arXiv:2303.00418v1 [math.RA] 1 Mar 2023

莱布尼茨代数的弱 c-理想

David A. TOWERS 和 Zekiye CILOGLU

英格兰兰卡斯特 LA1 4YF 兰卡斯特大学数学与统计系 d.towers@lancaster.ac.uk, 以及土耳其伊斯帕尔塔 32260 苏莱曼·德米雷尔大学数学系 zekiyeciloglu@sdu.edu.tr

摘要

莱布尼茨代数 L 的一个子代数 B 称为L 的弱 c-理想，如果存在 L 的一个次理想 C，使得 $L = B + C$ 且 $B \cap C \subseteq B_L$，其中 B_L 是包含于 B. 中的 L 的最大理想。这类似于弱 c-正规子群的概念，该概念已被多位作者研究。我们获得了弱 c-理想的一些性质，并利用它们给出了可解及超可解莱布尼茨代数的一些刻画，从而推广了李代数的已有结果。我们注意到，一维弱 c-理想是 c-理想，并证明 Turner 在 [15, 定理 3.2。9] 中关于每个一维子代数都是 c-理想的莱布尼茨代数的分类结果，对一般莱布尼茨代数而言是错误的，但对对称莱布尼茨代数成立。

2010年数学主题分类：17B05、17B20、17B30、17B

关键词和短语：弱 c-理想；Frattini 理想；莱布尼茨代数；对称 Leibniz代数；可解；超可解

1 引言

域 F 上的代数 L 称为莱布尼茨代数，如果对于任意 x、y、$z \in L$，都有

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$$

换言之，右乘算子 $R_x : L \to L : y \mapsto [y,x]$ 是 L的一个导子。因此，这类代数有时称为右莱布尼茨代数；与之相应，也有左莱布尼茨代数的概念，它们满足

$$[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]].$$

显然，右（左）莱布尼茨代数的对代数是左（右）莱布尼茨代数，因此在大多数情况下，采用哪种定义并无区别。对称莱布尼茨代数 L 既是右莱布尼茨代数，也是左莱布尼茨代数，并且对所有 $x,y \in L$，都有 $[[x,y],[x,y]] = 0$。这一最后的恒等式仅在特征为二时才需要，因为在其他情况下，它可由右、左莱布尼茨恒等式推出（见 [7, 引理 1]）。对称莱布尼茨代数 L 是柔性的、幂结合的，并且对所有 $x \in L$ 都有 $x^3 = 0$（见 [6, 命题 2.37]），因此从某种意义上说，它们与李代数相去不远。

每个李代数都是莱布尼茨代数，而每个满足 $[x,x] = 0$ 对每个元素成立的莱布尼茨代数都是李代数。Bloh（[3]）于1965年引入了这类代数，并称其为 D-代数；不过，它们通过Loday和Pirashvili（[8], [9]）的研究才引起更广泛的关注，并获得了如今的名称。它们与许多领域有着天然联系，包括代数 K理论、经典代数拓扑、微分几何、同调代数、环空间、非交换几何和物理学。许多结构性结果已作为李代数中相应结果的类比而得到证明。

Leibniz核是集合 $I = \text{span}\{x^2 : x \in L\}$。那么 I 是 L 的最小理想，使得 L/I 是李代数。此外 $[L,I] = 0$。

我们定义如下级数：

$$L^1 = L, L^{k+1} = [L^k, L](k \geq 1) \text{ and } L^{(0)} = L, L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}](k \geq 0).$$

那么，如果存在某个 $n \in \mathbb{N}$，使得 L 的第 $L^{n+1} =$项为零，但 $L^n \neq 0$（分别地，$L^{(n)} = 0$ 为零，但 $L^{(n-1)} \neq 0$），则称 L 为 n 阶幂零（分别地，导出长度为 n 的可解）。容易验证，当且仅当 L 中任意 $n+1$ 个元素的乘积均为零，但某些 L 中 n 个元素的乘积非零时，L 为 n 阶幂零。幂零根 $N(L)$（分别地，根 $R(L)$）是 L 的最大幂零（分别地，可解）理想。

在 [14] 中，我们引入了弱 c-理想的概念。这个概念类似于 Zhu、Guo 和 Shum 在 [16] 中提出的弱 c-正规子群概念，此后已有许多作者对其进行了进一步研究。它是 c-理想概念的推广，该概念由 [13] 引入。在此，我们研究 [14] 中的结果在多大程度上可以推广到莱布尼茨代数。

第二节介绍弱 c-理想的一些基本性质；特别地，我们证明，莱布尼茨代数 L 的 Frattini 子代数中的弱 c-理想必定是 L 的理想。第三节首先证明，L 的所有极大子代数都是 L 的弱 c-理想，当且仅当 L 可解；此外，L 存在一个作为弱 c-理想的极大可解子代数，当且仅当 L 可解。与 c-理想的相应结果不同，必须将底域限制为特征零，这一点已由 [14] 中的一个例子说明。最后，我们证明，如果 L 的所有极大幂零子代数都是弱 c-理想，或者如果 L 的所有嘉当子代数都是弱 c-理想且 F 的特征为零，那么 L 可解。

