arXiv:2303.00414v1 [math.DG] 1 Mar 2023

黎曼流形上的高余维平均曲率流奇点模型

Huy T. Nguyen 和 Artemis A. Vogiatzi

摘要

我们研究黎曼流形 $\mathcal{N}^{n+m}$ 中具有二次针状条件的光滑 n 维紧子流形的平均曲率流。我们主要关注高余维情形 $m \geq 2$。我们建立了一个余维估计，表明在高曲率区域，子流形会以可量化的方式近似成为余维一。借助这一估计，我们证明在流的奇异时刻，存在一种重标度，使其收敛到欧几里得空间中的光滑余维一极限流。在柱面型针状条件下，该极限流是弱凸的，并沿平移方向运动。我们的方法依赖于二次针状条件沿流的保持性，以及一项用于控制高曲率区域中平均曲率的梯度估计。这些估计使我们能够分析流在奇点附近的行为，并证明极限流的存在性。

1 引言

设 $F_0\colon \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^{n+m}$ 是紧致流形 $\mathcal{M}^n$ 的光滑浸入。从 F_0 出发的平均曲率流是如下子流形族

$$F\colon \mathcal{M}^n \times [0,T) \to \mathcal{N}^{n+m}$$

使得

$$\begin{cases} \partial_t F(p,t) &= H(p,t), \quad \text{for} \quad p \in \mathcal{M}, t \in [0,T) \\ F(p,0) &= F_0(p) \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$H(p,t)$ 表示 $\mathcal{M}_t = F_t(p) = F(p,t)$ 在 p 处的平均曲率向量。众所周知，这是关于 F 的拟线性弱抛物型偏微分方程组。从几何上看，平均曲率流是子流形面积泛函的最速下降流，因此是一种自然的曲率流。

在余维一的情形中，研究平均凸平均曲率流奇点形成的一个关键步骤是凸性估计。该估计表明，在平均曲率较大的区域，第二基本形式几乎是正定的。

在该论文中，Huisken [9] 利用 Stampacchia 迭代、Michael–Simons–Sobolev 不等式以及关于对称多项式的递推公式，证明了平均曲率流下的闭凸超曲面会演化为球形奇点。在 [10],中，Huisken 随后将这一结果推广到具有黎曼背景曲率的空间，其中严格凸性取决于背景曲率。
相比之下，White [33, 34] 将几何测度论中的紧致性定理与第二基本形式的强极大值原理的刚性结合起来。Haslhofer-Kleiner [8] 基于 Andrews 关于平均曲率流的非塌缩 [2]结果，发展出了一种研究 White 结果的替代方法。

欧几里得空间中平均凸超曲面的平均曲率流情形，已由 White [33] 和 Huisken-Sinestrari [13], 进行研究；他们对奇点的形成进行了深入且影响深远的分析。近年来，已有许多工作将这些结果推广到高余维平均曲率流 [23],[19], [20]。本文旨在为黎曼子流形中的高余维平均曲率流，获得这些结果的适当推广。

高余维平均曲率流的大部分研究都对高斯映射的像作出了假设。这些研究要么考察图子流形， [6],[17],[29],[31], 具有额外辛结构或拉格朗日结构的子流形 [26],[7],[28],[25],[22] ，要么使用在平均曲率流下保持不变的格拉斯曼流形凸子集[27],[30],[32]。因此，我们将重点研究关于第二基本形式范数的条件。在高余维情形，平均曲率流比超曲面情形更为复杂，因为后者只有一个法方向。在超曲面情形中，第二基本形式是一个对称实值二阶张量，而平均曲率是一个实值函数，这使得对流的分析得以简化。然而，法曲率的存在使第二基本形式演化方程中的反应项变得复杂，从而使高余维平均曲率流的分析更具挑战性。

Andrews–Baker 在 [3] 中引入了另一种条件。在一个紧致子流形上，若 $|H| > 0$，则存在一个 $c > 0$，使得

$$|A|^2 \leq c|H|^2, \tag{1.2}$$

该条件在余维一平均曲率流下保持不变。此外，该条件对所有余维都适用。事实上，Andrews–Baker 证明了，对于 $c \leq \frac{4}{3n}$ （$< \frac{1}{n-1}$ for$n < 4$），式 (1.2) 在平均曲率流下保持不变。对于 $c = \min\{\frac{4}{3n}, \frac{1}{n-1}\}$，他们还令人瞩目地证明了流会收敛到一个圆球面。注意，条件$|A|^2 - \frac{1}{n-1}|H|^2 < 0, H > 0$蕴含余维一情形下的凸性。这促使 Andrews–Baker 考虑以下夹挤条件：

$$|A|^2 - c_n|H|^2 + d_n \leq 0, \tag{1.3}$$

该性质在平均曲率流下保持不变，适用于$c_n \leq \frac{4}{3n}$ 和 $d_n > 0$。在论文 [23],中，作者提出了一种手术构造，使具有圆柱型挤压的高余维平均曲率流能够穿过

奇点。这将 [13]关于余维一的结果推广到了高余维（另见 [8]）。手术过程的一个关键方面是 [20], 中给出的余维估计，它表明在高曲率区域附近，奇点会近似呈余维一。另一个重要组成部分是圆柱型估计，它表明在高曲率区域附近，子流形会近似呈 $\mathbb{S}^{n-1}\times\mathbb{R}$ 形式的圆柱状。这些估计对于手术的实施至关重要，并使我们能够控制高曲率区域内子流形的几何形状。

本文研究黎曼流形中高余维平均曲率流的奇点形成，并考虑第二基本形式长度满足以下曲率挤压条件

$$|A|^2 - c_n|H|^2 \leq -d_n(K_1, K_2, L)$$

其中 d_n 为依赖于背景曲率的某个正数,

$$-K_1 \leq K_{\mathcal{N}} \leq K_2, \quad |\bar{\nabla}\bar{R}| \leq L, \quad \mathrm{inj}(\mathcal{N}) \geq \imath_{\mathcal{N}}.$$

and

$$c_n := \min\left\{\frac{4}{3n}, \frac{1}{n-2}\right\}, \quad \text{if } n \geq 5.$$

文献 [18] 证明了该条件在流动下保持不变，它是 Huisken 在 [10] 中提出的条件向高余维背景黎曼流形情形的一种自然推广。我们将证明，在平均曲率较大的高曲率区域中，子流形在一种可量化的意义下近似为余维一。特别地，我们将证明一个定理，将 [20] 中的主要定理推广至黎曼背景空间。

定理 5.1. 设 $F\colon \mathcal{M}^n \times [0,T) \to \mathcal{N}^{n+m}$ 是平均曲率流 (1.1) 的一个光滑解，且 $F_0(p) = F(p, 0)$ 是紧致且满足二次挤压条件的。那么存在 $\forall \varepsilon > 0, \exists H_0 > 0$，使得若 $f \geq H_0$，则

$$\left|A^-\right|^2 \leq \varepsilon f + C_\varepsilon$$

$\forall t \in [0,T)$ 其中 $C_\varepsilon = C_\varepsilon(n,m)$.

假设满足二次针状条件，我们证明，受夹逼的流的奇点模型必定始终具有余维一，与原始流的余维无关。
本文的结构安排如下。第2节中，我们介绍本研究所需的全部技术工具，并设定记号。第3节中，我们证明二次针状条件在平均曲率流下得以保持。第4节中，我们证明梯度估计。梯度估计的重要性在于，它使我们能够控制平均曲率，从而控制固定尺度邻域上的整个第二基本形式。第5节中，我们证明余维估计，这是本文的主要定理

。该估计意味着，在高曲率区域，子流形会定量地趋于余维一。第6节中，我们说明黎曼流形中的余维估计实际上可归结为欧几里得情形。最后，第7节中，我们证明常负曲率情形下的余维估计。

致谢。第一作者谨此感谢英国工程与自然科学研究委员会通过项目 EP/S012907/1 提供的支持。

2 预备知识

本章介绍必要的预备结果并建立本文所用的记号。我们推导任意余维的黎曼背景空间中第二基本形式的长度及长度平方，以及平均曲率向量的演化方程。此外，我们还证明了本文将会用到的 Kato 型不等式。设 $F\colon \mathcal{M}^n\times[0,T)\to\mathcal{N}^{n+m}$ 是一个 n 维光滑、闭且连通的子流形，嵌入于一个 $(n+m)$ 维光滑完备黎曼流形中。我们采用以下指标约定：

$$1\le i,j,k,\cdots\le n,\ 1\le a,b,c,\cdots\le n+m \quad\text{and}\quad 1\le\alpha,\beta,\gamma,\cdots\le m.$$

我们用 A 表示取值于法向量的第二基本形式张量，用 H 表示平均曲率向量，它是第二基本形式的迹，定义为 $H^\alpha=\sum_i A^\alpha_{ii}$。无迹第二基本形式 $\mathring{A}$ 定义为 $\mathring{A}=A-\frac{1}{n}Hg$，其分量为 $\mathring{A}^\alpha_{ij}=A^\alpha_{ij}-\frac{1}{n}H^\alpha g_{ij}$。显然，我们有 $\sum_i\mathring{A}^\alpha_{ii}=0$。

我们将主法向方向定义为 $\nu_1=\frac{H}{|H|}$。这一定义是良好的，因为在我们的设定中 $|H|\neq 0$。我们用 A^- 表示垂直于主方向的第二基本形式张量，并用 h 表示主方向上的张量值第二基本形式，即 $h_{ij}=\frac{\langle A_{ij},\ H\rangle}{|H|}$。因此，我们有 $A=A^-+h\nu_1$。此外，$A^+_{ij}=\langle A_{ij},\ \nu_1\rangle\nu_1$。根据 A^- 的定义，自然可以定义作用于 A^- 的联络 $\hat{\nabla}^\perp$，其定义为

$$\hat{\nabla}^\perp_i A^-_{jk}:=\nabla^\perp_i A^-_{jk}-\langle\nabla^\perp_i A^-_{jk},\nu_1\rangle\nu_1.$$

我们将 h 记为沿主方向的第二基本形式的无迹部分。对于 ν_1的选择，我们有 $\alpha\ge 2$ 和 $H^\alpha=\operatorname{tr}A^\alpha=0$。无迹第二基本形式可以改写为$A=\sum_\alpha A^\alpha\nu_\alpha$，其中

$$\mathring{h}=h-\frac{|H|}{n}Id,\quad\text{for}\ \ \alpha=1$$

and

$$\mathring{A}^-=A^\alpha,\quad\text{for}\ \ \alpha\ge 2.$$

我们设

$$|A|^2=|h|^2+|A^-|^2 \quad \text{and} \quad |\mathring{A}|^2=|\mathring{h}|^2+|\mathring{A}^-|^2.$$

Let

$$R_{ijkl}=g\big(R(e_i,e_j)e_k,e_l\big),\quad \bar{R}_{abcd}=\langle\bar{R}(e_a,e_b)e_c,e_d\rangle \quad \text{and} \quad R^{\perp}_{ij\alpha\beta}=\langle R^{\perp}(e_i,e_j)e_\alpha,e_\beta\rangle.$$

命题 2.1（[3],第3节）。在采用求和约定的情况下， A_{ij} 和 H 的演化方程为

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t-\Delta\Big)A_{ij}=&\sum_{p,q}\langle A_{ij},A_{pq}\rangle A_{pq}+\sum_{p,q}\langle A_{iq},A_{pq}\rangle A_{pj}+\sum_{p,q}\langle A_{jq},A_{pq}\rangle A_{pi}-2\sum_{p,q}\langle A_{ip},A_{jq}\rangle A_{pq}\\&+2\sum_{p,q}\bar{R}_{ipjq}A_{pq}-\sum_{k,p}\bar{R}_{kjkp}A_{pi}-\sum_{k,p}\bar{R}_{kikp}A_{pj}+\sum_{k,\alpha,\beta}A^{\alpha}_{ij}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\nu_\beta\\&-2\sum_{p,\alpha,\beta}A^{\alpha}_{jp}\bar{R}_{ip\alpha\beta}\nu_\beta-2\sum_{p,\alpha,\beta}A^{\alpha}_{ip}\bar{R}_{jp\alpha\beta}\nu_\beta\\&+\sum_{k,\beta}\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}\nu_\beta-\sum_{k,\beta}\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}\nu_\beta,\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\Big(\partial_t-\Delta\Big)H=\sum_{p,q}\langle H,A_{pq}\rangle A_{pq}+\sum_{k,\alpha,\beta}H^{\alpha}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\nu_\beta.\tag{2.2}$$

引理 2.2（[4], 第5.1节）。考虑一族浸入 $F\colon\ \mathcal{M}^n\times[0,T)\ \to\mathcal{N}^{n+m}$ ，其按平均曲率流运动。则有以下演化方程

$$\partial_t d\mu_t=-|H|^2d\mu_t,\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\partial_t|A|^2=&\Delta|A|^2-2|\nabla A|^2+2\sum_{\alpha,\beta}\Big(\sum_{i,j}A^{\alpha}_{ij}A^{\beta}_{ij}\Big)^2+2\sum_{i,j,\alpha,\beta}\Big(\sum_{p}\big(A^{\alpha}_{ip}A^{\beta}_{jp}-A^{\alpha}_{jp}A^{\beta}_{ip}\big)\Big)^2\\&+4\sum_{i,j,p,q}\bar{R}_{ipjq}\Big(\sum_{\alpha}A^{\alpha}_{pq}A^{\alpha}_{ij}\Big)-4\sum_{j,k,p}\bar{R}_{kjkp}\Big(\sum_{i,\alpha}A^{\alpha}_{pi}A^{\alpha}_{ij}\Big)+2\sum_{k,\alpha,\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\Big(\sum_{i,j}A^{\alpha}_{ij}A^{\beta}_{ij}\Big)\\&-8\sum_{j,p,\alpha,\beta}\bar{R}_{jp\alpha\beta}\Big(\sum_{i}A^{\alpha}_{ip}A^{\beta}_{ij}\Big)+2\sum_{i,j,k,\beta}\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}A^{\beta}_{ij}-2\sum_{i,j,k,\beta}\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}A^{\beta}_{ij},\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\partial_t|H|^2=\Delta|H|^2-2|\nabla H|^2+2\sum_{i,j}\Big(\sum_{\alpha}H^{\alpha}A^{\alpha}_{ij}\Big)^2+2\sum_{k,\alpha,\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^{\alpha}H^{\beta}.\tag{2.5}$$

根据 Berger 不等式,

$$\begin{aligned}&|\bar{R}_{acbc}|\le\frac{1}{2}(K_1+K_2),\quad \text{for } a\neq b\\&|\bar{R}_{abcd}|\le\frac{2}{3}(K_1+K_2),\quad \text{for all distinct indices } a,b,c,d.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Le引理 2.3（[18], 引理 3.1）。对于任意 $\eta > 0$，我们有以下不等式

$$|\nabla^{\perp} A|^2 \geq \left(\frac{3}{n+2} - \eta\right)|\nabla^{\perp} H|^2 - \frac{2}{n+2}\left(\frac{2}{n+2}\eta^{-1} - \frac{n}{n-1}\right)|w|^2 \tag{2.7}$$

and

$$\begin{aligned} |\nabla^{\perp} A|^2 - \frac{1}{n}|\nabla^{\perp} H|^2 &\geq \frac{n-1}{2n+1}|\nabla^{\perp} A|^2 - \frac{2n}{(n-1)(2n+1)}|w|^2 \\ &\geq \frac{n-1}{2n+1}|\nabla^{\perp} A|^2 - C(n,d)\left(K_1 + K_2\right)^2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

此处 $w = \sum_{i,\ j,\ \alpha} \bar{R}_{\alpha jij} e_i \otimes \omega_\alpha$ 以及 $C(n,d) = \frac{n^4 d}{2\ n-1\ ()(2n+1)}$。

证明。由 (2.7) 和 $\eta = \frac{n-1}{n\ n+2()}$ 可得不等式 (2.8)。为证明 (2.7)，我们令

$$\begin{aligned} E_{ijk} = &\frac{1}{n+2}\left(\nabla_i^{\perp} H g_{jk} + \nabla_j^{\perp} H g_{ik} + \nabla_k^{\perp} H g_{ij}\right) \\ &- \frac{2}{(n+2)(n-1)} w_i g_{jk} + \frac{n}{(n+2)(n-1)}\left(w_j g_{ik} + w_k g_{ij}\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

设 $F_{ijk} = \nabla_i^{\perp} h_{jk} - E_{ijk}$。由 Codazzi 方程可得 $\langle E_{ijk}, F_{ijk}\rangle = 0$。因此，$|\nabla^{\perp} A|^2 \geq |E|^2$。通过直接计算，我们得到

$$|E|^2 = \frac{3}{n+2}|\nabla^{\perp} H|^2 + \frac{2n}{(n+2)(n-1)}|w|^2 + \frac{4}{n+2}\langle \nabla^{\perp} H, w\rangle.$$

但是 f 根据柯西-施瓦茨不等式和乘积的杨氏不等式，我们有

$$\frac{4}{n+2}\langle \nabla^{\perp} H, w\rangle \geq -\eta|\nabla^{\perp} H|^2 - \frac{4}{(n+2)^2}\eta^{-1}|w|^2.$$

将上述不等式代入 (2.9)，即可得到 (2.7)。 □

命题 2.4（[20], 命题 2.2）。

$$\begin{aligned} |\nabla^{\perp} A|^2 &= \sum_{i,j,k} |\hat{\nabla}_i^{\perp} A_{jk}^{-} + h_{jk}\nabla_i^{\perp}\nu_1|^2 + \sum_{i,j,k} |\langle \nabla_i^{\perp} A_{jk}^{-}, \nu_1\rangle + \nabla_i h_{jk}|^2. \\ |\nabla^{\perp} H|^2 &= |H|^2|\nabla^{\perp}\nu_1|^2 + |\nabla|H||^2. \\ |\nabla^{\perp} A^{-}|^2 &= |\hat{\nabla}^{\perp} A^{-}|^2 + |\langle \nabla^{\perp} A^{-}, \nu_1\rangle|^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

我们将在第 5 节和第 8 节中使用这些恒等式。考察 Codazzi 方程对上述 $\nabla_i^{\perp} A_{jk}$ 分解的影响非常有用。将 Codazzi ˆ 方程分别投影到 E_1 和 E 上，可知这两个张量

$$\nabla_i h_{jk} + \langle \nabla_i^{\perp} A_{jk}^{-}, \nu_1\rangle \quad \text{and} \quad \hat{\nabla}_i^{\perp} A_{jk}^{-} + h_{jk}\nabla_i^{\perp}\nu_1$$

关于 i、j、k对称。因此，对 j、k 取迹与对 i、k取迹是等价的，由此可得

$$\sum_{k=1}^{n}(\nabla_k h_{ik} + \langle \nabla_k^{\perp} A_{ik}^{-}, \nu_1 \rangle) = \nabla_i |H|, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\hat{\nabla}_k^{\perp} A_{ik}^{-} + h_{ik} \nabla_k^{\perp} \nu_1) = |H| \nabla_i^{\perp} \nu_1. \tag{2.12}$$

3 二次挤压的保持

本节将证明，对于一个依赖于背景曲率的适当正常数 d_n，二次针状条件 (3.2) 在整个平均曲率流过程中保持成立。这里给出的证明见 [18], ，将 Huisken 的夹挤条件 [10]推广到了高余维情形。由于我们需要对这一夹挤条件作细微改进，为完整起见，我们给出证明。

定理 3.1（[18], 第 3 节）。设 $F\colon \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^{n+m}$ 是一个 n 维的光滑、闭且连通的子流形，嵌入于一个 $n+m$ 维光滑完备黎曼流形中，满足

$$-K_1 \le K_{\mathcal{N}} \le K_2, \quad |\bar{\nabla} \bar{R}| \le L, \quad \mathrm{inj}(\mathcal{N}) \ge \imath_{\mathcal{N}}. \tag{3.1}$$

那么，存在常数 $d_n = d_n（K_1,\ K_2,\ L）$，它仅依赖于维数 n、截面曲率的界 K_1, K_2 以及曲率导数的界 L，使得对于 $c_n \le \frac{4}{3n}$

$$|A|^2 \le c_n |H|^2 - d_n \tag{3.2}$$

在平均曲率流下保持不变。

证明。令 $g = |A|^2 - c_n|H|^2 + d_n$，其中 $c_n \le \frac{4}{3n} d_n > d$，这里 d 是待定的正常数。我们计算 g 沿平均曲率流的演化方程，并证明如果在时空中的某一点有 $g = 0$，那么在该点 $(\partial_t - \Delta)g$ 为负。由最大值原理，定理得证。更确切地说，由引理 2.2，我们有

$$(\partial_t - \Delta)\, g = -2(|\nabla A|^2 - c_n |\nabla H|^2) + 2R_1 - 2c_n R_2 + P_\alpha, \tag{3.3}$$

其中

$$R_1 = \sum_{\alpha,\beta} \big(\sum_{i,j} A_{ij}^{\alpha} A_{ij}^{\beta} \big)^2 + \sum_{i,j,\alpha,\beta} \Big(\sum_{p} \big(A_{ip}^{\alpha} A_{jp}^{\beta} - A_{jp}^{\alpha} A_{ip}^{\beta} \big) \Big)^2,$$

$$R_2 = \sum_{i,j} \big(\sum_{\alpha} H^{\alpha} A_{ij}^{\alpha} \big)^2$$

and

$$P_{\alpha} = I + II + III + IV, \tag{3.4}$$

with

$$I = 4 \sum_{i,j,p,q} \bar{R}_{ipjq} \big(\sum_{\alpha} A_{pq}^{\alpha} A_{ij}^{\alpha} \big) - 4 \sum_{j,k,p} \bar{R}_{kjkp} \big(\sum_{i,\alpha} A_{pi}^{\alpha} A_{ij}^{\alpha} \big),$$

$$II = 2 \sum_{k,\alpha,\beta} \bar{R}_{k\alpha k\beta} \big(\sum_{i,j} A_{ij}^{\alpha} A_{ij}^{\beta} \big) - 2c_n \sum_{k,\alpha,\beta} \bar{R}_{k\alpha k\beta} H^{\alpha} H^{\beta},$$

$$III = -8 \sum_{j,p,\alpha,\beta} \bar{R}_{jp\alpha\beta} \big(\sum_{i} A_{ip}^{\alpha} A_{ij}^{\beta} \big),$$

$$IV = 2 \sum_{i,j,k,\beta} \bar{\nabla}_k \bar{R}_{kij\beta} A_{ij}^{\beta} - 2 \sum_{i,j,k,\beta} \bar{\nabla}_i \bar{R}_{jkk\beta} A_{ij}^{\beta}.$$

为了估计反应项，处理第二基本形式的无迹部分 $\mathring{A} = A - \frac{1}{n} HId$ 会更为方便。 A 和 $\mathring{A}$ 的长度之间存在如下关系：

$$|\mathring{A}|^2 = |A|^2 - \frac{1}{n}|H|^2.$$

在 $g = 0$，即 $|A|^2 = c_n |H|^2 - d_n$ 处，平均曲率向量非零。我们为法丛选取局部标准正交标架 $\{\nu_{\alpha}, 1 \leq \alpha \leq m\}$ ，使得 $\nu_1 = \frac{H}{|H|}$ 为主法向方向。对于 ν_1 的选取，我们有 $H^+ =$ tr $A^+ = |H|$ ，而对于 $\alpha \geq 2$ 和 $H^{\alpha} =$ ，有 $A^{\alpha} = 0$tr $A^{\alpha} = 0$。无迹的第二基本形式可改写为 $\mathring{}$ $\mathring{}A = \sum_{\alpha} A^{\alpha} \nu_{\alpha}$，其中

$$\mathring{h} = h - \frac{|H|}{n} Id, \quad \text{for} \ \ \alpha = 1$$

and

$$\mathring{A^-} = A^{\alpha}, \quad \text{for} \ \ \alpha \geq 2.$$

我们设

$$|A|^2 = |h|^2 + |A^-|^2 \quad \text{and} \ \ |\mathring{A}|^2 = |\mathring{h}|^2 + |\mathring{A^-}|^2.$$

由于此时 $|A|^2 = c_n|H|^2 - d_n$，我们有 $|H|^2 = \frac{|\mathring{A}|^2+d_n}{c_n-\frac{1}{n}}$，并由 [3] 可知

$$\begin{aligned} 2R_1 - 2c_nR_2 \leq & \left(6 - \frac{2}{n(c_n-\frac{1}{n})}\right)|\mathring{h}|^2|\mathring{A}^-|^2 + \left(3 - \frac{2}{n(c_n-\frac{1}{n})}\right)|\mathring{A}^-|^4 \\ & - \frac{2c_nd_n}{c_n-\frac{1}{n}}|\mathring{h}|^2 - \frac{4d_n}{n(c_n-\frac{1}{n})}|\mathring{A}^-|^2 - \frac{2d_n^2}{n(c_n-\frac{1}{n})}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

为了估计 I，对于固定的 α，我们为切空间 e_i's 选取一组基，使得 h 为 $\circ$ $\circ$ 对角的。分别记 λ_i 和 λ_i 为 h 和 h 的对角元。因此，$A^\alpha_{ij} = \lambda^\alpha_i\delta_{ij}$。

$$\begin{aligned} I &= 4\sum_{i,j,p,q}\bar{R}_{ipjq}A^\alpha_{pq}A^\alpha_{ij} - 4\sum_{j,k,p}\bar{R}_{kjkp}\Big(\sum_{i,\alpha}A^\alpha_{pi}A^\alpha_{ij}\Big) \\ &= 4\sum_{i,p}\bar{R}_{ipip}\big(\lambda^\alpha_i\lambda^\alpha_p - (\lambda^\alpha_i)^2\big) \\ &= -2\sum_{i,p}\bar{R}_{ipip}\big(\lambda^\alpha_i - \lambda^\alpha_p\big)^2 \\ &\leq 4nK_1|\mathring{A}^\alpha|^2. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$I \leq 4nK_1(|\mathring{h}|^2 + |\mathring{A}^-|^2). \tag{3.6}$$

根据 ν_1 的选取，我们有 $II = II_1 + II_2 + II_3$，其中

$$II_1 = 2\sum_{i,j,k}\bar{R}_{k1k1}(A^+_{ij})^2 - 2c_n\sum_k\bar{R}_{k1k1}(H^+)^2,$$

$$II_2 = 4\sum_{k,\alpha\geq 2}\bar{R}_{k\alpha k1}\Big(\sum_{i,j}A^\alpha_{ij}A^+_{ij}\Big) - 4c_n\sum_{k,\alpha\geq 2}\bar{R}_{k\alpha k1}H^+H^\alpha,$$

$$II_3 = 2\sum_{k,\alpha,\beta\geq 2}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\Big(\sum_{i,j}A^\alpha_{ij}A^\beta_{ij}\Big) - 2c_n\sum_{k,\alpha,\beta\geq 2}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^\alpha H^\beta.$$

