非均匀网格上二阶演化方程的算子差分格式

P.N. Vabishchevich[a,b,*]

[a] *Nuclear Safety Institute, Russian Academy of Sciences, 52, B. Tulskaya, 115191 Moscow, Russia*
[b] *North-Eastern Federal University, 58, Belinskogo st, Yakutsk, 677000, Russia*

arXiv:2303.00421v1 [math.NA] 1 Mar 2023

摘要

二阶演化方程柯西问题的近似解，首先采用三级时间近似来求得。在均匀时间网格上，这类近似格式易于构造，分析也相对简单。数值求解应用问题时，应着重考虑可变时间步长的近似格式。在非均匀网格上使用多层格式时，应通过选择适当的近似格式并确保近似解的稳定性来保持精度。本文针对二阶演化方程柯西问题的近似解，在非均匀时间网格上构造了无条件稳定的、一阶和二阶精度格式。我们将原二阶微分算子方程通过一种特殊变换化为一阶方程组。对于该一阶方程组，我们采用标准的二级时间近似。我们在有限维希尔伯特空间中，得到了关于初始数据和右端项的稳定性估计。消去辅助变量后，可得到原二阶演化方程的三层格式。我们针对空间一维双抛物方程的测试问题进行了数值实验。通过网格步长随机变化的非均匀网格，展示了所构造格式的精度和稳定性。

关键词： 二阶演化方程，柯西问题，一阶演化方程组，两层格式，近似解的稳定性，双抛物型方程

2000 年 *MSC* 分类： 35R20, 65J08, 65M06, 65M12

1. 引言

两层格式（龙格-库塔方法） [1, 2] 广泛用于常微分方程组柯西问题的近似解。第二类方法基于多层时间近似（多步法），即转到新的时间层时，需要用到前两个或更多时间层上的已知解。数值求解偏微分方程的非定常边值问题时，最常见的是两层和三层近似格式。考虑二阶演化方程的柯西问题时，自然会关注三层近似格式。

均匀时间网格上的多层格式最容易构造和研究。计算实践着重于使用非均匀网格，通过选择时间步长来考虑解的局部特征。在非均匀网格上使用多层近似格式时，主要有两个问题。第一个问题与时间近似格式的选择有关，以确保近似解达到所需的精度。第二个问题则源于如何确保所选近似格式下解的稳定性条件。

*通讯作者。*Email address:* vab@ibrae.ac.ru (P.N. Vabishchevich)

算子差分格式的稳定性（正确性）理论结果 [3] 广泛应用于构造和研究应用问题数值解中的时间差分近似。在这种情况下，差分格式是在有限维希尔伯特空间中考虑的；该格式写成统一的（典范）形式，并且存在相应的稳定性条件。均匀时间网格上二层和三层格式稳定的充要条件已经得到（例如，参见 [4]）。

对于两层格式，推广到非均匀网格只涉及编辑性调整。对于三层格式，无论是选择近似格式还是研究稳定性，情况都要复杂得多。下面简述时间步长变化较少这一特殊情况下的一些已有结果。研究三层差分格式的稳定性时，必须分别考虑时间步长增大和减小的情形。我们发现（例如，见 [5, 6, 7]），时间步长发生变化时，先验稳定性估计会变差；时间步长变化后，先验估计中的常数会随时间步长比成比例增大。

对于高阶演化方程，可以转化为一阶演化方程组。对于所得的向量问题，可以采用非均匀网格上的常用两层近似格式。通过选择辅助未知量来体现问题的特殊性，从而使一阶方程组的两层格式具有所需的精度和稳定性。本文针对有限维希尔伯特空间中具有自伴常正定算子的一般二阶微分算子方程的柯西问题，采用了这一方法。我们构造了所引入的一阶演化方程组的无条件稳定一阶和二阶近似格式。消去辅助变量后，可得到代数等价的无条件稳定二阶三层格式。

我们简要介绍本文的内容。第2节建立了二阶演化方程的柯西问题，并给出了均匀时间网格上三层差分格式稳定性的一个典型结果。第3节通过引入新的未知量，将原二阶方程写成一阶方程组，并证明了相应向量柯西问题解的先验估计。本文的核心部分是第3节，其中构造了方程组的无条件稳定两层格式。消去辅助变量后，得到原二阶演化方程在非均匀时间网格上的三层格式。第5节给出了均匀网格和非均匀网格上的数值实验结果。空间一维双抛物方程的柯西问题被用作测试问题。我们在第6节总结了研究结果。

2. 问题表述

我们考虑实有限维希尔伯特空间 H 中二阶演化方程的柯西问题。函数 $u(t)$ 满足方程

$$C\frac{d^2u}{dt^2} + B\frac{du}{dt} + Au = f(t), \quad t > 0, \tag{2.1}$$

以及初始条件

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_0'. \tag{2.2}$$

The 线性常数（与 t 无关）算子 A, B, C 是自伴且正定的 te:

$$A = A^* \geq \nu_A I, \quad \nu_A > 0, \quad B = B^* \geq \nu_B I, \quad \nu_B > 0, \quad C = C^* \geq \nu_C I, \quad \nu_C > 0, \tag{2.3}$$

其中 I 是 H中的单位算子。我们将使用通常的记号 $(\cdot,\ \cdot)$ 和 $\|\cdot\|$，分别表示 H中的内积和范数。对于自伴正定算子 D，我们定义一个希尔伯特空间 H_D，其内积和范数为 $(u,\ v)_D = (Du,\ v)$ $\|u\|_D = (u,\ v)_D^{1/2}$.

