看到，只需稍作修改，就能得到所谓的强消奇异化方法。

6.4.12. 强加权消奇异化。当 $Z \hookrightarrow X$ 通过对 $\mathcal{I}_Z$ 进行经典主化而得到消解时，第 i 个中心 V_i 位于 Z 的原像中，但不一定包含在 Z 的严格变换 $Z_i \hookrightarrow X_i$ 中，而且 $Z_{i+1} \to Z_i$ 的中心 $V_i|_{Z_i} = V_i \times_{X_i} Z_i$ 通常是奇异的，参见 [BM08，例 8.2]。加权主化也有同样的情况：可能出现 $V(\gamma_i) \not\subseteq Z_i$。然而，如果 $X' = wBl_\gamma(X) \to X$ 是对 $\mathcal{I} = I_Z$ 的加权阶约化，$Z' \hookrightarrow X'$ 是 Z 的严格变换，而 $\mathcal{I}'$ 是 $\mathcal{I}$ 的变换，那么 Z' 是 $V(\mathcal{I}')$ 的闭子集，因此 $\text{w-ord}_{X'}(I_{Z'}) \leq \text{w-ord}_{X'}(\mathcal{I}') < \text{w-ord}_X(I_Z)$。因此，消解 Z 更经济的做法是在第二阶段改为处理 $I_{Z'}$，而不是 $\mathcal{I}'$，依此类推。如此一来，我们并未实现对 I_Z 的主化，而只是依次修改 Z 的严格变换。此外，第 i 个中心 γ_i 不仅包含在第 i 个严格变换 Z_i 中（见练习 6.3.10），而且它只取决于这一对 (X_i, Z_i)；于是重新嵌入原理表明，实际上它只取决于 Z_i。由此得到以下非嵌入式梦算法。

定理 6.4.13。存在一种奇点消解方法 $\mathcal{R}$，它为每个在 k 上有限型、局部等维且泛点约化的 DM 叠 Z 关联一个具有 $\mathbb{Q}$-正则中心的加权爆破序列 $\mathcal{R}(Z)$：$Z' = Z_n \dashrightarrow Z_0 = Z$，使其满足以下条件。

(i) 该序列是奇点消解：Z' 是光滑的。

(ii) 该序列关于 Z具有光滑函子性：对于任意光滑态射$Y \to Z$，序列 $\mathcal{R}(Y)$是由拉回序列 $\mathcal{R}(Z) \times_Z Y$去掉所有平凡膨胀后得到的。

（iii）该方法不需要历史记录：每次相应的加权爆破 $Z_{i+1} \to Z_i$ 都只取决于 Z_i。

6.4.14. 几何解释。该算法迭代地重复同一个基本步骤：选择一个仅取决于 Z 的典范 $\mathbb{Q}$-正则中心 R_Z，并对其进行爆破。事实上，这个 R_Z是唯一的 $\mathbb{Q}$-正则中心，其重数（q_1，……，q_n）达到可能的最大值，并且包含 Z 中具有这一不变量的所有点。此外，该中心之所以体现了 Z 的非光滑性，是因为它不能扩展为具有更大重数的更厚的中心。爆破这个障碍便将其消除，而事实证明，爆破后的簇具有更小的最大非光滑性障碍。

例 6.4.15。取 $Z = \mathrm{Spec}(k[t_1, \ldots, t_n]/(t_1^{q_1} + \ldots + t_n^{q_n}))$，其中 $2 \le q_1 \le q_2 \le \cdots \le q_n$。此时的最大中心由通常的理想$I = (t_1^{q_1}$，……，$t_n^{q_n})$及其正规化 Rees 代数 $R = \oplus_d I_d$诱导，其中 I_d由满足 $\sum_j l_j/q_j \ge d$和 $I_1 = I^{\mathrm{nor}}$的单项式 $t_1^{l_1} \ldots t_n^{l_n}$生成。显然，$V(I_1) \hookrightarrow Z$，相应的加权爆破是沿 I_1进行的爆破的代数栈意义下的细化。再令 $I_{>1}$ 为由满足 $\sum_j l_j/q_j > 1$的单项式生成的理想。那么，Z 的非光滑性可由以下事实检测出来：闭浸入$V(I_1) \hookrightarrow Z$不能扩展为平方零加厚 $V(I_{>1}) \hookrightarrow Z$，因为$t_1^{q_1} + \ldots + t_n^{q_n} \notin I_{>1}$。

6.4.16. 与极大接触理论的关系。 现在我们简要讨论一下论证。正如我们所见，一切都可由定理 6.4.5轻易推出。乍看之下，人们或许会认为，这样的结果一旦成立，就应该有多种证明方法，其中也包括相当直接的方法。Włodarczyk 的以下例子表明，我们应当更加谨慎，因为在正特征下，这样的 $\mathbb{Q}$-正则中心并不存在，因此论证必须足够精细，并且要用到零特征这一假设。

例 6.4.17。这个例子又是一个定义在 $X = \mathrm{Spec}(k[x, y, z])$ 上的惠特尼伞 $\mathcal{I} = (x^2 + y^2 z)$，但这次 k 是特征 2 的完美域。与零特征的情形一样，原点处的加权阶为 (2, 3, 3)，但这次整个奇点轨迹 $C = V(x, y)$ 都由捏点组成，因为存在一个自同构 $(x, y, z) \mapsto (x + ty, y, z + t^2)$，它将 C 平移。显然，在这种情况下，C 的任意点处都存在局部中心，但它们无法粘合成一个整体。此外，在一般点 $\eta \in C$ 处，不变量为 (2, 2)，问题隐藏在单位 $z \in \mathcal{O}_\eta$ 不是平方这一事实中。还要注意，从 $X_{k^-(z)}$ 上的一个点来看，几何一般点 $\bar{\eta}$ 处的不变量又是 (2, 3, 3)。总而言之，我们看到，似乎不可能建立一种完善的加权中心理论；也许应当以某种方式将不完美的剩余域以及点处取值不是 p 次幂的单位考虑在内。我个人认为，特征指数的形式体系或许有用，但并不足够。

根据我们目前的认识，在处理 [ATW19] 和 [Que22] 时，最快的方法是运用经典的极大接触理论来构造这样的中心并证明其唯一性。我们确实认为应该存在更直接的论证，寻找这种论证也是未来的研究课题之一。