由于在该点，$|H|^2 = \frac{|\mathring{A}|^2+d_n}{c_n-\frac{1}{n}}$我们有

$$\begin{aligned} II_1 &\leq 2nK_2|h|^2 + 2nc_nK_1|H|^2 \\ &= 2nK_2|\mathring{h}|^2 + 2(nc_nK_1+K_2)\frac{|\mathring{A}|^2+d_n}{c_n-\frac{1}{n}} \\ &= \left(2nK_2 + \frac{2(nc_nK_1+K_2)}{c_n-\frac{1}{n}}\right)|\mathring{h}|^2 + \frac{2(nc_nK_1+K_2)}{c_n-\frac{1}{n}}|\mathring{A}^-|^2 + \frac{2(nc_nK_1+K_2)}{c_n-\frac{1}{n}}d_n. \end{aligned} \tag{3.7}$$

由于对于 $\alpha \geq 2$有 $H^\alpha = 0$，我们得到关于 II_2、 II_3的以下估计。

$$\begin{aligned} II_2 &= 4\sum_{k,\alpha\geq 2}\bar{R}_{k\alpha k1}\big(\sum_{i,j}A^\alpha_{ij}A^+_{ij}\big)\\ &= 4\sum_{k,\alpha\geq 2}\bar{R}_{k\alpha k1}\big(\sum_{i,j}\mathring{A}^\alpha_{ij}\mathring{A}^+_{ij}\big)\\ &\leq (K_1+K_2)\sum_{k,\alpha\geq 2}\big(\frac{1}{\rho}\sum_{i,j}(\mathring{A}^\alpha_{ij})^2+\rho\sum_{i,j}(\mathring{A}^+_{ij})^2\big)\\ &= \rho n(m-1)(K_1+K_2)|\mathring{h}|^2+\frac{n}{\rho}(K_1+K_2)|\mathring{A}^-|^2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

对于任意正数 ρ。

$$\begin{aligned} II_3 &= 2\sum_{k,\alpha,\beta\geq 2}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\big(\sum_{i,j}A^\alpha_{ij}A^\beta_{ij}\big)\\ &= 2\sum_{k,\alpha\geq 2}\bar{R}_{k\alpha k\alpha}\big(\sum_{i,j}(A^\alpha_{ij})^2\big)+2\sum_{k,\alpha,\beta\geq 2,\alpha\neq\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\big(\sum_{i,j}A^\alpha_{ij}A^\beta_{ij}\big)\\ &\leq 2nK_2|\mathring{A}^-|^2+2\sum_{k,\alpha,\beta\geq 2,\alpha\neq\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\big(\sum_{i,j}A^\alpha_{ij}A^\beta_{ij}\big)\\ &\leq 2nK_2|\mathring{A}^-|^2+\sum_{k,\alpha,\beta\geq 2,\alpha\neq\beta}|\bar{R}_{k\alpha k\beta}|\sum_{i,j}\big((A^\alpha_{ij})^2+(A^\beta_{ij})^2\big)\\ &\leq 2nK_2|\mathring{A}^-|^2+(K_1+K_2)\sum_{i,j,k,\alpha,\beta\geq 2,\alpha\neq\beta}\big((A^\alpha_{ij})^2+(A^\beta_{ij})^2\big)\\ &= 2nK_2|\mathring{A}^-|^2+n(m-2)(K_1+K_2)|\mathring{h}|^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

由 (3.7)、(3.8) 和 (3.9)，我们得到关于 II 的以下估计：

$$\begin{aligned} II \leq &\left(2nK_2+\frac{2(nc_nK_1+K_2)}{c_n-\frac{1}{n}}+\big(\rho n(m-1)+n(m-2)\big)(K_1+K_2)\right)|\mathring{h}|^2\\ &+\left(\frac{2(nc_nK_1+K_2)}{c_n-\frac{1}{n}}+\frac{n}{\rho}(K_1+K_2)+2nK_2\right)|\mathring{A}^-|^2+\frac{2(nc_nK_1+K_2)}{c_n-\frac{1}{n}}d_n. \end{aligned} \tag{3.10}$$

对于 III，我们有 $III = III_1 + III_2$，其中

$$III_1 = -16\sum_{j,p,\alpha\geq 2}\bar{R}_{jp\alpha 1}\big(\sum_i A^\alpha_{ip}A^+_{ij}\big),$$

$$III_2 = -8\sum_{j,p,\alpha,\beta\geq 2,\alpha\neq\beta}\bar{R}_{jp\alpha\beta}\big(\sum_i A^\alpha_{ip}A^\beta_{ij}\big).$$

对于任意正数常量 ρ，我们有以下估计：

$$III_1 = -16\sum_{j,p,\alpha\geq 2}\bar{R}_{jp\alpha 1}\sum_i\mathring{A}^\alpha_{ip}\big(\mathring{A}^+_{ij}+\frac{|H|}{n}\delta_{ij}\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= -16 \sum_{j\neq p,\alpha\geq 2} \bar{R}_{jp\alpha 1} \sum_i \mathring{A}^{\alpha}_{ip}\mathring{A}^{+}_{ij} \\
&\leq \frac{16}{3}(K_1+K_2) \sum_{i,j\neq p,\alpha\geq 2} \big(\frac{1}{\rho}(\mathring{A}^{\alpha}_{ip})^2 + \rho(\mathring{A}^{+}_{ij})^2\big) \\
&= \frac{16}{3}\rho(n-1)(m-1)(K_1+K_2)|\mathring{h}|^2 + \frac{16}{3\rho}(n-1)(K_1+K_2)|\mathring{A}^{-}|^2. \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

对于第二个不等式，我们使用 $\sum_{j,\ p} R_{jp\alpha 1}A^{\alpha}_{jp} = 0$，因为 $R_{jp\alpha 1}$ 对 j,p 是反对称的，而 $\mathring{A}^{\alpha}_{jp}$ 对 j,p 是对称的。对于任意固定的 $\beta \geq 2$，我们选择 ν_i，使得 $\mathring{A}^{\beta}_{ij} = \mathring{\lambda}^{\beta}_i \delta_{ij}$。于是，

$$
\begin{aligned}
III_2 &= -8 \sum_{j\neq p,\beta\geq 2} \sum_{\alpha\geq 2,\alpha\neq\beta} \bar{R}_{jp\alpha\beta}\mathring{A}^{\alpha}_{jp}\mathring{\lambda}^{\beta}_j \\
&\leq \frac{8}{3}(K_1+K_2)\sum_{\beta\geq 2}\Big((n-1)^{\frac{1}{2}} \sum_{j\neq p,\alpha\geq 2,\alpha\neq\beta} (\mathring{A}^{\alpha}_{jp})^2 + \frac{1}{(n-1)^{\frac{1}{2}}} \sum_{j\neq p,\alpha\geq 2,\alpha\neq\beta} (\mathring{\lambda}^{\beta}_j)^2\Big) \\
&\leq \frac{8}{3}(K_1+K_2)\Big((n-1)^{\frac{1}{2}}(m-2)|\mathring{A}^{-}|^2 + \sum_{\beta\geq 2}(n-1)^{\frac{1}{2}}(m-2)|\mathring{A}^{\beta}|^2\Big) \\
&= \frac{8}{3}(n-1)^{\frac{1}{2}}(m-2)(K_1+K_2)|\mathring{A}^{-}|^2. \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

由（3.11）和（3.12），我们有

$$
\begin{aligned}
III \leq\ & \frac{16}{3}\rho(n-1)(m-1)(K_1+K_2)|\mathring{h}|^2 \\
&+ \left(\frac{16}{3\rho}(n-1) + \frac{8}{3}(n-1)^{\frac{1}{2}}(m-2)\right)(K_1+K_2)|\mathring{A}^{-}|^2. \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

对于 IV，我们选择 ν_i，使得 $A^{+}_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$。如果 $K_1+K_2 \neq 0$，则有

$$
\begin{aligned}
IV &= 2\sum_{i,k}\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kii1}(\lambda_i-\lambda_k) - 2\sum_{i,j,k,\beta\geq 2}(\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta} - \bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta})\mathring{A}^{\beta}_{ij} \\
&\leq \sum_{i,k}\left(\frac{1}{\theta}(\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kii1})^2 + \theta(\lambda_i-\lambda_k)^2\right) + \sum_{i,j,k,\beta\geq 2}\left(\frac{2}{\vartheta}\big((\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta})^2 + (\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta})^2\big) + \vartheta(\mathring{A}^{\beta}_{ij})^2\right) \\
&\leq \frac{L^2}{\theta} + \theta|\mathring{h}|^2 + \frac{4L^2}{\vartheta} + n\vartheta|\mathring{A}^{-}|^2, \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

对于正数常数 θ、ϑ。若 $K_1+K_2 = 0$，则 $L = 0$，并且我们可以取 θ、$\vartheta = 0$。结合（3.6）、（3.10）、（3.13）和（3.14），可得

$$
\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta)\, g \leq\ & -2(|\nabla A|^2 - c_n|\nabla H|^2) + \left(6 - \frac{2}{n(c_n-\frac{1}{n})}\right)|\mathring{h}|^2|\mathring{A}^{-}|^2 + \left(3 - \frac{2}{n(c_n-\frac{1}{n})}\right)|\mathring{A}^{-}|^4 \\
&- \frac{2c_nd_n}{c_n-\frac{1}{n}}|\mathring{h}|^2 - \frac{4d_n}{n(c_n-\frac{1}{n})}|\mathring{A}^{-}|^2 - \frac{2d_n^2}{n(c_n-\frac{1}{n})}
\end{aligned}
$$

$$+ C_1|\mathring{h}|^2 + C_2|\mathring{A}^-|^2 + C_3 d_n + C_4. \tag{3.15}$$

这里,

$$C_1 = 4nK_1 + 2nK_2 + \frac{2(nc_nK_1 + K_2)}{c_n - \frac{1}{n}} + \Big(\rho n(m-1) + n(m-2) + \frac{16}{3}\rho(n-1)(m-1)\Big)(K_1 + K_2) + \theta,$$

$$C_2 = 4nK_1 + 2nK_2 + \frac{2(nc_nK_1 + K_2)}{c_n - \frac{1}{n}} + \Big(\frac{n}{\rho} + \frac{16}{3\rho}(n-1) + \frac{8}{3}(n-1)^{\frac{1}{2}}(m-2)\Big)(K_1 + K_2) + n\vartheta,$$

$$C_3 = \frac{2(nc_nK_1 + K_2)}{c_n - \frac{1}{n}},$$

$$C_4 = \frac{L^2}{\theta} + \frac{4L^2}{\vartheta}, \quad \text{for} \quad K_1 + K_2 \neq 0 \quad \text{and} \quad C_4 = 0, \quad \text{for} \quad K_1 + K_2 = 0,$$

由 (2.3) 中的 Kato 型不等式，我们有

$$\begin{aligned} -2(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2) &\leq -2\Big(\frac{3}{n+2} - \eta - c_n\Big)|\nabla^\perp H|^2 \\ &\quad + \Big(\frac{8}{\eta(n+2)^2} - \frac{4n}{(n+2)(n-1)}\Big)|w|^2 \\ &\leq 0, \end{aligned} \tag{3.16}$$

对某个适当的正数 η。若 $K_1 + K_2 \neq 0$，则令

$$d = \max\left\{\frac{C_1}{2c_n}(c_n - \frac{1}{n}), \frac{C_2}{4}n(c_n - \frac{1}{n}), \frac{1}{4}n(c_n - \frac{1}{n})\left(C_3 + \sqrt{C_3^2 + \frac{8C_4}{n(c_n - \frac{1}{n})}}\right)\right\},$$

其中 $\rho = \rho = \theta = \vartheta = 1$。若 $K_1 + K_2 = 0$，令 $d = 0$。因此，若 $d_n > d$，则有

$$(\partial_t - \Delta)\, g < 0.$$

于是，由最大值原理，$|A|^2 \leq c_n|H|^2 - d_n$ 在平均曲率流下保持不变。

□

注 3.2. 我们看到，当 $K_1, K_2, L \to 0$ 时，$d_n \to 0$。特别地，由于光滑黎曼流形的任意充分小区域都是局部欧几里得的，我们看到，在任意一点的指数邻域内，对满足 $|A|^2 - c_n|H|^2 < 0$ 的流形进行扰动后，仍满足此不等式，因此有许多子流形适用于此不等式。

4 梯度估计

本节给出平均曲率流梯度估计的证明。我们直接从二次曲率界 $|A|^2 < c_n|H|^2 - d_n$ 推导出此估计，其中$c \leq \frac{4}{3n}$，而不依赖渐近柱面估计。事实上，我们证明这里推导出的梯度估计可作为柱面估计的推论。这些逐点梯度估计仅依赖于一点处的平均曲率（或等价地，第二基本形式），而不依赖曲率的最大值；更一般的抛物型导数估计则是如此。具体而言，我们得到

$$\frac{3}{n+2} - c > 0.$$

这个不等式使我们能够将$|A|^2 - c_n|H|^2 + d_n$ 的演化方程中的导数项与引理 2.3 中的 Kato 型不等式结合起来。

定理 4.1（参见[13], 第 6 节）。设 $\mathcal{M}_t, t \in [0, T)$是黎曼流形 $\mathcal{N}^{n+m}$中的一个闭的 n维二次有界平均曲率流解，且满足 $n \geq 8$，即

$$|A|^2 - c|H|^2 + d < 0, |H| > 0$$

若满足 $c = \frac{1}{n-2}$，则存在常数 $\gamma_1 = \gamma_1(n, \mathcal{M}_0)$和常数 $\gamma_2 = \gamma_2(n, \mathcal{M}_0)$，使得该流满足一致估计

$$|\nabla A|^2 \leq \gamma_1 |A|^4 + \gamma_2,$$

对每个 $t \in [0, T)$。

证明。我们在此选择 $\kappa_n = \left(\frac{3}{n+2} - c\right) > 0$。由于 $n \geq 8$, κ_n 严格为正，我们将在此考虑以下演化方程:

$$\frac{|\nabla A|^2}{g^2},$$

其中 $g = c|H|^2 - |A|^2 - d > 0$。由于 $|A|^2 - c|H|^2 < 0, |H| > 0$ 且 $\mathcal{M}_0$ 是紧致的，存在一个 $\eta(\mathcal{M}_0) > 0, C_\eta(\mathcal{M}_0) > 0$，使得

$$(c - \eta)|H|^2 - |A|^2 \geq C_\eta > 0. \tag{4.1}$$

因此，我们令

$$g = c|H|^2 - |A|^2 \geq \eta|H|^2 > \frac{\eta}{c}|A|^2 > \varepsilon_1|A|^2 + \varepsilon_2,$$

其中 $\varepsilon_1 = \frac{\eta}{c}$ 和 $\varepsilon_2 > 0$。由定理 3.1 中的 (3.3) 和 (2.3)，以及适当的常数 d，可得

$$\partial_t g = \Delta g - 2\left(c|\nabla H|^2 - |\nabla A|^2\right) + 2\left(cR_2 - R_1\right) + P_\alpha$$

$$\begin{aligned}
&\geq \Delta g - 2\left(\left(\frac{3}{n+2}-\eta\right)^{-1}c-1\right)|\nabla A|^2\\
&\geq \Delta g - 2\Big(\frac{n+2}{3}c-1\Big)|\nabla A|^2\\
&= \Delta g + 2\kappa_n\frac{n+2}{3}|\nabla A|^2,
\end{aligned}$$

对于适当的正常数 η。$|\nabla A|^2$ 的演化方程为

$$\Big(\partial_t-\Delta\Big)|\nabla A|^2 \leq -2|\nabla^2 A|^2 + c|A|^2|\nabla A|^2 + d|\nabla A|^2.$$

设 w、z 满足演化方程

$$\partial_t w = \Delta w + W, \quad \partial_t z = \Delta z + Z$$

于是，我们得到

$$\begin{aligned}
\Big(\partial_t-\Delta\Big)\frac{w}{z} &= \frac{2}{z}\left\langle\nabla\left(\frac{w}{z}\right),\nabla z\right\rangle + \frac{W}{z} - \frac{w}{z^2}Z\\
&= 2\frac{\langle\nabla w,\nabla z\rangle}{z^2} - 2\frac{w|\nabla z|^2}{z^3} + \frac{W}{z} - \frac{w}{z^2}Z.
\end{aligned}$$

此外，对任意函数 g，由Kato不等式可得

$$\langle\nabla g,\nabla|\nabla A|^2\rangle \leq 2|\nabla g||\nabla^2 A||\nabla A| \leq \frac{1}{g}|\nabla g|^2|\nabla A|^2 + g|\nabla^2 A|^2.$$

于是得到

$$-\frac{2}{g}|\nabla^2 A|^2 + \frac{2}{g}\left\langle\nabla g,\nabla\left(\frac{|\nabla A|^2}{g}\right)\right\rangle \leq -\frac{2}{g}|\nabla^2 A|^2 - \frac{2}{g^3}|\nabla g|^2|\nabla A|^2 + \frac{2}{g^2}\langle\nabla g,\nabla|\nabla A|^2\rangle \leq 0.$$

那么，若令 $w=|\nabla A|^2$ 和 $z=g$，其中 $W \leq -2|\nabla^2 A|^2 + c|A|^2|\nabla A|^2 + d|\nabla A|^2$ 和 $Z \geq 2\kappa_n\frac{n+2}{3}|\nabla A|^2$，则可得

$$\begin{aligned}
\Big(\partial_t-\Delta\Big)\frac{|\nabla A|^2}{g} &\leq \frac{2}{g}\left\langle\nabla g,\nabla\left(\frac{|\nabla A|^2}{g}\right)\right\rangle + \frac{1}{g}(-2|\nabla^2 A|^2 + c|A|^2|\nabla A|^2\\
&\quad + d|\nabla A|^2) - 2\kappa_n\frac{n+2}{3}\frac{|\nabla A|^4}{g^2}\\
&\leq c|A|^2\frac{|\nabla A|^2}{g} + d\frac{|\nabla A|^2}{g} - 2\kappa_n\frac{n+2}{3}\frac{|\nabla A|^4}{g^2}.
\end{aligned}$$

我们使用 $w=\frac{|\nabla A|^2}{g}$、$z=g$ 重复上述计算，

$$W \leq c|A|^2\frac{|\nabla A|^2}{g} + d\frac{|\nabla A|^2}{g} - 2\kappa_n\frac{n+2}{3}\frac{|\nabla A|^4}{g^2}$$

以及 $Z \geq 0$，得到

$$\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|\nabla A|^2}{g^2} \leq \frac{2}{g}\left\langle \nabla g, \nabla\left(\frac{|\nabla A|^2}{g^2}\right)\right\rangle + \frac{1}{g}\left(c|A|^2\frac{|\nabla A|^2}{g} + d\frac{|\nabla A|^2}{g} - 2\kappa_n\frac{n+2}{3}\frac{|\nabla A|^4}{g^2}\right).$$

于是，非线性项为

$$\frac{|\nabla A|^2}{g^2}\left(c|A|^2 + d - \frac{2\kappa_n(n+2)}{3}\frac{|\nabla A|^2}{g}\right).$$

由于

$$g > \varepsilon_1|A|^2 + \varepsilon_2,$$

存在一个常数 N，使得

$$Ng \geq c|A|^2 + d.$$

因此，根据最大值原理，存在一个常数（取 η、ε_1、ε_2 足够小，使得 N 足够大，从而该估计在初始时刻成立），使得

$$\frac{|\nabla A|^2}{g^2} \leq \frac{3N}{2\kappa_n(n+2)}.$$

因此，我们看到存在一个常数 $\mathcal{C} = \frac{3N}{2\kappa_n(n+2)} = \mathcal{C}(n, \mathcal{M}_0)$，使得

$$\frac{|\nabla A|^2}{g^2} \leq \mathcal{C}$$

根据 g 的定义，我们得到该引理的结论。 □

定理 4.2. 设 $\mathcal{M}_t, t \in [0, T)$ 是带手术的平均曲率流的解，且具有归一化初始数据。则存在常数 γ_3, γ_4，它们仅依赖于维数，使得

$$|\nabla^2 A|^2 \leq \gamma_3|A|^6 + \gamma_4, \tag{4.2}$$

对任意 $t \in [0, T)$ 均成立。

证明。我们有以下演化方程

$$\Big(\partial_t - \Delta\Big)|\nabla^2 A|^2 \leq -2|\nabla^3 A|^2 + k_1|A|^2|\nabla^2 A|^2 + k_2|A||\nabla A|^2|\nabla^2 A| \leq -2|\nabla^3 A|^2 + \left(k_1 + \frac{k_2}{2}\right)|A|^2|\nabla^2 A|^2 + \frac{k_2}{2}|\nabla A|^4.$$

现在我们考虑项 $\frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^5}$ 的演化方程。首先我们看到

$$\begin{aligned}\partial_t |H|^\alpha &= \Delta |H|^\alpha + \alpha |H|^{\alpha-1}(\partial_t - \Delta)|H| - \alpha(\alpha-1)|H|^{\alpha-2}|\nabla H|^2 \\ &\geq \Delta |H|^\alpha - \alpha(\alpha-1)|H|^{\alpha-2}|\nabla H|^2,\end{aligned}$$

由于 $|\nabla |H||^2 \geq |\nabla H|^2$ 和 $|H| > 0$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^5} \leq \frac{1}{|H|^5}\left(-2|\nabla^3 A|^2 + \left(k_1 + \frac{k_2}{2}\right)|A|^2|\nabla^2 A|^2 + \frac{k_2}{2}|\nabla A|^4\right) \\ + \frac{20|H|^3|\nabla^2 A|^2|\nabla H|^2}{|H|^{10}} + \frac{2}{|H|^{10}}\left\langle \nabla |H|^5, \nabla |\nabla^2 A|^2 \right\rangle \\ - \frac{2|\nabla^2 A|^2}{|H|^{15}}|\nabla |H|^5|^2.\end{aligned}$$

我们有以下各项

$$\begin{aligned}\frac{20|H|^3|\nabla^2 A|^2|\nabla H|^2}{|H|^{10}} - \frac{2|\nabla^2 A|^2}{|H|^{15}}|\nabla |H|^5|^2 &\leq \frac{20|\nabla^2 A|^2|\nabla H|^2}{|H|^7} - \frac{50|\nabla^2 A|^2|\nabla |H||^2}{|H|^7} \\ &\leq \frac{20|\nabla^2 A|^2|\nabla H|^2}{|H|^7}.\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\frac{2}{|H|^{10}}\left\langle \nabla |H|^5, \nabla |\nabla^2 A|^2 \right\rangle &= \frac{10\left\langle \nabla |H|, \nabla |\nabla^2 A|^2 \right\rangle}{|H|^6} \\ &\leq \frac{20\langle |\nabla H|, |\nabla^2 A||\nabla^3 A| \rangle}{|H|^6} \\ &\leq \frac{1}{|H|^5}|\nabla^3 A|^2 + \frac{100|\nabla H|^2|\nabla^2 A|^2}{|H|^7}.\end{aligned}$$

结合梯度估计和定理 **4.1**，可得到以下演化方程

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^5} &\leq -\frac{|\nabla^3 A|^2}{|H|^5} + k_3\frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^3} + \frac{120|\nabla H|^2|\nabla^2 A|^2}{|H|^7} + \frac{k_2}{2}\frac{|\nabla A|^4}{|H|^5} \\ &\leq -\frac{|\nabla^3 A|^2}{|H|^5} + k_4\frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^3} + C_1\frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^7} + \frac{k_5|H|^8 + C_2}{|H|^5}.\end{aligned}$$

类似的计算可得

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|\nabla A|^2}{|H|^3} &\leq -\frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^3} + \frac{k_6|H|^8 + C_3}{|H|^5}, \\ \Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|\nabla A|^2}{|H|^7} &\leq -\frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^7} + \frac{k_7|H|^8 + C_4}{|H|^9}.\end{aligned}$$

现在令

$$f = \frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^5} + N\frac{|\nabla A|^2}{|H|^3} + M\frac{|\nabla A|^2}{|H|^7} - \kappa\sqrt{c|H| - |A|^2},$$

因此我们有

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t-\Delta\Big)f \le k_4\frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^3}+k_5|H|^3+C_1\frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^7}+\frac{C_2}{|H|^5}\\ -N\frac{|\nabla^2 A|^2}{|H|^3}+Nk_6|H|^3+\frac{NC_3}{|H|^5}\\ -\frac{M|\nabla^2 A|^2}{|H|^7}+\frac{k_7M}{|H|}+\frac{C_4M}{|H|}-\kappa\varepsilon_0|H|^3.\end{aligned}$$

因此，我们取

$$N>k_4,\quad \varepsilon_0\kappa>Nk_6+k_5,\quad M>C_1.$$

由于 $H>0$，存在常数 α_1，使得 $|H|\ge\alpha_1$，于是我们得到

$$\Big(\partial_t-\Delta\Big)f\le C_5$$

这意味着

$$\max_{\mathcal{M}_t} f\le\max_{\mathcal{M}_{t_0}} f+C_5\left(t-t_0\right).$$

根据最大存在时间的界，我们有

$$f\le C(n),$$

这意味着

$$|\nabla^2 A|^2\le c(n)|H|^6+C(n)|H|^5.$$

应用二次挤压，我们得到 (4.2)。 □

对所有 m，关于 $|\nabla^m A|$ 的高阶估计可通过类似的方法得到。此外，由于我们有如下演化方程，因此可以推导出第二基本形式的时间导数估计

$$|\partial_t A|=|\Delta A+A*A*A|\le C|\nabla^2 A|^2+C|A|^3\le c_1|A|^3+c_2.$$

5 余维估计

本节中，我们希望证明，在高曲率区域，子流形会以可量化的方式近似成为余维一。我们的目标是将主方向上的第二基本形式与其他方向上的第二基本形式区分开来，并分别计算它们的演化方程。随后，我们将对反应项、梯度项以及由黎曼环境空间引起的低阶项给出估计。接着，我们先计算量 $\frac{|A^-|^2}{f}$ 的演化方程；由于在极限情况下背景空间是欧几里得空间，结论将由最大值原理推出。我们将证明的定理如下。

定理 5.1. 设 $F\colon \mathcal{M}^n \times [0,T) \to \mathcal{N}^{n+m}$ 是平均曲率流的一个光滑解，并且 $F_0(p) = F(p, 0)$ 是紧致且二次挤压的。那么存在 $\forall \varepsilon > 0, \exists H_0 > 0$，使得若 $f \geq H_0$，则

$$\left|A^-\right|^2 \leq \varepsilon f + C_\varepsilon$$

$\forall t \in [0,T)$ 其中 $C_\varepsilon = C_\varepsilon$（$n$，$m$）。

5.1 $|A^-|^2$的演化方程

We s首先计算 $|A^-|^2$的演化方程。我们定义张量 A^- b y

$$A^-(X,Y) = A(X,Y) - \frac{\langle A(X,Y), H\rangle}{|H|^2} H,$$

对于切于 $\mathcal{M}_t$的向量场 X、Y。张量 A^- 定义良好，因为 $|H| > 0$。因此，我们需要计算 $|A|^2$ 和 $\frac{|\langle A, H\rangle|^2}{|H|^2}$. 的演化方程。利用（2.5）和商法则，我们有———

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2}{|H|^2} &= |H|^{-2}\Big(\partial_t - \Delta\Big)\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2 \\ &+ 2|H|^{-2}\sum_k \Big\langle \nabla_k |H|^2, \nabla_k \frac{\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2}{|H|^2}\Big\rangle \\ &- |H|^{-4}\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2\Big(-2|\nabla^\perp H|^2 + 2\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2 + 2\sum_{k,\alpha,\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^\alpha H^\beta\Big).\end{aligned}$$