特别是在使用有限元法或有限体积法对偏微分方程非定常边值问题进行数值研究时，采用空间离散近似会得到这类问题

。我们可以将 $C=0$ 处的方程（2.1）与抛物型方程以及 $B=0$ 处的双曲型方程联系起来。

下面给出问题 (2.1)—(2.3) 的解的一个简单先验估计；该估计将指导我们研究时间近似。将方程 (2.1) 与 H by du/dt 作内积，得到等式

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\Big\|\frac{du}{dt}\Big\|_C^2+\|u|A^2\Big)+\Big\|\frac{du}{dt}\Big\|_B^2=\Big(f,\frac{du}{dt}\Big).$$

对于右端项，我们采用如下估计

$$\Big(f,\frac{du}{dt}\Big)\le\Big\|\frac{du}{dt}\Big\|_B^2+\frac{1}{4}\|f|2_{B^{-1}}.$$

由此不等式，根据格朗沃尔引理可得先验估计

$$\Big\|\frac{du}{dt}(t)\Big\|_C^2+\|u(t)\|_A^2\le\|v_0\|_C^2+\|u_0\|_A^2+\frac{1}{2}\int_0^t\|f(\theta)\|_{B^{-1}}^2d\theta. \tag{2.4}$$

在柯西问题 (2.1)、(2.2) 的近似解中，自然要关注无条件稳定的三层差分格式。当时间步长 $\tau=$ const 且令 $y^n=y(t_n)$ $t_n=n\tau$, $n=0$，1、..... 时，采用均匀时间网格最为方便。权重 $\sigma=$ const >0 的三层差分格式具有如下形式

$$C\frac{y^{n+1}-2y^n+y^{n-1}}{\tau^2}+B\frac{y^{n+1}-y^{n-1}}{2\tau}+Ay^{n+\sigma}=f^n\quad n=1,2,\dots, \tag{2.5}$$

$$y^0=u^0,\quad y^1=\tilde{u}^1, \tag{2.6}$$

采用以下记号

$$y^{n+\sigma}=\sigma y^{n+1}+(1-2\sigma)y^n+\sigma y^{n-1}.$$

根据初始条件 (2.2)，令

$$u^0=u_0,\quad \tilde{u}^1=u_0+\tau u_0'\quad(\tilde{u}^1\approx u^1(\tau)\approx u_0+\tau u_0').$$

三层格式 (2.5)、(2.6) 具有 τ 二阶精度。算子差分格式的稳定性理论给出了该格式无条件稳定的以下条件：$\sigma\ge0.25$。

定理1. 三层差分格式 *(2.3)*、*(2.5)*、*(2.6)* 对于 $\sigma\ge0.25$ 无条件稳定。在这些约束下，*(2.1)*、*(2.2)* 的近似解满足先验估计

$$\begin{aligned}&\Big\|\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}\Big\|_D^2+\Big\|\frac{y^{n+1}+y^n}{2}\Big\|_A^2\\&\qquad\le\Big\|\frac{\tilde{u}^1-u^0}{\tau}\Big\|_D^2+\Big\|\frac{\tilde{u}^1+u^0}{2}\Big\|_A^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\tau\|f^k\|_{B^{-1}}^2,\quad n=1,2,\dots,\end{aligned} \tag{2.7}$$

其中

$$D=C+\Big(\sigma-\frac{1}{4}\Big)\tau^2A.$$

Proof. 由等式

$$\sigma y^{n+1}+(1-2\sigma)y^n+\sigma y^{n-1}=\frac{1}{4}(y^{n+1}+2y^n+y^{n-1})+\Big(\sigma-\frac{1}{4}\Big)(y^{n+1}-2y^n+y^{n-1}),$$

我们将方程 (2.5) 写为

$$D\frac{y^{n+1}-2y^n+y^{n-1}}{\tau^2}+B\frac{y^{n+1}-y^{n-1}}{2\tau}+\frac{1}{4}A(y^{n+1}+2y^n+y^{n-1})=f^n. \tag{2.8}$$

记为

$$s^n = y^n - y^{n-1}, \quad r^n = \frac{1}{2}(y^n + y^{n-1}),$$

then

$$\begin{aligned} y^{n+1} - y^{n-1} &= s^{n+1} + s^n, \\ y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1} &= s^{n+1} - s^n, \\ y^{n+1} + 2y^n + y^{n-1} &= 2(r^{n+1} + r^n). \end{aligned}$$

方程 (2.8) 可写为

$$D\frac{s^{n+1} - s^n}{\tau^2} + B\frac{s^{n+1} + s^n}{2\tau} + A\frac{r^{n+1} + r^n}{2} = f^n. \tag{2.9}$$

将方程 (2.9) 乘以 $s^{n+1} + s^n = 2(r^{n+1} - r^n)$，得到

$$\frac{1}{\tau^2}\big(\|s^{n+1}\|_D^2 - \|s^n\|_D^2\big) + \|r^{n+1}\|_A^2 - \|r^n\|_A^2 + \frac{1}{2\tau}\|s^{n+1} + s^n\|_B^2 = (f^n, s^{n+1} + s^n).$$