第四节证明，如果 L 是一般域上的可解对称李代数，且 L 的每个极大幂零子代数的每个极大子代数都是 L 的弱 c-理想，那么 L 超可解。如果 L 的每个极大幂零子代数的维数都至少为二，则可以去掉可解性这一假设。类似地，如果底域的特征为零且 L 不是三维单代数，也可以去掉这一限制。

在最后一节中，我们证明每个一维子代数是弱 c-理想，当且仅当它是 c-理想；随后研究每个一维子代数都是 c-理想的莱布尼茨代数类。我们证明，这类代数中的循环子代数至多为二维。Turner 在 [15, 定理 3.2.9]，中给出了这类代数的完整刻画，但我们举出一个例子说明该结果是错误的。文中还给出了这类代数的若干性质，但要对其进行完整分类似乎相当复杂。不过，最后我们证明 Turner 的结果对于对称莱布尼茨代数确实成立。

在全文中，“莱布尼茨代数”一词均指域 F 上的有限维右莱布尼茨代数。若 A, B 是 L 的子代数，且满足 $A \subseteq B$，则 A 在 B 中的中心化子记为 $C_B(A) = \{b \in B \mid [b, A] + [A, b] = 0\}$。$A$ 在 B 中的正规化子记为 $N_B(A) = \{b \in B \mid [b, A] + [A, b] \subseteq A\}$。代数直和记为 $\oplus$，而仅向量空间结构的直和记为 $\dotplus$。子集记为“$\subseteq$”，真子集记为“$\subset$”。

2 预备结果

定义 **1** *[10]* 设 L 是域 F 上的莱布尼茨代数，且 B 是 L 的子代数。若存在一条子代数链，则称 B 是 L 的次理想

$$B = B_t \subset B_{t-1} \subset ... \subset B_0 = L$$

使得对每个 $1 \leq i \leq t.$， B_i 都是 B_{i-1} 的理想

定义 **2** *[10]* 设 L 是一个莱布尼茨代数， H 是 L 的一个子代数。若存在 L 的一个理想 K，使得 $L = H + K$ 且 $H \cap K$ 包含于 H 的核心（相对于 L），则称 H 为 L 的 c-理想，记作 H_L；其中，该核心是包含于 H 中的 L 的最大理想。

定义 3 莱布尼茨代数 L 的子代数 B 是 L 的弱 c-理想，若存在 L 中的一个次理想 C，使得 $L = B + C$ 且 $B \cap C \subseteq B_L$。

定义4 若莱布尼茨代数 L 除了 L、平凡子代数 0 和莱布尼茨核 I. 之外，不包含其他弱 c-理想，则称其为弱 c-单。若这三个子代数是 L 的仅有理想，则称其为单。

引理 2.1 设 L 是一个莱布尼茨代数。则以下命题成立:

1. 设 B 是 L 的一个子代数。若 B 是 L 的一个 c-理想，则 B 是 L. 的一个弱 c-理想。2. L 是弱 c-单当且仅当 L 是单的。3. 若 B 是 L 的一个弱 c-理想，且 K 是满足 $B \subseteq K \subseteq L$ 的一个子代数，则 B 是 K 的一个弱 c-理想。4. 若 A 是 L 的一个理想，且 $A \subseteq B$，则 B 是 L 的一个弱 c-理想当且仅当 B/A 是 L/A. 的一个弱 c-理想

证明。

1. 这由定义显然可得。

2. 首先，假设 L 是单的，并设 B 是一个弱 c-理想，且 $B \neq L$。根据弱 c-理想的定义

$$L = B + C \text{ and } B \cap C \subseteq B_L$$

其中 C 是 $L.$ 的次理想。但由于 L 是单的， B_L 必为 0 或 I。若 $B_L = 0$ ，则 $C = L$，因为 $C \neq 0$ 且是 L 的次理想，因此 $B = 0$。若 $B_L = I$ ，同理可得 $C = L$ ，进而 $B = I$。因此 L 是弱 c-单的。

反过来，假设 L 是弱 c-单的。那么，由于L 的每个理想都是弱 c-理想，L 必定是单的。

3. 若 B 是 L的弱 c-理想，则存在 L 的一个次理想 C ，使得

$$L = B + C \text{ and } B \cap C \subseteq B_L$$

现在， $K = K \cap L = K \cap (B + C) = B + (K \cap C)$。由于 C是 L的次理想，因此存在一个子代数链

$$C = C_n \subset C_{n-1} \subset ... \subset C_0 = L$$

其中，对于每个 $1 \leq j \leq n.$ ， C_j 都是 C_{j-1} 的理想。将此链中的每一项与 K 取交，得到

$$C \cap K = C_n \cap K \subseteq C_{n-1} \cap K \subseteq \ ... \subseteq C_0 \cap K = L \cap K = K$$