在计算$\sum_{i,j}|\langle A_{ij}$、$H\rangle|^2$的演化方程之前，我们先化简其他项。特别地，利用 $\sum_{i,j}|\langle A_{ij}$、$H\rangle|^2 = |H|^2|h|^2$ 以及

$$|\nabla^\perp H|^2 = |H|^2|\nabla^\perp \nu_1|^2 + |\nabla|H||^2,$$

我们写作

$$2|H|^{-4}\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2|\nabla^\perp H|^2 = 2|h|^2|\nabla^\perp \nu_1|^2 + 2|H|^{-2}|h|^2|\nabla|H||^2,$$

$$-2|H|^{-4}\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^4 = -2|h|^4,$$

$$2|H|^{-4}\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2\sum_{k,\alpha,\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^\alpha H^\beta = 2|h|^2|H|^{-2}\sum_{k,\alpha,\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^\alpha H^\beta.$$

至于其余梯度项，我们有

$$\nabla_k|H|^2 = 2\langle\nabla_k^\perp H, H\rangle$$

and

$$\nabla_k(|H|^{-2}\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2) = \nabla_k|h|^2 = 2\sum_{i,j} h_{ij}\nabla_k h_{ij}.$$

因此，由于 $H = |H|\nu_1$ 和 $\langle\nabla_k^\perp\nu_1, \nu_1\rangle = 0$，我们有

$$\begin{aligned}2|H|^{-2}\sum_k\Big\langle\nabla_k|H|^2, \nabla_k\frac{\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2}{|H|^2}\Big\rangle &= 8|H|^{-2}\sum_{i,j,k}\langle\nabla_k^\perp H, H\rangle h_{ij}\nabla_k h_{ij}\\ &= 8|H|^{-1}\sum_{i,j,k}\nabla_k|H|h_{ij}\nabla_k h_{ij}.\end{aligned}$$

总之，到目前为止我们已经证明

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t-\Delta\Big)\frac{\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2}{|H|^2} &= |H|^{-2}\Big(\partial_t-\Delta\Big)\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2 - 2|h|^4 + 2|h|^2|\nabla_k^\perp\nu_1|^2\\ &\quad + 2|H|^{-2}|h|^2|\nabla|H||^2 + 8|H|^{-1}\sum_{i,j,k}\nabla_k|H|h_{ij}\nabla_k h_{ij}\\ &\quad - 2|h|^2|H|^{-2}\sum_{k,\alpha,\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^\alpha H^\beta.\end{aligned}$$

对于 $\langle A_{ij}, H\rangle$的演化方程，我们有如下引理。

引理 5.2。 $|\langle A_{ij}, H\rangle|^2$ 的演化方程为

$$\begin{aligned}|H|^{-2}\Big(\partial_t-\Delta\Big)|\langle A_{ij}, H\rangle|^2 &= 4|\mathring{h}_{ij}A_{ij}^-|^2 + 2|R_{ij}^\perp(\nu_1)|^2 + 4|h|^4 - 4|H|^{-1}\mathring{h}_{ij}\nabla_k|H|\langle\nabla_k^\perp A_{ij}^-, \nu_1\rangle\\ &\quad - 4\mathring{h}_{ij}\langle\nabla_k^\perp A_{ij}^-, \nabla_k^\perp\nu_1\rangle - 4|h|^2|\nabla_k^\perp\nu_1|^2 - 2|H|^{-2}|h|^2|\nabla|H||^2\\ &\quad - 8|H|^{-1}\nabla_k|H|h_{ij}\nabla_k h_{ij} - 2|\nabla h|^2 + 2B'\\ &\quad - 2|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 - 4\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1), \mathring{h}_{ip}A_{jp}^- - \mathring{h}_{jp}A_{ip}^-\rangle,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}B' &:= 2|H|^{-2}\bar{R}_{ipjq}\langle A_{pq}, H\rangle\langle A_{ij}, H\rangle - 2|H|^{-2}\bar{R}_{kjkp}\langle A_{pi}, H\rangle\langle A_{ij}, H\rangle\\ &\quad + |H|^{-2}A_{ij}^\alpha\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^\beta\langle A_{ij}, H\rangle + |H|^{-2}H^\alpha\bar{R}_{k\alpha k\beta}A_{ij}^\beta\langle A_{ij}, H\rangle\\ &\quad - 2|H|^{-2}A_{jp}^\alpha\bar{R}_{ip\alpha\beta}H^\beta\langle A_{ij}, H\rangle - 2|H|^{-2}A_{ip}^\alpha\bar{R}_{jp\alpha\beta}H^\beta\langle A_{ij}, H\rangle\\ &\quad + |H|^{-2}\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}H^\beta\langle A_{ij}, H\rangle - |H|^{-2}\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}H^\beta\langle A_{ij}, H\rangle.\end{aligned}$$

°证明。每当用 A^- 或其导数对 h进行缩并时，我们都可以用 h替换 h，因为A^- 是无迹的。此外，为简便起见，我们省略求和记号。首先，利用（2.1），代入公式

$$\begin{aligned}\Big\langle\Big(\partial_t-\Delta\Big)^{\perp}A_{ij},H\Big\rangle&=\langle A_{ij},A_{pq}\rangle\langle A_{pq},H\rangle+\langle A_{iq},A_{pq}\rangle\langle A_{pj},H\rangle+\langle A_{jq},A_{pq}\rangle\langle A_{pi},H\rangle\\&\quad-2\langle A_{ip},A_{jq}\rangle\langle A_{pq},H\rangle+2\bar{R}_{ipjq}\langle A_{pq},H\rangle-\bar{R}_{kjkp}\langle A_{pi},H\rangle-\bar{R}_{kikp}\langle A_{pj},H\rangle\\&\quad+A^{\alpha}_{ij}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\langle\nu_\beta,H\rangle-2A^{\alpha}_{jp}\bar{R}_{ip\alpha\beta}\langle\nu_\beta,H\rangle-2A^{\alpha}_{ip}\bar{R}_{jp\alpha\beta}\langle\nu_\beta,H\rangle\\&\quad+\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}\langle\nu_\beta,H\rangle-\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}\langle\nu_\beta,H\rangle,\\\Big\langle A_{ij},\Big(\partial_t-\Delta\Big)^{\perp}H\Big\rangle&=\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{pq},A_{ij}\rangle+H^{\alpha}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\langle\nu_\beta,A_{ij}\rangle.\end{aligned}$$

将每个方程分别与 $\langle A_{ij}$、 $H\rangle$ 收缩取迹，得到

$$\begin{aligned}\Big\langle\Big(\partial_t-\Delta\Big)^{\perp}A_{ij},H\Big\rangle\langle A_{ij},H\rangle&=\langle A_{ij},A_{pq}\rangle\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle+2\langle A_{iq},A_{pq}\rangle\langle A_{pj},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle\\&\quad-2\langle A_{ip},A_{jq}\rangle\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle+2\bar{R}_{ipjq}\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle\\&\quad-2\bar{R}_{kjkp}\langle A_{pi},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle+A^{\alpha}_{ij}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\langle\nu_\beta,H\rangle\langle A_{ij},H\rangle\\&\quad-2A^{\alpha}_{jp}\bar{R}_{ip\alpha\beta}\langle\nu_\beta,H\rangle\langle A_{ij},H\rangle-2A^{\alpha}_{ip}\bar{R}_{jp\alpha\beta}\langle\nu_\beta,H\rangle\langle A_{ij},H\rangle\\&\quad+\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}\langle\nu_\beta,H\rangle\langle A_{ij},H\rangle-\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}\langle\nu_\beta,H\rangle\langle A_{ij},H\rangle,\\\Big\langle A_{ij},\Big(\partial_t-\Delta\Big)^{\perp}H\Big\rangle\langle A_{ij},H\rangle&=\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{pq},A_{ij}\rangle\langle A_{ij},H\rangle+H^{\alpha}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\langle\nu_\beta,A_{ij}\rangle\langle A_{ij},H\rangle.\end{aligned}$$

结合以上方程，并注意到 $\langle\nu_\beta$、 $H\rangle=H^\beta$ ，我们有：

$$\begin{aligned}\Big(\Big(\partial_t-\Delta\Big)\langle A_{ij},H\rangle\Big)\langle A_{ij},H\rangle&=2\langle A_{ij},A_{pq}\rangle\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle+2\langle A_{iq},A_{pq}\rangle\langle A_{pj},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle\\&\quad-2\langle A_{ip},A_{jq}\rangle\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle+2\bar{R}_{ipjq}\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle\\&\quad-2\bar{R}_{kjkp}\langle A_{pi},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle+A^{\alpha}_{ij}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle\\&\quad-2A^{\alpha}_{jp}\bar{R}_{ip\alpha\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle-2A^{\alpha}_{ip}\bar{R}_{jp\alpha\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle\\&\quad+\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle-\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle\\&\quad+H^{\alpha}\bar{R}_{k\alpha k\beta}A^{\beta}_{ij}\langle A_{ij},H\rangle-2\langle\nabla^{\perp}_kA_{ij},\nabla^{\perp}_kH\rangle\langle A_{ij},H\rangle.\end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned}B:=\;&2\bar{R}_{ipjq}\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle-2\bar{R}_{kjkp}\langle A_{pi},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle\\&+A^{\alpha}_{ij}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle+H^{\alpha}\bar{R}_{k\alpha k\beta}A^{\beta}_{ij}\langle A_{ij},H\rangle\\&-2A^{\alpha}_{jp}\bar{R}_{ip\alpha\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle-2A^{\alpha}_{ip}\bar{R}_{jp\alpha\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle\\&+\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle-\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle.\end{aligned}$$

我们使用Uhlenbeck技巧，假设处于正交标架中。也就是说，假设$g^{ij}=\delta_{ij}$ 沿着流始终保持正交。更准确地说，对于任意 e_i、 e_j 正交归一，我们有

$$\partial_tg^{ij}=\partial_t\langle e_i,e_j\rangle=0.$$

因此　其中不包括度量的逆的时间导数，即该项

$$2\big(\partial_t g^{ij}\big)g^{pq}\langle A_{ip},H\rangle\langle A_{jq},H\rangle,$$

我们有

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t-\Delta\Big)|\langle A_{ij},H\rangle|^2 &= 2\Big(\Big(\partial_t-\Delta\Big)\langle A_{ij},H\rangle\Big)\langle A_{ij},H\rangle - 2|\nabla\langle A_{ij},H\rangle|^2\\ &= 4\langle A_{ij},A_{pq}\rangle\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle + 4\langle A_{iq},A_{pq}\rangle\langle A_{pj},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle\\ &- 4\langle A_{ip},A_{jq}\rangle\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle - 4\langle\nabla^\perp_k A_{ij},\nabla^\perp_k H\rangle\langle A_{ij},H\rangle\\ &- 2|\nabla\langle A_{ij},H\rangle|^2 + 2B. \end{aligned}\tag{5.1}$$

为完成证明，我们将 $|H|^{-2}$ 相乘，然后利用 $A=A^-+h\nu_1$ 重写其余各项。对于（5.1）第一行的第一项，我们有

$$\begin{aligned}4|H|^{-2}\langle A_{ij},A_{pq}\rangle\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle &= 4|H|^{-2}|H|^2h_{ij}h_{pq}\langle A_{ij},A_{pq}\rangle\\ &= 4|h|^4+4h_{ij}h_{pq}\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle\\ &= 4|h|^4+4\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{pq}\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle\\ &= 4|h|^4+4|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2.\end{aligned}\tag{5.2}$$

此外，B 可以改写为

$$\begin{aligned}B' :=\ & 2|H|^{-2}\bar R_{ipjq}\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle - 2|H|^{-2}\bar R_{kjkp}\langle A_{pi},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle\\ &+|H|^{-2}A^\alpha_{ij}\bar R_{k\alpha k\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle + |H|^{-2}H^\alpha\bar R_{k\alpha k\beta}A^\beta_{ij}\langle A_{ij},H\rangle\\ &-2|H|^{-2}A^\alpha_{jp}\bar R_{ip\alpha\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle - 2|H|^{-2}A^\alpha_{ip}\bar R_{jp\alpha\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle\\ &+|H|^{-2}\bar\nabla_k\bar R_{kij\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle - |H|^{-2}\bar\nabla_i\bar R_{jkk\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle.\end{aligned}$$

在高余维情形下，黎曼流形上局部标架中的基本高斯方程、Codazzi 方程和里奇方程形式如下

$$R_{ijpq}=\bar R_{ijpq}+A^\alpha_{ip}A^\alpha_{jq}-A^\alpha_{jp}A^\alpha_{iq},$$

$$(\nabla^\perp_i A)^\alpha_{jp}-(\nabla^\perp_j A)^\alpha_{ip}=-\bar R_{ijp\alpha},$$

and

$$R^\perp_{ij\alpha\beta}=\bar R_{ij\alpha\beta}+A^\alpha_{ip}A^\beta_{jp}-A^\beta_{ip}A^\alpha_{jp}.$$

定义法曲率的向量值版本为

$$R^\perp_{ij}(\nu_\alpha)=R^\perp_{ij\alpha\beta}\nu_\beta=\bar R_{ij\alpha\beta}\nu_\beta+A^\alpha_{ip}A^\beta_{jp}-A^\beta_{ip}A^\alpha_{jp}\nu_\beta.\tag{5.3}$$

特别地，我们注意到 $R^\perp_{ij}(\nu_1)=\bar R_{ij}(\nu_1)+h_{ip}A^\beta_{jp}-h_{jp}A^\beta_{ip}$，鉴于

$$A_{ij}=A^-_{ij}+h_{ij}\nu_1=A^-_{ij}+\mathring{h}_{ij}\nu_1+\frac{1}{n}|H|g_{ij}\nu_1,$$

可得

$$R^{\perp}_{ij}(\nu_1) = \bar{R}_{ij}(\nu_1) + \mathring{h}_{ip}A^{-}_{jp} - \mathring{h}_{jp}A^{-}_{ip}. \tag{5.4}$$

对于 (5.1) 中第二项与第三项之差，我们注意到它与 (5.4) 中的 $|R^{\perp}_{ij}(\nu_1)|^2$ 相似。我们计算得

$$\begin{aligned}|\mathring{h}_{ip}A^{-}_{jp} - \mathring{h}_{jp}A^{-}_{ip}|^2 &= |h_{ip}A_{jp} - h_{jp}A_{ip}|^2 = \langle h_{ip}A_{jp} - h_{jp}A_{ip}, h_{iq}A_{jq} - h_{jq}A_{iq}\rangle \\ &= 2h_{ip}h_{iq}\langle A_{jp}, A_{jq}\rangle - 2h_{ip}h_{jq}\langle A_{jp}, A_{iq}\rangle \\ &= 2|H|^{-2}\big(\langle A_{jp}, A_{jq}\rangle\langle A_{ip}, H\rangle\langle A_{iq}, H\rangle - \langle A_{jp}, A_{iq}\rangle\langle A_{ip}, H\rangle\langle A_{jq}, H\rangle\big).\end{aligned} \tag{5.5}$$

因此，

$$\begin{aligned}|R^{\perp}_{ij}(\nu_1)|^2 = |\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 &+ 2|H|^{-2}\big(\langle A_{jp}, A_{jq}\rangle\langle A_{ip}, H\rangle\langle A_{iq}, H\rangle - \langle A_{jp}, A_{iq}\rangle\langle A_{ip}, H\rangle\langle A_{jq}, H\rangle\big) \\ &+ 2\langle \bar{R}_{ij}(\nu_1), \mathring{h}_{ip}A^{-}_{jp} - \mathring{h}_{jp}A^{-}_{ip}\rangle.\end{aligned}$$

经过重新编号（例如，对第二项使用 $j \to p \to q \to i \to j$，对第三项使用 $j \to i \to q \to j$、$p \to p$），可得

$$\begin{aligned}2|R^{\perp}_{ij}(\nu_1)|^2 = 2|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 &+ 4|H|^{-2}\big(\langle A_{ip}, A_{pq}\rangle\langle A_{jq}, H\rangle\langle A_{ij}, H\rangle - \langle A_{ip}, A_{jq}\rangle\langle A_{pq}, H\rangle\langle A_{ij}, H\rangle\big) \\ &+ 4\langle \bar{R}_{ij}(\nu_1), \mathring{h}_{ip}A^{-}_{jp} - \mathring{h}_{jp}A^{-}_{ip}\rangle.\end{aligned}$$

因此，我们已经证明引理陈述中的反应项是正确的。对于梯度项，由以下恒等式可得

$$\begin{aligned}\langle \nabla^{\perp}_k A_{ij}, \nu_1\rangle &= \langle \nabla^{\perp}_k A^{-}_{ij}, \nu_1\rangle + \nabla_k h_{ij}, \\ \langle \nabla^{\perp}_k A_{ij}, \nabla^{\perp}_k \nu_1\rangle &= \langle \nabla^{\perp}_k A^{-}_{ij}, \nabla^{\perp}_k \nu_1\rangle + h_{ij}|\nabla^{\perp}_k \nu_1|^2, \\ \nabla^{\perp}_k H &= \nabla_k |H|\nu_1 + |H|\nabla^{\perp}_k \nu_1.\end{aligned} \tag{5.6}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned}-4|H|^{-2}\langle \nabla^{\perp}_k A_{ij}, \nabla^{\perp}_k H\rangle\langle A_{ij}, H\rangle &= -4|H|^{-1}h_{ij}\nabla_k|H|\langle \nabla^{\perp}_k A_{ij}, \nu_1\rangle - 4|H|^{-1}h_{ij}\langle \nabla^{\perp}_k A_{ij}, \nabla^{\perp}_k \nu_1\rangle \\ &= -4|H|^{-1}\mathring{h}_{ij}\nabla_k|H|\langle \nabla^{\perp}_k A^{-}_{ij}, \nu_1\rangle - 4|H|^{-1}h_{ij}\nabla_k|H|\nabla_k h_{ij} \\ &\quad - 4\mathring{h}_{ij}\langle \nabla^{\perp}_k A^{-}_{ij}, \nabla^{\perp}_k \nu_1\rangle - 4|h|^2|\nabla^{\perp}_k \nu_1|^2,\end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}-2|H|^{-2}|\nabla\langle A_{ij}, H\rangle|^2 &= -2|H|^{-2}|\nabla(|H|h_{ij})|^2 \\ &= -2|H|^{-2}|h|^2|\nabla|H||^2 - 2|\nabla h|^2 - 4|H|^{-1}h_{ij}\nabla_k|H|\nabla_k h_{ij},\end{aligned}$$

由于 $A^{-}_{ii} = 0$，这意味着它是无迹的。结合（5.2）—（5.7），即可得到所需结果。

□

将上述引理的结果代入我们关于 $|H|^{-2}\sum_{i,\ j}|\langle A_{ij}\,H\rangle|^2$ 的演化方程，并合并同类项，可得

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t-\Delta\Big)\frac{\sum_{i,j}|\langle A_{ij},H\rangle|^2}{|H|^2}&=4\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2+2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2+2|h|^4\\&\quad-4|H|^{-1}\sum_{i,j,k}\mathring{h}_{ij}\nabla_k|H|\langle\nabla^\perp_kA^-_{ij},\nu_1\rangle-4\sum_{i,j,k}\mathring{h}_{ij}\langle\nabla^\perp_kA^-_{ij},\nabla^\perp_k\nu_1\rangle\\&\quad-2|h|^2\sum_k|\nabla^\perp_k\nu_1|^2-2|\nabla h|^2+2B'-2|h|^2|H|^{-2}\sum_{k,\alpha,\beta}\bar R_{k\alpha k\beta}H^\alpha H^\beta\\&\quad-2\sum_{i,j}|\bar R_{ij}(\nu_1)|^2-4\sum_{i,j,p}\langle\bar R_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^-_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^-_{ip}\rangle.\end{aligned}$$

我们对 上式取负，并代入 $|A|^2$ 的演化方程，再利用 (3.4) 得到

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t-\Delta\Big)|A^-|^2&=-2|\nabla^\perp A|^2+2\sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij},A_{pq}\rangle|^2+2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2+\Big(P_\alpha-2B'\Big)\\&\quad-4\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2-2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2-2|h|^4+4|H|^{-1}\sum_{i,j,k}\mathring{h}_{ij}\nabla_k|H|\langle\nabla^\perp_kA^-_{ij},\nu_1\rangle\\&\quad+4\sum_{i,j,k}\mathring{h}_{ij}\langle\nabla^\perp_kA^-_{ij},\nabla^\perp_k\nu_1\rangle+2|\nabla h|^2+2|h|^2\sum_k|\nabla^\perp_k\nu_1|^2\\&\quad+2|h|^2|H|^{-2}\sum_{k,\alpha,\beta}\bar R_{k\alpha k\beta}H^\alpha H^\beta+2\sum_{i,j}|\bar R_{ij}(\nu_1)|^2\\&\quad+4\sum_{i,j,p}\langle\bar R_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^-_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^-_{ip}\rangle.\end{aligned}$$

从 $2B'$ 中取出项 $2|H|^{-2}H^\alpha\sum_{k,\ \alpha,\ \beta}\bar R_{k\alpha k\beta}A^\beta_{ij}\langle A_{ij},H\rangle$，以及 $\sum_{i,\ j}|\langle A_{ij},\ _{|H|^2}{}^{H\rangle|^2}$ 演化方程的最后一项，我们得到

$$\begin{aligned}&2|H|^{-2}\sum_{i,j,k,\alpha,\beta}\bar R_{k\alpha k\beta}H^\alpha A^\beta_{ij}\langle A_{ij},H\rangle-2|h|^2|H|^{-2}\sum_{k,\alpha,\beta}\bar R_{k\alpha k\beta}H^\alpha H^\beta\\&=2|H|^{-2}\sum_{i,j,k,\alpha,\beta}\bar R_{k\alpha k\beta}H^\alpha\big(A^{-,\beta}_{ij}+\frac{|\langle A_{ij},H\rangle|}{|H|^2}H^\beta\big)\langle A_{ij},H\rangle-2|h|^2|H|^{-2}\sum_{k,\alpha,\beta}\bar R_{k\alpha k\beta}H^\alpha H^\beta\\&=2|H|^{-2}\sum_{i,j,k,\alpha,\beta\geq2}\bar R_{k\alpha k\beta}H^\alpha A^\beta_{ij}\langle A_{ij},H\rangle.\end{aligned}$$

反应项满足

$$2\sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij},A_{pq}\rangle|^2-4\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2-2|h|^4=2\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle|^2,$$

$$2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2-2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2=2|\hat R^\perp|^2+2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2.\tag{5.8}$$

其中

$$|\hat{R}^{\perp}|^2=\sum_{i,j,\alpha,\beta\geq 2}\Big(\sum_p|A^\alpha_{ip}A^\beta_{jp}-A^\alpha_{jp}A^\beta_{ip}|^2+|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2+2\sum_p\langle\bar{R}_{ij\alpha\beta},A^\alpha_{ip}A^\beta_{jp}-A^\alpha_{jp}A^\beta_{ip}\rangle\Big)\quad(5.9)$$

对于梯度项，取其形式为 $\nabla^{\perp}_iA_{jp}=\nabla^{\perp}_iA^-_{jp}+\nabla_ih_{jp}\nu_1+h_{jp}\nabla^{\perp}_i\nu_1$，可得

$$|\nabla^{\perp}A|^2=|\nabla^{\perp}A^-|^2+|\nabla h|^2+|h|^2|\nabla^{\perp}\nu_1|^2+2\sum_{i,j,k}\mathring{h}_{ij}\langle\nabla^{\perp}A^-_{ij},\nabla^{\perp}_k\nu_1\rangle+2\sum_{i,j,k}\nabla_k\mathring{h}_{ij}\langle\nabla^{\perp}_kA^-_{ij},\nu_1\rangle.$$

因此，

$$\begin{aligned}-2|\nabla^{\perp}A|^2+2|\nabla h|^2+2|h|^2|\nabla^{\perp}\nu_1|^2+4\sum_{i,j,k}\mathring{h}_{ij}\langle\nabla^{\perp}_kA^-_{ij},\nabla^{\perp}_k\nu_1\rangle&=-2|\nabla^{\perp}A^-|^2\\&\quad-4\sum_{i,j,k}\nabla_k\mathring{h}_{ij}\langle\nabla^{\perp}_kA^-_{ij},\nu_1\rangle.\end{aligned}$$

综上可得

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t-\Delta\Big)|A^-|^2&=2\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle|^2+2|\hat{R}^{\perp}|^2+2\sum_{i,j}|R^{\perp}_{ij}(\nu_1)|^2\\&\quad-2|\nabla^{\perp}A^-|^2+4|H|^{-1}\sum_{i,j,k}\mathring{h}_{ij}\nabla_k|H|\langle\nabla^{\perp}_kA^-_{ij},\nu_1\rangle-4\sum_{i,j,k}\nabla_k\mathring{h}_{ij}\langle\nabla^{\perp}_kA^-_{ij},\nu_1\rangle\\&\quad+2|H|^{-2}\sum_{i,j,k,\alpha,\beta\geq 2}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^\alpha A^\beta_{ij}\langle A_{ij},H\rangle+\Big(P_\alpha-2B''\Big)\\&\quad+2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+4\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^-_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^-_{ip}\rangle,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}B'':=\;&2|H|^{-2}\sum_{i,j,p,q}\bar{R}_{ipjq}\langle A_{pq},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle-2|H|^{-2}\sum_{i,j,p,k}\bar{R}_{kjkp}\langle A_{pi},H\rangle\langle A_{ij},H\rangle\\&+|H|^{-2}\sum_{i,j,k,\alpha,\beta}A^\alpha_{ij}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle-4|H|^{-2}\sum_{i,j,p,\alpha,\beta}A^\alpha_{ip}\bar{R}_{jp\alpha\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle\\&+|H|^{-2}\sum_{i,j,k,\beta}\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle-|H|^{-2}\sum_{i,j,k,\beta}\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}H^\beta\langle A_{ij},H\rangle.\end{aligned}$$

并令

$$\begin{aligned}P_\alpha=\;&4\sum_{i,j,p,q}\bar{R}_{ipjq}\Big(\sum_\alpha A^\alpha_{pq}A^\alpha_{ij}\Big)-4\sum_{j,k,p}\bar{R}_{kjkp}\Big(\sum_{i,\alpha}A^\alpha_{pi}A^\alpha_{ij}\Big)+2\sum_{k,\alpha,\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\Big(\sum_{i,j}A^\alpha_{ij}A^\beta_{ij}\Big)\\&-8\sum_{j,p,\alpha,\beta}\bar{R}_{jp\alpha\beta}\Big(\sum_iA^\alpha_{ip}A^\beta_{ij}\Big)+2\sum_{i,j,k,\beta}\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}A^\beta_{ij}-2\sum_{i,j,k,\beta}\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}A^\beta_{ij},\end{aligned}$$

表示出现在（2.4）中的低阶项。由于 $\langle A^-_{ij}、\ \nu_1\rangle = 0$，对 ∇_k 求导可得

$$\langle \nabla^\perp_k A^-_{ij}, \nu_1\rangle = -\langle A^-_{ij}, \nabla^\perp_k \nu_1\rangle = -\langle \mathring{A}_{ij}, \nabla^\perp_k \nu_1\rangle.$$

° °由于 $h_{ij} = \langle A_{ij}, \nu_1\rangle$，由上面的方程可得

$$\nabla_k \mathring{h}_{ij} = \langle \nabla^\perp_k \mathring{A}_{ij}, \nu_1\rangle + \langle \mathring{A}_{ij}, \nabla^\perp_k \nu_1\rangle = \langle \nabla^\perp_k \mathring{A}_{ij}, \nu_1\rangle - \langle \nabla^\perp_k A^-_{ij}, \nu_1\rangle.$$

为简化最终表达式，我们定义张量

$$Q_{ijk} := \langle \nabla^\perp_k \mathring{A}_{ij}, \nu_1\rangle - \langle \nabla^\perp_k A^-_{ij}, \nu_1\rangle - |H|^{-1}\mathring{h}_{ij}\nabla_k |H|.$$

这里我们给出了 $|A^-|^2$ 演化方程中的低阶项。我们将它们与挤压量 $f > 0$ 的演化相匹配。对于项 $P_\alpha - 2B''$，有

$$\begin{aligned} P_\alpha - 2B'' = {} & 4\sum_{i,j,p,q} \bar{R}_{ipjq}\Big(\sum_{\alpha\geq 2} A^\alpha_{pq} A^\alpha_{ij}\Big) - 4\sum_{j,k,p} \bar{R}_{kjkp}\Big(\sum_{i,\alpha\geq 2} A^\alpha_{pi} A^\alpha_{ij}\Big) \\ & + 2\sum_{k,\alpha,\beta\geq 2} \bar{R}_{k\alpha k\beta}\Big(\sum_{i,j} A^\alpha_{ij} A^\beta_{ij}\Big) - 8\sum_{j,p,\alpha,\beta\geq 2} \bar{R}_{jp\alpha\beta}\Big(\sum_{i} A^\alpha_{ip} A^\beta_{ij}\Big) \\ & + 2\sum_{i,j,k,\beta\geq 2} \bar{\nabla}_k \bar{R}_{kij\beta} A^\beta_{ij} - 2\sum_{i,j,k,\beta\geq 2} \bar{\nabla}_i \bar{R}_{jkk\beta} A^\beta_{ij}. \end{aligned}$$

结论 根据定理 5.2 和 (3.4)，我们得到以下命题 .