利用引入的记号和不等式

$$(f^n, s^{n+1} + s^n) \le \frac{1}{2\tau}\|s^{n+1} + s^n\|_B^2 + \frac{\tau}{2}\|f^n\|_{B^{-1}}^2,$$

我们得到时间上某一层的解的估计

$$\left\|\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau}\right\|_D^2 + \left\|\frac{y^{n+1} + y^n}{2}\right\|_A^2 \le \left\|\frac{y^n - y^{n-1}}{\tau}\right\|_D^2 + \left\|\frac{y^n + y^{n-1}}{2}\right\|_A^2 + \frac{1}{2}\tau\|f^n\|_{B^{-1}}^2. \tag{2.10}$$

We 应用格朗沃尔引理的差分类比，可得到可证明的估计 (2.7)。

注 1. 我们可以将先验估计 (2.7) 视为求解柯西问题 (2.1)–(2.2) 时估计 (2.4) 的直接离散类比。

在计算实践中，模拟非定常过程时，我们应着重采用非均匀时间网格。对于非均匀网格上的多层格式，如何保持近似精度仍存在问题。非均匀网格上格式的稳定性条件也会变差。特别是，对于三层算子差分格式，其稳定性估计取决于时间步长比以及时间步长变化发生的频率。我们的目标是为非定常问题 (2.1)–(2.3) 构造非均匀时间近似，从而得到无条件稳定且具有二阶精度的格式。

3. 一阶方程组

采用两层格式（龙格-库塔方法）的各种变体，可以解决在非均匀网格上构造一阶演化方程近似格式的问题。另一方面，我们总能将二阶及更高阶演化方程转化为一阶演化方程组。在这种情况下，重点应放在新变量的选取上。我们将考察在非均匀时间网格上构造近似格式的各种可能性，以求解问题 (2.1)–(2.3)。

最简单 的版本是为方程 (2.1)、(2.3) 引入一个新的未知量 $v = du/dt$，但这并没有太大的意义。我们设

$$v = C\frac{du}{dt} + Bu$$

并将方程 (2.1) 写成方程组

$$C\frac{du}{dt} + Bu - v = 0, \tag{3.1}$$

$$A^{-1}\frac{dv}{dt}+u=A^{-1}f,\quad t>0. \tag{3.2}$$

对于系统 (3.1)、(3.2)，当初始条件为以下形式时，便构成一个柯西问题

$$u(0)=u_0,\quad v(0)=v_0, \tag{3.3}$$

根据 (2.2)，我们有 $v_0=Cu_0'+Bu_0$。

为方便起见，我们将方程组 (3.1)、(3.2) 写成一个关于向量量的方程。定义向量 $\boldsymbol{u}=\{u,v\}$ and $\boldsymbol{f}=\{0,A^{-1}f\}$，由 (3.1)–(3.2) 得到柯西问题

$$\boldsymbol{B}\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f},\quad t>0, \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_0, \tag{3.5}$$

其中 $\boldsymbol{u}_0=\{u_0,v_0\}$。对于算子矩阵 $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{A}$，我们得到以下表达式

$$\boldsymbol{B}=\operatorname{diag}\left(C,A^{-1}\right),\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} B & -I\\ I & 0\end{pmatrix}.$$

我们将在空间 $\boldsymbol{H}=H\oplus H$ 的直和上考虑问题 (3.4)、(3.5)。对于 $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in\boldsymbol{H}$，内积和范数定义如下

$$(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2)=(u_1,v_1)+(u_2,v_2),\quad \|\boldsymbol{u}\|=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{u})^{1/2}.$$

由 (2.3)，我们得到

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^*>0,\quad \boldsymbol{A}\geq 0. \tag{3.6}$$

通过将系统的第二个方程选为 (3.2)，可以保证 $\boldsymbol{B}$ and $\boldsymbol{A}$ 算子具有良好的性质。

为了得到 (3.4)、(3.5) 的解的先验估计，我们将方程 (3.4) 与 $\boldsymbol{u}$ 在 $\boldsymbol{H}$ 中作内积。结合 (3.6)，可得

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{B}}\frac{d}{dt}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{B}}\leq(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u}).$$

考虑到

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{u})\leq\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\boldsymbol{B}^{-1}}\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{B}},$$

我们得到

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{\boldsymbol{B}}\leq\|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{B}}+\int_0^t\|\boldsymbol{f}(s)\|_{\boldsymbol{B}^{-1}}ds. \tag{3.7}$$

在我们的情形下

$$\|\boldsymbol{u}(t)\|_{\boldsymbol{B}}=\left(\|u(t)\|_C^2+\|v(t)\|_{A^{-1}}^2\right)^{1/2},\quad \|\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{B}}=\left(\|u_0\|_C^2+\|v_0\|_{A^{-1}}^2\right)^{1/2},\quad \|\boldsymbol{f}(t)\|_{\boldsymbol{B}^{-1}}=\|f(t)\|_{A^{-1}},$$

因此，对于问题 (3.1)–(3.3)，我们有如下估计

$$\left(\|u(t)\|_C^2+\|v(t)\|_{A^{-1}}^2\right)^{1/2}\leq\left(\|u_0\|_C^2+\|v_0\|_{A^{-1}}^2\right)^{1/2}+\int_0^t\|f(s)\|_{A^{-1}}ds. \tag{3.8}$$