显然，对于每个 $0 \leq j \leq n.$， $C_j \cap K$都是 $C_{j-1} \cap K$的理想。因此，$C \cap K$ 是 $K.$ 的次理想。此外，

$$B \cap (C \cap K) \subseteq B_K$$

因此， B 是 K.的一个 $weak\ c\text{-}ideal$

(4) 首先，假设 B/A 是 $L/A.$ 的 $weak\ c\text{-}ideal$ ，则存在 L/A 的一个次理想 C/A ，使得

$$\frac{L}{A} = \frac{B}{A} + \frac{C}{A} \text{ and } \frac{B}{A} \cap \frac{C}{A} \subseteq \left(\frac{B}{A}\right)_{L/A} = \frac{B_L}{A}$$

由此可得 $L = B + C$ 和 $B \cap C \subseteq B_L$ ，其中 C 是 $L.$的一个次理想

反之，假设 A 是 L 的一个理想，且 $A \subseteq B$ ，而 B 是 $L.$ 的一个 $weak\ c\text{-}ideal$ ，则存在 L 的一个 C 次理想，使得

$$L = B + C \text{ and } B \cap C \subseteq B_L.$$

由于 A 是理想，而 $A \leq B$ 是商代数

$$\frac{L}{A} = \frac{B + C}{A} = \frac{B}{A} + \frac{C + A}{A}$$

其中 $(C+A)/A$ 是 L/A 的次理想，并且

$$\frac{B}{A}\cap\frac{C+A}{A}=\frac{B\cap(C+A)}{A}=\frac{A+B\cap C}{A}\subseteq\frac{B_L}{A}=\left(\frac{B}{A}\right)_{L/A}$$

因此 B/A 是 $weak\ c\text{-}ideal$ 的 L/A.

□

莱布尼茨代数 L 的 Frattini 子代数 $F(L)$ 是 $L.$ 的所有极大子代数的交。 L 的 Frattini 理想 $F(L)_L$ 记作 $\phi(L)$。

下一个结果是 [13, 命题 2.2] 的推广，同样的证明仍然适用，但为完整起见，我们将其列出。

命题 2.2 设 B、 C 是 L 的子代数，且 $B\subseteq F(C)$。如果 B 是 L 的弱 c-理想，则 B 是 L 的理想，且 $B\subseteq\varphi(L)$。

证明。设 $L=B+K$，其中 K 是 L 的次理想，且 $B\cap K\subseteq B_L$。于是

$$C=C\cap L=C\cap(B+K)=B+C\cap K=C\cap K$$

由于 $B\subseteq F(C)$。因此， $B\subseteq C\subseteq K$，从而得到 $B=B\cap K\subseteq B_L$，并且 B 是 $L.$ 的理想。由 [12, 引理 4.1] 可知， $B\subseteq\varphi(L).$ □

若存在 U 这个 L 的子代数，使得 $L=A+U$ 且 $A\cap U=0.$，则理想 A 在 L 中有补。我们据此将子理想补定义如下：

定义 5 设 L 是一个莱布尼茨代数，且 B 是 $L.$ 的一个子代数。若存在 L 的一个次理想 C，使得 $L=B+C$ 且 $B\cap C=0.$，则 B 在 L 中有子理想补。

于是我们有以下引理：

引理 2.3 若 B 是莱布尼茨代数 L 的弱 c-理想，则 B/B_L 在 $L/B_L.$ 中有子理想补。反之，若 B 是 L 的子代数，且 B/B_L 在 L/B_L 中有子理想补，则 B 是 $L.$ 的弱 c-理想。

证明。设 B 是 L 的弱 c-理想。那么，存在 L 的一个次理想 C，使得 $B+C=L$ 且 $B\cap C\subseteq B_L.$。若 $B_L=0$，则 $B\cap C=0$，并且 C 是 $L.$ 中 B 的子理想补。因此，假设 $B_L\neq0,$ 那么我们可以

构造商代数 B/B_L 和 $(C+B_L)/B_L$. 。若我们对这两个商代数取交;

$$\begin{aligned}\frac{B}{B_L}\cap\frac{C+B_L}{B_L} &= \frac{B\cap(C+B_L)}{B_L}\\ &= \frac{B_L+(B\cap C)}{B_L}\\ &\subseteq \frac{B_L}{B_L}=0\end{aligned}$$

因此，$(C+B_L)/B_L$ 是 L/B_L. 中 B/B_L 的子理想补。反过来，若 K 是 L 的一个次理想，且 K/B_L 是 L/B_L 中 B/B_L的子理想补，则我们有

$$\frac{L}{B_L}=\frac{B}{B_L}+\frac{K}{B_L}\text{ and }\frac{B}{B_L}\cap\frac{K}{B_L}=0$$