命题 5.3。 $|A^-|^2$ 的演化方程为

$$\begin{aligned} \Big(\partial_t - \Delta\Big)|A^-|^2 = {} & 2\sum_{i,j,p,q} |\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 + 2|\hat{R}^\perp|^2 + 2\sum_{i,j} |R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2 \\ & - 2|\nabla^\perp A^-|^2 + 4\sum_{i,j,k} Q_{ijk}\langle A^-_{ij}, \nabla^\perp_k \nu_1\rangle \\ & + 2|H|^{-2}\sum_{i,j,k,\alpha,\beta\geq 2} \bar{R}_{k\alpha k\beta} H^\alpha A^\beta_{ij}\langle A_{ij}, H\rangle + \Big(P_\alpha - 2B''\Big) \\ & + 2\sum_{i,j} |\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 + 4\sum_{i,j,p} \langle \bar{R}_{ij}(\nu_1), \mathring{h}_{ip} A^-_{jp} - \mathring{h}_{jp} A^-_{ip}\rangle, \end{aligned}$$

其中

$$Q_{ijk} := \langle \nabla^\perp_k \mathring{A}_{ij}, \nu_1\rangle - \langle \nabla^\perp_k A^-_{ij}, \nu_1\rangle - |H|^{-1}\mathring{h}_{ij}\nabla_k |H|.$$

我们考虑函数 $f = -d_n + c_n|H|^2 - |A|^2$。定理的假设是 $f > 0$（因此 $|H| > 0$）在 $\mathcal{M}_0$ 上处处成立。由于 $\mathcal{M}_0$ 是紧致的，存在依赖于 $\mathcal{M}_0$ 的常数 ε_0、$\varepsilon_1 > 0$，使得在 $\mathcal{M}_0$ 上有 $f \geq \varepsilon_1|H|^2 + \varepsilon_0$。根据 [3], 中的定理 2

$f \geq \varepsilon_1|H|^2 + \varepsilon_0$，在 $\mathcal{M}_t$ 上，对每个 $t \in [0,T)$ 都成立，因此 $|H| > 0$ 也得以保持。回想

$$c_n = \frac{4}{3n}, \quad \text{if } n \geq 8 \quad \text{and} \quad c_n = \frac{3(n+1)}{2n(n+2)}, \quad \text{if } n = 5, 6 \text{ or } 7.$$

当 $n = 5$ 为 6 或 7 时，我们的估计需要额外的夹挤条件。由于 $|A|^2 + \varepsilon_0 \leq (c_n - \varepsilon_1)|H|^2$，对每个 $t \in [0,T)$，不失一般性，我们可以用 $c_n - \varepsilon_1$ 替换 c_n，并在整个证明过程中假设

$$c_n \leq \frac{4}{3n}, \quad \text{if } n \geq 8 \quad \text{and} \quad c_n \leq \frac{3(n+1)}{2n(n+2)}, \quad \text{if } n = 5, 6 \text{ or } 7.$$

后一个不等式是否严格，取决于初始数据 ε_1。我们仍有 $f \geq \varepsilon_0 > 0$ 和 $|H| > 0$，对每个 t。设 $\delta > 0$ 为一个稍后将在证明中确定的小常数。根据先前的工作， f 的演化方程为

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t - \Delta\Big) f = {} & 2(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2) + 2\Big(c_n \sum_{i,j} |\langle A_{ij}, H\rangle|^2 - \sum_{i,j,p,q} |\langle A_{ij}, A_{pq}\rangle|^2 - \sum_{i,j} |R^\perp_{ij}|^2\Big) \\ & + 2c_n \sum_{k,\alpha,\beta} \bar{R}_{k\alpha k\beta} H^\alpha H^\beta - P_\alpha.\end{aligned} \tag{5.10}$$

夹挤条件意味着，在时空中的每一点， f 方程右侧的两项均非负。证明的第一步也是主要工作，是分析演化方程 $\frac{|A^-|^2}{f}$。我们将证明，该比值满足一个良好的演化方程，其右侧含有一个非正项。具体而言，我们将证明

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f} \leq {} & 2\Big\langle \nabla \frac{|A^-|^2}{f}, \nabla \log f \Big\rangle - \delta \frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(\partial_t - \Delta\Big) f + C' \frac{|A^-|^2}{f} + C'' \frac{|A^-|}{\sqrt{f}} \\ & + \frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j} |\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 + 4\sum_{i,j,p} \langle \bar{R}_{ij}(\nu_1), \mathring{h}_{ip} A^-_{jp} - \mathring{h}_{jp} A^-_{ip}\rangle\Big),\end{aligned} \tag{5.11}$$

对于 C'、C'' 常数，它们取决于 n、K_1、K_2 和 d_n。那么，由于在极限情况下背景空间是欧几里得空间，根据最大值原理即可得到结果。根据目前为止的证明， $\frac{|A^-|^2}{f}$ 的演化方程为

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f} &= \frac{1}{f}\Big(\partial_t - \Delta\Big)|A^-|^2 - |A^-|^2 \frac{1}{f^2}\Big(\partial_t - \Delta\Big) f + 2\Big\langle \nabla \frac{|A^-|^2}{f}, \nabla \log f \Big\rangle \\ &= \frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j,p,q} |\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 + 2|\hat{R}^\perp|^2 + 2\sum_{i,j} |R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2\Big) \\ &+ \frac{1}{f}\Big(-2|\nabla^\perp A^-|^2 + 4\sum_{i,j,k} Q_{ijk}\langle A^-_{ij}, \nabla^\perp_k \nu_1\rangle + 2|H|^{-2} \sum_{i,j,k,\alpha,\beta \geq 2} \bar{R}_{k\alpha k\beta} H^\alpha A^\beta_{ij} \langle A_{ij}, H\rangle\Big) \\ &+ \frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j} |\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 + 4\sum_{i,j,p} \langle \bar{R}_{ij}(\nu_1), \mathring{h}_{ip} A^-_{jp} - \mathring{h}_{jp} A^-_{ip}\rangle\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- |A^-|^2\frac{1}{f^2}\Big(2(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2)\Big)\\
&- |A^-|^2\frac{1}{f^2}\Big(2\Big(c_n\sum_{i,j}|\langle A_{ij},H\rangle|^2 - \sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij},A_{pq}\rangle|^2 - \sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2\Big)\Big)\\
&+ 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f},\nabla\log f\Big\rangle\\
&+ \frac{1}{f}\Big(P_\alpha - 2B''\Big) - |A^-|^2\frac{1}{f^2}\Big(2c_n\sum_{k,\alpha,\beta}\bar R_{k\alpha k\beta}H^\alpha H^\beta - P_\alpha\Big).
\end{aligned}
$$

重新整理这些项，可得

$$
\begin{aligned}
&\Big(\partial_t-\Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f} = \frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle|^2 + 2|\hat R^\perp|^2 + 2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(-2\frac{|A^-|^2}{f}\Big(c_n\sum_{i,j}|\langle A_{ij},H\rangle|^2 - \sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij},A_{pq}\rangle|^2 - \sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2\Big)\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j}|\bar R_{ij}(\nu_1)|^2 + 4\sum_{i,j,p}\langle\bar R_{ij}(\nu_1),\mathring h_{ip}A^-_{jp} - \mathring h_{jp}A^-_{ip}\rangle\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(4\sum_{i,j,p,q}\bar R_{ipjq}\big(\sum_{\alpha\geq 2}A^\alpha_{pq}A^\alpha_{ij}\big) - 4\sum_{j,k,p}\bar R_{kjkp}\big(\sum_{i,\alpha\geq 2}A^\alpha_{pi}A^\alpha_{ij}\big)\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{k,\alpha,\beta\geq 2}\bar R_{k\alpha k\beta}\big(\sum_{i,j}A^\alpha_{ij}A^\beta_{ij}\big) - 8\sum_{j,p,\alpha,\beta\geq 2}\bar R_{jp\alpha\beta}\big(\sum_{i}A^\alpha_{ip}A^\beta_{ij}\big)\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(2|H|^{-2}\sum_{i,j,k,\alpha,\beta\geq 2}\bar R_{k\alpha k\beta}H^\alpha A^\beta_{ij}\langle A_{ij},H\rangle + 2\sum_{i,j,k,\beta\geq 2}\bar\nabla_k\bar R_{kij\beta}A^\beta_{ij} - 2\sum_{i,j,k,\beta\geq 2}\bar\nabla_i\bar R_{jkk\beta}A^\beta_{ij}\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(4\sum_{i,j,k}Q_{ijk}\langle A^-_{ij},\nabla^\perp_k\nu_1\rangle - 2|\nabla^\perp A^-|^2 - 2\frac{|A^-|^2}{f}(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2)\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(\frac{|A^-|^2}{f}\big(4\sum_{i,j,p,q}\bar R_{ipjq}\big(\sum_{\alpha}A^\alpha_{pq}A^\alpha_{ij}\big) - 4\sum_{j,k,p}\bar R_{kjkp}\big(\sum_{i,\alpha}A^\alpha_{pi}A^\alpha_{ij}\big)\big) - 2\sum_{k}\bar R_{k1k1}\sum_{i,j}(A^1_{ij})^2\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(\frac{|A^-|^2}{f}\big(2\sum_{k,\alpha,\beta}\bar R_{k\alpha k\beta}\big(\sum_{i,j}A^\alpha_{ij}A^\beta_{ij}\big) + 4c_n\sum_{k,\alpha,\beta}\bar R_{k\alpha k\beta}H^\alpha H^\beta - 8\sum_{j,p,\alpha,\beta}\bar R_{jp\alpha\beta}\big(\sum_{i}A^\alpha_{ip}A^\beta_{ij}\big)\big)\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(\frac{|A^-|^2}{f}\big(2\sum_{i,j,k,\beta}\bar\nabla_k\bar R_{kij\beta}A^\beta_{ij} - 2\sum_{i,j,k,\beta}\bar\nabla_i\bar R_{jkk\beta}A^\beta_{ij}\big)\Big)\\
&+2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f},\nabla\log f\Big\rangle.
\end{aligned}
$$

下面我们简要解释上述演化方程。右侧的前两行是高阶项，第三行中的项是欧几里得项。从第三行到第六行的项是与主方向正交的低阶项。第七行和第十一行中的项是梯度项

第八行到第十行中的项则是低阶项，既包括沿主方向的项，也包括与主方向正交的项。

我们首先估计反应项。我们将用到两个估计。第一个估计在 [3], 第 3 节第 372 页中得到了证明。第二个估计是一个矩阵不等式，即 [16]中的引理 3.3。

引理 5.4。

$$\sum_{i,j}\big|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}\big|^2+\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2\le 2|\mathring{h}|^2|A^-|^2+\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+4|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^-|, \tag{5.12}$$

$$\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle|^2+|\hat{R}^\perp|^2\le\frac{3}{2}|A^-|^4+\sum_{\alpha,\beta\ge2}\Big(\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2+4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^-|^2\Big). \tag{5.13}$$

证明。为证明不等式 (5.12)， [3] 中给出的论证简单而简短，因此我们将在此用我们的记号重述。我们将表述不等式 (5.13)，使其成为 [16]中引理 3.3 的直接推论。固定任意一点 $p\in\mathcal{M}$ 和时刻 $t\in[0,T)$。令 $e_1,\dots,e_n$为一组正交归一基，它在时刻 t 将 $T_p\mathcal{M}\cong\mathbb{R}^n$ 识别出来，然后选取 $\nu_2,\dots,\nu_m$ 作为时刻 t下 $N_p\mathcal{M}$ 中主法向量 ν_1 的正交补的一组基。对每个$\beta\in\{2,\dots,m\}$，定义矩阵 $A_\beta=\langle A,\nu_\beta\rangle$，其分量由 $(A_\beta)_{ij}=A^\beta_{ij}$给出。

于是$A^-=\sum_{\beta\ge2}A_\beta\nu_\beta$。我们还有 $h=\langle A,\nu_1\rangle$。为证明 (5.12)，令 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 表示 h的特征值。假设该正交归一基是 h的特征基。现在

$$\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2=\sum_{\beta\ge2}\sum_{i,j,p,q}\mathring{h}_{ij}\mathring{h}_{pq}A^\beta_{ij}A^\beta_{pq}=\sum_{\beta\ge2}\big(\sum_{i,j}\mathring{h}_{ij}A^\beta_{ij}\big)^2=\sum_{\beta\ge2}\big(\sum_i\lambda_iA^\beta_{ii}\big)^2.$$

由柯西-施瓦茨不等式,

$$\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2\le\sum_{\beta\ge2}\big(\sum_i\lambda_j^2\big)\big(\sum_i(A^\beta_{ii})^2\big)=|\mathring{h}|^2\sum_{\beta\ge2}\sum_i(A^\beta_{ii})^2. \tag{5.14}$$

现在，利用

$$\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2=\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+\sum_{i,j,k}|\mathring{h}_{ik}A^-_{jk}-\mathring{h}_{jk}A^-_{ik}|^2+2\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^-_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^-_{ip}\rangle, \tag{5.15}$$

以及 (2.6)，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2&=\sum_{\beta\ge2}\sum_{i,j,k}\big(\mathring{h}_{ik}A^\beta_{jk}-\mathring{h}_{jk}A^\beta_{ik}\big)^2+\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+2\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^-_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^-_{ip}\rangle\\&=\sum_{\beta\ge2}\sum_{i,j}\big(\lambda_i-\lambda_j\big)^2(A^\beta_{ij})^2+\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+2\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^-_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^-_{ip}\rangle\end{aligned}$$

$$= \sum_{\beta\geq 2}\sum_{i\neq j}\left(\lambda_i-\lambda_j\right)^2(A_{ij}^{\beta})^2 + \sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 + 2\sum_{i,j,p}\langle \bar{R}_{ij}(\nu_1), \mathring{h}_{ip}A_{jp}^{-} - \mathring{h}_{jp}A_{ip}^{-}\rangle.$$

由于 $(\lambda_i-\lambda_j)^2 \leq 2\left(\lambda_i^2+\lambda_j^2\right) \leq 2|\mathring{h}|^2$，我们有

$$\sum_{i,j}|R_{ij}^{\perp}(\nu_1)|^2 \leq 2|\mathring{h}|^2\sum_{\beta\geq 2}\sum_{i\neq j}(A_{ij}^{\beta})^2 + \sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 + 4|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^{-}|. \tag{5.16}$$

将 (5.14) 和 (5.16) 相加，得到

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A_{ij}^{-}|^2 + \sum_{i,j}|R_{ij}^{\perp}(\nu_1)|^2 &\leq |\mathring{h}|^2\sum_{\beta\geq 2}\sum_{i}(A_{ii}^{\beta})^2 + 2|\mathring{h}|^2\sum_{\beta\geq 2}\sum_{i\neq j}(A_{ij}^{\beta})^2 + \sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2\\ &\quad + 4|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^{-}|\\ &\leq 2|\mathring{h}|^2|A^{-}|^2 + \sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 + 4|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^{-}|,\end{aligned}$$

这就是 (5.12)。为证明 (5.8)，对于 $\alpha,\beta\in\{2,\ldots,m\}$，定义

$$S_{\alpha\beta} := \operatorname{tr}(A_\alpha A_\beta) = \sum_{i,j,\alpha}A_{ij}^{\alpha}A_{ij}^{\beta} \quad \text{and} \quad S_\alpha := |A_\alpha|^2 = \sum_{i,j,\alpha}A_{ij}^{\alpha}A_{ij}^{\alpha}$$

令 $S := S_2+\cdots+S_m = |A^{-}|^2$。现在

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij}^{-}, A_{pq}^{-}\rangle|^2 &= \sum_{i,j,p,q}\sum_{\alpha,\beta\geq 2}A_{ij}^{\alpha}A_{pq}^{\alpha}A_{ij}^{\beta}A_{pq}^{\beta}\\ &= \sum_{\alpha,\beta\geq 2}\Big(\sum_{i,j}A_{ij}^{\alpha}A_{ij}^{\beta}\Big)\Big(\sum_{p,q}A_{pq}^{\alpha}A_{pq}^{\beta}\Big)\\ &= \sum_{\alpha,\beta\geq 2}S_{\alpha\beta}^2.\end{aligned}$$

此外，回顾 (5.9)，可将其写为

$$|\hat{R}^{\perp}|^2 = \sum_{\alpha,\beta\geq 2}\Big(|A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha|^2 + \sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 2\sum_{i,j,p}\langle \bar{R}_{ij\alpha\beta}, A_{ip}^{\alpha}A_{jp}^{\beta} - A_{jp}^{\alpha}A_{ip}^{\beta}\rangle\Big)$$

其中 $(A_\alpha A_\beta)_{ij} = (A_\alpha)_{ik}(A_\beta)_{kj} = (A_\alpha)_{ik}(A_\beta)_{jk}$ 表示标准矩阵乘法，$|\cdot|$ 是该矩阵通常的平方范数。我们看到，不等式 (5.13) 等价于

$$\sum_{\alpha,\beta\geq 2}|A_\alpha A_\beta - A_\beta A_\alpha|^2 + \sum_{\alpha,\beta\geq 2}S_{\alpha\beta}^2 \leq \frac{3}{2}S^2. \tag{5.17}$$

因此，我们有

$$\sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij}^{-}, A_{pq}^{-}\rangle|^2 + |\hat{R}^{\perp}|^2 \leq \frac{3}{2}|A^{-}|^4 + \sum_{i,j,\alpha,\beta\geq 2}\Big(|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 2\sum_{p}\langle \bar{R}_{ij\alpha\beta}, A_{ip}^{\alpha}A_{jp}^{\beta} - A_{jp}^{\alpha}A_{ip}^{\beta}\rangle\Big)$$

$$\leq \frac{3}{2}|A^-|^4 + \sum_{\alpha,\beta\geq 2}\Big(\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^-|^2\Big).$$

现在，若 $m=2$，则不等式 (5.13) 显然成立，因为 $|\hat{}R^\perp|^2 = 0$ and $\sum_{i,\ j,\ p,\ q}|\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 = |A^-|^4$。否则，若 $m \geq 3$，则由 [16] 中的引理 3.3 可得不等式 (5.17)。证明完毕。 □

作为前一个引理的直接推论，我们得到关于 $|A^-|^2$ 演化所产生的反应项的如下估计。

引理 5.5（$(\partial_t - \Delta)|A^-|^2$ 的反应项上界）。

$$\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 + |\hat{R}^\perp|^2 + \sum_{i,j,}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2 \leq \frac{3}{2}|A^-|^4 + \sum_{\alpha,\beta\geq 2}\Big(\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^-|^2\Big)$$
$$+ 2|\mathring{h}|^2|A^-|^2 + \sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 + 4|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^-|. \tag{5.18}$$

证明。证明由引理 5.4 得出。 □

接下来，我们用 A^-、h 和 $|H|$ 表示 f 演化中的反应项。根据 f 的定义，注意到

$$\frac{nc_n - 1}{n}|H|^2 = |A^-|^2 + |\mathring{h}|^2 + f + d_n. \tag{5.19}$$

在下面的引理中，我们得到 f 演化中反应项的下界。

引理 5.6（$(\partial_t - \Delta)$ f 的反应项下界）。
若 $\frac{1}{n} < c_n \leq \frac{4}{3n}$，则

$$\frac{|A^-|^2}{f}\Big(c_n\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2 - \sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij}, A_{pq}\rangle|^2 - \sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2\Big) \geq \frac{2}{nc_n - 1}|A^-|^4 + \frac{nc_n}{nc_n - 1}|\mathring{h}|^2|A^-|^2$$
$$- \frac{|A^-|^2}{f}\Big(\sum_{\alpha,\beta\geq 2}\Big(\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^-|^2\Big) + 2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 + 8|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^-|\Big). \tag{5.20}$$

证明。我们进行一项与 [3], 中类似的计算，但不舍弃夹逼项 f。根据以下方程

$$|h|^2 = |\mathring{h}|^2 + \frac{1}{n}|H|^2,$$

$$\sum_{i,j}|\langle A_{ij},H\rangle|^2=|H|^2|h|^2,$$

$$\sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij},A_{pq}\rangle|^2=|h|^4+2\sum_{i,j}\left|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}\right|^2+\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle|^2$$

and

$$2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2-2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2=|\hat{R}^\perp|^2+2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2=|R^\perp|^2, \tag{5.21}$$

我们有

$$\begin{aligned}
c_n\sum_{i,j}|\langle A_{ij},H\rangle|^2-\sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij},A_{pq}\rangle|^2-\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2&=\frac{1}{n}c_n|H|^4+c_n|\mathring{h}|^2|H|^2-|\mathring{h}|^4\\
&-\frac{2}{n}|\mathring{h}|^2|H|^2-\frac{1}{n^2}|H|^4-2\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2-\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle|^2-|\hat{R}^\perp|^2\\
&-2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2\\
&=\frac{1}{n}\left(c_n-\frac{1}{n}\right)|H|^4+\left(c_n-\frac{1}{n}\right)|\mathring{h}|^2|H|^2-\frac{1}{n}|\mathring{h}|^2|H|^2-|\mathring{h}|^4\\
&-2\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2-2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2-\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle|^2-|\hat{R}^\perp|^2.
\end{aligned}$$

利用 (5.19) 并消去各项，得到

$$\begin{aligned}
&c_n\sum_{i,j}|\langle A_{ij},H\rangle|^2-\sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij},A_{pq}\rangle|^2-\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2\\
&=\frac{1}{n}\big(|A^-|^2+|\mathring{h}|^2+f+d_n\big)|H|^2+|\mathring{h}|^2\big(|A^-|^2+|\mathring{h}|^2+f+d_n\big)\\
&-\frac{1}{n}|\mathring{h}|^2|H|^2-|\mathring{h}|^4-2\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2-2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2-\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle|^2-|\hat{R}^\perp|^2\\
&=\frac{1}{n}\left(f+|A^-|^2+d_n\right)|H|^2+\left(f+|A^-|^2+d_n\right)|\mathring{h}|^2\\
&-2\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2-2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2-\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle|^2-|\hat{R}^\perp|^2.
\end{aligned}$$

再次对剩余因子使用 (5.19)，得到

$$\begin{aligned}
&c_n\sum_{i,j}|\langle A_{ij},H\rangle|^2-\sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij},A_{pq}\rangle|^2-\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2\\
&=\frac{1}{n}\left(f+|A^-|^2+d_n\right)\left(c_n-\frac{1}{n}\right)^{-1}(f+|A^-|^2+|\mathring{h}|^2+d_n)+\left(f+|A^-|^2+d_n\right)|\mathring{h}|^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2 - 2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2 - \sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 - |\hat{R}^\perp|^2\\
&= \frac{1}{nc_n-1}f(f+2|A^-|^2+|\mathring{h}|^2+2d_n) + f|\mathring{h}|^2 + \frac{1}{nc_n-1}|A^-|^4 + \frac{nc_n}{nc_n-1}|A^-|^2|\mathring{h}|^2\\
&+ \frac{nc_n}{nc_n-1}d_n|\mathring{h}|^2 + \frac{1}{nc_n-1}d_n|A^-|^2 - 2\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2 - 2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2 - \sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2\\
&- |\hat{R}^\perp|^2.
\end{aligned}
$$

现在，由引理 5.4 中的两个估计可得

$$
\begin{aligned}
2\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2 + 2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2 + \sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 + |\hat{R}^\perp|^2 &\le 4|\mathring{h}|^2|A^-|^2 + 2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2\\
&+ 8|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^-| + \frac{3}{2}|A^-|^4 + \sum_{\alpha,\beta\ge 2}\Big(\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^-|^2\Big).
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{nc_n-1}|A^-|^4 + \frac{nc_n}{nc_n-1}|A^-|^2|\mathring{h}|^2 - 2\sum_{i,j}|\mathring{h}_{ij}A^-_{ij}|^2 - 2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2\\
&\qquad - \sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 - |\hat{R}^\perp|^2\\
&\qquad \ge \left(\frac{1}{nc_n-1} - \frac{3}{2}\right)|A^-|^4 + \left(\frac{nc_n}{nc_n-1} - 4\right)|\mathring{h}|^2|A^-|^2 - 2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2\\
&\qquad - 8|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^-| - \sum_{\alpha,\beta\ge 2}\Big(\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^-|^2\Big).
\end{aligned}
$$

由于 $c_n \le \frac{4}{3n}$，我们有

$$
\frac{1}{nc_n-1} - \frac{3}{2} \ge \frac{3}{2}, \quad \frac{nc_n}{nc_n-1} - 4 \ge 0.
$$