6.4.18. 中心的构造。根据极大接触理论，在点 $x \in X$ 处局部工作时，我们定义一个极大接触的迭代序列，对应于迭代的系数理想。严格来说，我们得到 x 的一个邻域 H_0、一组正则参数的部分序列 $t_1, \ldots, t_n$，以及定义在 $H_i = V(t_1, \ldots, t_i)$ 上的一列理想 $\mathcal{I}_i$，其阶为 $d_i = \operatorname{ord}_x(\mathcal{I}_i)$，满足 $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}|_{H_0}$；每个 $t_i|_{H_i}$ 都是 $\mathcal{I}_i$ 的最大接触，且对任意 $0 \leq i \leq n$，$d_i = \operatorname{ord}_{H_i}(\mathcal{I}_i)$。按照 §3.3.10 中的记号，我们有

$$\mathcal{I}_{i+1} = \sum_{a=0}^{d_i - 1} (\mathcal{D}_X^{\leq a}(\mathcal{I}_i), d_i - a) \, |_{H_{i+1}}$$

是对于任意 $0 \leq i \leq n-1$ 和 $\mathcal{I}_n = 0$，将 $\mathcal{I}_i$ 的系数理想限制到 H_{i+1} 上的结果。特别地，H_0 足够小，因此每个阶都能在 x 处取得其最大值。

完成上述选择后，令 $q_i = d_{i-1} / \prod_{j=0}^{i-2} (d_j - 1)!$（特别是，$q_1 = d_0$），即可得到

$$\text{w-ord}_{H_0}(\mathcal{I}) = \text{w-ord}_x(\mathcal{I}) = (q_1, \ldots, q_n)$$

并且在 H_0 上的中心为 $\gamma = (t_1^{q_1}, \ldots, t_n^{q_n})$。注意，这一数据与经典算法产生的数据非常接近：非加权主化的第一次爆破沿着中心 $(t_1, \ldots, t_n)$ 进行，而 $(q_1, 0; \ldots; q_n, 0; \infty)$ 是 Bierstone-Milman 针对这次爆破的不变量。

当然，上述概要只给出了一个构造，并解释了整性条件和光滑函子性，但还必须证明，事实上，γ 是 $\mathcal{I}$-可容许的、具有最大加权阶且唯一的。所有这些都是利用极大接触理论中的标准结果完成的（例如 [ATW19，引理 4.4。1]），以及齐次化（这是从一个极大接触过渡到另一个极大接触所必需的）。有关细节，请参阅 [ATW19，定理 5.1。1] 这些思想也在第 [ATW], 章和第 [W-lo] 章中有所回顾：在那里，在余边界膨胀的背景下构造了加权主化，并给出了所有证明和细节；此时，不考虑叠论爆破，而是考虑通过环面商给出的典范表示。本质上，这意味着我们所考虑的轨形被其环面等变可表覆盖所替代；因此，由于这些覆盖在光滑局部上，论证和证明实质上是相同的。

6.5. 对数加权算法。最简单的梦算法不使用任何对数结构。特别是，它可以将一个理想主化为可逆理想，而其支撑可以任意奇异。此外，它无法将除子消解为简单正规交叉除子。梦算法的一种对数精化可以解决这些问题。它在相对情形下当然应该存在，但迄今为止，这一理论仅由 Quek 在 [Que22] 中针对绝对情形——即对数簇的情形——进行了发展。这种方法谨慎地结合了对数框架与加权框架，需要检验许多事项；但其主要思路是在对数簇上工作并使用任意加权子单项式中心，以此模仿梦算法。读者已经见过这些想法，因此我们只解释其中的主要新意。

6.5.1. 框架。自然地，我们研究域上有限型的对数 DM 叠、对数导子和对数光滑性。对数轨形上的容许中心 X 是赋值 $\mathbb{Q}$理想，在 $x \in X$处局部具有 $\gamma = (t_1^{q_1}, \ldots, t_n^{q_n}, u^{p_1}, \ldots, u^{p_r})$的形式，其中 $t_1, \ldots, t_m$ 是正则参数族

在 x处的参数，而 $p_1, \ldots, p_r \in (\overline{M}_x)\mathbb{Q}$是有理单项式。容许爆破是我们将在下文定义的此类中心的加权爆破。我们将使用较简的记法 $\gamma = (t_1^{q_1}, \ldots, t_n^{q_n}, \mathcal{N}_\gamma)$，其中 $\mathcal{N}_\gamma = (u^{p_1}, \ldots, u^{p_r})$是一个称为 γ的单项式类型的 Kummer单项式理想。与非对数情形一样，正则参数 $t_1, \ldots, t_n$的选取有一定自由度，而其他数据则固定：

练习 6.5.2. 证明， γ的重数（$q_1, .., q_n$）和单项式类型均由 γ唯一确定。

6.5.3. 加权子单项式爆破。与非对数情形一样，我们将带有自然权重 $w_i \in \mathbb{N}$的容许中心 $q_i = 1/w_i$ 称为加权子单项式中心。对于一个容许中心 $\gamma = (t_1^{q_1}, \ldots, t_n^{q_n}, \mathcal{N}_\gamma)$，若 $q_i = a_i/b_i$且 $a =$为lcm$(a_1, \ldots, a_n)$，则中心 $a^{-1}\gamma$是加权的；我们将沿 γ 的加权爆破定义为 $X' = wBl_\gamma(X) = Bl_{a^{-1}\gamma}(X)$。对于 X 上的任意理想 $\mathcal{I}$，若 γ 是 $\mathcal{I}$-容许的，则定义其变换 $\mathcal{I}' = (\gamma\mathcal{O}_{X'})^{-1}\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$。同样，直接进行图表计算可知，对数轨形$X$ 经加权子单项式爆破后得到对数轨形 X'，见 Que22，引理 4.1 和 4.2]。

6.5.4. 加权对数阶与单项式类型。对于容许中心 $\gamma = (t_1^{q_1}, \ldots, t_n^{q_n}, \mathcal{N}_\gamma)$，若 $\mathcal{N}_\gamma = \emptyset$（即不存在单项式部分），则定义 wlogord$_x(\gamma) = (q_1, \ldots, q_n)$；若 $\mathcal{N}_\gamma$非空，则定义 wlogord$_x(\gamma) = (q_1, \ldots, q_n, \infty)$。这一不变量与单项式类型给出如下单调性：若 $\gamma < \gamma'$，则 wlogord$_x(\gamma) \leq$wlogord$_x(\gamma')$；若取等号，则有 $\mathcal{N}_\gamma \supsetneq \mathcal{N}_{\gamma'}$

对于 X 上的任意理想 $\mathcal{I}$，我们将加权对数阶定义为

$$\mathrm{wlogord}_X(\mathcal{I}) = \max_{\gamma \leq v_{\mathcal{I}}} \mathrm{wlogord}(\gamma).$$

此外，wlogord$(\mathcal{O}_X) = (0)$，且若 $V(\mathcal{I})$ 包含一个一般点，则 wlogord $= ()$。另外，若 wlogord$(\mathcal{O}_X)$ 不以 ∞ 结尾，则定义 $\mathcal{I}$ 的单项式类型 $\mathcal{N}_\mathcal{I}$ 为空；若以 ∞ 结尾，则将其定义为满足 wlogord$_x(\mathcal{I})$ = wlogord(γ) 的某个 $\mathcal{I}$-容许 γ 的最小（关于包含关系）单项式类型。