注 2. 对于原问题 (2.1)–(2.3)，通过将方程 (2.1) 与下式作内积，得到了估计 (3.8)

$$A^{-1}v=A^{-1}\Big(C\frac{du}{dt}+Bu\Big).$$

注 3. 算子 B 的正定性条件（见（2.3））可以放宽。即使满足 $\nu_B=0$，估计式（3.7）、（3.8）仍然成立。在这种情况下，必须用（3.8）替换关于（2.1）、（2.2）解的（2.4）估计式。

4. 非均匀网格上的算子差分格式

最容易构造用于近似问题（3.4）、（3.5）的两层格式。当满足以下条件时，我们考虑非均匀时间网格上的近似格式:

$$t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad t_0 = 0.$$

对于近似解，我们将使用带权重 σ =const 的两层格式

$$\boldsymbol{B}\frac{\boldsymbol{y}^{n+1} - \boldsymbol{y}^n}{\tau_{n+1}} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{n+\sigma} = \boldsymbol{f}^{n+\sigma} \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{y}^0 = \boldsymbol{u}_0, \tag{4.2}$$

在使用以下记号时

$$\boldsymbol{y}^n = (y^n, w^n), \quad \boldsymbol{y}^{n+\sigma} = \sigma\boldsymbol{y}^{n+1} + (1-\sigma)\boldsymbol{y}^n.$$

对于问题 (3.4)、(3.5) 的充分光滑解 $\boldsymbol{u}(t)$，差分格式 (4.1)、(4.2) 具有一阶近似 τ，其中 $\sigma \neq 0.5$。当 $\sigma = 0.5$ 时，我们得到 Crank-Nicolson 格式；该格式在 τ 上以二阶精度近似 (3.4)、(3.5)。关于此类格式的必要且充分的稳定性条件，在算子差分格式的稳定性（正确性）理论中已有充分研究。下面的论述给出了无条件稳定性的充分条件。

定理 2。 当 $\sigma \geq 0.5$ 时，两层算子差分格式 *(3.4)*、*(3.5)* 是无条件稳定的。在此情况下，对于近似解存在先验估计

$$\|\boldsymbol{y}^{n+1}\|_{\boldsymbol{B}} \leq \|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{B}} + \sum_{k=0}^{n} \tau_{n+1} \|\boldsymbol{f}^{k+\sigma}\|_{\boldsymbol{B}^{-1}}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{4.3}$$

Proof. 我们将方程 (4.1) 与 $\tau\boldsymbol{y}^{n+\sigma}$作内积。由于算子 $\boldsymbol{A}$具有非负性，可得不等式

$$(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}^{n+1} - \boldsymbol{y}^n), \boldsymbol{y}^{n+\sigma}) \leq \tau \|\boldsymbol{f}^{n+\sigma}\|_{\boldsymbol{B}^{-1}} \|\boldsymbol{y}^{n+\sigma}\|_{\boldsymbol{B}}. \tag{4.4}$$

在 $\sigma \geq 0.5$ 处，对于不等式 (4.4) 的左端，我们使用（见 [8]中的引理 1）估计

$$\big(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y}^{n+1} - \boldsymbol{y}^n), y^{n+\sigma}\big) \geq \big(\|\boldsymbol{y}^{n+1}\|_{\boldsymbol{B}} - \|\boldsymbol{y}^n\|_{\boldsymbol{B}}\big)\|\boldsymbol{y}^{n+\sigma}\|_{\boldsymbol{B}}.$$

这样便得到了新时间层上解的估计

$$\|\boldsymbol{y}^{n+1}\|_{\boldsymbol{B}} \leq \|\boldsymbol{y}^n\|_{\boldsymbol{B}} + \tau \|\boldsymbol{f}^{n+\sigma}\|_{\boldsymbol{B}^{-1}}.$$

格朗沃尔引理的差分 аналог 给出了先验估计 (4.3)，这是估计 (3.7) 的网格 аналог。

将向量格式 (3.4)、(3.5) 应用于问题 (3.1)–(3.3) 的近似解，可得到算子-差分格式

$$C\frac{y^{n+1} - y^n}{\tau_{n+1}} + B(\sigma y^{n+1} + (1-\sigma)y^n) - (\sigma w^{n+1} + (1-\sigma)w^n) = 0, \tag{4.5}$$

$$\frac{w^{n+1} - w^n}{\tau_{n+1}} + A(\sigma y^{n+1} + (1-\sigma)y^n) = f^{n+\sigma}, \tag{4.6}$$

$$y^0 = u_0, \quad w^0 = v_0. \tag{4.7}$$

在这些条件下，稳定性估计 (4.3) 的形式为

$$\Big(\|y^{n+1}\|_C^2 + \|w^{n+1}\|_{A^{-1}}^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\|u_0\|\|_C^2 + \|v_0\|_{A^{-1}}^2\Big)^{1/2} + \sum_{k=0}^{n} \tau_{k+1} \|f^{k+\sigma}\|_{A^{-1}}. \tag{4.8}$$

估计式 (4.8) 是问题 (3.1)–(3.3) 的先验估计 (3.8) 的离散类比。

方程组 (3.1)、(3.2) 向新的时间层过渡的计算实现如下。由方程 (4.6)，得到如下表示

$$w^{n+1} = -\sigma\tau_{n+1}Ay^{n+1} + \chi_1^n, \tag{4.9}$$

在已知

$$\chi_1^n = w^n - (1-\sigma)\tau_{n+1}Ay^n + \tau_{n+1}f^{n+\sigma}.$$

类似地，由方程 (4.5) 可得

$$(C + \sigma\tau_{n+1}B)y^{n+1} = \sigma\tau_{n+1}w^{n+1} + \chi_2^n, \tag{4.10}$$