因此，我们有

$$
\begin{aligned}
c_n\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2 - \sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij}, A_{pq}\rangle|^2 - \sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2 &\ge \frac{2}{nc_n-1}f|A^-|^2 + \frac{nc_n}{nc_n-1}f|\mathring{h}|^2\\
&+ \frac{1}{nc_n-1}f^2 + \frac{1}{nc_n-1}d_n\big(|A^-|^2+2f\big) + \frac{nc_n}{nc_n-1}|\mathring{h}|^2d_n - 2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2\\
&- 8|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^-| - \sum_{\alpha,\beta\ge 2}\Big(\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^-|^2\Big)\\
&\ge \frac{2}{nc_n-1}f|A^-|^2 + \frac{nc_n}{nc_n-1}f|\mathring{h}|^2 - 8|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^-|\\
&- \sum_{\alpha,\beta\ge 2}\Big(\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^-|^2\Big) - 2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2. \qquad (5.22)
\end{aligned}
$$

两边同乘 $\frac{|A^-|^2}{f}$，引理得证。 □

结合引理 5.5 和 5.6，我们得到

引理 5.7（反应项估计）。若
$0 < \delta \leq \frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{n} < c_n \leq \frac{4}{3n}$，则

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,p,q} |\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 + |\hat{R}^\perp|^2 + \sum_{i,j} |R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2 \leq (1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f}\Big(c_n \sum_{i,j} |\langle A_{ij}, H\rangle|^2 \\ - \sum_{i,j,p,q} |\langle A_{ij}, A_{pq}\rangle|^2 - \sum_{i,j} |R^\perp_{ij}|^2\Big) \\ + (1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f}\Big(\sum_{\alpha,\beta\geq 2}\Big(\sum_{i,j} |\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^-|^2\Big) \\ + 2\sum_{i,j} |\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 + 8|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^-|\Big). \qquad (5.23)\end{aligned}$$

证明。根据 (5.18) 和 (5.20)，我们有

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,p,q} |\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 + |\hat{R}^\perp|^2 + \sum_{i,j} |R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2 - (1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f}\Big(c_n \sum_{i,j} |\langle A_{ij}, H\rangle|^2 \\ &- \sum_{i,j,p,q} |\langle A_{ij}, A_{pq}\rangle|^2 - \sum_{i,j} |R^\perp_{ij}|^2\Big) \\ &\leq \frac{3}{2}|A^-|^4 + 2|\mathring{h}|^2|A^-|^2 - \frac{2(1-\delta)}{nc_n - 1}|A^-|^4 - \frac{nc_n(1-\delta)}{nc_n-1}|\mathring{h}|^2|A^-|^2 \\ &+ (1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f}\Big(\sum_{\alpha,\beta\geq 2}\Big(\sum_{i,j} |\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^-|^2\Big) \\ &+ 2\sum_{i,j} |\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 + 8|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^-|\Big) \\ &= \left(\frac{3}{2} - \frac{2(1-\delta)}{nc_n-1}\right)|A^-|^4 + \left(2 - \frac{nc_n(1-\delta)}{nc_n-1}\right)|\mathring{h}|^2|A^-|^2 \\ &+ (1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f}\Big(\sum_{\alpha,\beta\geq 2}\Big(\sum_{i,j} |\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2 + 4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^-|^2\Big) + 2\sum_{i,j} |\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2 + 8|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^-|\Big).\end{aligned}$$

如果 $c_n \leq \frac{4}{3n}$，那么

$$\frac{1}{nc_n - 1} \geq 3 \quad \text{and} \quad \frac{nc_n}{nc_n - 1} \geq 4.$$

因此，如果 $\delta \leq \frac{1}{2}$

$$\frac{3}{2} - \frac{2(1-\delta)}{nc_n - 1} \leq \frac{3}{2} - 6(1-\delta) \leq 0,$$

$$2 - \frac{nc_n(1-\delta)}{nc_n - 1} \leq 2 - 4(1-\delta) \leq 0,$$

由此得到 (5.23)。 □

我们沿用 Naff 的论证 [20], ，转而关注梯度项。为此，我们将使用 (2.10)。回想一下，A^-_{jk} 是无迹的，容易验证

$$\sum_{i,j,k} |\nabla_i h_{jk} + \langle \nabla^\perp_i A^-_{jk}, \nu_1 \rangle|^2 = \sum_{i,j,k} |\nabla_i \mathring{h}_{jk} + \langle \nabla^\perp_i A^-_{jk}, \nu_1 \rangle|^2 + \frac{1}{n}|\nabla |H||^2 \tag{5.24}$$

$$\sum_{i,j,k} |\hat{\nabla}^\perp_i A^-_{jk} + h_{jk}\nabla^\perp_i \nu_1|^2 = \sum_{i,j,k} |\hat{\nabla}^\perp_i A^-_{jk} + \mathring{h}_{jk}\nabla^\perp_i \nu_1|^2 + \frac{1}{n}|H|^2|\nabla^\perp \nu_1|^2 \tag{5.25}$$

注意，(5.24) 中的第一项恰好是

$$\sum_{i,j,k} |\langle \nabla^\perp_i \mathring{A}_{jk}, \nu_1 \rangle|^2 = \sum_{i,j,k} |\nabla_i \mathring{h}_{jk} + \langle \nabla^\perp_i A^-_{jk}, \nu_1 \rangle|^2, \tag{5.26}$$

这在后文会很有用。现在，如 [9], 中所述，利用引理 2.3，由第二基本形式的 Codazzi 恒等式可知，张量

$$\begin{aligned} E_{ijk} =& \frac{1}{n+2}\left(\nabla^\perp_i H g_{jk} + \nabla^\perp_j H g_{ik} + \nabla^\perp_k H g_{ij}\right) \\ & - \frac{2}{(n+2)(n-1)} w_i g_{jk} + \frac{n}{(n+2)(n-1)}\left(w_j g_{ik} + w_k g_{ij}\right) \end{aligned}$$

是 $\nabla^\perp_i A_{jk}$ 的一个不可约分量，由它的各种迹组成。换言之，$\langle E_{ijk},\ \nabla^\perp_i A_{jk}\rangle = |E|^2$。这使我们能够得到比平凡估计更精细的估计。具体而言，

$$|E|^2 = \frac{3}{n+2}|\nabla^\perp H|^2 \leq |\nabla^\perp A|^2.$$

将 Codazzi 恒等式投影到 ν_1 及其正交补上，可知张量 $\nabla_i h_{jk} + \langle \nabla^\perp_i A^-_{jk}$、 $\nu_1\rangle$ 和 ˆ $\nabla^\perp_i A^-_{jk} + h_{jk}\nabla^\perp_i \nu_1$ 关于 i、 j、 k是对称的。回顾 (2.11) 和 (2.12)，可得每个张量的一个不可约分量为

$$E^{(1)}_{ijk} := \frac{1}{n+2}(g_{ij}\nabla_k |H| + g_{jk}\nabla_i |H| + g_{ki}\nabla_j |H|),$$

$$E^{(\perp)}_{ijk} := \frac{1}{n+2}(g_{ij}|H|\nabla^{\perp}_k\nu_1 + g_{jk}|H|\nabla^{\perp}_i\nu_1 + g_{ki}|H|\nabla^{\perp}_j\nu_1).$$

不难验证， $E^{(1)}_{ijk}(\nabla_i h_{jk} + \langle\nabla^{\perp}_i A^-_{jk}, \nu_1\rangle) = |E^{(1)}|^2$ 和 $\sum_{i,\ j,\ k}\langle E^{(\perp)}_{ijk}$ 、 $\nabla^{\perp}_i A^-_{jk} + h_{jk}\nabla^{\perp}_i\nu_1\rangle = |E^{(\perp)}|^2$。如引理 2.3 中一样，我们得到

$$\frac{3}{n+2}|\nabla|H||^2 \le \sum_{i,j,k}|\nabla_i h_{jk} + \langle\nabla^{\perp}_i A^-_{jk}, \nu_1\rangle|^2,$$

$$\frac{3}{n+2}|H|^2|\nabla^{\perp}\nu_1|^2 \le \sum_{i,j,k}|\hat{\nabla}^{\perp}_i A^-_{jk} + h_{jk}\nabla^{\perp}_i\nu_1|^2. \tag{5.27}$$

由定理 3.1 和 (2.6)，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(4\sum_{i,j,p,q}\bar{R}_{ipjq}\big(\sum_{\alpha}A^{\alpha}_{pq}A^{\alpha}_{ij}\big) - 4\sum_{j,k,p}\bar{R}_{kjkp}\big(\sum_{i,\alpha}A^{\alpha}_{pi}A^{\alpha}_{ij}\big) + 2\sum_{k,\alpha,\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\big(\sum_{i,j}A^{\alpha}_{ij}A^{\beta}_{ij}\big)\Big)\\
&+\frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(-8\sum_{j,p,\alpha,\beta}\bar{R}_{jp\alpha\beta}\big(\sum_{i}A^{\alpha}_{ip}A^{\beta}_{ij}\big) + 2\sum_{i,j,k,\beta}\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}A^{\beta}_{ij} - 2\sum_{i,j,k,\beta}\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}A^{\beta}_{ij}\Big)\\
&< C_1\frac{|A^-|^2}{f^2}(|A| + |A|^2)\\
&\le C_2\frac{|A^-|^2}{f},
\end{aligned}$$

其中我们使用了括号中的量除以 f 有界这一事实，并且 C_1 和 C_2 是常数，它们依赖于 n、K_1、K_2 和 d_n。此外，由 (2.6)，我们有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{f}\Big(4\sum_{i,j,p,q}\bar{R}_{ipjq}\big(\sum_{\alpha\ge 2}A^{\alpha}_{pq}A^{\alpha}_{ij}\big) - 4\sum_{j,k,p}\bar{R}_{kjkp}\big(\sum_{i,\alpha\ge 2}A^{\alpha}_{pi}A^{\alpha}_{ij}\big)\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{k,\alpha,\beta\ge 2}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\big(\sum_{i,j}A^{\alpha}_{ij}A^{\beta}_{ij}\big) - 8\sum_{j,p,\alpha,\beta\ge 2}\bar{R}_{jp\alpha\beta}\big(\sum_{i}A^{\alpha}_{ip}A^{\beta}_{ij}\big)\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(2|H|^{-2}\sum_{i,j,k,\alpha,\beta\ge 2}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^{\alpha}A^{\beta}_{ij}\langle A_{ij}, H\rangle\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j,k,\beta\ge 2}\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}A^{\beta}_{ij} - 2\sum_{i,j,k,\beta\ge 2}\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}A^{\beta}_{ij}\Big)\\
&\le C_3\frac{1}{f}\Big(|A^-|^2 + |A^-||A| + |A^-||h| + |A^-|\Big)\\
&\le C_4\frac{|A^-|^2}{f} + C''\frac{|A^-|}{\sqrt{f}},
\end{aligned}$$

这里用到了括号中的量除以 $\sqrt{f}$ 后有界这一事实，并且 C_3、C_4 和 C'' 是常数，它们取决于 n、K_1、K_2 和 d_n。根据前面的计算

我们已经得到了大多数项的上界。接下来将证明其余梯度项满足以下条件:

$$4\sum_{i,j,k} Q_{ijk}\left\langle A^-_{ij}, \nabla^\perp_k \nu_1\right\rangle \le 2|\nabla^\perp A^-|^2 + 2(1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f}\left(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2\right).$$

引理 5.8（$(\partial_t - \Delta)$ 的 Bochner 项下界）。

1. 若 $\frac{1}{n} < c_n \le \frac{4}{3n}$，则

$$2|\hat{\nabla}^\perp A^-|^2 \ge \frac{4n-10}{n+2}|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2 + \frac{6(n-1)}{n+2}(|A^-|^2 + f + d_n)|\nabla^\perp\nu_1|^2.$$

2. 若 $\frac{1}{n} < c_n \le \frac{3}{(n+1)\ 2n(n+2)}$，则

$$2|\hat{\nabla}^\perp A^-|^2 \ge 2|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2 + 4(|A^-|^2 + f + d_n)|\nabla^\perp\nu_1|^2.$$

证明。我们先应用杨氏不等式

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}|\hat{\nabla}^\perp_i A^-_{jk} + \mathring{h}_{jk}\nabla^\perp_i\nu_1|^2 &= |\hat{\nabla}^\perp A^-|^2 + 2\sum_{i,j,k}\langle\hat{\nabla}^\perp_i A^-_{jk}, \mathring{h}_{jk}\nabla^\perp_i\nu_1\rangle + |\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2\\ &\le 2|\hat{\nabla}^\perp A^-|^2 + 2|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2.\end{aligned}$$

将 (5.19) 两边乘以 $\frac{2}{(n-1)\ (n+2)(nc_n-1)}$，得到

$$\frac{2(n-1)}{n(n+2)}|H|^2 = \frac{2(n-1)}{(n+2)\,(nc_n-1)}\left(f + |A^-|^2 + |\mathring{h}|^2 + d_n\right).$$

由于

$$\frac{2(n-1)}{n(n+2)}|H|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2 \le \sum_{i,j,k}|\hat{\nabla}^\perp_i A^-_{jk} + \mathring{h}_{jk}\nabla^\perp_i\nu_1|^2, \tag{5.28}$$

我们的观察结果表明

$$\frac{2(n-1)}{(n+2)\,(nc_n-1)}\left(f + |A^-|^2 + |\mathring{h}|^2 + d_n\right)|\nabla^\perp\nu_1|^2 \le 2|\hat{\nabla}^\perp A^-|^2 + 2|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2.$$

从等式右侧减去 $|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2$ 项，得到

$$\begin{aligned}\frac{2(n-1)}{(n+2)\,(nc_n-1)}\left(f + |A^-|^2 + d_n\right)|\nabla^\perp\nu_1|^2 + \left(\frac{2(n-1)}{(n+2)\,(nc_n-1)} - 2\right)|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2\\ \le 2|\hat{\nabla}^\perp A^-|^2.\end{aligned} \tag{5.29}$$

若 $c_n \leq \frac{4}{3n}$，则 $nc_n - 1 \leq \frac{1}{3}$ 且

$$\frac{2(n-1)}{(n+2)(nc_n-1)} \geq \frac{6(n-1)}{n+2}.$$

将其代入 (5.29)，得到引理的第一个估计。若 $c_n \leq {}^{3}_{(n+1)\ 2n(n+2)}$，则$nc_n - \underline{1 \leq \frac{n-1}{2\ n+2()}}$ 且

$$\frac{2(n-1)}{(n+2)(nc_n-1)} \geq 4.$$

将其代入 (5.29)，即可得到引理中的第二个估计。 □

引理 5.9（$(\partial_t - \Delta)\ f$ 的 Bochner 项下界）。

1. 若 $\frac{1}{n} < c_n \leq \frac{4}{3n}$，则

$$2\frac{|A^-|^2}{f}\left(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2\right) \geq \frac{5n-8}{3(n-1)}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp \mathring{A}, \nu_1\rangle|^2 + \frac{10n-16}{n+2}|A^-|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2.$$

2. 如果 $\frac{1}{n} < c_n \leq {}^{3}_{(n+1)\ \underline{2n(n+2)}}$，那么

$$2\frac{|A^-|^2}{f}\left(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2\right) \geq \frac{3}{2}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp \mathring{A}, \nu_1\rangle|^2 + 6|A^-|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2.$$

证明。利用

$$|\nabla^\perp A|^2 = \sum_{i,j,k}|\hat{\nabla}^\perp_i A^-_{jk} + h_{jk}\nabla^\perp_i\nu_1|^2 + \sum_{i,j,k}|\langle\nabla^\perp_i A^-_{jk}, \nu_1\rangle + \nabla_i h_{jk}|^2$$

and

$$|\nabla^\perp H|^2 = |H|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2 + |\nabla|H||^2, \tag{5.30}$$

我们有

$$\begin{aligned}|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2 = &\sum_{i,j,k}|\langle\nabla^\perp_i A^-_{jk}, \nu_1\rangle + \nabla_i h_{jk}|^2 - c_n|\nabla|H||^2 \\ &+ \sum_{i,j,k}|\hat{\nabla}^\perp_i A^-_{jk} + h_{jk}\nabla^\perp_i\nu_1|^2 - c_n|H|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2.\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{i,j,k}|\nabla_i h_{jk} + \langle\nabla^\perp_i A^-_{jk}, \nu_1\rangle|^2 = \sum_{i,j,k}|\nabla_i \mathring{h}_{jk} + \langle\nabla^\perp_i A^-_{jk}, \nu_1\rangle|^2 + \frac{1}{n}|\nabla|H||^2$$

and

$$\sum_{i,j,k}|\langle\nabla_i^\perp\mathring{A}_{jk},\nu_1\rangle|^2=\sum_{i,j,k}|\nabla_i\mathring{h}_{jk}+\langle\nabla_i^\perp A^-_{jk},\nu_1\rangle|^2.$$

此外，由于

$$\frac{2(n-1)}{n(n+2)}|\nabla|H||^2\leq\sum_{i,j,k}|\langle\nabla_i^\perp\mathring{A}_{jk},\nu_1\rangle|^2,$$

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}|\langle\nabla_i^\perp A^-_{jk},\nu_1\rangle+\nabla_i h_{jk}|^2-c_n|\nabla|H||^2&=\sum_{i,j,k}|\langle\nabla_i^\perp\mathring{A}_{jk},\nu_1)|^2-\frac{nc_n-1}{n}|\nabla|H||^2\\&\geq\left(1-\frac{(n+2)\,(nc_n-1)}{2(n-1)}\right)\sum_{i,j,k}|\langle\nabla_i^\perp\mathring{A}_{jk},\nu_1\rangle|^2.\end{aligned}$$

由 (5.19) 和 (5.27) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}|\hat{\nabla}_i^\perp A^-_{jk}+h_{jk}\nabla_i^\perp\nu_1|^2-c_n|H|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2&\geq\left(\frac{3}{n+2}-c_n\right)|H|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2\\&=\frac{n}{nc_n-1}\left(\frac{3}{n+2}-c_n\right)(f+|A^-|^2+|\mathring{h}|^2+d_n)|\nabla^\perp\nu_1|^2\\&\geq\frac{n}{nc_n-1}\left(\frac{3}{n+2}-c_n\right)f|\nabla^\perp\nu_1|^2.\end{aligned}$$

因此，根据前面的三次计算，我们有

$$\begin{aligned}2\frac{|A^-|^2}{f}\left(|\nabla^\perp A|^2-c_n|\nabla^\perp H|^2\right)&\geq\left(2-\frac{(n+2)\,(nc_n-1)}{n-1}\right)\frac{|A^-|^2}{f}\sum_{i,j,k}|\langle\nabla_i^\perp\mathring{A}_{jk},\nu_1\rangle|^2\\&\quad+\frac{2n}{nc_n-1}\left(\frac{3}{n+2}-c_n\right)|A^-|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2.\end{aligned}$$

若 $c_n\leq\frac{4}{3n}$，则 $nc_n-1\leq\frac{1}{3}$ 且

$$\begin{aligned}2-\frac{(n+2)\,(nc_n-1)}{n-1}&\geq2-\frac{n+2}{3(n-1)}=\frac{5n-8}{3(n-1)},\\\frac{2n}{nc_n-1}\left(\frac{3}{n+2}-c_n\right)&\geq6n\left(\frac{9n-4(n+2)}{3n(n+2)}\right)=\frac{10n-16}{n+2}.\end{aligned}$$

这就证明了引理中的第一个不等式。若 $c_n\leq\,^{3}_{(n+1)\,2n(n+2)}$，则 $nc_n-1\leq\frac{n-1}{2\,n+2()}$ 且

$$\begin{aligned}2-\frac{(n+2)\,(nc_n-1)}{n-1}&\geq2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\\\frac{2n}{nc_n-1}\left(\frac{3}{n+2}-c_n\right)&\geq\frac{4n(n+2)}{n-1}\left(\frac{6n-3(n+1)}{2n(n+2)}\right)=6.\end{aligned}$$

这就证明了该引理中的第二个不等式。 □

引理 5.10（$(\partial_t-\Delta)|A^-|^2$ 的梯度项的上界）。

1. 若 $\frac{1}{n}<c_n\le\frac{4}{3n}$，则

$$4\sum_{i,j,k}Q_{ijk}\langle A^-_{ij},\nabla^\perp_k\nu_1\rangle\le 2|\langle\nabla^\perp A^-,\nu_1\rangle|^2+\frac{5n-9}{3(n-1)}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp\mathring{A},\nu_1\rangle|^2$$
$$+2|A^-|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2+\frac{3(n-1)}{n-3}f|\nabla^\perp\nu_1|^2+\frac{2(n+2)}{n+3}|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2.$$

2. 若 $\frac{1}{n}<c_n\le\frac{3}{(n+1)}\frac{2n}{(n+2)}-\varepsilon_0$ 且 $\varepsilon=\frac{2n}{(n+2)}\frac{3}{(n-1)}-\varepsilon_0$，则

$$4\sum_{i,j,k}Q_{ijk}\langle A^-_{ij},\nabla^\perp_k\nu_1\rangle\le 2|\langle\nabla^\perp A^-,\nu_1\rangle|^2+(1-\varepsilon)\frac{3}{2}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp\mathring{A},\nu_1\rangle|^2$$
$$+2|A^-|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2+4f|\nabla^\perp\nu_1|^2+2|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2.$$

证明。根据 Q_{ijk}的定义，我们得到

$$|Q|\le|\langle\nabla^\perp\mathring{A},\nu_1\rangle|+|\langle\nabla^\perp A^-,\nu_1\rangle|+|H|^{-1}|\mathring{h}||\nabla|H||\tag{5.31}$$

我们先讨论情形 $\frac{1}{n}<c_n\le\frac{4}{3n}$。由 f 的定义可直接得到

$$f\le\left(c_n-\frac{1}{n}\right)|H|^2\le\frac{1}{3n}|H|^2.$$

因此，利用估计

$$\frac{2(n-1)}{n(n+2)}|\nabla|H||^2\le\sum_{i,j,k}|\langle\nabla^\perp_i\mathring{A}_{jk},\nu_1\rangle|^2\tag{5.32}$$

我们得到

$$\frac{|A^-|^2}{|H|^2}|\nabla|H||^2\le\frac{n(n+2)}{2(n-1)}\frac{1}{3n}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp\mathring{A},\nu_1\rangle|^2=\frac{n+2}{6(n-1)}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp\mathring{A},\nu_1\rangle|^2.\tag{5.33}$$

Then

$$|\langle A^-,\nabla^\perp\nu_1\rangle|^2=\sum_{i,j}\langle A^-_{ij},\nabla^\perp_i\nu_1\rangle^2\le\sum_{i,j,k}\sum_{\beta\ge2}(A^\beta_{ij})^2\langle\nabla^\perp_k\nu_1,\nu_\beta\rangle^2$$

以及（5.31）给出

$$4\sum_{i,j,k}Q_{ijk}\langle A^-_{ij},\nabla^\perp_k\nu_1\rangle\le 4|Q||\langle A^-,\nabla^\perp\nu_1\rangle|$$
$$\le 4\left(|\langle\nabla^\perp\mathring{A},\nu_1\rangle|+|\langle\nabla^\perp A^-,\nu_1\rangle|+|H|^{-1}|\mathring{h}|\nabla|H||\right)|A^-||\nabla^\perp\nu_1|.$$

现在，我们对上述三个求和项分别应用常数为a_1、 a_2、 $a_3 > 0$的杨氏不等式。具体而言，我们有

$$\begin{aligned}
4|\langle\nabla^\perp A^-,\nu_1\rangle||A^-||\nabla^\perp\nu_1| &\le 2a_1|\langle\nabla^\perp A^-,\nu_1\rangle|^2+\frac{2}{a_1}|A^-|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2,\\
4|\langle\nabla^\perp \mathring{A},\nu_1\rangle||A^-||\nabla^\perp\nu_1| &= 4|\langle\nabla^\perp \mathring{A},\nu_1\rangle|\frac{|A^-|}{\sqrt{f}}f^{\frac12}|\nabla^\perp\nu_1|\\
&\le 2a_2\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp \mathring{A},\nu_1\rangle|^2+\frac{2}{a_2}f|\nabla^\perp\nu_1|^2,\\
4|H|^{-1}|\mathring{h}||\nabla|H|||A^-||\nabla^\perp\nu_1| &\le 2a_3\frac{|A^-|^2}{|H|^2}\,|\nabla|H||^2+\frac{2}{a_3}|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2\\
&\le 2a_3\frac{n+2}{6(n-1)}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp \mathring{A},\nu_1\rangle|^2+\frac{2}{a_3}|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2.
\end{aligned}$$

注意，我们在最后一个不等式中使用了 (5.33)。因此

$$\begin{aligned}
4\sum_{i,j,k}Q_{ijk}\langle A^-_{ij},\nabla^\perp_k\nu_1\rangle &\le 2a_1|\langle\nabla^\perp A^-,\nu_1\rangle|^2+\left(2a_2+2a_3\frac{n+2}{6(n-1)}\right)\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp \mathring{A},\nu_1\rangle|^2\\
&\quad+\frac{2}{a_1}|A^-|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2+\frac{2}{a_2}f|\nabla^\perp\nu_1|^2+\frac{2}{a_3}|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2. \qquad (5.34)
\end{aligned}$$

现在令

$$a_1=1,\quad a_2=\frac{2(n-3)}{3(n-1)},\quad a_3=\frac{n+3}{n+2}.$$

在这种情形下，

$$\begin{aligned}
2a_2+2a_3\frac{n+2}{6(n-1)}=\frac{4(n-3)}{3(n-1)}+\frac{n+3}{n+2}\frac{n+2}{3(n-1)}&=\frac{5n-9}{3(n-1)},\\
\frac{2}{a_2}&=\frac{3(n-1)}{n-3},\\
\frac{2}{a_3}&=\frac{2(n+2)}{n+3}.
\end{aligned}$$

将这些代入 (5.34)，即可得到所声称的第一个不等式。现在，如果 $\frac{1}{n} < c_n \le \frac{3(n+1)}{2n(n+2)} - \varepsilon_0$，那么 $c_n-\frac{1}{n}\le \frac{2n^{n-1}}{(n+2)}-\varepsilon_0$。因此，如果我们取 $\varepsilon=\frac{2n}{(n+2)\,3(n-1)}\,\varepsilon_0$，那么

$$c_n-\frac{1}{n}\le(1-3\varepsilon)\frac{n-1}{2n(n+2)}.$$

在这种情形下，

$$f\le\left(c_n-\frac{1}{n}\right)|H|^2\le(1-3\varepsilon)\frac{n-1}{2n(n+2)}|H|^2.$$

再次利用 f 的定义，可得

$$\begin{aligned}\frac{|A^-|^2}{|H|^2}|\nabla|H||^2 &\le (1-3\varepsilon)\frac{n(n+2)}{2(n-1)}\frac{n-1}{2n(n+2)}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp \mathring{A},\nu_1\rangle|^2\\ &= \frac{1}{4}(1-3\varepsilon)\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp \mathring{A},\nu_1\rangle|^2.\end{aligned}$$

按照前面的方法进行推导，我们得到不等式

$$\begin{aligned}4\sum_{i,j,k}Q_{ijk}\langle A^-_{ij},\nabla^\perp_k\nu_1\rangle &\le 2a_1|\langle\nabla^\perp A^-,\nu_1\rangle|^2+\left(2a_2+\frac{1}{2}a_3(1-3\varepsilon)\right)\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp \mathring{A},\nu_1\rangle|^2\\ &\quad+\frac{2}{a_1}|A^-|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2+\frac{2}{a_2}f|\nabla^\perp\nu_1|^2+\frac{2}{a_3}|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2. \qquad (5.35)\end{aligned}$$