6.5.5. 加权对数阶约化。现在我们可以表述关于加权子单项式中心的主要定理。与非对数类似步骤相比，唯一的新工具是还应注意理想的单项式类型。

定理 6.5.6. 设 X 是有限型的对数光滑 DM 叠（在 k上），且设 $\mathcal{I}$是 X上的一个理想。

(i) 加权对数阶 wlogord$_x(\mathcal{I}) = (q_1, \ldots, q_n, *)$ 和单项式类型$\mathcal{N}_\mathcal{I}$ 定义良好，并满足以下整性条件： $q_1 \in \mathbb{N}$ 以及$q_{i+1} \prod_{j=1}^{i}(q_j - 1)! \in \mathbb{N}$ 对于 $2 \leq i \leq n$，且 $*$或者是 $\emptyset$，或者是 ∞。

(ii) 存在唯一的 $\mathcal{I}$-容许中心 γ，使得对于每个满足 wlogord$_x(\mathcal{I})$ = wlogord$_x(\mathcal{I})$ 的点 $x \in X$，都有 wlogord$_x(\gamma)$ = wlogord$_x(\mathcal{I})$，并且$\mathcal{N}_x(\gamma) = \mathcal{N}_x(\mathcal{I})$。

(iii) 令 γ 为 (ii) 中所述的中心，令 $X' = wBl_\gamma(X)$ 为相应的加权爆破，令 $\mathcal{I}' = (\gamma\mathcal{O}_{X'})^{-1}\mathcal{I}\mathcal{O}_{X'}$ 为 $\mathcal{I}$ 的变换。则 wlogord$_{X'}(\mathcal{I}')$ <wlogord$_X(\mathcal{I})$。

(iv) 中心依赖于对 $(X, \mathcal{I})$ 的对数光滑函子性。

6.5.7. 加权对数主化。与非对数情形一样，通过迭代加权对数阶约化，可以得到用于对数主化的梦算法。

定理 6.5.8. 存在一种对数主化方法 $\mathcal{F}$，它将任意有限型对数光滑 DM 叠 X 上的理想 $\mathcal{I}$ 关联到一个加权爆破序列 $\mathcal{F}(\mathcal{I})$：$X' = X_n \dashrightarrow X_0 = X$，使得满足以下条件。

(i) 该序列是一个对数主化：$\mathcal{I}_n = \mathcal{O}_{X_n}$，且每个 $X_{i+1} \to X_i$ 都是 $\mathcal{I}_i$-可容许的，其中 $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}$，而 $\mathcal{I}_{i+1}$ 是 $\mathcal{I}_i$ 在 $0 \le i \le n-1$ 下的变换。

(ii) 该序列关于配对 $(X, \mathcal{I})$ 对数光滑函子性：对于任意满足 $\mathcal{J} = \mathcal{I}\mathcal{O}_Y$ 的对数光滑态射 $Y \to X$，序列 $\mathcal{F}(\mathcal{J})$ 由拉回序列 $\mathcal{F}(\mathcal{I}) \times_X Y$ 省略所有平凡加权膨胀后得到。

(iii) 该方法无需历史：每个加权爆破 $X_{i+1} \to X_i$ 仅取决于 $(X_i, \mathcal{I}_i)$。

6.5.9. 强对数消解。在非对数情形中同样的论证表明，对 $Z \hookrightarrow X$ 的严格变换应用加权对数阶约化，可得到以下非嵌入式梦对数去奇异算法

定理 6.5.10. 存在一种去奇异方法 $\mathcal{R}$，它为任意有限型、局部等维且一般点处对数光滑的对数 DM 叠 Z（定义在 k 上）关联一个加权爆破序列 $\mathcal{R}(Z)$：$Z' = Z_n \dashrightarrow Z_0 = Z$，使得以下条件成立。

(i) 该序列是一个对数去奇异：Z' 对数光滑。

(ii) 该序列关于 Z 对数光滑函子性：对于任意光滑态射 $Y \to Z$，序列 $\mathcal{R}(Y)$ 由拉回序列 $\mathcal{R}(Z) \times_Z Y$ 去掉所有平凡膨胀后得到。

(iii) 该方法不需要历史：每次加权爆破 $Z_{i+1} \to Z_i$ 仅取决于 Z_i。

6.5.11. 论证。如 §6.4.18 中描述的非对数情形一样，这里使用最大接触的对数理论（以及对数导子层$\mathcal{D}_X$）。在点 $x \in X$ 处的局部，定义一个迭代序列，使其对迭代系数理想取对数最大接触，从而得到x的一个邻域 H_0、一个正则参数的部分序列 $t_1, \dots, t_n$，以及定义在 $H_i = V(t_1, \dots, t_i)$ 上的一列理想 $\mathcal{I}_i$，其阶为 $d_i = \operatorname{ord}_x(\mathcal{I}_i)$，满足 $\mathcal{I}_0 = \mathcal{I}|_H$，每个 $t_i|_{H_i}$ 都是 $\mathcal{I}_i$的对数最大接触；对于任意 $0 \le i \le n-1$，$d_i = \operatorname{ord}_{H_i}(\mathcal{I}_i)$，我们有

$$\mathcal{I}_{i+1} = \sum_{a=0}^{d_i - 1} (\mathcal{D}_X^{\le a}(\mathcal{I}_i), d_i - a)|_{H_{i+1}}$$

对于任意 $0 \le i \le n-1$，它都是 $\mathcal{I}_i$ 在 H_{i+1} 上的系数理想的限制，并且 $\operatorname{logord}(\mathcal{I}_n) = \infty$。然后将单项式类型 $\mathcal{N}_{\mathcal{I}_0}$ 定义为由 $\mathcal{I}_n$的单项式包 $\mathcal{M}(\mathcal{I}_n)$中的单项式生成的单项式理想。

完成这些选择后，不变量和中心如下读出：

$$\operatorname{wlogord}_{H_0}(\mathcal{I}) = \text{w-ord}_x(\mathcal{I}) = (q_1, \dots, q_n, *),$$

其中 $q_i = d_{i-1} / \prod_{j=0}^{i-2} (d_j - 1)!$（特别是 $q_1 = d_0$），$* = \emptyset$ 若 $\mathcal{N}_{\mathcal{I}_0} = \emptyset$ 且 $* = \infty$ 否则，H_0 上的中心是 $\gamma = (t_1^{q_1}, \dots, t_n^{q_n}, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_0})$。论证