于是 $L=B+K$和 $B\cap K=0\subseteq B_L$，因此 B是 L. □的弱 c-理想

3 可解代数的一些刻画

定理 3.1 设 L 是特征零域 F 上的一个莱布尼茨代数，且 B 是 L的一个理想。那么， B 可解，当且仅当 L 中每个不包含 B 的极大子代数都是 L.的弱 c-理想

证明。首先假设 B 可解，并设 M 是 L 中不包含 B的一个极大子代数。那么存在 $k\in\mathbb{N}$ 使得 $B^{(k+1)}\subseteq M$，但 $B^{(k)}\nsubseteq M$。显然， $L=M+B^{(k)}$，且 $B^{(k)}\cap M$ 是 L的一个理想，因此$B^{(k)}\cap M\subseteq M_L$。由此可知， M 是一个 c-理想，因而是L的一个弱 c-理想。

反过来，假设 L 中每个不包含 B 的极大子代数都是 L的弱 c-理想。设 M/I 是 L/I 中一个不包含 $(B+I)/I$的极大子代数。那么 M 是 L 中一个不包含 B的极大子代数，因此是 L的弱 c-理想。由引理 2.1， M/I 是 L/I的弱 c-理想。由于 L/I 是一个李代数，由 [14, 定理 3.2] 可知 $(B+I)/I$是可解的。因此 $B+I$是可解的，从而 B也是可解的。 □

推论 3.2 设 L 是特征零域 F 上的莱布尼茨代数。则 L 可解，当且仅当 L 的每个极大子代数都是 L 的弱 c-理想。

引理 3.3 设 $L = U + C$ 是一个莱布尼茨代数，其中 U 是 L 的可解子代数，且 C 是 L 的次理想。则存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得$L^{(n_0)} \subseteq C$。

证明。这与 [14, 引理 3.5] 相同。 □

定理 3.4 设 L F 是特征零域上的莱布尼茨代数。那么， L 有一个作为 L 弱 c-理想的极大可解子代数，当且仅当 L 可解。

证明。首先假设 L 有一个极大可解子代数 M，它是 L的弱 c-理想。我们证明 L 可解。设 L 是一个极小反例。那么，存在 L 的一个次理想 K，使得 $L = M + K$且 $M \cap K \subseteq M_L$。若 $M_L \neq 0$，则根据极小性假设，L/M_L 可解，且 M_L 可解，因此 L 可解，矛盾。由此可得 $M_L = 0$ 且 $L = M \dot{+} K$。若 R 是 L 的可解根，则$R \subseteq M_L = 0$，因此根据 [2, 定理 1], L 是一个半单李代数。但现在，对所有 $n \geq 1$， $L = L^{(n)} \subseteq K \neq L$，由引理 3.3 可得矛盾。结论得证。

逆命题由推论 3.2 得出。 □

定理 3.5 设 L 为特征为零的域上的一个莱布尼茨代数，且所有极大幂零子代数都是 L的弱 c-理想。则 L是可解的。

证明。假设 L 不是可解的，但 L 的所有极大幂零子代数都是 L的弱 c-理想。设 L的 Levi 分解为，其中 $S \neq 0$ 是一个半单李代数（[2, 定理 1]）。设 B 为 S 的一个极大幂零子代数，并设 U 为包含它的 L 的一个极大幂零子代数。则存在 L 的一个次理想 C，使得 $L = U + C$且 $U \cap C \subseteq U_L$。由引理 3.3 可知， $S = S^{(n_0)} \subseteq L^{(n_0)} \subseteq C$，因此 $B \subseteq U \cap C \subseteq U_L$，从而 $S \cap U_L \neq 0$。但 $S \cap U_L$ 是 S 的一个理想，因而是半单的。由于 U 是幂零的，这就产生了矛盾。 □

定义 6 莱布尼茨代数 L 的嘉当子代数是一个幂零子代数 C，满足 $C = N_L$（C）。在特征为零的域上，此类子代数确实存在（参见 *[1,* 第 *6]* 节）。

以下结果是对 Dixmier 在 [5] 中一个结果的推广。

引理 3.6 设 L 是定义在特征为零的域上的莱布尼茨代数，且其 Levi因子 S 非零。若 H 是 S 的嘉当子代数，且 B 是其在 L 的可解根中的中心化子的嘉当子代数，则 $H+B$ 是 L 的嘉当子代数。