Set

$$a_1=1,\quad a_2=\frac{1}{2},\quad a_3=1.$$

在这种情形下，

$$\begin{aligned}2a_2+\frac{1}{2}a_3(1-3\varepsilon)&=\frac{3}{2}(1-\varepsilon),\\ \frac{2}{a_2}&=4,\\ \frac{2}{a_3}&=2.\end{aligned}$$

将这些结果代入 (5.35)，即可得到所述的第二个不等式。 □

最后，综合引理 5.8、5.9 和 5.10 的结论，我们得到以下结果。

引理 5.11（梯度项估计）。
假设要么 $n\ge 8$、$\frac{1}{n}<c_n\le\frac{4}{3n}$ 和 $0<\delta\le\frac{1}{5n-8}$，要么 $\frac{1}{n}<c_n\le\frac{3}{2n}$ $-\varepsilon_0$，并且$0<\delta\le\min\left\{\frac{1}{2},\frac{2n}{3}\varepsilon_0\right\}$。那么在这两种情形下，

$$4\sum_{i,j,k}Q_{ijk}\langle A^-_{ij},\nabla^\perp_k\nu_1\rangle\le 2|\nabla^\perp A^-|^2+2(1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f}\left(|\nabla^\perp A|^2-c_n|\nabla^\perp H|^2\right).$$

证明。 首先，假设 $n\ge 8$、$\frac{1}{n}<c_n\le\frac{4}{3n}$ 和 $0<\delta\le\frac{1}{5n-8}$。展开 $|\nabla^\perp A^-|^2$ 并使用

$$|\nabla^\perp A^-|^2=|\hat{\nabla}^\perp A^-|^2+|\langle\nabla^\perp A^-,\nu_1\rangle|^2 \qquad (5.36)$$

并利用引理 5.8 中的不等式 (5.30)，可得

$$\begin{aligned}2|\nabla^\perp A^-|^2 &= 2|\hat{\nabla}^\perp A^-|^2 + 2|\langle \nabla^\perp A^-, \nu_1\rangle|^2 \\ &\geq 2|\langle \nabla^\perp A^-, \nu_1\rangle|^2 + \frac{4n-10}{n+2}|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp \nu_1|^2 + \frac{6(n-1)}{n+2}(|A^-|^2 + f + d_n)|\nabla^\perp \nu_1|^2.\end{aligned}$$

将引理 5.9 中的第一个结果乘以 $(1-\delta)$，并利用 $1-\delta \geq \frac{1}{2}$ 对 $|A^-|^2|\nabla^\perp \nu_1|^2$ 的系数，有

$$\begin{aligned}2(1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f}\big(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2\big) \geq (1-\delta)\frac{5n-8}{3(n-1)}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle \nabla^\perp \mathring{A}, \nu_1\rangle|^2 \\ + \frac{5n-8}{n+2}|A^-|^2|\nabla^\perp \nu_1|^2.\end{aligned}$$

将这些结果结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}2|\nabla^\perp A^-|^2 + 2(1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f}\left(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2\right) &\geq 2|\langle \nabla^\perp A^-, \nu_1\rangle|^2 \\ + (1-\delta)\frac{5n-8}{3(n-1)}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle \nabla^\perp \mathring{A}, \nu_1\rangle|^2 + \frac{11n-14}{n+2}|A^-|^2|\nabla^\perp \nu_1|^2 \\ + \frac{6(n-1)}{n+2}(f+d_n)|\nabla^\perp \nu_1|^2 + \frac{4n-10}{n+2}|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp \nu_1|^2.\end{aligned}$$

另一方面，引理 5.10 的第一个结果给出

$$\begin{aligned}4\sum_{i,j,k} Q_{ijk}\langle A^-_{ij}, \nabla^\perp_k \nu_1\rangle \leq 2|\langle \nabla^\perp A^-, \nu_1\rangle|^2 + \frac{5n-9}{3(n-1)}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle \nabla^\perp \mathring{A}, \nu_1\rangle|^2 \\ + 2|A^-|^2|\nabla^\perp \nu_1|^2 + \frac{3(n-1)}{n-3}f|\nabla^\perp \nu_1|^2 + \frac{2(n+2)}{n+3}|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp \nu_1|^2.\end{aligned}$$

因此，只需比较上述两个不等式中同类项的系数。对于 $\frac{|A^-|^2}{f}|\langle \nabla^\perp \mathring{A}$、$\nu_1\rangle|^2$ 的系数，我们需要

$$\frac{5n-9}{3(n-1)} \leq (1-\delta)\frac{5n-8}{3(n-1)} \Longleftrightarrow \delta \leq \frac{1}{5n-8}.$$

比较其余项的系数可知，我们需要

$$2n+4 \leq 11n-14 \Longleftrightarrow 2 \leq n,$$

$$n+2 \leq 2(n-3) \Longleftrightarrow 8 \leq n$$

and

$$2(n+2)^2 \leq (4n-10)(n+3) \Longleftrightarrow 19 \leq n(n-3).$$

如果 $n \geq 8$，则上述每个不等式都成立，从而完成第一种情形的证明。现在假设 $\frac{1}{n} < c_n < \frac{3}{(n+1)2n(n+2)}$ 且 $0 < \delta < \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{2n}{(n+2)3(n-1)}\varepsilon_0\right\}$。像之前一样推理，这次使用引理 5.8 和引理 5.9 中的第二个结果，可得

$$\begin{aligned}2\left|\nabla^\perp A^-\right|^2 + 2(1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f}\left(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2\right) &\geq 2|\langle\nabla^\perp A^-, \nu_1\rangle|^2 \\ &+ (1-\delta)\frac{3}{2}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp \mathring{A}, \nu_1\rangle|^2 + 7|A^-|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2 + 4(f+d_n)|\nabla^\perp\nu_1|^2 \\ &+ 2|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2.\end{aligned}$$

注意，我们再次使用了$\delta \leq \frac{1}{2}$ 来简化 $|A^-|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2$的系数。另一方面，根据引理 5.10 的第二个结果，我们有

$$\begin{aligned}4\sum_{i,j,k} Q_{ijk}\langle A^-_{ij}, \nabla^\perp_k\nu_1\rangle &\leq 2|\langle\nabla^\perp A^-, \nu_1\rangle|^2 + (1-\delta)\frac{3}{2}\frac{|A^-|^2}{f}|\langle\nabla^\perp\mathring{A}, \nu_1\rangle|^2 + f|A^-|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2 \\ &+ 4(f+d_n)|\nabla^\perp\nu_1|^2 + 2|\mathring{h}|^2|\nabla^\perp\nu_1|^2 \\ &\leq 2|\nabla^\perp A^-|^2 + 2(1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f}\big(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2\big),\end{aligned}$$

其中回顾一下，$\varepsilon = \frac{2n}{(n+2)3(n-1)}\varepsilon_0$。利用假设 $\delta \leq \varepsilon$，这就完成了引理在第二种情形下的证明。□

我们完成定理 5.1 的证明。取 δ 充分小，使得上述每一步计算均成立。我们首先在演化方程中分离出所需的非正项。

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f} &= \frac{1}{f}\Big(\partial_t - \Delta\Big)|A^-|^2 - |A^-|^2\frac{1}{f^2}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f + 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f}, \nabla\log f\Big\rangle \\ &= 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f}, \nabla\log f\Big\rangle - \delta\frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f \\ &+ \frac{1}{f}\Big(\partial_t - \Delta\Big)|A^-|^2 - (1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f.\end{aligned}$$

利用前面的计算，第二行各项之和非正：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{f}\Big(\partial_t - \Delta\Big)|A^-|^2 - (1-\delta)\frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f \\ &\quad= \frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 + 2|\hat{R}^\perp|^2 + 2\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}(\nu_1)|^2\Big) \\ &\quad+ \frac{1}{f}\Big(4\sum_{i,j,p,q}\bar{R}_{ipjq}\Big(\sum_{\alpha\geq 2}A^\alpha_{pq}A^\alpha_{ij}\Big) - 4\sum_{j,k,p}\bar{R}_{kjkp}\Big(\sum_{i,\alpha\geq 2}A^\alpha_{pi}A^\alpha_{ij}\Big)\Big) \\ &\quad+ \frac{1}{f}\Big(2\sum_{k,\alpha,\beta\geq 2}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\Big(\sum_{i,j}A^\alpha_{ij}A^\beta_{ij}\Big) - 8\sum_{j,p,\alpha,\beta\geq 2}\bar{R}_{jp\alpha\beta}\Big(\sum_i A^\alpha_{ip}A^\beta_{ij}\Big)\Big)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{f}\Big(2|H|^{-2}\sum_{i,j,k,\alpha,\beta\geq 2}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^{\alpha}A^{\beta}_{ij}\langle A_{ij},H\rangle+2\sum_{i,j,k,\beta\geq 2}\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}A^{\beta}_{ij}-2\sum_{i,j,k,\beta\geq 2}\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}A^{\beta}_{ij}\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+4\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^{-}_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^{-}_{ip}\rangle\Big)\\
&+\frac{1}{f}\Big(4\sum_{i,j,k}Q_{ijk}\langle A^{-}_{ij},\nabla^{\perp}_k\nu_1\rangle-2|\nabla^{\perp}A^{-}|^2-2(1-\delta)\frac{|A^{-}|^2}{f}\big(|\nabla^{\perp}A|^2-c_n|\nabla^{\perp}H|^2\big)\Big)\\
&-(1-\delta)\Big(-2\frac{|A^{-}|^2}{f^2}\Big(c_n\sum_{i,j}|\langle A_{ij},H\rangle|^2-\sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij},A_{pq}\rangle|^2-\sum_{i,j}|R^{\perp}_{ij}|^2\Big)\\
&+\frac{|A^{-}|^2}{f^2}\big(4\sum_{i,j,p,q}\bar{R}_{ipjq}\big(\sum_{\alpha}A^{\alpha}_{pq}A^{\alpha}_{ij}\big)-4\sum_{j,k,p}\bar{R}_{kjkp}\big(\sum_{i,\alpha}A^{\alpha}_{pi}A^{\alpha}_{ij}\big)-2\sum_{k}\bar{R}_{k1k1}\sum_{i,j}(A^{1}_{ij})^2\big)\\
&+\frac{|A^{-}|^2}{f^2}\big(2\sum_{k,\alpha,\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}\big(\sum_{i,j}A^{\alpha}_{ij}A^{\beta}_{ij}\big)+4c_n\sum_{k,\alpha,\beta}\bar{R}_{k\alpha k\beta}H^{\alpha}H^{\beta}-8\sum_{j,p,\alpha,\beta}\bar{R}_{jp\alpha\beta}\big(\sum_{i}A^{\alpha}_{ip}A^{\beta}_{ij}\big)\big)\\
&+\frac{|A^{-}|^2}{f^2}\big(2\sum_{i,j,k,\beta}\bar{\nabla}_k\bar{R}_{kij\beta}A^{\beta}_{ij}-2\sum_{i,j,k,\beta}\bar{\nabla}_i\bar{R}_{jkk\beta}A^{\beta}_{ij}\big)\Big)\\
&\leq(1-\delta)\frac{|A^{-}|^2}{f^2}\Big(\sum_{\alpha,\beta\geq 2}\Big(\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2+4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^{-}|^2\Big)+2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+8|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^{-}|\Big)\\
&+C\frac{|A^{-}|^2}{f}+C''\frac{|A^{-}|}{\sqrt{f}}+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+4\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^{-}_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^{-}_{ip}\rangle\Big),
\end{aligned}
$$

其中 C、C'' 是依赖于 n、K_1、K_2 和 d_n 的常数。重复前面的同样估计，我们可以看到

$$
\begin{aligned}
&(1-\delta)\frac{|A^{-}|^2}{f^2}\Big(\sum_{\alpha,\beta\geq 2}\Big(\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2+4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}||A^{-}|^2\Big)+2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+8|\bar{R}_{ij}(\nu_1)||\mathring{h}||A^{-}|\Big)\\
&+C\frac{|A^{-}|^2}{f}+C''\frac{|A^{-}|}{\sqrt{f}}+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+4\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^{-}_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^{-}_{ip}\rangle\Big)\\
&=(1-\delta)\frac{|A^{-}|^2}{f}\Big(\sum_{\alpha,\beta\geq 2}\Big(\frac{\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|^2}{f}+4|\bar{R}_{ij\alpha\beta}|\frac{|A^{-}|^2}{f}\Big)+2\frac{\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2}{f}+8|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|\frac{|\mathring{h}|}{\sqrt{f}}\frac{|A^{-}|}{\sqrt{f}}\Big)\\
&+C\frac{|A^{-}|^2}{f}+C''\frac{|A^{-}|}{\sqrt{f}}+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+4\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^{-}_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^{-}_{ip}\rangle\Big)\\
&\leq C'\frac{|A^{-}|^2}{f}+C''\frac{|A^{-}|}{\sqrt{f}}+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+4\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^{-}_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^{-}_{ip}\rangle\Big),
\end{aligned}
$$

最后一行的最后一项有上界。因此，根据前面的计算，我们得到（5.11），这正是我们最初的论断：

$$
\Big(\partial_t-\Delta\Big)\frac{|A^{-}|^2}{f}\leq 2\Big\langle\nabla\frac{|A^{-}|^2}{f},\nabla\log f\Big\rangle-\delta\frac{|A^{-}|^2}{f^2}\Big(\partial_t-\Delta\Big)f+C'\frac{|A^{-}|^2}{f}+C''\frac{|A^{-}|}{\sqrt{f}}
$$

$$+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+4\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^-_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^-_{ip}\rangle\Big).$$

回顾一下，$\Big(\partial_t-\Delta\Big)f$ 在时空中的每一点都非负。

Now,

$$\begin{aligned}\frac{1}{f}\Big(\partial_t-\Delta\Big)|A^-|^2-\frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(\partial_t-\Delta\Big)f&=\Big(\partial_t-\Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f}-2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f},\nabla\log f\Big\rangle\\&\le-\delta\frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(\partial_t-\Delta\Big)f+C'\frac{|A^-|^2}{f}+C''\frac{|A^-|}{\sqrt{f}}\\&+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+4\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^-_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^-_{ip}\rangle\Big).\end{aligned}$$

现在我们可以证明本文的主要定理了。

定理 5.12. 设 $F\colon\mathcal{M}^n\times[0,T)\to\mathcal{N}^{n+m}$ 是平均曲率流的一个光滑解，使得 $F_0(p)=F(p,0)$ 是紧致且二次挤压的。那么 $\forall\varepsilon>0,\exists H_0>0$，使得若 $f\ge H_0$，则

$$\big|A^-\big|^2\le\varepsilon f+C_\varepsilon$$

$\forall t\in[0,T)$ 其中 $C_\varepsilon=C_\varepsilon(n,m)$.

证明. 由于 $\mathcal{M}$ 是二次有界的，存在常数 C,D 使得

$$|A^-|^2\le Cf+D.$$

因此，上述估计对所有 $\varepsilon\ge\frac{c_n}{\delta}$都成立。事实上，根据夹逼条件 $|A|^2\le c_n|H|^2-d_n$，我们可以稍微留出更大的余量，使得

$$|A^-|^2+|A^+|^2=|A|^2\le(c_n-\delta)|H|^2-C_\delta-d_n$$

因此,

$$\delta|H|^2\le c_n|H|^2-|A|^2-d_n.$$

但由于 $|A^-|^2\le|A|^2\le c_n|H|^2$，我们有 $\frac{\delta|A^-|^2}{c_n}\le\frac{\delta|A|^2}{c_n}\le\delta|H|^2$，因此

$$\frac{\delta}{c_n}|A^-|^2\le c_n|H|^2-d_n-|A|^2=f,$$

这意味着$|A^-|^2\le\frac{c_n}{\delta}f\le\varepsilon f+C_\varepsilon$。因此，令 ε_0 表示使该估计成立的所有 ε 的下确界，并假设 $\varepsilon_0>0$。我们将通过矛盾来证明该定理。

因此，假设该定理的结论不成立，也就是说，存在一族平均曲率流 $\mathcal{M}_t^k$，其上有点 (p_k, t_k)，使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|A_k^-(p_k,t_k)|^2}{f_k(p_k,t_k)} = \varepsilon_0 \tag{5.37}$$

其中 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $f_k(p_k, t_k) \to \infty$。我们对 $\mathcal{M}_t^k$ 进行抛物缩放，使得 f_k 在 (p_k, t_k) 处变为 1。考虑指数映射 $\exp_{\bar{p}}$：$T_{\bar{p}}\mathcal{N} \cong \mathbb{R}^{n+m} \to \mathcal{N}^{n+m}$，并设 γ 为一条测地线，那么对于向量 $v \in T_{\bar{p}}\mathcal{N}$，有

$$\exp_{\bar{p}}(v) = \gamma_{\bar{p},\frac{v}{|v|}}(|v|), \quad \gamma'(0) = \frac{v}{|v|} \quad \text{and} \quad \gamma(0) = \bar{p} = F_k(p_k, t_k).$$

也就是说，若 F_k 是原流 $\mathcal{M}_t^k$ 的参数化，我们令 $\hat{r}_k = \frac{1}{f_k^{p_k}(\cdot,\, t_k)}$，并将重标度流记为 $\overline{\mathcal{M}}_t^k$，其参数化定义为

$$\overline{F}_k(p,\tau) = \exp^{-1}_{F_k(p_k,t_k)} \circ F_k(p, \hat{r}_k^2\tau + t_k).$$

在黎曼情形中，膨胀后改变度量时，我们无需像在欧几里得空间中那样用同一个常数乘以浸入。当我们参照球面的膨胀来重标度背景空间时，可以看到

$$\bar{g}_{ij} = \frac{1}{\hat{r}_k^2} g_{ij} \quad \text{and} \quad \overline{K} = \hat{r}_k^2 K,$$

其中，K 是 $\mathcal{N}$ 的截面曲率。同样地，

$$|\overline{A}|^2 = \hat{r}_k^2 |A|^2 \quad \text{and} \quad |\overline{H}|^2 = \hat{r}_k^2 |H|^2.$$

由于 d_n 依赖于 n 和截面曲率 K，新的 d_n 依赖于 n 和 $\overline{K}$。因此，

$$\bar{d}_n = \hat{r}_k^2 d_n.$$

对于 $\hat{r}_k \to 0$，背景黎曼流形将在带基的 $C^{d,\,\gamma}$ H¨older 拓扑 [24]下收敛到其切平面。因此，我们可以像在欧几里得空间中那样在流形 $\mathcal{N}$ 上工作。为简单起见，我们为每个流选取一个以 p_k 为中心的局部坐标系。在这些坐标中，我们可以用 0 代替 p_k。原始流中的抛物邻域 $\mathcal{P}^k(p_k, t_k, \hat{r}_k L, \hat{r}_k^2\theta)$ 变为 $\overline{\mathcal{P}}^k(0, 0, L, \theta)$。由构造可知，每个重标度流均满足

$$\overline{F}_k(0,0) = 0, \quad \overline{f}_k(0,0) = 1. \tag{5.38}$$

确实，

$$\overline{F}_k(0,0) = \exp^{-1}_{F_k(0,0)} \circ F_k(0, \hat{r}_k^2 \cdot 0) = 0$$

and

$$\begin{aligned}\overline{f}_k(p,\tau) &= -|\overline{A}_k(p,\tau)|^2 + c_n|\overline{H}_k(p,\tau)|^2 - \bar{d}_n \\ &= \hat{r}_k^2\Big(- |A_k(p,\hat{r}_k^2\tau + t_k)|^2 + c_n|H_k(p,\hat{r}_k^2\tau + t_k)|^2 - d_n\Big) \\ &= \hat{r}_k^2 f_k(p,\hat{r}_k^2\tau + t_k)\end{aligned}$$

因此

$$\overline{f}_k(0,0) = \hat{r}_k^2 f_k(0,0) = 1,$$

由于坐标变换，$\hat{r}_k(0,0) = f_k^{-1}(0,0) = 1$。梯度估计给出了 $|A_k|$ 及其任意阶导数在形如 $\overline{\mathcal{P}}^k(0,0,d,d)$的邻域上的一致有界性（仅依赖于挤压常数），其中 $d > 0$取适当值。由定理（4.1），我们在F_k上得到 C^∞ 中的第二基本形式的梯度估计。因此，我们可以应用阿尔泽拉-阿斯科利定理（借助 Langer-Breuning紧致性定理 [5] 和 [14]），并得出存在一个子列在 C^∞ 中收敛到某个极限流，我们将其记为$\widetilde{\mathcal{M}}_\tau^\infty$。我们分析极限流 $\mathcal{M}_\tau^\infty$。注意，魏因加滕映射满足

$$[\overline{A}_k^-]_i^j(p,\tau) = \hat{r}_k[A_k^-]_i^j(p,\hat{r}_k^2\tau + t_k),$$

因此

$$\frac{|\overline{A}_k^-(p,\tau)|^2}{\overline{f}_k(p,\tau)} = \frac{|A_k^-(p,\hat{r}_k^2\tau + t_k)|^2}{f_k(p,\hat{r}_k^2\tau + t_k)}.$$

由（5.37）和（5.38），可知

$$\frac{|\widetilde{A}^-(0,0)|^2}{\widetilde{f}(0,0)} = \varepsilon_0, \quad \widetilde{f}(0,0) = 1.$$

我们断言

$$\frac{|\widetilde{A}^-(p,\tau)|^2}{\widetilde{f}(p,\tau)} = \lim_{k\to\infty}\frac{|\overline{A}_k^-(p,\tau)|^2}{\overline{f}_k(p,\tau)} \le \varepsilon \quad \forall \varepsilon > \varepsilon_0.$$

由于 $f(0,0) = 1$，因此对某个 $r < d^\#$，有 $|f| \ge \frac{1}{2}$属于 $\mathcal{P}^\infty(0,0,r,r)$。这是因为任意点 $(p,\tau) \in \widetilde{\mathcal{M}}_\tau^\infty$都是点 $(p_{j_k}, t_{j_k}) \in \overline{\mathcal{M}}^k$的极限；并且对每个 $\varepsilon > \varepsilon_0$，若令$\eta = \eta(\varepsilon, c_n) < d^\#$，则当 k充分大时，$\mathcal{M}^k$ 有定义于

$$\mathcal{P}^k\left(p_{j_k}, t_{j_k}, \frac{1}{f_k(p_{j_k}, t_{j_k})}\eta, \left(\frac{1}{f_k(p_{j_k}, t_{j_k})}\right)^2\eta\right)$$

这意味着

$$\frac{|\overline{A}_k^-(p_{j_k}, t_{j_k})|^2}{\overline{f}_k(p_{j_k}, t_{j_k})} \le \varepsilon \quad \forall \varepsilon > \varepsilon_0.$$

因此，流 $\widetilde{\mathcal{M}}_t^\infty \subset \mathbb{R}^{n+m}$ 在 $\frac{|\tilde{A}^-(\ p\,\tau\ |^2,)(,)}{\tilde{f}\ p\ \tau}$ 处的时空最大值为 ε_0，且位置为 (0, 0)。$\frac{|A^-|^2}{f}$ 的演化方程为

$$\Big(\partial_t-\Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f}\le 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f},\nabla\log f\Big\rangle-\delta\frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(\partial_t-\Delta\Big)f+C'\frac{|A^-|^2}{f}+C''\frac{|A^-|}{\sqrt{f}}$$
$$+\frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j}|\bar{R}_{ij}(\nu_1)|^2+4\sum_{i,j,p}\langle\bar{R}_{ij}(\nu_1),\mathring{h}_{ip}A^-_{jp}-\mathring{h}_{jp}A^-_{ip}\rangle\Big).$$

但在极限情况下，背景空间是欧几里得空间，因此背景曲率张量恒等于零。所以演化方程变为

$$\Big(\partial_t-\Delta\Big)\frac{|\widetilde{A}^-|^2}{\widetilde{f}}\le 2\Big\langle\nabla\frac{|\widetilde{A}^-|^2}{\widetilde{f}},\nabla\log\widetilde{f}\Big\rangle-\delta\frac{|\widetilde{A}^-|^2}{\widetilde{f}^2}\Big(\partial_t-\Delta\Big)\widetilde{f}.$$

因此，由于 $\frac{|\widetilde{A}^-|^2}{\widetilde{f}}$ 在 (0, 0) 处取得最大值 ε_0，根据强极大值原理，$\frac{|\widetilde{A}^-|^2}{\widetilde{f}}\equiv$ 为常数。因此，存在这个常数 $\mathcal{C}$，它至多依赖于 d_n、K_1、K_2、L 和 n，使得

$$\mathcal{C}=\frac{|\widetilde{A}^-|^2}{\widetilde{f}}.$$

将其代入演化方程，得到

$$0\le-\delta\frac{\mathcal{C}}{\widetilde{f}}\Big(\partial_t-\Delta\Big)\widetilde{f}\le 0,$$

~这意味着我们得到 $\mathcal{C}=0$，因此 $|A^-|=0$。这意味着

$$\frac{|\widetilde{A}^-|^2}{\widetilde{f}}=0\implies\varepsilon_0=0,$$

这与此矛盾。因此，我们得到

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|\widetilde{A}^-_k(p_k,t_k)|}{\widetilde{f}_k(p_k,t_k)}=0.$$

□

6 柱面估计

本节将给出一些估计，表明当我们接近奇点时，曲率会得到改善。这些估计在分析几何流中的高曲率区域时发挥着关键作用。具体而言，在高余维情形下，我们证明二次夹逼比 $\frac{|A|^2}{|H|^2}$ 趋近于标准圆柱的比值，即 $\frac{1}{n-1}$。

定理 6.1（[13]）。设 $F\colon \mathcal{M}^n \times [0,T) \to \mathcal{N}^{n+m}$ 是平均曲率流的一个光滑解，使得 $F_0(p) = F(p, 0)$ 是紧致的，且以常数 $c_n = \frac{1}{n-2}$ 满足二次挤压条件。那么存在 $\forall \varepsilon > 0, \exists H_1 > 0$，使得若 $f \geq H_1$，则

$$|A|^2 - \frac{1}{n-1}|H|^2 \leq \varepsilon f + C_\varepsilon$$

$\forall t \in [0,T)$ 其中 $C_\varepsilon = C_\varepsilon(n,m)$。

证明。由于 $\mathcal{M}$ 是二次有界的，存在常数 C, D 使得

$$|A|^2 - \frac{1}{n-1}|H|^2 \leq Cf + D.$$

因此，令 ε_0 表示使估计成立的此类 ε 的下确界，并假设 $\varepsilon_0 > 0$。我们将用反证法证明该定理。因此，假设定理的结论不成立，也就是说，存在一个平均曲率流族 $\mathcal{M}_t^k$ 及点 (p_k, t_k)，使得

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left(|A(p_k,t_k)|^2 - \frac{1}{n-1}|H(p_k,t_k)|^2\right)}{f_k(p_k,t_k)} = \varepsilon_0 \tag{6.1}$$