与此类似，但它采用最大接触的对数理论，并在最后也处理单项式类型。我们再次可以将这一数据与非加权对数主化的第一次爆破联系起来：后者爆破中心$(t_1, \dots, t_n, \mathcal{N}_{\mathcal{I}_0}^{1/q_1})$，而此步骤的不变量为$(q_1, \dots, q_n, *)$，参见注4.2.12。

7. Resolution for quasi-excellent schemes and other categories

在这些讲义中，我们始终只研究了 k 上的有限型概形和代数栈。本节将讨论在更广泛的拟优概形及其他类别中的消解，例如形式概形、复解析空间或非阿基米德解析空间。我们仅打算简要概述一些工具和文献。此外，我们还将讨论一些迄今尚未得到充分验证的方向，不过我们预期相关结果是成立的。我们将讨论的两种主要方法分别是扩展框架，以及通过黑箱约化归约到（适当的）拟优概形。请注意，关于第二种方法的一篇相当详细的综述见 [Tem11] ，我们也会不时引用该综述。遗憾的是， [Tem11] 反映的是十多年前我们掌握的知识，因此只考虑了将经典方法扩展到更广泛情形的问题。

7.1. 归约到拟优概形。 本小节将说明，对于那些看起来完全无法代数化的对象，其奇点消解仍可由拟优概形的奇点消解推出。因此，令人颇感意外的是，奇点消解似乎是一种纯粹的代数现象。关键在于，后者的奇点消解应当关于所有 正则态射函子性。我们还将在 §7.3 中看到，在 qe 概形这一类中存在各种引导策略，基本上可以将问题归约为消解代数簇（这些方法曾用于 [Tem08] 和 [Tem12]）。我们先明确将要讨论奇点消解的几何对象类别，然后讨论如何归约到拟优概形。

7.1.1. 解析空间。 在各种几何对象范畴中，只要能够恰当地定义光滑性和爆破，奇点消解便有意义。最自然的情形或许是复解析空间，而 Hironaka 本人也概述了在这种情形下应如何修改他的证明。在[BM97] 中，Bierstone-Milman 尝试将其奇点消解算法适用的各种情形公理化。具体而言，他们声称该算法适用于域上的有限型代数空间、解析空间——包括复、实和非阿基米德解析空间——以及某些拟解析对象。以我们目前的认识来看，这确实成立，不过有些情形下我无法追溯到原始论证（研究代数空间时不能使用 Zariski 拓扑；此外，在 Berkovich 几何中，微分层是相对于 G-拓扑而非通常拓扑定义的）。

7.1.2. 拟优 schemes。 接下来，我们讨论非域上有限型概形的情形。Hironaka 在其早期工作中使用了形式完备化 [Hir64], ，因此他必须将结果证明推广到更广泛的一类概形，即局部$\widehat{\text{环}}$ A 上的有限型概形，且其同态 $A \to A$ 是正则的。回顾一下，诺特概形之间的态射$Y \to X$ 称为 正则 ，如果它是平坦的，且具有几何正则的

纤维。对于有限型态射，这一概念等价于光滑性，因此正则性是光滑性在大态射情形下的自然推广。不久之后，格罗滕迪克通过两个条件定义了一个更一般的拟优或准优环[2]： X 若满足以下两个条件，则称其为准优：

(N) Nagata 之后：对任何在 X 上有限型的整 Y，Y 的奇点轨迹是开集。(G) 格罗滕迪克之后（尽管我们看到，从历史角度看，这一结果本应以 Hironaka 命名）：对任何 $x \in X$，完备化同态 $\mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{X,x}$ 都是正则的。

关于这些性质及其与消解之间关系的一些讨论和例子可见于 [Tem11，§2.3]。

格罗滕迪克的主要观察是 [Gro67，IV_2, 命题 7.9。5] 他声称，即便是最弱的自洽消解理论，也只有对 qe 概形才可能成立：如果任意有限型整 X-概形都存在奇点消解，那么 X 就是准优的。格罗滕迪克已经表达过这样的希望：任意整 qe 概形都存在消解，而且人们普遍相信这是真的。在特征零的情形下，这已由 [Tem08], 证明，更强的版本见 [Tem12] 和 [Tem18]。[3] 因此，在研究概形时，我们将始终限于特征零的拟优概形。根据 [Gro67，IV_2, 命题 7.8.6(i)]，如果 X 是优的，那么任意有限型 X-概形也都是优的；同样的论证也适用于 qe 概形。

7.1.3. 叠。若一个叠具有由 qe 概形给出的光滑覆盖，则称其为 qe。我们在这些笔记中默认使用了这一点：任何光滑函子性算法都会自动从域上的有限型概形扩展到域上的有限型叠。同样的论证也适用于 qe 概形和叠。此外，任何涉及叠论爆破的方法（例如对数主化或加权主化）都应立即在 qe 叠的普遍性中加以发展。

7.1.4. 形式概形。我们称诺特形式概形 $X = (X, \mathcal{O}_X)$ 为形式簇，如果其闭纤维 $X_s = (X, \mathcal{O}_X/I)$ 是代数簇，其中 I 是定义理想的极大理想。当然，在处理更一般的形式概形时，我们必须施加拟优性限制。形式概形 X 若其闭纤维是 qe 概形，则称其为 qe。由于 Gabber 的以下定理，这一定义确实很有用，见 [KS21]：I-进诺特环 A 是 qe，当且仅当 A/I 是 qe。这是一个深刻的事实，其证明使用了弱局部奇点消解。特别地，它说明拟优性在形式完备化下保持不变，因而在形式局部化下也保持不变，即从 A 到 $A[\![t]\!]$，等等。困难的一部分源于这样一个事实：即使从 A 到 $A[\![t]\!]$，G性质本身也不满足。

Gabber 定理意味着，若 X 是准优的，且 Y 是 Y上的拓扑有限型概形，则 Y 是准优的。在该定理问世之前，人们不得不采用较为笨拙的临时定义，例如参见 [Tem08，§3。1]准优形式概形的一项重要性质是，形式局部化同态 $A \to A_{\{f\}}$ 是正则的。后一条件极为重要，因为它使得我们能够将概形理论中关于正则覆盖拓扑局部的概念推广到准优形式概形。尤其是，我们可以定义奇异轨迹的概念

[2]这一术语是后来才引入的。格罗滕迪克仅用“优异概形”这一概念来表示泛凯莱拟优概形。[3]一般而言，目前已知的只有准优三维簇的消解，参见 [CP19]。

，参见 [Tem08，§3。1]，以及正则态射。特别地，若 $Y \to X$ 可由态射 Spf(B_{ij}) $\to$ Spf(A_i) 覆盖，且这些态射对应的同态均为正则同态，则 $A_i \to B_{ij}$ 是正则的。一般原则很简单——在仿射情形下，使用针对环的通常定义，并利用该概念与正则态射的相容性将其推广到整体情形。