其中

$$\chi_2^n = (C - (1-\sigma)\tau_{n+1}B)y^n + (1-\sigma)\tau_{n+1}w^n.$$

将 (4.9) 代入 (4.10)，得到用于确定 y^{n+1} 的方程

$$(C + \sigma\tau_{n+1}B + \sigma^2\tau_{n+1}^2A)y^{n+1} = \chi^n, \tag{4.11}$$

在右端项

$$\chi^n = \sigma\tau_{n+1}\chi_1^n + \chi_2^n.$$

解出方程 (4.11) 后，使用表达式 (4.9) 来确定 w^{n+1}。

在均匀网格上应用标准三层格式 (2.5)、(2.6) 来确定 y^{n+1}时，我们求解问题

$$\Big(C + \frac{1}{2}\tau B + \sigma\tau^2 A\Big)y^{n+1} = \widetilde{\chi}^n,$$

右端项为

$$\widetilde{\chi}^n = C(2y^n - y^{n-1}) + \frac{1}{2}\tau By^{n-1} - \tau^2 A((1-2\sigma)y^n + \sigma y^{n-1}) + \tau^2 f^n.$$

将问题 (4.11) 与 $\tau_{n+1} = \tau$ 处的情形进行比较可知，若在方程 (2.5) 中令 $\sigma = 0.25$，并在系统 (4.5)、(4.6) 中设 $\sigma = 0.5$，则这两个问题十分接近（左端项相同）。

对于两个变量 y 和 w，两层格式 (4.5)、(4.6) 只能改写为仅针对 y的三层格式。为此，我们在两个相邻的时间层上写出方程 (4.5)，并将它们的差写成如下形式

$$\begin{aligned} C\Big(\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau_{n+1}} - \frac{y^n - y^{n-1}}{\tau_n}\Big) + B\big(\sigma(y^{n+1}-y^n) + (1-\sigma)(y^n - y^{n-1})\big) \\ = \sigma(w^{n+1}-w^n) + (1-\sigma)(w^n - w^{n-1}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

对于右端项，方程 (4.6) 也在两个时间层上使用；由此得到

$$\begin{aligned} &\sigma(w^{n+1}-w^n) + (1-\sigma)(w^n - w^{n-1}) \\ &\quad = -\sigma\tau_{n+1}A(\sigma y^{n+1} + (1-\sigma)y^n) - (1-\sigma)\tau_n A(\sigma y^n + (1-\sigma)y^{n-1}) \\ &\quad + \sigma\tau_{n+1}f^{n+\sigma} + (1-\sigma)\tau_n f^{n-1+\sigma}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

由 (4.12)、(4.13) 可得变量 y 的三层格式。

在最有趣的情形 $\sigma = 0.5$ 下，当格式 (4.5)、(4.6) 具有二阶精度时，我们得到

$$\begin{aligned} C\frac{2}{\tau_n + \tau_{n+1}}\Big(\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau_{n+1}} - \frac{y^n - y^{n-1}}{\tau_n}\Big) + B\Big(\overline{\sigma}_{n+1}\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau_{n+1}} + (1-\overline{\sigma}_{n+1})\frac{y^n - y^{n-1}}{\tau_n}\Big) \\ + A\Big(\overline{\sigma}_{n+1}\frac{y^{n+1}+y^n}{2} + (1-\overline{\sigma}_{n+1})\frac{y^n + y^{n-1}}{2}\Big) \\ = \overline{\sigma}_{n+1}f^{n+1/2} + (1-\overline{\sigma})_{n+1}f^{n-1/2}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

(4.14) 中的变量权重$\overline{\sigma}_{n+1}$ 由下式确定

$$\overline{\sigma}_{n+1} = \frac{\tau_{n+1}}{\tau_n + \tau_{n+1}}.$$

设对于充分光滑函数 $\varphi(t)$

$$\overline{\sigma}_{n+1}\varphi(t^{n+1/2}) + (1-\overline{\sigma})_{n+1}\varphi(t^{n-1/2}) = \varphi(\overline{t}^n) + \mathcal{O}\big((\tau_{n+1}+\tau_n)^2\big), \quad \overline{t}^n = \frac{1}{2}(t^{n+1}+t^{n-1}),$$

我们将格式 (4.14) 与方程 (2.1) 在 $t = t^n$ 处非均匀网格上的一种近似联系起来。

5. 数值实验

在广义热传导模型 [9]，中，我们将区分双抛物型方程 [10]。在这种情况下，齐次二阶演化方程的形式为

$$\Big(\frac{d}{dt} + D\Big)u + \alpha\Big(\frac{d}{dt} + D\Big)^2 u = 0, \quad t > 0, \tag{5.1}$$

其中

$$D = D^* \geq \nu_D I, \quad \nu_D > 0, \quad \alpha = \mathrm{const} > 0.$$

我们将方程 (5.1) 的初始条件取为

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = 0. \tag{5.2}$$

方程 (5.1) 在处写成二阶演化方程 (2.1)

$$C = \alpha I, \quad B = I + 2\alpha D, \quad A = D + \alpha D^2.$$

问题 (5.1)、(5.2) 的解为

$$u(t) = \Big(I + \alpha\Big(1 - \exp\Big(-\frac{t}{\alpha}\Big)D\Big)\exp(-Dt)u_0. \tag{5.3}$$