满足 $\varepsilon_0 > 0$ 且 $f_k(p_k,t_k) \to \infty$。

我们对 $\mathcal{M}_t^k$ 进行抛物缩放，使得 (p_k,t_k) 处的 f_k 变为 1。考虑指数映射 $\exp_{\bar{p}}$：$T_{\bar{p}}\mathcal{N} \cong \mathbb{R}^{n+m} \to \mathcal{N}^{n+m}$，并令 γ 为一条测地线。若取向量 $v \in T_{\bar{p}}\mathcal{N}$，则

$$\exp_{\bar{p}}(v) = \gamma_{\bar{p},\frac{v}{|v|}}(|v|), \quad \gamma'(0) = \frac{v}{|v|} \quad \text{and} \quad \gamma(0) = \bar{p} = F_k(p_k,t_k).$$

也就是说，如果 F_k 是原始流 $\mathcal{M}_t^k$ 的参数化，我们令 $\hat{r}_k = \frac{1}{f_k\ p_k(\cdot,\ t_k)}$，并将重标度流记为 $\overline{\mathcal{M}}_t^k$，其参数化定义为

$$\overline{F}_k(p,\tau) = \exp^{-1}_{F_k(p_k,t_k)} \circ F_k(p, \hat{r}_k^2\tau + t_k).$$

在黎曼情形中，膨胀后改变度量时，不需要像在欧几里得空间中那样将浸入映射乘以相同的常数。按照球面膨胀的例子重标度背景空间时，我们看到

$$\bar{g}_{ij} = \frac{1}{\hat{r}_k^2} g_{ij} \quad \text{and} \quad \overline{K} = \hat{r}_k^2 K,$$

其中，K 是 $\mathcal{N}$的截面曲率。同理，

$$|\overline{A}|^2 = \hat{r}_k^2 |A|^2 \quad \text{and} \quad |\overline{H}|^2 = \hat{r}_k^2 |H|^2.$$

¯由于 d_n 取决于 n 和截面曲率 K，因此新的 d_n 取决于 n 和 $\overline{K}$。因此，

$$\bar{d_n} = \hat{r}_k^2 d_n.$$

对于 $\hat{r}_k \to 0$，背景黎曼流形将在尖点 $C^{d,\ \gamma}$ H¨older 拓扑 [24]下收敛到其切平面。因此，我们可以像在欧几里得空间中工作一样，在该流形上进行研究。为简单起见，我们为每个流选取一个以 p_k 为中心的局部坐标系。在这些坐标中，我们可以用 0 代替 p_k。原流中的抛物邻域 $\mathcal{P}^k(p_k, t_k, \hat{r}_k L, \hat{r}_k^2\theta)$ 变为 $\overline{\mathcal{P}}^k(0, 0, L, \theta)$。按构造，每个重标度流都满足

$$\overline{F}_k(0,0) = 0, \quad \overline{f}_k(0,0) = 1. \tag{6.2}$$

确实，

$$\overline{F}_k(0,0) = \exp^{-1}_{F_k(0,0)} \circ F_k(0, \hat{r}_k^2 \cdot 0) = 0$$

and

$$\begin{aligned}
\overline{f}_k(p,\tau) &= -|\overline{A}_k(p,\tau)|^2 + c_n|\overline{H}_k(p,\tau)|^2 - \bar{d}_n \\
&= \hat{r}_k^2\Big(- |A_k(p, \hat{r}_k^2\tau + t_k)|^2 + c_n|H_k(p, \hat{r}_k^2\tau + t_k)|^2 - d_n\Big) \\
&= \hat{r}_k^2 f_k(p, \hat{r}_k^2\tau + t_k)
\end{aligned}$$

因此

$$\overline{f}_k(0,0) = \hat{r}_k^2 f_k(0,0) = 1,$$

因为根据坐标变~~换，~~ $\hat{r}_k(0, 0) = {}^{1}_{f_k}{}_{(0,\ 0)} = 1$。梯度估计在形如 $\overline{\mathcal{P}}^k(0, 0, d, d)$ 的邻域上，为 $|A_k|$ 及其任意阶导数提供一致有界估计（仅依赖于挤压常数），其中 $d > 0$ 取适当值。由定理（4.1），我们在 $\overline{F}_k$ 上的 C^∞ 中得到第二基本形式的梯度估计。因此，我们可以应用阿尔泽拉-阿斯科利定理（借助 Langer-Breuning紧致性定理 [5] 和 [14]），并得出存在一个子列在 C^∞ 中收敛到某个极限流，我们将其记为 $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau^\infty$。我们分析极限流 $\widetilde{\mathcal{M}}_\tau^\infty$。注意，魏因加滕映射满足

$$[\overline{A_k^-}]_i^j(p,\tau) = \hat{r}_k[A_k^-]_i^j(p, \hat{r}_k^2\tau + t_k),$$

以便以便

$$\frac{|\overline{A}_k(p,\tau)|^2 - \frac{1}{n-1}|\overline{H}_k(p,\tau)|^2}{\overline{f}_k(p,\tau)} = \frac{|A_k(p, \hat{r}_k^2\tau + t_k)|^2 - \frac{1}{n-1}|H_k(p, \hat{r}_k^2\tau + t_k)|^2}{f_k(p, \hat{r}_k^2\tau + t_k)}.$$

由 (5.37) 和 (5.38)，我们可知

$$\frac{|\widetilde{A}(0,0)|^2 - \frac{1}{n-1}|\widetilde{H}(0,0)|^2}{\widetilde{f}(0,0)} = \varepsilon_0, \quad \widetilde{f}(0,0) = 1.$$

我们断言

$$\frac{|\widetilde{A}(p,\tau)|^2-\frac{1}{n-1}|\widetilde{H}(p,\tau)|^2}{\widetilde{f}(p,\tau)}=\lim_{k\to\infty}\frac{|\overline{A}_k(p,\tau)|^2-\frac{1}{n-1}|\overline{H}_k(p,\tau)|^2}{\overline{f}_k(p,\tau)}\leq\varepsilon\quad\forall\varepsilon>\varepsilon_0.$$

$\sim$ $\sim$ $\sim$由于 $f(0,0)=1$，可知对于某个 $r<d^{\#}$，$|f|\geq\frac{1}{2}$在 $\mathcal{P}^{\infty}(0,0,r,r)$ 中。这是因为任意点 $(p,\tau)\in\widetilde{\mathcal{M}}_{\tau}^{\infty}$都是点 $(p_{j_k},t_{j_k})\in\overline{\mathcal{M}}^k$的极限，并且对于每个 $\varepsilon>\varepsilon_0$，如果令$\eta=\eta(\varepsilon,c_n)<d^{\#}$，那么当 k 足够大时， $\mathcal{M}^k$ 定义于

$$\mathcal{P}^k\left(p_{j_k},t_{j_k},\frac{1}{f_k(p_{j_k},t_{j_k})}\eta,\left(\frac{1}{f_k(p_{j_k},t_{j_k})}\right)^2\eta\right)$$

这意味着

$$\frac{|\overline{A}_k(p_{j_k},t_{j_k})|^2-\frac{1}{n-1}|\overline{H}_k(p_{j_k},t_{j_k})|^2}{\overline{f}_k(p_{j_k},t_{j_k})}\leq\varepsilon\quad\forall\varepsilon>\varepsilon_0.$$

因此，对于$|\widetilde{A}(p,\tau)|^2-\frac{1}{n-1}|\widetilde{H}($ $p\tau|^2,)$，流 $\widetilde{\mathcal{M}}_t^{\infty}\subset\mathbb{R}^{n+m}$ 在 (0, 0) 处取得时空最大值 ε_0，这意味着，对于 $\frac{|\widetilde{A}p\tau|^2}{|\overline{H}p\tau|^2}(,)$，流 $\overline{\mathbb{M}}_t^{\infty}$ 在 (0, 0) 处取得时空最大值 $\frac{1}{n-1}+\varepsilon_0$。由于 $\frac{|A|^2}{|H|^2}$ 的演化方程为

$$\begin{aligned}\left(\partial_t-\Delta\right)\frac{|A|^2}{|H|^2}=&\frac{2}{|H|^2}\left\langle\nabla|H|^2,\nabla\left(\frac{|A|^2}{|H|^2}\right)\right\rangle\\&-\frac{2}{|H|^2}\left(|\nabla A|^2-\frac{|A|^2}{|H|^2}|\nabla H|^2\right)\\&+\frac{2}{|H|^2}\left(R_1-\frac{|A|^2}{|H|^2}R_2\right)\end{aligned}$$

我们有

$$|\nabla H|^2\leq\frac{3}{n+2}|\nabla A|^2,\quad\frac{|A|^2}{|H|^2}\leq c_n$$

由此可得

$$-\frac{2}{|H|^2}\left(|\nabla A|^2-\frac{|A|^2}{|H|^2}|\nabla H|^2\right)\leq 0.$$

此外，如果 $\frac{|A|^2}{|H|^2}=c<c_n$ 那么

$$\begin{aligned}R_1-\frac{|A|^2}{|H|^2}R_2&=R_1-cR_2\\&\leq\frac{2}{n}\frac{1}{c-1/n}|A_-|^2\mathcal{Q}+\left(6-\frac{2}{n(c-1/n)}\right)|\mathring{A}_1|^2|\mathring{A}_-|^2+\left(3-\frac{2}{n(c-1/n)}\right)|\mathring{A}_-|^4\end{aligned}$$

$$\leq 0.$$

因此，强极大值原理适用于 $\frac{|A|^2}{|H|^2}$ 的演化方程，并表明 $\frac{|A|^2}{|H|^2}$ 为常数。该演化方程进而表明 $|\nabla A|^2 = 0$，也就是说，第二基本形式是平行的，且 $|A_-|^2 = |\mathring{A}_-|^2 = 0$，也就是说，该子流形是余维一。最后，这表明局部有 $\mathbb{M} = \mathbb{S}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$, [15]。由于 $\frac{|A|^2}{|H|^2} < c_n \leq \frac{1}{n-2}$，我们只能有

$$\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

这给出 $\frac{|A|^2}{|H|^2} = \frac{1}{n}$、$\frac{1}{n-1} \neq \frac{1}{n-1} + \varepsilon_0$、$\varepsilon > 0$，从而产生矛盾。

□

7 高余维平均曲率流受挤压解的奇点模型

在本节中，我们从定理 5.1 推导出一个推论，该推论提供了有关首次奇异时刻放大模型的信息。具体而言，我们证明这些模型在相似变换意义下可以分类。

推论 7.1（[21, 推论 1.4]）。令 $n \geq 5$ 且 $N > n$。若 $c_n = \frac{1}{n-2}$，则令 $n \geq 8$ 且 $c_n = \frac{3(n+1)}{2n(n+2)}$，其中 $n = 5$、6 或 7。考虑黎曼流形 $\mathbb{R}^N$ 中的一个闭 n 维平均曲率流解，该解初始满足 $|H| > 0$ 和 $|A|^2 < c_n|H|^2$。在首次奇异时刻，唯一可能的放大极限是余维一收缩圆球、收缩圆柱和平移碗形孤子。

根据定理 5.1 和定理 6.1，对于 $F\colon \mathcal{M}^n \times [0,T) \to \mathcal{N}^{n+m}$ 是平均曲率流的一个光滑解，使得 $F_0(p) = F(p,0)$ 是紧致且二次挤压的，其中 $c_n = \sqrt[3]{(n+1)^2 n(n+2)}$ 如果 $n = 5$、6 或 7，那么 $\forall \varepsilon > 0, \exists H_0, H_1 > 0$，使得如果 $f \geq \max\{H_0, H_1\}$，则

$$\left|A^-\right|^2 \leq \varepsilon f + C_\varepsilon \quad \text{and} \quad |A|^2 - \frac{1}{n-1}|H|^2 \leq \varepsilon f + C_\varepsilon,$$

$\forall t \in [0,T)$，其中 $C_\varepsilon = C_\varepsilon(n,m)$。在首次奇异时刻，唯一可能的放大极限是余维一收缩圆球、收缩圆柱和平移碗形孤子。因此，我们可以将这些放大极限分类如下：

推论 7.2（[11, 推论 4.7]）。设 $n \geq 5$。若 $n \geq 8$，则设 $c_n = \frac{1}{n-2}$；若$n = 5$，6 或 7，则设 $c_n = \sqrt[3]{(n+1)^2 n(n+2)}$。假设 $F_t\colon \mathcal{M}^n \to \mathcal{N}^{n+m}, m \geq 2$ 是平均曲率流的一个光滑解，在最大时间区间 $[0,T)$ 上紧致且具有正平均曲率。

1. 若 $t \to T$ 的奇点是 I 型，则在 *[12]* 中，对 (4.4) 所述的重标度过程而言，唯一可能的极限流是与 $\mathbb{S}^2$、$\mathbb{R}\times\mathbb{S}^1$ 和 $\mathbb{R}\times\Gamma$ 相关的自相似收缩解，其中 Γ 是 Mullins 引入的一条自相似浸入曲线（另见 Abresch–Langer *[1]*）。

2. 若奇点为 II 型，则由定理 5.1 可知，首次奇异时刻可能出现的放大极限只有余维一收缩圆球、收缩圆柱和平移碗形孤子。

8 常曲率情形

本章证明常曲率情形下的定理 5.1。对于常负曲率情形，证明更为直接，且能得到更定量的结果，因此我们直接证明这一结论。

8.1 演化方程

我们先陈述常曲率情形下第二基本形式和平均曲率向量的长度及长度平方的演化方程。$\bar{}$ 我们用 K 表示截面曲率，并相对于切丛和法丛的局部正交标架$\{e_i\}$ 和 $\{\nu_\alpha\}$，

$$
\begin{aligned}
(\partial_t-\Delta)A_{ij} &= \sum_{p,q,\beta} A^\beta_{ij}A^\beta_{pq}A_{pq} + \sum_{p,q,\beta} A^\beta_{iq}A^\beta_{qp}A_{pj} + \sum_{p,q,\beta} A^\beta_{jq}A^\beta_{qp}A_{pi} - 2\sum_{p,q,\beta} A^\beta_{ip}A^\beta_{jq}A_{pq} \\
&\quad + 2\bar{K}Hg_{ij} - n\bar{K}A_{ij}, \\
(\partial_t-\Delta)H &= \sum_{p,q,\beta} H^\beta A^\beta_{pq}A_{pq} + n\bar{K}H.
\end{aligned}
$$

由这些方程，我们可以计算

$$
\begin{aligned}
(\partial_t-\Delta)|A|^2 &= -2|\nabla A|^2 + 2|\langle A,A\rangle|^2 + 2|R^\perp|^2 + 4\bar{K}|H|^2 - 2n\bar{K}|A|^2, \\
(\partial_t-\Delta)|H|^2 &= -2|\nabla H|^2 + 2|\langle A,H\rangle|^2 + 2n\bar{K}|H|^2.
\end{aligned}
$$

这里我们证明双曲空间中高余维子流形的夹逼保持性。为证明余维估计，我们需要对该方程中的反应项作出良好估计。这些估计的证明遵循 Andrews–Baker 的方法。

在下文中，我们始终假设 $H \neq 0$。首先注意到

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j,p,q} |\langle A_{ij},A_{pq}\rangle|^2 &= |h|^4 + 2\sum_{i,j}|h_{ij}A^-_{ij}|^2 + |A^-|^4 \\
&= |\mathring{h}|^4 + \frac{2}{n}|\mathring{h}|^2|H|^2 + \frac{1}{n^2}|H|^4 + 2\sum_{i,j}|h_{ij}A^-_{ij}|^2 + \sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle|^2
\end{aligned}
$$

并回顾恒等式

$$|R^{\perp}|^2 = 2\sum_{i,j,p} |h_{ip}A^-_{pj} - h_{jp}A^-_{pi}|^2 + \sum_{i,j,p} |A^-_{ip} \otimes A^-_{pj} - A^-_{jp} \otimes A^-_{pi}|^2$$

为了表示

$$R_1 = |\mathring{h}|^4 + \frac{2}{n}|\mathring{h}|^2|H|^2 + \frac{1}{n^2}|H|^4 + 2\sum_{i,j} |h_{ij}A^-_{ij}|^2 + \sum_{i,j,p,q} |\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2$$
$$+ 2\sum_{i,j,p} |h_{ip}A^-_{pj} - h_{jp}A^-_{pi}|^2 + \sum_{i,j,p} |A^-_{ip} \otimes A^-_{pj} - A^-_{jp} \otimes A^-_{pi}|^2.$$

Andrews–Baker 建立了如下估计

$$\sum_{i,j} |h_{ij}A^-_{ij}|^2 + \sum_{i,j,p} |h_{ip}A^-_{pj} - h_{jp}A^-_{pi}|^2 \le 2|\mathring{h}|^2|A^-|^2,$$

并且还指出

$$\sum_{i,j,p,q} |\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 + \sum_{i,j,p} |A^-_{ip} \otimes A^-_{pj} - A^-_{jp} \otimes A^-_{pi}|^2 \le \frac{3}{2}|A^-|^4$$

通过令 $B^\alpha = A^-,\ ^\alpha$ 对于 $\alpha \ge 2$ 在以下结果 [16, 定理 1]中：

定理 8.1. 设 $\{B^\alpha\}$ 是一个由对称（$n \times n$）矩阵组成的有限集合。那么我们有

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} (B^\alpha_{ij}B^\beta_{ij})^2 + \sum_{i,j,p,\alpha,\beta} |B^\alpha_{ip}B^\beta_{pj} - B^\alpha_{jp}B^\alpha_{pi}|^2 \le \frac{3}{2}\Big(\sum_\alpha |B^\alpha|^2\Big)^2.$$

将这些估计合并起来，我们得到不等式

$$R_1 \le |\mathring{h}|^4 + \frac{2}{n}|\mathring{h}|^2|H|^2 + \frac{1}{n^2}|H|^4 + 4|\mathring{h}|^2|A^-|^2 + \frac{3}{2}|A^-|^4.$$

我们还可以展开

$$R_2 = \sum_{i,j} |\langle A_{ij}, H\rangle|^2 = |h|^2|H|^2 = |\mathring{h}|^2|H|^2 + \frac{1}{n}|H|^4,$$

因此

$$2R_1 - 2c_nR_2 \le 2|\mathring{h}|^4 + 8|\mathring{h}|^2|A^-|^2 + 3|A^-|^4 - 2(c_n - 2/n)|\mathring{h}|^2|H|^2 - \frac{2}{n}(c_n - 1/n)|H|^4.$$

现在我们表示

$$\mathcal{Q} = |\mathring{A}|^2 - (c_n - 1/n)|H|^2 - d_n\bar{K}$$

并重新排列以得到

$$|H|^2=\frac{1}{c_n-1/n}(|\mathring{h}|^2+|A^-|^2-\mathcal{Q}-d_n\bar{K}).$$

将其代回可得

$$\begin{aligned}2R_1-2c_nR_2&\leq 2|\mathring{h}|^4+8|\mathring{h}|^2|A^-|^2+3|A^-|^4-2(c_n-1/n)|\mathring{h}|^2|H|^2\\&\quad-\frac{2}{n}|A^-|^2|H|^2+\frac{2}{n}(\mathcal{Q}+d_n\bar{K})|H|^2\\&=6|\mathring{h}|^2|A^-|^2+3|A^-|^4-\frac{2}{n}|A^-|^2|H|^2\\&\quad+\frac{2}{n}(\mathcal{Q}+d_n\bar{K})|H|^2+2(\mathcal{Q}+d_n\bar{K})|\mathring{h}|^2\\&=\left(6-\frac{2/n}{c_n-1/n}\right)|\mathring{h}|^2|A^-|^2+\left(3-\frac{2/n}{c_n-1/n}\right)|A^-|^4\\&\quad+\frac{2}{n}(\mathcal{Q}+d_n\bar{K})|H|^2+2(\mathcal{Q}+d_n\bar{K})|\mathring{h}|^2+\frac{2/n}{c_n-1/n}(\mathcal{Q}+d_n\bar{K})|A^-|^2.\end{aligned}$$

最后一行中的各项可写为

$$\begin{aligned}\frac{2}{n}(\mathcal{Q}+d_n\bar{K})|H|^2&=\frac{2/n}{c_n-1/n}\mathcal{Q}(|\mathring{h}|^2+|A^-|^2-\mathcal{Q})-\frac{4/n}{c_n-1/n}d_n\bar{K}\mathcal{Q}\\&\quad+\frac{2/n}{c_n-1/n}d_n\bar{K}(|\mathring{h}|^2+|A^-|^2)-\frac{2/n}{c_n-1/n}d_n^2\bar{K}^2,\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{2}{n}(\mathcal{Q}+d_n\bar{K})|H|^2+2(\mathcal{Q}+d_n\bar{K})|\mathring{h}|^2+\frac{2/n}{c_n-1/n}(\mathcal{Q}+d_n\bar{K})|A^-|^2\\&\quad=\frac{2/n}{c_n-1/n}\mathcal{Q}(2|A^-|^2-\mathcal{Q})-\frac{4/n}{c_n-1/n}d_n\bar{K}\mathcal{Q}+\left(\frac{2/n}{c_n-1/n}+2\right)|\mathring{h}|^2\mathcal{Q}\\&\quad+\left(\frac{2/n}{c_n-1/n}+2\right)d_n\bar{K}|\mathring{h}|^2+\frac{4/n}{c_n-1/n}d_n\bar{K}|A^-|^2-\frac{2/n}{c_n-1/n}d_n^2\bar{K}^2\end{aligned}$$

并且我们有

$$\begin{aligned}2R_1-2c_nR_2&\leq\left(6-\frac{2/n}{c_n-1/n}\right)|\mathring{h}|^2|A^-|^2+\left(3-\frac{2/n}{c_n-1/n}\right)|A^-|^4\\&\quad+\left(\frac{2/n}{c_n-1/n}+2\right)d_n\bar{K}|\mathring{h}|^2+\frac{4/n}{c_n-1/n}d_n\bar{K}|A^-|^2-\frac{2/n}{c_n-1/n}d_n^2\bar{K}^2\\&\quad+\frac{2/n}{c_n-1/n}\mathcal{Q}(2|A^-|^2-\mathcal{Q})-\frac{4/n}{c_n-1/n}d_n\bar{K}\mathcal{Q}+\left(\frac{2/n}{c_n-1/n}+2\right)|\mathring{h}|^2\mathcal{Q}.\end{aligned}$$

接下来我们计算

$$-2n\bar{K}|\mathring{A}|^2-2n\bar{K}(c_n-1/n)|H|^2=-4n\bar{K}|\mathring{h}|^2-4n\bar{K}|A^-|^2+2nd_n\bar{K}^2+2n\bar{K}\mathcal{Q},$$

因此　得到关于 $\mathcal{Q}$ 演化中零阶项的如下估计：

$$\begin{aligned}
&2R_1 - 2c_nR_2 - 2n\bar{K}|\mathring{A}|^2 - 2n\bar{K}(c_n - 1/n)|H|^2 \\
&\qquad \le \left(6 - \frac{2/n}{c_n - 1/n}\right)|\mathring{h}|^2|A^-|^2 + \left(3 - \frac{2/n}{c_n - 1/n}\right)|A^-|^4 \\
&\qquad + 2\left(\frac{d_n/n}{c_n - 1/n} + d_n - 2n\right)\bar{K}|\mathring{h}|^2 + 4\left(\frac{d_n/n}{c_n - 1/n} - n\right)\bar{K}|A^-|^2 \\
&\qquad + 2\left(n - \frac{d_n/n}{c_n - 1/n}\right)d_n\bar{K}^2 + 2\left(1 + \frac{1/n}{c_n - 1/n}\right)|\mathring{h}|^2Q \\
&\qquad + \frac{2/n}{c_n - 1/n}\mathcal{Q}(2|A^-|^2 - \mathcal{Q}) + 2\left(n - \frac{2d_n/n}{c_n - 1/n}\right)\bar{K}\mathcal{Q}.
\end{aligned} \tag{8.1}$$

设 $\bar{K} < 0$。在这种情形下，若 $d_n > 0$，则条件 $\mathcal{Q} \le 0$ 蕴含 $|H|^2 > 0$。如上所述，对于 $c_n \le \frac{4}{3n}$，我们有

$$\begin{aligned}
&2R_1 - 2c_nR_2 - 2n\bar{K}|\mathring{A}|^2 - 2n\bar{K}(c_n - 1/n)|H|^2 \\
&\qquad \le 2\left(\frac{d_n/n}{c_n - 1/n} + d_n - 2n\right)\bar{K}|\mathring{h}|^2 + 4\left(\frac{d_n/n}{c_n - 1/n} - n\right)\bar{K}|A^-|^2 \\
&\qquad + 2\left(n - \frac{d_n/n}{c_n - 1/n}\right)d_n\bar{K}^2 + 2\left(1 + \frac{1/n}{c_n - 1/n}\right)|\mathring{h}|^2Q \\
&\qquad + \frac{2/n}{c_n - 1/n}\mathcal{Q}(2|A^-|^2 - \mathcal{Q}) + 2\left(n - \frac{2d_n/n}{c_n - 1/n}\right)\bar{K}\mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

左侧第一项在 $d_n \ge 2n - 2/c_n$ 时非正，这也足以保证

$$\left(\frac{d_n/n}{c_n - 1/n} - n\right) \ge 2/c_n - n \ge n,$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
&2R_1 - 2c_nR_2 - 2n\bar{K}|\mathring{A}|^2 - 2n\bar{K}(c_n - 1/n)|H|^2 \\
&\qquad \le 4(2/c_n - n)\bar{K}|A^-|^2 + 2(n - 2/c_n)d_n\bar{K}^2 + 2\left(1 + \frac{1/n}{c_n - 1/n}\right)|\mathring{h}|^2Q \\
&\qquad + \frac{2/n}{c_n - 1/n}\mathcal{Q}(2|A^-|^2 - \mathcal{Q}) + 2\left(n - \frac{2d_n/n}{c_n - 1/n}\right)\bar{K}\mathcal{Q}.
\end{aligned}$$

右侧各项要么非正，要么含有因子 $\mathcal{Q}$，因此我们看到 $\mathcal{Q} \le 0$ 对于.....保持不变

$$c_n \le \min\left\{\frac{4}{3n}, \frac{3}{n+2}\right\}, \qquad d_n \ge 2n - 2/c_n.$$

注意，对于我们允许的常数范围 c_n 和 d_n，

$$2\left(n - \frac{2d_n/n}{c_n - 1/n}\right)\bar{K} \ge 0,$$

因此，当 $\mathcal{Q} \leq 0$ 时，我们可以进一步估计

$$\begin{aligned} &2R_1 - 2c_n R_2 - 2n\bar{K}|\mathring{A}|^2 - 2n\bar{K}(c_n - 1/n)|H|^2 \\ &\qquad \leq -\frac{2/n}{c_n - 1/n}\mathcal{Q}^2. \end{aligned}$$

因此

$$(\partial_t - \Delta)\mathcal{Q} \leq -\frac{2/n}{c_n - 1/n}\mathcal{Q}^2,$$

这迫使 $\mathcal{Q}$ 在有限时间内爆炸。

8.2 h的演化

由 A 和 H的方程可知，投影 $\langle A、 H\rangle$ 满足

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)A^\alpha_{ij}H^\alpha = &-2\sum_{p,\alpha}\nabla_p A^\alpha_{ij}\nabla_p H^\alpha + 2\sum_{p,q,\alpha,\beta} H^\alpha A^\beta_{ij}A^\beta_{pq}A^\alpha_{pq} \\ &+ \sum_{p,q,\alpha,\beta} H^\alpha(A^\beta_{iq}A^\beta_{qp}A^\alpha_{pj} + A^\beta_{jq}A^\beta_{qp}A^\alpha_{pi} - 2A^\beta_{ip}A^\beta_{jq}A^\alpha_{pq}) \\ &+ 2\bar{K}|H|^2 g_{ij}. \end{aligned}$$