形式概形的爆破以类似方式定义，参见 [Tem08，§2。1]若 X =Spf(A) 是一个带有 I-进 A的，则只需对 Spec(A) 作爆破，并进行 I-进完备化。一般而言，利用爆破与平坦态射相容这一性质，将局部构造粘合起来即可。特别地，这一构造对任意诺特形式概形都有良好定义。

7.1.5. 几何空间。为具体起见，我们将讨论以下几类空间之一：

(1) 拟优 schemes。(2) 拟优形式概形。(3) 复解析空间。(4) Berkovich 引入的非阿基米德解析空间，参见[Ber93]。

当然还有其他可能性——刚性解析空间或 adic 解析空间、Nash 空间等。

7.1.6. 仿射域空间。 在§7.1.4中，我们看到如何将概形理论中的构造移植到形式概形上。事实证明，也可以用类似的方式研究解析空间。在非阿基米德情形下，这并不令人意外，因为 Berkovich 空间是由仿射域空间拼接而成的 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$，而仿射域空间是 k- 仿射域代数的谱。仿射域代数是优的，并且对于任意子域嵌入$\mathcal{M}(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{A})$，同态 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 根据 Ducros 的结果是正则的，参见[Duc09] 或 [AT19，§§6.2–6.3]。

然而，复解析空间也存在类似的理论。每个这样的空间 X 都由所谓的半代数 Stein 紧集覆盖 X_i（例如，多圆盘的闭子域）；环 $A_i = \mathcal{O}_X(X_i)$ 上的过收敛函数 X_i 是优的，并且足以良好地控制 X_i 。同样，若 $X_j \subseteq X_i$，则同态 $A_j \to A_i$ 是正则的。具体而言，这些结论见 [AT19附录 B]，，而 Stein 紧集上的相对 GAGA 则在 [AT19附录 C]中得到证明。特别地，GAGA 意味着，与形式情形一样，复爆破可由代数爆破的解析化得到。

7.1.7. 归约到拟优概形。一般原理非常简单：任何关于任意正则态射具有函子性的消奇点、主化等方法 $\mathcal{F}$，都会自动推广到解析空间和准优形式概形。构造如下：

(0) 用对应于 qe 环 A_i 的仿紧子空间/仿射子空间 X_i 覆盖空间 X 。如果 X 配备了理想 $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_X$ ，还可以得到理想 $I_i \subseteq A_i$，等等。此外，用仿紧子空间/仿射子空间 X_{ijk} 覆盖每个 $X_i \cap X_j$ 。(1) 考虑 Spec(A_i) 的爆炸塔 $\mathcal{F}$ (Spec(A_i))，并应用解析化/完备化函子，得到 X_i 的爆炸塔。此步骤需要使用相对 GAGA，因为我们需要对该塔中爆破上的理想进行解析化。

(2) 证明所得的塔 $\mathcal{F}(X_i)$ 在交集上相容，因为 $\mathcal{F}$ 保持正则态射 $\mathrm{Spec}(X_{ijk}) \to \mathrm{Spec}(X_i)$。

每种情形都应将一些细节补充说明。特别是，这种约化方案曾用于 [Tem12], [Tem18], 和 [AT19, §6], ，但所有细节都在后一篇文献中得到了仔细阐述（就分解函子而言），并构造了复空间的相对 GAGA，等等。

7.1.8. 非紧对象。 最后，我们指出，函子性方法也可以推广到非紧空间，包括局部诺特 qe 概形。显然，实现这一点的唯一办法是用仿射子空间覆盖 X， X_i 并将不同 X_i的爆破序列粘合起来。技术上的难点在于，所得序列可能是无限的；例如，当 $X = \coprod_{i=1}^{\infty} X_i$ 且 X_i 的消解需要 i 步时，就会出现这种情况。不过，可以自然地定义无限有序的爆破序列（在[Tem12, §5.3]中称为超序列），并要求满足以下局部有限性条件：在 X 的任意紧子空间上，该序列只包含有限个非平凡膨胀。对于这样的序列，复合是有定义的；将各子空间 X_i 的局部消解粘合起来，便得到 X 的爆破超序列。一般情形见 [Tem12, §5.3]。

7.2. 扩展框架。将为代数簇开发的算法加以扩展的第二种方法，是直接将其应用到另一种范畴中。例如，Bierstone 和 Milman 对经典方法以及解析空间范畴所做的工作就是如此。这一研究方向非常自然，因为它只是探究这些方法能够在哪种一般性下成立。然而，相关内容似乎几乎没有在文献中得到介绍，因此我只谈谈自己的预期。简言之，完全符合框架的理念，我预期一旦该方法的框架扩展到更广泛的环境中，该方法本身也会随之扩展。因此，应当构造适当的爆破、广义理想和导子理论。在非嵌入消解的情形下，还应确保能够嵌入某个光滑空间。还要注意，轨形和对数解析空间的理论属于民间知识，并且已经在文献中得到部分发展。现在，让我们逐一讨论各种情形。

7.2.1. 解析空间。我预期，除态射消解之外，我们在这些笔记中讨论的所有方法都可以扩展到复解析空间和非阿基米德解析空间。应当使用通常的解析微分和导子。或许，通过 $\mathbb{Q}$-理想和 Rees 代数来引入加权爆破是最简便的方式。我不认为会有任何严重的困难。

至于相对轨形上的主化以及解析空间的态射消解，存在一个主要障碍——单项化定理，参见第 5.3 节。例如，设 $B = \mathbf{P}^2_{\mathbb{C}}$, $B_0 = \mathbf{A}^2_{\mathbb{C}}$ 且 $Z = V(x - e^y)$ 是 B_0 中的一条曲线，无法延拓到 B。设 $X = \mathbf{A}^1_{B_0} = \mathbf{A}^3_{\mathbb{C}}$ 具有坐标 x、y、z，且 $\mathcal{I}$ 上的理想由 $(x - e^y, z)$ 给出。于是，对 $\mathcal{I}$ 在 B_0 上进行主化，需要在 B_0 中爆破 V，这会通过 $u^p = x - e^y$ 增大对数结构，随后再爆破理想 (x, u^p)。然而，一旦试图在 $X \to B$ 上主化 $\mathcal{I}$，便会陷入困境。

我认为，除了单项化之外，整个算法都能正常运行。至于单项化，有两个希望/问题，至少目前我们知道的例子都不与之矛盾：当 $X \to B$ 是适当的时，单项化定理是否成立？如果允许进行基变换，单项化定理是否适用于任意光滑解析空间之间的光滑态射 $X \to B$

$B' \to B$ 具有以下更一般的形式： $B' \to B$ 是由修改和开覆盖生成的拓扑的覆盖吗?