由表示式 (5.3) 可知，初始状态的指数律弛豫不仅由正定算子 D 提供，也由抛物型算子的平方（参数 α）提供。

本研究的主要目标是构造时间近似格式。考虑一维空间问题时，我们可以梳理其中的关键要点。也可以进一步研究更有趣的多维问题。在能够忽略空间近似格式的计算误差时，我们采用足够精细的空间计算网格。

假设在无量纲变量 $x \in [0,1]$ 下，并引入步长为 h 的均匀网格。记 ω 为空间内部网格节点集。测试问题在第一类齐次边界条件下讨论。差分算子 $-D$ 与 x 上的二阶导数算子相对应。对于 $y(x) = 0$, $x \notin \omega$，我们通过以下关系定义算子 D

$$Dy = -\frac{1}{h^2}\big(y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)\big), \quad x \in \omega.$$

为能够将计算结果与其他广义热传导模型的数据（见 [11]）进行比较，我们将自身限制在初始条件范围内

$$u_0(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq 0.5, \\ 0, & 0.5 < x < 1, \end{cases} \qquad x \in \omega.$$

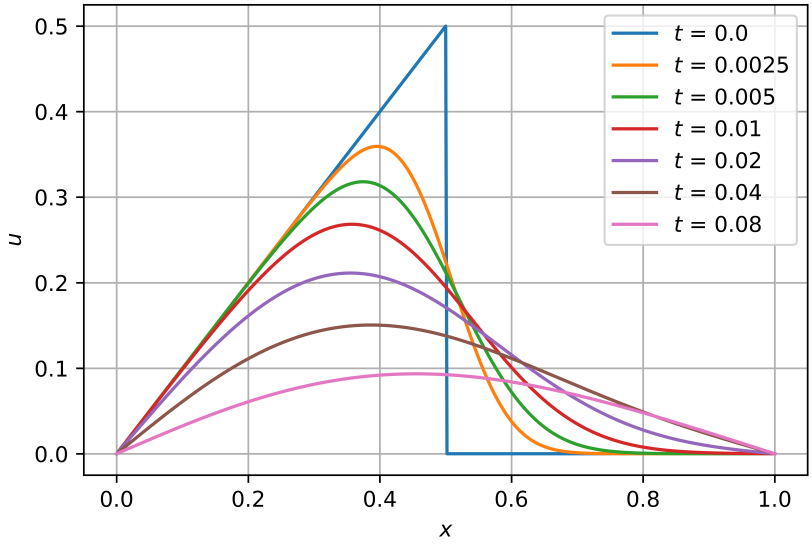


图 1：当 $\alpha = 0$ 时，问题在不同时刻的精确解。

我们在空间网格上进行了计算，其中 $h = 2 \cdot 10^{-3}$，对于 $0 < t \le T$， $T = 0.1$。我们使用了格式 (4.5)、(4.6)，其中 $\sigma = 0.5$。对于第二个初始条件 (4.7)，考虑到 (5.2)，我们有$v_0 = u_0 + 2\alpha D u_0$。

在我们的条件下，用于求解 y^{n+1} 的新层问题 (4.11) 为

$$Ry^{n+1} = \chi^n,$$

其中

$$R = \alpha I + \frac{\tau_{n+1}}{2}(I + 2\alpha D) + \frac{\tau_{n+1}^2}{4}(D + \alpha D^2).$$

对于算子 R，我们采用如下因式分解

$$R = (pD + I)\big(\alpha p D + (p + \alpha)I\big), \quad p = \frac{\tau_{n+1}}{2}.$$

为确定 y^{n+1}，我们求解两个常见的离散问题，其算子为 $D + cI$，对应的取值为 $c =$const > 0。

在我们使用的空间网格上，参数 α 取不同值时，问题 (5.1)、(5.2) 的精确解如图 1–3 所示。标准抛物型问题 ($\alpha = 0$，图 1) 的解具有这样的特点：解的正最大值随时间单调递减，这是最大值原理的结果。当 α 为正时，问题的双曲性最显著的表现（见图 2 和图 3）是出现负解区域。

问题 (5.1)、(5.2) 的近似解误差在网格空间范数$L_2(\omega)$ 中，于特定时刻 $t = t^n$ 的估计如下：

$$\varepsilon(t^n) = \Big(\sum_{x \in \omega} (y^n(x) - u(x, t^n))^2 h\Big)^{1/2}.$$