证明。令 R 为 L 的可解根。于是对所有 $r \geq 1$，有 $(H+B)^r = H^r + B^r$，因此 $H+B$ 是 L 的幂零子代数。令 $x \in N_L(H+B)$，并令 $x = s+r$，其中 $s \in S$ 且 $r \in R$。于是

$$[x,H] + [H,x] = [s,H] + [H,s] + [r,H] + [H,r] \subseteq H+B,$$

因此 $[H,s] + [s,H] \subseteq H$，从而 $s \in N_S(H) = H$。此外，

$$[x,B] + [B,x] = [s,B] + [B,s] + [r,B] + [B,r] \subseteq H+B,$$

因此 $[B,r]+[r,B] \subseteq B$，因为 $[s,B]+[B,s] = 0$，从而 $r \in N_R(B) = B$。于是，$N_L(H+B) = H+B$，且 $H+B$ 是 L 的嘉当子代数。 □

定理 3.7 设 L 是特征为零的域上的莱布尼茨代数，其中 L 的每个嘉当子代数都是 L 的弱 c-理想。则 L 是可解的。

证明。假设 L 的每个嘉当子代数都是 L的弱 c-理想，并且 L 有一个非零的 Levi因子 $S.$。设 H 是一个嘉当子代数，S，并设 B 是 $L.$ 的可解根中其中心化子的一个嘉当子代数。由引理 3.6，$C = H+B$ 是 L的一个嘉当子代数，并且存在 L 的一个次理想 K，使得 $L = C+K$ 和 $C \cap K \subseteq C_L$。于是，由引理 3.3，存在一个 $n_0 \geq 2$，使得 $L^{(n_0)} \subseteq K$。但是 $S \subseteq L^{(n_0)} \subseteq K$，因此 $C \cap S \subseteq C \cap K \subseteq C_L$，从而得到 $C \cap S \subseteq C_L \cap S = 0$，矛盾。由此可知 $S = 0$，进而 L 是可解的。 □

4 超可解代数的一些刻画

本节我们将重点讨论对称莱布尼茨代数。我们不知道有任何非对称的莱布尼茨代数会使这些结果不成立，但我们无法在更一般的情形下证明这些结果。首先，我们需要以下引理，它在一般情形下也成立。

引理4.1 *[15,* 引理5.1.*2]* 设 L 是任意域上的莱布尼茨代数，A 是 L的理想，且 U/A 是 L/A的极大幂零子代数。那么，$U = C + A$，其中 C 是 L.的极大幂零子代数。

定理4.2 设 L 是任意域F 上的可解对称 Leibniz 代数，其中 L 的每个极大幂零子代数的每个极大子代数都是 L. 的弱 c-理想。那么 L 是超可解的。

证明。设 L 是一个极小反例。若 $I = 0$，则由 [14, 定理 4.5], 可得结果，因此假设 $I \neq 0$，并设 A 是 L 的一个极小理想，且包含于 I 中。由于 $[L, I] = [I, L] = 0$, $\dim A = 1$。设 U/A 是 L/A 的一个极大幂零子代数，并设 B/A 是 U/A 的一个极大子代数。那么 $U = C + A$，其中 C 是 L 的一个极大幂零子代数，由引理 4.1 得出。但是 $C + A$ 是幂零的，因此 $A \subseteq C = U$。于是， B 是 C 的一个极大子代数，并且存在 L 的一个次理想 K，使得 $L = B+K$ 且 $B \cap K \subseteq B_L$。现在

$$\frac{L}{A} = \frac{B}{A} + \frac{K + A}{A} \text{ and } \frac{K + A}{A} \text{ is a subideal of } \frac{L}{A}.$$

此外,

$$\frac{B}{A} \cap \frac{K + A}{A} = \frac{A + B \cap K}{A} \subseteq \frac{A + B_L}{A} \subseteq \left(\frac{B}{A}\right)_{L/A}.$$

由此可知， L/A 满足与 L 相同的假设，因此根据 L 的极小性， L/A 是超可解的。于是， L 是超可解的。 □

如果 L 没有一维极大幂零子代数，那么只要 F 的特征为零，我们就可以从上述结果中去掉可解性这一假设。

推论 4.3 设 L是域 F 上的特征零对称Leibniz代数，其中每个极大幂零子代数的维数至少为二。若 L 的每个极大幂零子代数的每个极大子代数都是 L 的弱 c- 理想，则 L 是超可解的。

证明。设 N 是 L的幂零根，并设 $x \notin N.$。于是，对于某个 $L.$ 的极大幂零子代数 C，有 $x \in C$。由于 $\dim C > 1$，存在 C 的一个极大子代数 B，使得 $x \in B.$。于是，存在 L 的一个次理想 K，使得 $L = B + K$ 且 $B \cap K \subseteq B_L \leq C_L \leq N$。显然， $x \notin K$，否则 $x \in B \cap K \leq N$.。

现在 $L/I = (B + I)/I + (K + I)/I$ 其中 $(B + I)/I$ 是幂零的，而 $(K + I)/I$ 是 L/I 的次理想。由 [14, 引理4.2] 可知，对于某个 $r \in \mathbb{N}$，有 $L^r \subseteq K + I$。因此 $L^{r+1} \subseteq K$。我们已经证明，如果 $x \notin N$，那么存在 L 的一个次理想 K，使得 $x \notin K$ 且 $L^{r+1} \subseteq K$。假设 L 是