7.2.2. 具有充分导子的概形。 任意 qe 概形 X 的绝对导子理论可能过于糟糕。不仅如此，层 $\mathcal{D}_X = \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X)$ 不一定是拟凝聚的；甚至对于 $X = \mathrm{Spec}(R)$，当 R 为离散赋值环时，层 $\mathcal{D}_X$ 在闭点处也可能有零茎，参见 [Tem11，例 2.3.5(ii)]。显然，这些笔记中的所有方法都无法应用于具有如此导子理论的概形，因此应只考虑导子理论足够丰富的 qe 概形。

以下定义早在 [Tem12, Remark 1.3.1(iii)] 中就已提出：若对任意点 $x \in X$，余切空间 m_x/m_x^2 的所有元素都能由 $\mathcal{D}_{X,x}$ 中的元素加以区分，则称概形 X 具有充分导子。换言之，从 $\mathcal{D}_{X,x} \to (m_x/m_x^2)^*$ 到切空间的同态是满射。注意，由于 $\mathcal{D}_X$ 不是拟凝聚的，$\mathcal{D}_{X,x}$ 可能严格小于 $\mathrm{Der}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{X,x})$，因此这一条件断言在 x 的某个邻域内存在足够多的导子。可以证明，具有充分导子的概形是 qe 概形，并且其类在取有限型概形时封闭。我预期，非对数主化方法——经典方法和加权方法——适用于一般的具有充分导子的概形（在经典情形下，这一猜想见于 [Tem12]），并且对任意正则态射具有函子性。同样，我预期，非嵌入方法适用于可在 étale 局部嵌入到具有充分导子的正则概形中的概形 ´。

我预期，对于具有足够多对数导子的对数方法和对数概形，结论也成立；这里“足够多”是指对数导子能够区分正则参数和幺半群参数。在非加权情形下，这一点已在 [ATW20b] 中作为 [ATW20b定理 1.2 的特例得到证明，6] 其中目标B 只是 $\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$。事实上， [ATW20b] 是我所知唯一认真探讨“足够多导子”这一概念的论文。该文甚至研究了具有足够多相对导子的态射消解 $X \to B$，并证明只要 $\dim(B) \leq 1$即可。在更高维 B 的情形下，则需要对导子施加严格得多的限制——所谓导子的丰足性；这一条件还考虑了“常值方向”上的导子，它们能够区分 $k(x)/k(b)B$的超越基中的元素。解析空间不具备这一条件，这也解释了为什么当 $\dim(B) > 1$时，我们的单项化定理不能推广到解析空间。

最后需要指出，除了代数簇之外，具有足够多导子的概形中，最重要的情形是有限型的、定义在诺特完备局部环上的概形。我们稍后会看到，为什么这一类（或其中某些子类）如此重要。

7.2.3. 形式概形。形式概形的处理方式应当与概形类似；也就是说，我预计这些方法可以推广到具有足够多（对数）导子的形式概形。最重要的情形是形式簇。

7.3. 拟优概形的奇点消解。最后，让我们描述任意 qe（形式）概形的情形。迄今为止我们介绍的工具不足以为它们建立消解方法，而看来唯一的途径是借助 (G) 性质，从形式完备化进行某种下降。因此，首先应当构造一种奇点消解或主化方法

$\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$，适用于 $\mathcal{C}$ 有限型于完备局部环之上的（形式）概形，或其适当的子类（例如，采用§7.2中的方法），然后在第二步进行下降。经典的解决方案使用开理想的下降，并且必然要构造一种新的方法 $\mathcal{F}$，即便对于$\mathcal{C}$中的概形而言也更为复杂。这种方法称为局部化或按余维归纳，它可追溯到 Hironaka 的原始论文，并且（由于我的孤陋寡闻）后来在 [Tem08]中被重新发现。一个自然的替代方案是尝试下降更一般的理想，因为这只需将 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ 从 $\mathcal{C}$ 推广到所有 qe 概形。这个方向上唯一已知的结果是 McQuillan 证明了加权中心确实满足这种下降，因此加权消解和主化算法可推广到任意 qe 概形，参见[McQ20，第 VII 节]。

7.3.1. 按余维归纳。 该方法非常稳健，适用于所有算法，参见 [Hir64，第 IV 章，§1]以及 [Tem11] （另见 [Tem12，§4]以及 [Tem18，§3。4]）。此外，该方法也用于单项化定理的证明。不过，为了具体起见，我们只以主化的情形来说明这一思想。

首先假设 $X = \operatorname{Spec}(A)$ 是一个局部正则 qe 概形，并且 I 支撑在 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 闭点 $s \in X$ 上。于是，在极大 $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 理想 m 处的形式完备化 $X = \operatorname{Spec}(A)$ 是一个正则概形，而 $I = IA$ 支撑在闭点 $\widehat{s} \in X$ 上。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ 根据第一步存在的 I 的主化 $X_n \dashrightarrow X_0 = X$，只对包含于 $\widehat{s}$ 纤维中的 $\widehat{\ }$ 中心进行爆破。这些中心对应于在 $\widehat{m}$-进拓扑中 $J_i \subseteq \mathcal{O}_{\widehat{X}_i}$ 开的理想，因此所有这些理想都可以代数化，并且该塔由一个进行 m-进完备化的爆破塔 $X_n \dashrightarrow X_0 = X$ 获得，其中心为 $J_i \subseteq \mathcal{O}_{X_i}$。由下降立即可知，后一个序列将 I 主化。

在一般情形下，按 X 中非主化轨迹像的余维归纳进行。首先，考虑余维最小的有限个点 $x_1, \dots, x_n \in T_0 = V(I)$，用前一段中的方法将 I 拉回到 $\coprod_{i=1}^{n} \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,\, x_i})$ 后进行主化，然后只需爆破各中心的概形闭包，得到一个爆破序列 $X' \dashrightarrow X$，它在 $x_1, \dots, x_n$ 上使 I 主化。这些中心在 $x_1, \dots, x_n$ 的特化下不一定光滑，但根据归纳假设，我们可以假定已经为它们构造了主化（因而也构造了解消）。因此，只需在爆破每个中心之前先对其进行消解。这会在序列 $X' \dashrightarrow X$ 中插入中间爆破步骤，使算法变得更加复杂，但不会影响 $x_1, \dots, x_n$ 上的情形。下一步，考虑 $V(I')$ 的像 $T_1 \subset X$，其中 $I' \subseteq \mathcal{O}_{X'}$ 是 I 的变换。它是 $T_0 \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ 的闭子集。选取余维最小的点 $y_1, \dots, y_m \in T_1$，找出一个序列 $X'' \dashrightarrow X'$，使其在 $y_1, \dots, y_m$ 的原像上将 I' 主化，依此类推。