图 4 展示了采用均匀时间网格 ($\tau_n = \tau = T/N$) 时近似解的精度。当步数 N 增加至原来的两倍和四倍时，我们观察到收敛阶约为二阶。

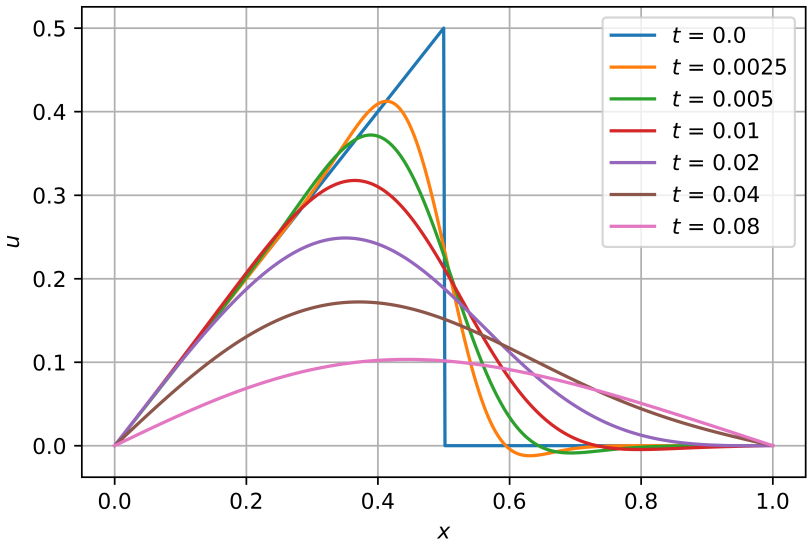


图2：当 $\alpha = 0.01$时，问题在不同时间点的精确解。

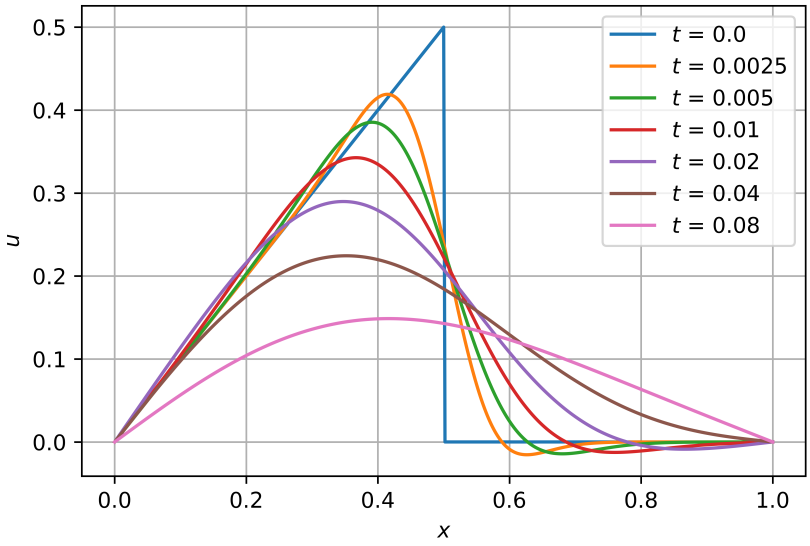
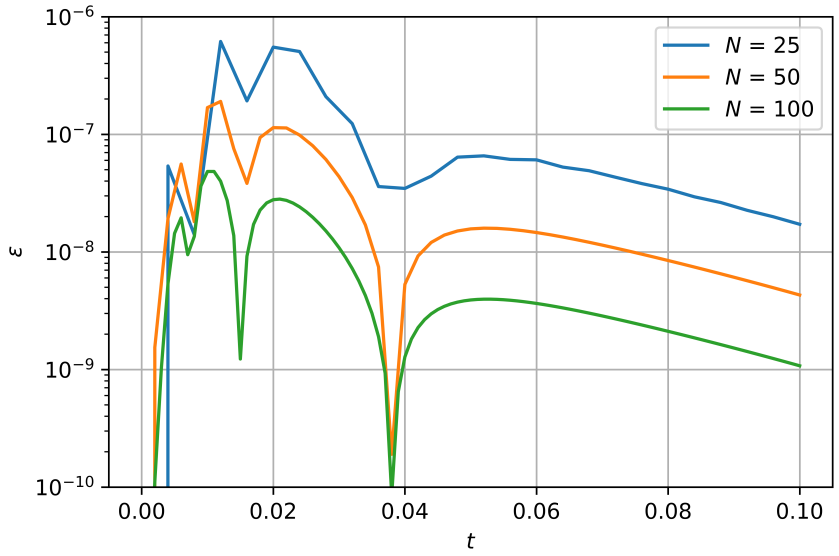


图3：当 $\alpha = 0.1$时，问题在不同时间点的精确解。



Fig图4：问题 (5.1)、(5.2) 在不同时间网格上 $\alpha = 0.01$ 处近似解的误差。

通过随机改变网格步长所获得的结果，可以方便地展示所构造的非均匀时间网格格式的性能。该规则计算时间步长

$$\tau_n = \tau\big(1 + q(\xi - 0.5)\big), \quad n = 1, 2, \ldots, N, \quad \tau = \frac{T}{N},$$

其中， ξ 是一个在区间 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机变量。在下面的计算中，参数为 $q = 0.5$；因此，网格步长的变化幅度可达 $5/3$。图5展示了使用非均匀随机时间网格时近似解的精度。所用的非均匀网格见图6。比较图4和图5可知，使用明显非均匀的时间网格，对所考虑的二阶演化方程柯西问题近似解的精度影响很小。