第一个反应项可拆分为超曲面分量和余维分量，如下所示:

$$2\sum_{p,q,\alpha,\beta} H^\alpha A^\beta_{ij}A^\beta_{pq}A^\alpha_{pq} = 2|H||h|^2 h_{ij} + 2\sum_{p,q,\alpha\geq 2}|H|A^\alpha_{ij}A^\alpha_{pq}h_{pq}.$$

同样，其余反应项可以写成

$$\begin{aligned} \sum_{p,q,\alpha,\beta} H^\alpha(A^\beta_{iq}A^\beta_{qp}A^\alpha_{pj} + A^\beta_{jq}A^\beta_{qp}A^\alpha_{pi} - 2A^\beta_{ip}A^\beta_{jq}A^\alpha_{pq}) = &\sum_{p,q,\alpha\geq 2}|H|A^\alpha_{iq}A^\alpha_{qp}h_{pj} \\ &+ \sum_{p,q,\alpha\geq 2}|H|A^\alpha_{jq}A^\alpha_{qp}h_{pi} - 2\sum_{p,q,\alpha\geq 2}|H|A^\alpha_{ip}A^\alpha_{jq}h_{pq}. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta)A^\alpha_{ij}H^\alpha = &-2\sum_{p,\alpha}\nabla_p A^\alpha_{ij}\nabla_p H^\alpha + 2|H||h|^2 h_{ij} + 2\sum_{p,q,\alpha\geq 2}|H|h_{pq}(A^\alpha_{ij}A^\alpha_{pq} - A^\alpha_{ip}A^\alpha_{jq}) \\ &+ \sum_{p,q,\alpha\geq 2}|H|A^\alpha_{iq}A^\alpha_{qp}h_{pj} + \sum_{p,q,\alpha\geq 2}|H|A^\alpha_{jq}A^\alpha_{qp}h_{pi} + 2\bar{K}|H|^2 g_{ij}. \end{aligned}$$

对于正函数 f，我们有

$$(\partial_t - \Delta)\sqrt{f} = \frac{1}{4f^{3/2}}|\nabla f|^2 + \frac{1}{2\sqrt{f}}(\partial_t - \Delta)f,$$

因此，量 $\sqrt{f}=|H|$ 满足

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta)|H| &= \frac{1}{4|H|^3}|\nabla|H|^2|^2+\frac{1}{2|H|}(-2|\nabla H|^2+2|\langle A,H\rangle|^2+2n\bar{K}|H|^2)\\ &= \frac{1}{|H|^3}\langle H,\nabla_i H\rangle\langle H,\nabla_i H\rangle-\frac{|\nabla H|^2}{|H|}+\frac{|\langle A,H\rangle|^2}{|H|}+n\bar{K}|H|.\end{aligned}$$

代入这些恒等式

$$\frac{|\langle A,H\rangle|^2}{|H|}=|h|^2|H|$$

and

$$\begin{aligned}-\frac{|\nabla H|^2}{|H|}+\frac{1}{|H|^3}\langle H,\nabla_i H\rangle\langle H,\nabla_i H\rangle &= -\frac{|\nabla|H||^2}{|H|}-|H||\nabla\nu_1|^2+\frac{1}{|H|}\langle\nu_1,\nabla_i H\rangle\langle\nu_1,\nabla_i H\rangle\\ &= -|H||\nabla\nu_1|^2,\end{aligned}$$

我们得到

$$(\partial_t-\Delta)|H|=|h|^2|H|+n\bar{K}|H|-|H||\nabla\nu_1|^2. \tag{8.2}$$

对于由正标量函数 f 除的张量 B_{ij}，有

$$(\partial_t-\Delta)\frac{B_{ij}}{f}=\frac{1}{f}(\nabla_t-\Delta)B_{ij}-\frac{B_{ij}}{f^2}(\partial_t-\Delta)f+\frac{2}{f}\left\langle\nabla\frac{B_{ij}}{f},\nabla f\right\rangle.$$

因此，将 $\langle A_{ij}、\ H\rangle$ 除以 $|H|$，我们得到

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta)h_{ij} &= |h|^2h_{ij}+2\sum_{p,q,\alpha\geq 2}h_{pq}(A^\alpha_{ij}A^\alpha_{pq}-A^\alpha_{ip}A^\alpha_{jq})+\sum_{p,q,\alpha\geq 2}A^\alpha_{iq}A^\alpha_{qp}h_{pj}\\ &\quad+\sum_{p,q,\alpha\geq 2}A^\alpha_{jq}A^\alpha_{qp}h_{pi}+2\bar{K}|H|g_{ij}-n\bar{K}h_{ij}-2|H|^{-1}\langle\nabla A_{ij},\nabla H\rangle+h_{ij}|\nabla\nu_1|^2\\ &\quad+2|H|^{-1}\langle\nabla h_{ij},\nabla|H|\rangle.\end{aligned}$$

我们通过分解来简化梯度项

$$\begin{aligned}-2\langle\nabla A_{ij},\nabla H\rangle &= -2\langle\nabla h_{ij}\nu_1+h_{ij}\nabla\nu_1+\nabla A^-_{ij},\nabla|H|\nu_1+2|H|\nabla\nu_1\rangle\\ &= -2\langle\nabla h_{ij},\nabla|H|\rangle-2|H|h_{ij}|\nabla\nu_1|^2-2\langle\nabla A^-_{ij},\nabla|H|\nu_1\rangle\\ &\quad-2|H|\langle\nabla A^-_{ij},\nabla\nu_1\rangle,\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta)h_{ij} &= |h|^2h_{ij}+2\sum_{p,q,\alpha\geq 2}h_{pq}(A^\alpha_{ij}A^\alpha_{pq}-A^\alpha_{ip}A^\alpha_{jq})+\sum_{p,q,\alpha\geq 2}A^\alpha_{iq}A^\alpha_{qp}h_{pj}\\ &\quad+\sum_{p,q,\alpha\geq 2}A^\alpha_{jq}A^\alpha_{qp}h_{pi}+2\bar{K}|H|g_{ij}-n\bar{K}h_{ij}-h_{ij}|\nabla\nu_1|^2-2|H|^{-1}\langle\nabla A^-_{ij},\nabla|H|\nu_1\rangle\end{aligned}$$

$$- 2\langle \nabla A^-_{ij}, \nabla \nu_1 \rangle.$$

接下来，我们计算

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)|h|^2 &= 2\sum_{i,j} h_{ij}(\nabla_t - \Delta)h_{ij} - 2|\nabla h|^2 \\ &= 2|h|^4 + 4\sum_{i,j}|h_{ij}A^-_{ij}|^2 - 4\sum_{i,j,p,q,\alpha\geq 2} h_{ij}h_{pq}A^\alpha_{ip}A^\alpha_{jq} + 4\sum_{i,j,p,q,\alpha\geq 2} h_{ij}h_{pj}A^\alpha_{iq}A^\alpha_{qp} \\ &\quad + 4\bar{K}|H|^2 - 2n\bar{K}|h|^2 - 2|\nabla h|^2 - 2|h|^2|\nabla\nu_1|^2 - 4\sum_{i,j}|H|^{-1}h_{ij}\langle \nabla A^-_{ij}, \nabla|H|\nu_1\rangle \\ &\quad - 4\sum_{i,j} h_{ij}\langle \nabla A^-_{ij}, \nabla\nu_1\rangle,\end{aligned}$$

并按照 Naff 的做法，改写为

$$\begin{aligned}4\sum_{i,j,p,q,\alpha\geq 2} h_{ij}h_{pj}A^\alpha_{iq}A^\alpha_{qp} - 4\sum_{i,j,p,q,\alpha\geq 2} h_{ij}h_{pq}A^\alpha_{ip}A^\alpha_{jq} &= 2\sum_{i,j,p,q}\langle h_{ij}A^-_{iq} - h_{iq}A^-_{ij}, h_{pj}A^-_{pq} - h_{pq}A^-_{pj}\rangle \\ &= 2\sum_{i,j,p}|h_{ip}A^-_{pj} - h_{jp}A^-_{pi}|^2.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)|h|^2 &= 2|h|^4 + 4\sum_{i,j}|h_{ij}A^-_{ij}|^2 + 2\sum_{i,j,p}|h_{ip}A^-_{pj} - h_{jp}A^-_{pi}|^2 + 4\bar{K}|H|^2 - 2n\bar{K}|h|^2 \\ &\quad - 2|\nabla h|^2 - 2|h|^2|\nabla\nu_1|^2 - 4\sum_{i,j}|H|^{-1}h_{ij}\langle \nabla A^-_{ij}, \nabla|H|\nu_1\rangle - 4\sum_{i,j} h_{ij}\langle \nabla A^-_{ij}, \nabla\nu_1\rangle,\end{aligned}$$

并且由于 $|A^-|^2 = |A|^2 - |h|^2$，

$$\begin{aligned}(\partial_t - \Delta)|A^-|^2 &= 2|\langle A, A\rangle|^2 - 2|h|^4 - 4\sum_{i,j}|h_{ij}A^-_{ij}|^2 + 2|R^\perp|^2 - 2\sum_{i,j,p}|h_{ip}A^-_{pj} - h_{jp}A^-_{pi}|^2 \\ &\quad - 2n\bar{K}|A^-|^2 - 2|\nabla A|^2 + 2|\nabla h|^2 + 2|h|^2|\nabla\nu_1|^2 \\ &\quad + 4\sum_{i,j}|H|^{-1}h_{ij}\langle \nabla A^-_{ij}, \nabla|H|\nu_1\rangle + 4\sum_{i,j} h_{ij}\langle \nabla A^-_{ij}, \nabla\nu_1\rangle.\end{aligned}$$

注意到以下关系，可以简化反应项

$$2|\langle A, A\rangle|^2 - 2|h|^4 - 4\sum_{i,j}|h_{ij}A^-_{ij}|^2 = 2|\langle A^-, A^-\rangle|^2,$$

以及（回顾上文对 $R^\perp$ 所作的分解）

$$2|R^\perp|^2 - 2\sum_{i,j,p}|h_{ip}A^-_{pj} - h_{jp}A^-_{pi}|^2 = 2\sum_{i,j,p}|h_{ip}A^-_{pj} - h_{jp}A^-_{pi}|^2 + 2\sum_{i,j,p}|A^-_{ip}\otimes A^-_{pj} - A^-_{jp}\otimes A^-_{pi}|^2,$$

因此

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta)|A^-|^2=&2|\langle A^-,A^-\rangle|^2+2\sum_{i,j,p}|h_{ip}A^-_{pj}-h_{jp}A^-_{pi}|^2+2\sum_{i,j,p}|A^-_{ip}\otimes A^-_{pj}-A^-_{jp}\otimes A^-_{pi}|^2\\&-2n\bar{K}|A^-|^2-2|\nabla A|^2+2|\nabla h|^2+2|h|^2|\nabla\nu_1|^2\\&+4\sum_{i,j}|H|^{-1}h_{ij}\langle\nabla A^-_{ij},\nabla|H|\nu_1\rangle+4\sum_{i,j}h_{ij}\langle\nabla A^-_{ij},\nabla\nu_1\rangle.\end{aligned}$$

由于 $\nabla A=\nabla h\nu_1+h\nabla\nu_1+\nabla A^-$，我们计算得

$$2|\nabla A|^2=2|\nabla h|^2+2|h|^2|\nabla\nu_1|^2+2|\nabla A^-|^2+4\sum_{i,j}h_{ij}\langle\nabla A^-_{ij},\nabla\nu_1\rangle+4\sum_{i,j}\langle\nabla A^-_{ij},\nabla h_{ij}\nu_1\rangle,$$

因此得到

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta)|A^-|^2=&2|\langle A^-,A^-\rangle|^2+2\sum_{i,j,p}|h_{ip}A^-_{pj}-h_{jp}A^-_{pi}|^2+2\sum_{i,j,p}|A^-_{ip}\otimes A^-_{pj}-A^-_{jp}\otimes A^-_{pi}|^2\\&-2n\bar{K}|A^-|^2-2|\nabla A^-|^2-4\sum_{i,j}\langle\nabla A^-_{ij},\nabla h_{ij}\nu_1\rangle+4\sum_{i,j}|H|^{-1}h_{ij}\langle\nabla A^-_{ij},\nabla|H|\nu_1\rangle.\end{aligned}$$

对 $\langle A^-_{ij}$、 $\nu_1\rangle=0$ 求导可知，最后两个梯度项可表示为

$$\begin{aligned}&-4\sum_{i,j}\langle\nabla A^-_{ij},\nabla h_{ij}\nu_1\rangle+4\sum_{i,j}|H|^{-1}h_{ij}\langle\nabla A^-_{ij},\nabla|H|\nu_1\rangle\\&=-\sum_{i,j,k}(4\nabla_k h_{ij}-4|H|^{-1}h_{ij}\nabla_k|H|)\langle\nabla_k A^-_{ij},\nu_1\rangle\\&=\sum_{i,j,k}(4\nabla_k h_{ij}-4|H|^{-1}h_{ij}\nabla_k|H|)\langle A^-_{ij},\nabla_k\nu_1\rangle,\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}(\partial_t-\Delta)|A^-|^2=&2\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij},A^-_{pq}\rangle|^2+2\sum_{i,j,p}|h_{ip}A^-_{pj}-h_{jp}A^-_{pi}|^2+2\sum_{i,j,p}|A^-_{ip}\otimes A^-_{pj}-A^-_{jp}\otimes A^-_{pi}|^2\\&-2n\bar{K}|A^-|^2-2|\nabla A^-|^2+\sum_{i,j,k}(4\nabla_k h_{ij}-4|H|^{-1}h_{ij}\nabla_k|H|)\langle A^-_{ij},\nabla_k\nu_1\rangle.\end{aligned}$$

由于 $f=c_n|H|^2-|A|^2-d_n$ 且

$$\Big(\partial_t-\Delta\Big)f=2(|\nabla^\perp A|^2-c_n|\nabla^\perp H|^2)+2\Big(c_n\sum_{i,j}|\langle A_{ij},H\rangle|^2-\sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij},A_{pq}\rangle|^2-\sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2\Big),$$

我们有

$$\Big(\partial_t-\Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f}=\frac{1}{f}\Big(\partial_t-\Delta\Big)|A^-|^2-|A^-|^2\frac{1}{f^2}\Big(\partial_t-\Delta\Big)f+2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f},\nabla\log f\Big\rangle$$

$$= \frac{1}{f}\Big(2\sum_{i,j,p,q}|\langle A^-_{ij}, A^-_{pq}\rangle|^2 + 2\sum_{i,j,p}|h_{ip}A^-_{pj} - h_{jp}A^-_{ip}|^2 + 2\sum_{i,j,p}|A^-_{ip}\otimes A^-_{jp} - A^-_{jp}\otimes A^-_{ip}|^2 - 2n\bar{K}|A^-|^2\Big)$$
$$+ \frac{1}{f}\Big(-2|\nabla^\perp A^-|^2 + 4\sum_{i,j,k}(\nabla_k h_{ij} - |H|^{-1}h_{ij}\nabla_k|H|)\langle A^-_{ij}, \nabla^\perp_k \nu_1\rangle\Big)$$
$$- |A^-|^2\frac{1}{f^2}\Big(2(|\nabla^\perp A|^2 - c_n|\nabla^\perp H|^2)\Big)$$
$$- |A^-|^2\frac{1}{f^2}\Big(2\Big(c_n\sum_{i,j}|\langle A_{ij}, H\rangle|^2 - \sum_{i,j,p,q}|\langle A_{ij}, A_{pq}\rangle|^2 - \sum_{i,j}|R^\perp_{ij}|^2\Big)\Big)$$
$$+ 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f}, \nabla\log f\Big\rangle.$$

根据第5节，我们得到

$$\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f} \le 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f}, \nabla\log f\Big\rangle - 2n\bar{K}\frac{|A^-|^2}{f} - \delta\frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f.$$

注意，这表明

$$\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f} \le 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f}, \nabla\log f\Big\rangle - 2n\bar{K}\frac{|A^-|^2}{f}.$$

如果我们有如下形式的方程

$$\partial_t u = \Delta u + \langle f, \nabla u\rangle + Cu$$

考虑 $U = e^{-Ct}u$，得到

$$\begin{aligned}\partial_t U &= e^{-Ct}\partial_t u - Ce^{-Ct}u\\ &= e^{-Ct}(\Delta u + \langle f, \nabla u\rangle + Cu) - Ce^{-Ct}u.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\partial_t U = \Delta U + \langle f, \nabla U\rangle.$$

由最大值原理可得 $e^{-Ct}\max_{x\in\mathcal{M}}U(x,t) \le \max_{x\in\mathcal{M}}U(x,0)$。将此应用于上式，得到

$$\frac{|A^-|^2}{f} \le e^{Ct}C(\mathcal{M}_0).$$

¯如果我们假设 $K \le 0$，那么

$$\Big(\partial_t - \Delta\Big)|H|^2 = -2|\nabla H|^2 + 2|\langle A, H\rangle|^2 + 2n\bar{K}|H|^2 \ge 2|\langle A, H\rangle|^2 \ge \frac{2}{n}|H|^4.$$

最大值原理表明

$$|H(x,t)|^2 \ge \frac{1}{\frac{1}{\max_{x\in\mathcal{M}_0}|H(x,0)|^2} - \frac{2}{n}t}.$$

因此，$T_{\max} \leq {}_2 \frac{{}^n}{\text{最大值}_{x\in\mathcal{M}_0}|H(x,0)|^2}$，从而我们可以取

$$\frac{|A^-|^2}{f} \leq C(\mathcal{M}_0).$$

回顾 $\Big(\partial_t - \Delta\Big)f$ 在空间和时间的每一点均为非负。令 $\sigma = \delta$。我们计算

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f^{1-\sigma} &= (1-\sigma)f^{-\sigma}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f + \sigma(1-\sigma)f^{-1-\sigma}|\nabla f|^2\\ &\geq (1-\sigma)f^{-\sigma}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f.\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f^{1-\sigma}} &= \frac{1}{f^{1-\sigma}}\Big(\partial_t - \Delta\Big)|A^-|^2 - |A^-|^2\frac{1}{f^{2-2\sigma}}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f^{1-\sigma} + 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f^{1-\sigma}}, \nabla\log f^{1-\sigma}\Big\rangle\\ &\leq \frac{1}{f^{1-\sigma}}\Big(\partial_t - \Delta\Big)|A^-|^2 - |A^-|^2\frac{1}{f^{2-2\sigma}}(1-\sigma)f^{-\sigma}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f\\ &\quad + 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f^{1-\sigma}}, \nabla\log f^{1-\sigma}\Big\rangle\\ &= f^{\sigma}\Big(\frac{1}{f}\Big(\partial_t - \Delta\Big)|A^-|^2 - \frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f\Big) + \sigma\frac{|A^-|^2}{f^2}f^{\sigma}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f\\ &\quad + 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f^{1-\sigma}}, \nabla\log f^{1-\sigma}\Big\rangle.\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}\frac{1}{f}\Big(\partial_t - \Delta\Big)|A^-|^2 - \frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f &= \Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f} - 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f}, \nabla\log f\Big\rangle\\ &\leq -2n\bar{K}\frac{|A^-|^2}{f} - \delta\frac{|A^-|^2}{f^2}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\Big(\partial_t - \Delta\Big)\frac{|A^-|^2}{f^{1-\sigma}} &\leq -2n\bar{K}\frac{|A^-|^2}{f^{1-\sigma}} - \delta\frac{|A^-|^2}{f^2}f^{\sigma}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f + \sigma\frac{|A^-|^2}{f^2}f^{\sigma}\Big(\partial_t - \Delta\Big)f\\ &\quad + 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f^{1-\sigma}}, \nabla\log f^{1-\sigma}\Big\rangle\\ &= -2n\bar{K}\frac{|A^-|^2}{f^{1-\sigma}} + 2\Big\langle\nabla\frac{|A^-|^2}{f^{1-\sigma}}, \nabla\log f^{1-\sigma}\Big\rangle.\end{aligned}$$

与之前一样，考虑 $U = e^{-Ct}u$，我们得到

$$\begin{aligned}\partial_t U &= e^{-Ct}\partial_t u - Ce^{-Ct}u\\ &= e^{-Ct}(\Delta u + \langle f, \nabla u\rangle + Cu) - Ce^{-Ct}u.\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\partial_t U = \Delta U + \langle f, \nabla U \rangle.$$

由最大值原理可得 $e^{-Ct}\max_{x\in\mathcal{M}} U(x,t) \leq \max_{x\in\mathcal{M}} U(x,0)$。将其应用于上式，得到

$$\frac{|A^-|^2}{f^{1-\sigma}} \leq e^{Ct} C(\mathcal{M}_0).$$

¯如果我们假设 $K \leq 0$，那么

$$(\partial_t - \Delta)|H|^2 = -2|\nabla H|^2 + 2|\langle A, H\rangle|^2 + 2n\bar{K}|H|^2 \geq 2|\langle A, H\rangle|^2 \geq \frac{2}{n}|H|^4.$$

最大值原理表明

$$|H(x,t)|^2 \geq \frac{1}{\frac{1}{\max_{x\in\mathcal{M}_0}|H(x,0)|^2} - \frac{2}{n}t}.$$

因此，$T_{\max} \leq {}_2 \quad \frac{n}{\max_{x\in\mathcal{M}_0}|H(x,0)|^2}$，并且我们可以取

$$\frac{|A^-|^2}{f^{1-\sigma}} \leq C(\mathcal{M}_0),$$

这意味着

$$|A^-|^2 \leq C f^{1-\sigma},$$

$\forall t \in [0,T)$，由于 $f = c_n|H|^2 - |A|^2 - d_n \leq c_n|H|^2 - d_n < c_n|H|^2$，对于 $d_n > d > 0$，这意味着

$$|A^-|^2 < C|H|^{2-2\sigma},$$

由此完成证明。

参考文献

[1] U. Abresch 和 J. Langer。《归一化曲线缩短流与自相似解》。《微分几何杂志》，23(2):175–196，1986年。[2] Ben Andrews。《均凸平均曲率流中的非塌缩》。《几何与拓扑》，16(3):1413–1418，2012年。[3] Ben Andrews 和 Charles Baker。《挤压子流形向球面的平均曲率流》。《微分几何杂志》，85(3):357–395，2010年。

[4] Charles Baker。《高余维子流形的平均曲率流》。澳大利亚国立大学，2011年。博士论文——澳大利亚国立大学。[5] Patrick Breuning。《第二基本形式有界的浸入》。《几何分析杂志》，25(2):1344–1386，2015年。[6] Jing Yi Chen、Jia Yu Li 和 Gang Tian。《随平均曲率流运动的二维图》。《数学学报（英文版）》，18(2):209–224，2002年。[7] Jingyi Chen 和 Jiayu Li。《四维流形中曲面的平均曲率流》。《数学进展》，163(2):287–309，2001年。[8] Robert Haslhofer 和 Bruce Kleiner。《带手术的平均曲率流》。《杜克数学杂志》，166(9):1591–1626，2017年。[9] Gerhard Huisken。《凸曲面在平均曲率流下收敛至球面》。《微分几何杂志》，20(1):237–266，1984年。[10] Gerhard Huisken。《黎曼流形中的凸超曲面在其平均曲率作用下收缩》。《数学发明》，84(3):463–480，1986年。[11] Gerhard Huisken 和 Carlo Sinestrari。《均凸曲面的平均曲率流奇点》。《变分法与偏微分方程》，8(1):1–14，1999年。[12] Gerhard Huisken 和 Carlo Sinestrari。《均凸曲面的平均曲率流奇点》。《变分法与偏微分方程》，8(1):1–14，1999年。[13] Gerhard Huisken 和 Carlo Sinestrari。《二凸超曲面的带手术平均曲率流》。《数学发明》，175(1):137–221，2009年。[14] Joel Langer。《第二基本形式 L_p有界的曲面的紧性定理》。《数学年刊》，270(2):223–234，1985年。[15] H. Blaine Lawson, Jr.《极小超曲面的局部刚性定理》。《数学年刊》（第2辑），89:187–197，1969年。[16] An-Min Li 和 Jimin Li。《球面中极小子流形的内在刚性定理》。《巴塞尔数学档案》，58(6):582–594，1992年。[17] Jiayu Li 和 Ye Li。《$\Sigma_1 \times \Sigma_2$中的图的平均曲率流》。《偏微分方程杂志》，16(3):255–265，2003年。[18] Kefeng Liu、Hongwei Xu 和 Entao Zhao。《黎曼流形中的高余维平均曲率流》。arXiv:1204.0107v1 [math.DG], 2012。[19] Stephen Lynch 和 Huy The Nguyen。《高余维平均曲率流的凸性估计》。预印本，arXiv:2006.05227 [math.DG]。[20] Keaton Naff。《平均曲率流受挤压解的平面性估计》。《杜克数学杂志》，171(2):443–482，2022年。

[21] Keaton Naff：《高余维平均曲率流挤压解的奇点模型》。《纯粹与应用数学杂志》，2023(794)，2023年。[22] Andr´e Neves：《拉格朗日平均曲率流的奇点：零马斯洛夫类情形》。《数学发明》，168(3):449–484，2007年。[23]Huy The Nguyen：《带手术的高余维平均曲率流》。arXiv:2004.07163，2020年。[24] Peter Petersen：《黎曼几何》，数学研究生教材第171卷。施普林格，Cham，第三版，2016年。[25] Knut Smoczyk：《拉格朗日平均曲率流的长期存在性》。《变分法与偏微分方程》，20(1):25–46，2004年。[26] Knut Smoczyk 和 Mu-Tao Wang：《具有凸势函数的拉格朗日子流形的平均曲率流》。《微分几何杂志》，62(2):243–257，2002年。[27] Mao-Pei Tsui 和 Mu-Tao Wang：《球面之间映射的平均曲率流与同伦》。《纯粹与应用数学通讯》，57(8):1110–1126，2004年。[28] Mu-Tao Wang：《通过平均曲率流变形曲面的保面积微分同胚》。《数学研究快报》，8(5-6):651–661，2001年。[29] Mu-Tao Wang：《任意余维图形平均曲率流的长期存在与收敛》。《数学发明》，148(3):525–543，2002年。[30] Mu-Tao Wang：《平均曲率流的高斯映射》。《数学研究快报》，10(2-3):287–299，2003年。[31] Mu-Tao Wang：《平均曲率流使利普希茨子流形变得光滑》。《分析与几何通讯》，12(3):581–599，2004年。[32] Mu-Tao Wang：《平均曲率流保持不变的格拉斯曼流形子集》。《分析与几何通讯》，13(5):981–998，2005年。[33] Brian White：《平均凸集的平均曲率流中奇点的性质》。《美国数学会杂志》，16(1):123–138（电子版），2003年。[34] Brian White：《平均曲率流的局部正则性定理》。《数学年刊》(2)，161(3):1487–1519，2005年。