注 7.3.2。 (i) 作为余维归纳方案的输入，只需采用一种主化方法 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ 适用于有限型正则概形 X，其底空间为谱 $\operatorname{Spec}(R)$（其中底环是完备局部环），并且理想 $I \subset \mathcal{O}_X$满足 $V(I)$ 包含于闭点的原像中。这是一个严格的限制，但借助从簇的主化得到的 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ 黑箱构造，可以获得主化。事实上，这样的概形在局部上可以实现为某个簇的完备化，而 I 则代数化为该簇上的一个理想，因此只需拉回代数化上的主化即可。该方法的微妙之处在于代数化的独立性，这一点基于 Elkik 定理，见 [Tem11，§4]。该

方法已在 [Tem12中实现，见 §3], ，不过如今我认为，扩展框架至具有充分导子的概形会是更好的解决方案，因为它更加稳健，也更容易推广到其他情形。

(ii) 为了证明所得到的方法关于所有正则态射都是函子性的，应当证明对于处理簇的输入算法，这一点同样成立。事实证明，这有些微妙，因为在不同域上定义的簇之间存在正则态射 k，而经典方法只使用 k-导子。一个解决方案是扩展框架，使用关于 $\mathbb{Q}$的绝对导子。然而，还有一种黑箱论证可以证明，经典方法（以及我们在这些笔记中构造的所有方法）与簇之间的任意正则态射相容。这一点在 [BMT11]中得到了处理。

7.3.3. 直接下降。最后，让我们讨论一种假设性的直接下降。设$\widehat{}$再次有， X 是一个局部正则 qe 概形，而 X 是其完备化，但这次$\widehat{}$ $\widehat{}$考虑 X 上的任意理想 I，其完备化为 $I \subseteq \mathcal{O}_{\widehat{X}}$。由于 I 来自 X，因此有理由希望，任何正则的函子性主化

$\widehat{}$ $\widehat{}$ $\widehat{}$

I 都应下降到 X。我们用一个错误的论证来说明这一点：如果 $Y = X \times_X X$是诺特的且 qe，那么将主化拉回到$\widehat{}$完备化 Y 所得的两个拉回会与 $I\mathcal{O}_{\widehat{Y}}$ 的主化重合（在这种情况下，投影$\frown$ $\frown Y \to X$ 是正则的），因此主化将通过平坦下降下降到X。遗憾的是， Y 通常远非诺特的，因此需要完全不同的论证；但是否可能以其他某种形式下降到 X，这一问题似乎非常自然。我预计，如果这种下降在局部情形下成立，那么应当能够利用 N-性质，将局部解拼接到任意 qe X 上。

Appendix A.

A.1. 整闭包。回顾一下，理想 $I \subseteq A$的整闭包 I^{nor} 由所有满足首一方程 $t^n + \sum_{i=1}^n a_i t^{n-i} = 0$的元素 $t \in A$组成，其中$a_i \in I^i$。任何满足 $I \subseteq J \subseteq I^{\mathrm{nor}}$ 的理想 J称为整于 I。这两种概念都与局部化相容，因此可推广到概形上的理想层。若概形 X 上的$\mathcal{J}$整于理想 $\mathcal{I}$，且 $Y \to X$ 是一个态射，则 $\mathcal{J}\mathcal{O}_Y$整于 $\mathcal{I}\mathcal{O}_Y$。

引理 A.1.1. 设 X 是一个带有可逆理想 $\mathcal{I}$的正规概形。那么对于任何满足 $\mathcal{I}^{\mathrm{nor}} = \mathcal{J}^{\mathrm{nor}}$ 的理想 $\mathcal{J}$，都有 $\mathcal{I} = \mathcal{J}$。换言之， $\mathcal{I}$ 是整闭的，并且它仅是自身的整闭包。

证明。该结论可在局部检验，因此不妨设 A 是一个局部正规整环，$I = (t)$是主理想，且 J 是满足 $I^{\mathrm{nor}} = J^{\mathrm{nor}}$的理想。若 s 整于 I，则它满足方程 $s^n + \sum_{i=1}^n a_i t^i s^{n-i} = 0$，因此 s/t 满足一个以 A为系数的首一方程。由 A 的正规性可知 $s/t \in A$，即 $s \in I$。因此，$I = I^{\mathrm{nor}}$。

假设 $J \neq I^{\mathrm{nor}} = I$。那么 $t \notin J$，但它整于 J，于是我们取一个首一方程 $t^n + \sum_{i=1}^n b_i t^{n-i} = 0$，其中 $b_i \in J^i \subset I^i = (t^i)$，且 n尽可能小。根据 n 的极小性，每个元素 $c_i = b_i/t^i$ 都不是单位，否则$t^i - b_i/c_i = 0$ 将是一个次数更小的方程。因此我们得到$t^n u = 0$，其中 $u = 1 + \sum_{i=1}^n c_i$ 是单位，这就导出了矛盾。□

这个引理需要正规性假设。例如，在 $A=\mathrm{Spec}(k[x^2,x^3])$ 中，主理想 (x^2) 的整闭包 (x^2,x^3) 不可逆。

推论 A.1.2. 若正规概形 X 上的理想 $\mathcal{I}$ 和 $\mathcal{J}$ 满足 $\mathcal{J}^{\mathrm{nor}}=(\mathcal{I}^d)^{\mathrm{nor}}$，则 $(\mathrm{Bl}_{\mathcal{I}}(X))^{\mathrm{nor}}=(\mathrm{Bl}_{\mathcal{J}}(X))^{\mathrm{nor}}$。

证明。结论可由以下两个特殊情形直接推出：当 $\mathcal{J}=\mathcal{I}^d$ 时，以及当 $\mathcal{J}$ 整于 $\mathcal{I}$ 时。在第一种情形下，对于任意修改 $Y\to X$，我们有 $\mathcal{J}\mathcal{O}_Y=(\mathcal{I}\mathcal{O}_Y)^d$ 可逆当且仅当 $\mathcal{I}\mathcal{O}_Y$ 可逆。因此，由膨胀的泛性质，$\mathrm{Bl}_{\mathcal{I}}(X)=\mathrm{Bl}_{\mathcal{I}^d}(X)$。若 $\mathcal{J}$ 整于 $\mathcal{I}$，则 $\mathcal{J}\mathcal{O}_Y$ 整于 $\mathcal{I}\mathcal{O}_Y$；因此，若 Y 正规且这两个理想之一是主理想，则根据引理 A.1.1，另一个也是主理想（且二者相等）。第二种情形得证。□

