arXiv:2303.00427v1 [math.CO] 1 Mar 2023

关于超图局部 Tur´án 密度问题

Chunqiu Fang* Guorong Gao† Jie Ma‡ Ge Song§

摘要

对于整数 $q \geq p \geq r \geq 2$，如果对于 r一致超图 H 的任意 q顶点子集 Q，均存在一个 p 顶点子集 P，使其在 H中张成一个团，则称其具有性质（q,p）。令 $T_r(n,q,p) = \min\{e(H): H \subset \binom{[n]}{r}, H$具有性质（$q,p$）。$r$一致超图中关于性质（$q,p$）的局部 Tur´án 密度定义为 $t_r(q,p) = \lim_{n\to\infty} T_r(n,q,p)/\binom{n}{r}$。Frankl、Huang 和 R¨odl 在《J. Comb. Theory, Ser. A》177（2021）] 中证明了，对于正整数 a，$\lim_{p\to\infty} t_r(ap+1,p+1) = \frac{1}{a^{r-1}}$，以及对于所有 $p \geq 3$，$t_3(2p+1,p+1) = \frac{1}{4}$，并提出了确定 $\lim_{p\to\infty} t_r(\gamma p+1,p+1)$值的问题，其中 $\gamma \geq 1$ 为实数。基于对超图 Tur´án 密度的研究，我们确定了局部 Tur´án 密度的一些精确值，并部分回答了他们的问题；特别地，我们的结果表明，他们关于精确值的猜想一般并不成立。

1 引言

超图 H 是一个二元组（V, E），其中 V 是一个有限元素集，称为顶点，而 E 是 V 的非空子集组成的集合，称为超边。若超图 H 的每条超边大小均为 r，则称其为 r-均匀超图。简单图是 2-均匀超图。我们分别用 $\nu(H)$ 和 $e(H)$ 表示超图 H 的顶点数和超边数。令 $\binom{V(H)}{r}$ 为 $V(H)$ 的所有 r 元子集组成的族。对于 r-均匀超图 H，我们用 $\overline{H}$ 表示 H 的补超图，即 $V(\overline{H}) = V(H)$ 且 $E(\overline{H}) = \binom{V(H)}{r} \setminus E(H)$。对于顶点集 $U \subset V(H)$，用 $H[U]$ 表示由 U 诱导的子超图，即 $H[U] = \{e \in E(H): e \subset U\}$。超图 H 中的顶点集 I 若不包含任何超边，则称为独立集。H 的独立数记为 $\alpha(H)$，它是 H 中独立集的最大基数。超图 H 中的顶点集 X 若构成一个完全 r-均匀超图，则称为团。H 的团数是 H 中团的最大基数。对于两个顶点 x、$y \in V(H)$，我们记 $d_H(x) = |\{e \in E(H): e \ni x\}|$，且 $d_H(xy) = |\{e \in E(H): e \supset \{x,y\}\}|$。本文中，我们记 $[n] = \{1,2,\ldots,n\}$.

*广东东莞大学理工学院计算机科学与技术学院，广东省东莞市 523808，中国。电子邮箱：chunqiu@ustc.edu.cn。

†中国科学技术大学数学科学学院，安徽省合肥市 230026，中国。电子邮箱：gaoguorong@ustc.edu.cn。

‡中国科学技术大学数学科学学院，安徽省合肥市 230026，中国。电子邮箱：jiema@ustc.edu.cn。§中国科学技术大学管理学院，安徽省合肥市 230026，中国。电子邮箱：gsong@ustc.edu.cn。

1.1 Tur´an 问题

Tur´án 数是极值图论（超图论）中的核心研究主题之一。设 $\mathcal{F}$ 是一个由 r-均匀超图组成的族，若 r-均匀超图 H 不含 $\mathcal{F}$ 中任何成员作为子超图，则称其为 $\mathcal{F}$-自由超图。$\mathcal{F}$ 的 Tur´án 数记为 ex$(n,\mathcal{F})$，它是具有 n 个顶点的 $\mathcal{F}$-自由 r-均匀超图的超边数的最大值。我们令$\pi(\mathcal{F}) := \lim_{n\to\infty} \text{ex}(n,\mathcal{F}) / \binom{n}{r}$，并称 $\pi(\mathcal{F})$ 为 $\mathcal{F}$ 的 Tur´án 密度。Katona、Nemetz 和 Simonovits [14] 使用平均论证证明了任意超图族的 Tur´án 密度都存在。若 $\mathcal{F} = \{F\}$，则我们分别用 ex(n,F) 表示 Tur´án 数 ex$(n,\{F\})$，用 $\pi(F)$ 表示 Tur´án 密度 $\pi(\{F\})$。