不可解。那么 L 存在一个半单 Levi因子 S。取 $x \in S$。于是 $x \in S = S^{r+1} \subseteq K$，矛盾。因此 L 是可解的，结论由定理4.2得出。 □

如果 L 有一个一维极大幂零子代数，那么我们还可以在定理4.4中去掉可解性假设，前提是底域 F 再次具有特征零，且 L 不是三维单代数。

推论4.4 设 L是域 F 上的对称Leibniz代数，且 F 的特征为零。如果 L 的每个极大幂零子代数的每个极大子代数都是 L的弱 c-理想，那么 L 是超可解的或为三维单代数。

证明。如果 L 的每个极大幂零子代数的维数至少为二，则根据推论4.3， L 是超可解的。因此，我们只需考虑 L 具有一个一维极大幂零子代数（记为 Fx）的情形。首先假设 $I = 0$l。那么 L 是李代数，结论由推论4.7]以及 [14, 得出。

现在设 $I \neq 0$ ，并令 L 为一个极小反例。那么 L 有一个极小理想 $A \subseteq I$. 。如定理4.2的证明所示， L/A 满足与 L 相同的假设，因此是超可解的或三维单代数。在前一种情况下， L 可解，因此根据定理4.2，它是超可解的。在后一种情况下，根据 Levi 定理， $L = A \oplus S$，其中 S 是三维单代数。但此时 L 是李代数，结论再次由推论4.7] 得出。 □

5 每个一维子代数都是弱 c-理想的莱布尼茨代数

命题5.1 对于莱布尼茨代数 L 的一维子代数 Fx ，以下条件等价:

(i) Fx 是 L 的弱 c-理想;

(ii) Fx 是 L 的 c-理想；且

(iii) 要么 Fx 是 L的理想，要么存在 L 的一个理想 B ，使得$L = B \dot{+} Fx$ 且 $x \notin L^2$。

证明。(i) 与 (ii) 等价，因为 L 中余维为一的次理想是理想。

若 (ii) 成立，则存在 L 中的理想 B，使得 $L = Fx + B$，且 $Fx \cap B \subseteq (Fx)_L = 0$ 或 Fx。前者意味着 $L = B \dot{+} Fx$ 和 $x \notin L^2 \subseteq B$；后者意味着 Fx 是 L 的理想。因此 (iii) 成立。反之显然。 □

定义7 令 $J = \{x \in L \mid x^2 = 0\}$。注意， $I \subseteq J$。

推论 5.2 设 L 是任意域上的莱布尼茨代数。那么，每个一维子代数都是 c-理想，当且仅当 $L^2 \cap J \subseteq Asoc(L)$。

证明。显然，若 Fx 是 L 的一维子代数，则 $x \in J$。由命题5.1可知，若 L 的每个一维子代数都是 c-理想，则 $L^2 \cap J \subseteq Asoc(L)$。

因此，假设 $L^2 \cap J \subseteq Asoc(L)$，并设 Fx 是 L 的一维子代数。若 $x \in L^2$，则 Fx 是 L 的理想。若 $x \notin L^2$，令 B 为一个包含 L^2 且与 Fx 互补的子空间。则 B 是 L 的理想，且 $L = Fx \dot{+} B$。因此，根据命题5.1 (iii)， Fx 是一个 c-理想。 □

命题5.3 设 $L = \langle x \rangle$ 是一个循环莱布尼茨代数。那么， L 的每个一维子代数都是c-理想，当且仅当$\dim L \leq 2$。

证明。假设 L 的每个一维子代数都是c-理想，且$\dim\ L > 1$。若 Fx^2 不是 L的理想，则存在 L的一个理想 B，使得 $L = Fx^2 + B$。但此时，对某个 $\lambda \in F$，有 $x + \lambda x^2 \in B$，因此$x^2 = [x, x + \lambda x^2] \in B$，矛盾。故 Fx^2 是 L的理想， $x^3 = \lambda x^2$，其中 $\lambda \in F$ 且 $L = Fx + Fx^2$。

反过来，假设$\dim\ L = 2$。那么 $L = Fx + Fx^2$，其中 $x^3 = 0$或 $x^3 = x^2$。在前一种情况下，唯一的一维子代数是 Fx^2，且它是 L的理想。在后一种情况下，一维子代数为 Fx^2，它是一个理想；以及 $F(x - x^2)$，它有补 Fx^2。□

在 [15] 中出现了以下结果。

定理 5.4 设 L是域 F 上的一个莱布尼茨代数。则，当且仅当满足以下条件时，L的所有一维子代数都是 L 的 c-理想:

(i) $L^3 = 0$; 或

(ii) $L = A \oplus B$，其中 A 是 L 的阿贝尔理想，而 B 是 L的近乎阿贝尔理想。

证明。参见 [15, 定理 3.2.9，第 26] 页。 □

Turner 将莱布尼茨代数 L 的子代数 B 定义为近乎阿贝尔，条件是 $B = Fx\dot{+}D$，其中 D 是阿贝尔的，并且对所有 $d \in D$， $[d, x] \subseteq D$ 成立。（她处理的是左莱布尼茨代数，因此乘积的顺序实际上与这里相反；而我们关注的是右莱布尼茨代数。）然而，这一定义存在问题，因为证明中似乎假定对所有 $d \in D$， $[d, x] = d$ 成立，但这并不能由定义推出。此外，定义也没有说明 $[x, d]$。文献中还定义了两种近乎阿贝尔莱布尼茨代数：如果对所有 $d \in D$， $[d, x] = -[x, d] = d$ 成立，则称 $B = Fx\dot{+}D$ 为近乎阿贝尔Lie代数；如果对所有 $d \in D$， $[d, x] = d$ 成立，则称其为近乎阿贝尔非Lie Leibniz代数。在这两种情形中，其余乘积均为零。

此外，以下示例表明该结果并不成立。

EXAMPLE 5.1 设 L是域上特征不为2的三维Leibniz代数，其基为 a, b, x，非零乘积为 $a^2 = b, [a, x] = -[x, a] = \frac{1}{2}a$, $[b, x] = b$。那么 $(\alpha a + \beta b + \gamma x)^2 = 0$ 当且仅当 $\alpha^2 = -\beta\gamma$。若 $\alpha = 0$，则或者 $\beta - 0$，此时 Fx 有补理想 $Fa + Fb$；或者 $\gamma = 0$，此时 Fb 是 L的理想。若 $\alpha \neq 0$，则 $F(\alpha a + \beta b + \frac{\alpha^2}{\beta}x)$ 有补理想 $Fa + Fb$。由此可知，每个一维子代数都是一个 c-理想。然而， L 并非定理 5.4 所给出的形式。

事实上，所有一维子代数都是 c-理想的莱布尼茨代数，其结构可能比定理 5.4 所述的更为复杂。目前我们能得到的最好结果如下。

引理 5.5 设 L 是一个莱布尼茨代数，其中每个一维子代数都是 c-理想。那么

(i) 所有极小阿贝尔理想都是一维的；(ii) 若 $Asoc(L) = Fa_1 \oplus \ldots \oplus Fa_r$ 且 $x \in L$，则对于某些 $0 \neq \lambda_x \in F, 1 \leq i \leq r$，有 $a_i \in Z(L)$ 或 $[a_i, x] = \lambda_x a_i$。(iii) 设 $Asoc(L) = Z(L) \oplus D$，其中对于所有 $a \in D, x \in L$，都有 $[a, x] = \lambda_x a$。那么，要么 $D = 0$，要么 $L = (Z(L) \oplus D)\dot{+}C\dot{+}Fx$，其中 $[D, C] = [C, D] = 0$，$(Z(L) \oplus D)\dot{+}C$ 是 L 的一个理想，且对于所有 $a \in D$，都有 $[a, x] = a$。

证明。

(i) 设 A 是 L 的一个极小阿贝尔理想，并设 $a \in A$。若 $A \neq Fa$，则存在 L 的一个理想 K，使得 $L = Fa \dot{+} K$。但 $A \cap K = 0$，因此 $A = Fa$，矛盾。

(ii) 假设 $[a_i, x] = \lambda a_i$ 和 $[a_j, x] = \mu a_j$ 满足 $\lambda \neq \mu$。那么 $F(a_i + a_j)$ 不是 L 的理想，因此存在 L 的一个理想 M，使得 $L = F(a_i + a_j) \dot{+} M$。显然，$a_i$ 和 a_j 中有一个不属于 M。假设 $a_i \notin M$，于是 $L = Fa_i \oplus M$ 且 $a_i \in Z(L)$。

(iii) 设 $\Lambda : L \to F$ 由 $\Lambda(x) = \lambda_x$ 给出。这是一个线性变换。因此，要么 $\mathrm{Im}\ \Lambda = 0$，此时 $D = 0$；要么 $L = \mathrm{Ker}\ \Lambda \dot{+} Fx$ 且 $\lambda_x = 1$。令 $L = (Z \oplus D) \dot{+} C \dot{+} Fx$，其中 $C \subseteq \mathrm{Ker}\ \Lambda$。设 $d \in D$,$c \in C$ 满足 $[c, d] = \lambda d$。那么