References

[Abr] 丹·阿布拉莫维奇， *Stacks for everyone who cares about varieties and singularities*，正在准备中。[AK00] 丹·阿布拉莫维奇和卡勒·卡鲁， *Weak semistable reduction in characteristic 0*，《数学发明》139（2000），第2期，241–273。MR 1738451（2001f:14021）[ALT18] K. 阿迪普拉西托、G. 刘和 M. Temkin， *Semistable reduction in characteristic 0*，2018年11月，http://arxiv.org/abs/1810.03131。[AT19] 丹·阿布拉莫维奇和 Michael Temkin， *Functorial factorization of birational maps for qe schemes in characteristic 0* **13** 2019 2, 379，《代数与数论》（），第–期，424。MR 3927050[ATW] 丹·阿布拉莫维奇、Michael Temkin 和 Jaros law W lodarczyk， *Birational geometry using weighted blowing up*，正在准备中。[ATW19] 丹·阿布拉莫维奇、Michael Temkin 和 Jaros law W lodarczyk， *Functorial embedded resolution via weighted blowings up* 2019 1906 07106，arXiv 电子预印本（），arXiv：。。[ATW20a] 丹·阿布拉莫维奇、Michael Temkin 和 Jaros law W lodarczyk， *Principalization of ideals on toroidal orbifolds* **22** 2020 12, 3805，《欧洲数学会杂志》（JEMS）（），第–期，3866。MR 4176781[ATW20b] 丹·阿布拉莫维奇、Michael Temkin 和 Jaros law W lodarczyk， *Relative desingularization and principalization of ideals* 2020 2003 03659，arXiv 电子预印本（），arXiv：。。[ATWo20] 丹·阿布拉莫维奇、Michael Temkin 和 Jaros l aw W l odarczyk， *Toroidal orbifolds, destackification, and Kummer blowings up*，《代数与数论》14（2020），第8期，2001–2035，附录由 David Rydh 撰写。MR 4172700[Ber93] 弗拉基米尔·G. 别尔科维奇， *Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces*，高等科学研究所数学出版物（1993），第78期，5–161（1994）。MR 1259429（95c:14017）[BM97] 爱德华·比尔斯通和皮埃尔·D. 米尔曼， *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant* **128**，《数学发明》（1997），第2期，207–302。MR 1440306（98e:14010）[BM08]， *Functoriality in resolution of singularities*，《数学科学研究所出版物》44（2008 2, 609 639 2426359），第–期。MR BMT 爱德华·比尔斯通、皮埃尔·D. 米尔曼和 Michael Temkin， *Q-universal desingularization* **15** 2011 249 2838221，《亚洲数学杂志》（），第2期，229–。MR [CP19] 文森特·科萨尔和奥利维耶·皮尔唐， *Resolution of singularities of arithmetical threefolds* **529** 2019 268 535，《代数杂志》（），–。MR [09] *Les espaces de Berkovich sont excellents*Duc 安托万·迪克罗，，《格勒诺布尔傅里叶研究所年刊》59（2009），第4期，1443–1552。MR 2566967（2011a:14048）[Fru] Anne Fruhbis-Kr¨正在准备中。[Gro67] 亚历山大·格罗滕迪克， *Éléments de géométrie algébrique.*，高等科学研究所数学出版物（1960-1967）。[Hir64] 平助·广中， *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I II* 2 **79** 1964 109 203 2 **79** 1964，，《数学年刊》（）（），–；同上（）（），205–326。MR 0199184

[Kat89] Kazuya Kato, *Logarithmic structures of Fontaine-Illusie*, 《代数分析、几何与数论》（巴尔的摩，马里兰州，1988），约翰斯·霍普金斯大学出版社，巴尔的摩，马里兰州，1989，第191–224页。MR 1463703（99b:14020）[KKMSD73] George Kempf、Finn Faye Knudsen、David Mumford 和 Bernard Saint-Donat, *Toroidal embeddings. I*, 《数学讲义》，第339卷，施普林格出版社，柏林，1973。MR 0335518（49 #299）[Kol07] J´anos Koll´ar, *Lectures on resolution of singularities*, 《数学研究年刊》第166卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2007。MR 2289519（2008f:14026）[KS21] Kazuhiko Kurano 和 Kazuma Shimomoto, *Ideal-adic completion of quasi-excellent rings (after Gabber)* **61** 2021 3, 707 722 4301055 ，《京都数学杂志》（），第–期。MR [McQ20] Michael McQuillan, *Very functorial very fast and very easy resolution of singularities* **30** 2020 909 （），第 3, 858 4135673 –期。MR MP [13] Michael McQuillan 和 Daniel Panazzolo, *Almost étale resolution of foliations*, 《微分几何杂志》 **95** 2013 2, 279 319 3128985 （），第–期。MR Niz Wies lawa [08] *K-theory of log-schemes. I* Nizio l, ，《文献数学》13（2008），505–551。MR 2452875[Pan06] Daniel Panazzolo, *Resolution of singularities of real-analytic vector fields in dimension three* **197** 2006 2, 167 289 ，《数学学报》（），第–2296055 期。MR [ ] *Weighted blow-ups* QR Ming Hao Quek 和 David Rydh, ，正在准备中。[Que22] Ming Hao Quek, *Logarithmic resolution via weighted toroidal blow-ups*, 《代数几何》9（2022），第3期，311–363。MR 4436684[Tem08] Michael Temkin, *Desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero*, 《高等数学》 **219** 2008 2, 488 522 2435647 （），第–期。MR Tem , , 《代 [10] *Stable modification of relative curves* 数几何杂志》19 4, 603 2010 677 2669727（），第–期。MR [Tem11] , *Absolute desingularization in characteristic zero*, 《动机积分及其与模型论和非阿基米德几何的相互作用》第二卷，伦敦数学会讲义丛书第384卷，剑桥大学出版社，剑桥，2011，第213–250页。MR 2905858[Tem12] , *Functorial desingularization of quasi-excellent schemes in characteristic zero: the nonembedded case* **161** 2012 11, 2207 2254 ，《杜克数学杂志》（），第–期。MR 2957701[Tem18] , *Functorial desingularization over* q*: boundaries and the embedded case*, 《以色列数学杂志》 **224** 2018 1, 455 504 3799764 （），第–期。 [22] *Introduction to logarithmic geometry* MR Tem , , https://arxiv.org/abs/2209.11976。[Vil89] Orlando Villamayor, *Constructiveness of Hironaka's resolution*, 《高等师范学校科学年刊》(4 **22** 1989 1, 1 32 985852)（），第–期。MR W lo Jaros law W [ ] lodarczyk, *Functorial resolution by torus actions*, 正在准备中。[W lo05] , *Simple Hironaka resolution in characteristic zero*, 《美国数学会杂志》18（2005），第4期，779–822（电子版）。MR 2163383

Einstein Institute of Mathematics, The Hebrew University of Jerusalem, Edmond J. Safra Campus, Giv'at Ram, Jerusalem, 91904 Israel , : michael.temkin@mail.huji.ac.il
Email address