6. 结论

1. 针对有限维希尔伯特空间中具有自伴常算子的二阶算子演化方程，提出了一个柯西问题。对于这类问题，均匀网格上加权格式的无条件稳定性和收敛性已有众所周知的结果。本文研究了如何构造并分析时间非均匀网格上的三层算子差分格式。2. 通过适当选择新变量，将二阶演化方程写成由两个演化方程组成的方程组。采用非均匀时间网格上的两层加权格式，求解向量问题的近似解。建立了方程组柯西问题的解在相应希尔伯特空间中的无条件稳定性条件，这些条件涉及初始数据和右端项。由此得到了原二阶演化方程的等价三层格式。3. 给出了非均匀时间网格上演化方程柯西问题近似解的数值结果。作为测试问题，考虑了推广经典热传导模型的双抛物型方程。在网格步长随机变化的网格上获得的计算数据，展示了所提出的时间近似格式的性能。

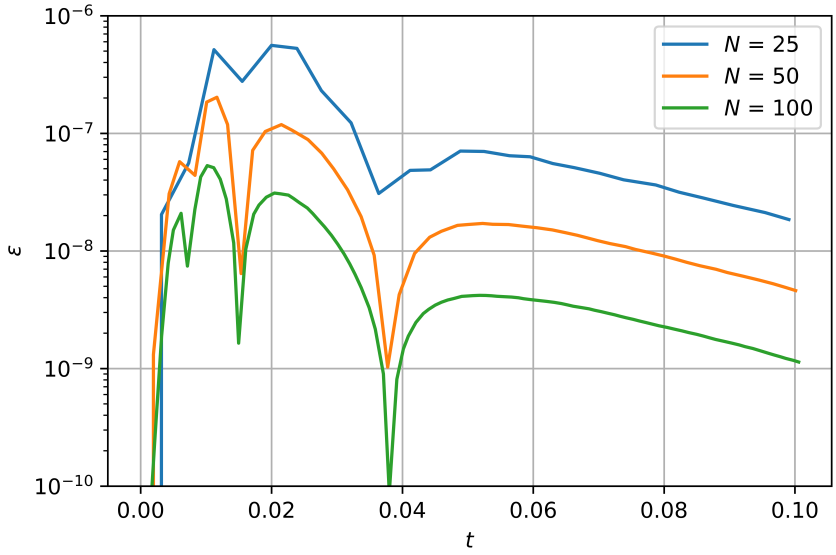


图5： $\alpha = 0.01$ 处近似解在不同时间非均匀网格上的误差。

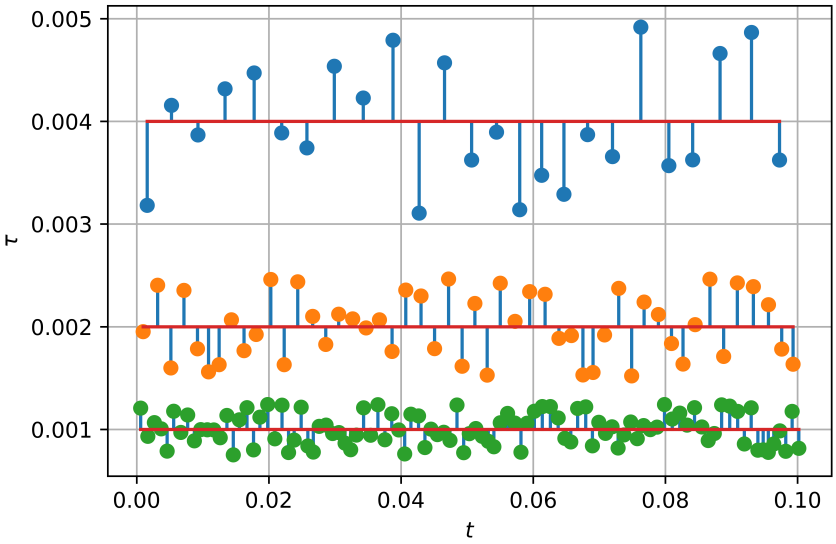


图6：时间网格步长。

致谢

本研究得到俄罗斯科学基金会（RSF 23-41-00037 和 RSF 23-71-30013）资助。

参考文献

[1] J. C. Butcher，《常微分方程数值方法》，Wiley，奇切斯特，2008。[2] E. Hairer，G. Wanner，《常微分方程求解 II：刚性问题与微分-代数问题》，Springer，柏林，1996。[3] A. A. Samarskii，《差分格式理论》，Marcel Dekker，纽约，2001。[4] A. A. Samarskii，P. P. Matus，P. N. Vabishchevich，《带算子因子的差分格式》，Kluwer Academic，多德雷赫特，2002。[5] A. A. Samarskii，P. N. Vabishchevich，E. L. Makarevich，P. P. Matus，《时间非均匀网格上三层差分格式的稳定性》，《数学文摘》63（1）（2001）106–108。[6] P. Matus，E. Zyuzina，《时间非均匀网格上的三级差分格式》，《应用数学计算方法》1（3）（2001）265–284。[7] C.-H. Cho，《非均匀时间网格上线性波动方程有限差分格式的稳定性》，《偏微分方程数值方法》29（3）（2013）1031–1042。[8] P. N. Vabishchevich，《含混合导数抛物型方程的通量分裂格式》，《计算数学与数理物理》53（8）（2013）1139–1152。[9] D. D. Joseph，L. Preziosi，《热波》，《现代物理学评论》61（1）（1989）41。[10] V. I. Fushchich，A. S. Galitsyn，A. S. Polubinskii，《热传导过程的新数学模型》，《乌克兰数学杂志》42（1990）210–216。[11] P. N. Vabishchevich，《具有记忆效应的热传导问题数值解》，《计算机与数学及其应用》118（2022）230–236。