$$\lambda^2 d = \lambda[c, d] = [c[c, d]] = [c^2, d] - [[c, d], c] = 0,$$

因此 $\lambda = 0$。于是 $[D, C] = [C, D] = 0$。不难验证，$\mathrm{Ker}\ \Lambda$ 是 L的一个理想。

□

然而，我们可以将定理 5.4 推广到对称Leibniz代数。

定理 5.6 设 L是域 F 上的对称莱布尼茨代数。那么， L的所有一维子代数都是 L 的 c- 理想，当且仅当：

(i) $L^3 = 0$；或

(ii) $L = A \oplus B$，其中 A 是 L 的一个阿贝尔理想，且 B 是 L的一个近乎阿贝尔李理想。

证明。假设 L 的所有一维子代数都是 L 的 c-理想。首先注意，若 x、$y \in L$，则 $[x, y]^2 \in L^2 \cap J$，因此根据推论 5.2， $L^2 \subseteq Asoc(L)$。此外， L 必须具有引理 5.5 (iii) 中给出的结构。若$D = 0$，则 $L^2 \subseteq Z(L)$，且 (i) 成立。因此，假设 $D \neq 0$。

设 $0 \neq a \in D$。若 $z \in Z$，则 $F(z + a)$ 不是 L 的理想，因此$z + a \notin L^2$。但是 $a = [a, x] \in L^2$，所以 $z \notin L^2$ 且 $Z \cap L^2 = 0$。由此可得$L^2 = D$。现在，若 $c \in C$，则有 $c^2 \in L^2 = D$，因此 $c^3 = c^2$。但是，根据 [6, 命题 2.17]， $c^3 = 0$。若 $[c, x] = 0$，则 $[x, c] \in L^2 = D$，因此 $[x, c] = [[x, c], x] = [x, [c, x]] = 0$，因为根据 [6, 命题 2.17]， L 也是柔性代数。于是 Fc 是 L的理想。但这样一来 $c \in L^2 \cap C = D \cap C = 0$。

因此，设 $[c, x] \neq 0$。则利用柔性律再次得到 $[c - [c, x], x] = 0$ 且 $[x, c - [c, x]] = [x, c] - [x, [c, x]] = [x, c] - [[x, c], x] = 0$。此外，

$[c-[c,x],c-[c,x]]=-[c,[c,x]]-[[c,x],c]=-[c,[c,x]]-[c,[x,c]]=0$，因为 $[c,x]+[x,c]\in I$。由此可知，$F(c-[c,x])$ 是 L 的一个理想，因而包含在 $L^2=D$ 中。因此，$c\in C\cap D=0$，所以 $C=0$。

最后，对于所有 $a\in D$，$[a,x]=a$。此外，$[a,x]+[x,a]\in I$，因此 $0=[[a,x],x]+[[x,a],x]=[a,x]+[x,a]$ 以及 $[x,a]=-a$。因此，L 正如（ii）中所述。□

参考文献

[1] D.W. BARNES，《关于莱布尼茨代数的一些定理》，《代数通讯》39 (2011)，2463-2472。[2] D.W. BARNES，《关于莱布尼茨代数的 Levi 定理》，《澳大利亚数学会通报》86 (2012)，184-185。[3] A. BLOH，《李代数概念的一种推广》，《苏联科学院院刊》165 (1965)，471–473。[4] T. BURCH，《超可解Leibniz代数》，博士论文，北卡罗来纳州立大学，2015。[5] J. DIXMIER，《李代数中的Cartan子代数与Levi分解（法文）》，《加拿大皇家学会论文集与会刊》第III辑（3）50 (1956)，17-21。[6] J. FELDVOSS，《作为非结合代数的莱布尼茨代数》，《非结合数学及其应用》，《当代数学》721 (2017)，115-149。[7] M. JIBLADZE 和 T. PIRASHVILI，《对称莱布尼茨代数的李理论》，《同伦及相关结构杂志》15 (2020)，167-183。[8] J.-L. LODAY，《李代数的非交换版本：莱布尼茨代数》，《数学教学》（第2辑）39（3–4）（1993），269–293。[9] J.-L. LODAY 和 T. PIRASHVIL，《莱布尼茨代数的泛包络代数与（上）同调》，《数学年刊》296（1）（1993）139–158。[10] K.C. MISRA、E. STITZINGER 和 X. YU，《莱布尼茨代数中的子不变性》，《代数杂志》567（1）（2021），128-138。

[11] I.N. STEWART, 《李代数的子理想》，博士论文，华威大学，1969年。[12]D. A. TOWERS, 《代数的 Frattini 理论》，《伦敦数学会会刊》27（1973），第440–462页。[13] D. A. TOWERS, 《李代数的 C-理想》，《代数通讯》37（2009），第4366–4373页。[14] D.A. TOWERS 和 Z. CILOGLU, 《李代数的弱 c-理想》，《土耳其数学杂志》45（2021），1940-1948。[15] B.N. TURNER, 《可解与超可解Leibniz代数的一些判据》，博士论文，北卡罗来纳州立大学，2016, http://www.lib.ncsu.edu/resolver/1840.16/11085。[16] L. ZHU、W. GUO 和 K.P. SHUM, 《有限群的弱 c-正规子群及其性质》，《代数通讯》30（2002），5505-5512。