经典的 Tur´an 定理 [21] 指出，对于 $p \geq 2$，Tur´an 数 ex(n,K_{p+1}) 唯一由具有 n 个顶点的完全平衡 p 部图取得。以下著名的 Erd˝os-Stone-Simonovits 定理 [6, 7] 给出了任意图族的 Tur´an 数的紧确估计。

定理 1.1（Erd˝os-Stone-Simonovits, [6, 7]）。对于任意由非空图组成的族 $\mathcal{F}$，有

$$\text{ex}(n,\mathcal{F}) = \left(\frac{p-1}{2p} + o(1)\right) n^2,$$

其中 $p = \Psi(\mathcal{F}) = \min\{\chi(F): F \in \mathcal{F}\} - 1$ 表示 $\mathcal{F}$的子色数 .

注意，定理 1.1 推出，对于任意非空图 F，$\pi(F) = \frac{\chi(F)-2}{\chi(F)-1}$。将 Tur´an 定理推广到 r一致超图是极值图论中最具挑战性的问题之一。Erd˝os 曾悬赏征求至少一对满足 $k > r \geq 3$的 r、k，以确定 $\pi(K_k^r)$。然而，目前尚无任何 $k > r \geq 3$ 对应的 Tur´an 密度 $\pi(K_k^r)$ 已知。

猜想 1.2（Tur´an, [21]）。对于每个整数 $k \geq 4$,

$$\pi(K_k^3) = 1 - \left(\frac{2}{k-1}\right)^2.$$

猜想 1.2 中最著名的情形 $k = 4$ 声明 $\pi(K_4^3) = \frac{5}{9}$，多年来一直吸引着大量关注并促成了许多研究工作。已知许多构造（例如参见[3, 8, 15]）达到了猜想中的数值。迄今为止，Razborov [19] 通过使用旗代数，证明了最佳已知上界$\pi(K_4^3) \leq 0.561666$。

1.2 局部 Tur´an 密度

我们考虑如下定义的局部 Tur´an 密度。

定义 1.3（Frankl-Huang-R¨odl, [11]）。对于整数 $q \geq p \geq r \geq 2$，如果对于每个顶点集 $Q \subset \binom{V}{q}$，都存在一个顶点集 $P \subset \binom{Q}{p}$，使其在 H 中张成一个团，即 $\binom{Q}{r} \subset H$，则称 r-一致超图 $H = (V,E)$ 具有性质 (q,p)。令 $T_r(n,q,p) = \min\{e(H): H \subset \binom{[n]}{r}, H \text{具有性质 } (q,p)\}$。令 $t_r(n,q,p) = T_r(n,q,p) / \binom{n}{r}$，以及 $t_r(q,p) := \lim_{n\to\infty} t_r(n,q,p)$。我们称 $t_r(q,p)$ 为 r-一致超图中性质 (q,p) 的局部 Tur´án 密度。

对于 $q \geq p \geq r \geq 2$，令 $\mathcal{G}_{q,p}^r$ 表示具有 $\nu(G) = q$ 且$\alpha(G) \leq p-1$的 r-一致超图所组成的族。注意，r-一致超图 H 具有性质 (q,p)，当且仅当 $\overline{H}$ 是 $\mathcal{G}_{q,p}^r$-自由的。于是我们有 $T_r(n,q,p) + \mathrm{ex}(n,\mathcal{G}_{q,p}^r) = \binom{n}{r}$。因此，

$$t_r(q,p) = 1 - \pi(\mathcal{G}_{q,p}^r). \tag{1}$$

这也表明局部 Tur´an 密度存在。根据局部 Tur´an 密度的定义，对于任意整数 $q > p > r \geq 2$, $t_r(q,p+1) \geq t_r(q+1,p+1) \geq t_r(q,p) \geq t_r(q+1,p)$。

在 [5], 中，已证明对于 $r = 2$（图情形），$t_2(q,p) = 1/\left\lfloor \frac{q-1}{p-1} \right\rfloor$。对于一般的 r，Frankl 和 Stechkin [13] 证明，若 $q \leq \frac{r}{r-1}(p-1)$，则 $t_r(q,p) = 1$。Frankl [10] 证明了 $\lim_{p\to\infty} t_3(2p+1,p+1) = \frac{1}{4}$。Frankl、Huang 和 R¨odl [11] 将其推广到了 r- 均匀超图。他们证明了以下定理。

定理 1.4（Frankl-Huang-R¨odl, [11]）。对于整数 $r \geq 2$ 和 $a \geq 2$,

$$\lim_{p\to\infty} t_r(ap+1,p+1) = \frac{1}{a^{r-1}}.$$

在同一篇论文中，他们还获得了所有 $p \geq 3$下 $t_3(2p+1,p+1)$ 的精确值。

定理 1.5（Frankl-Huang-R¨odl, [11]）。对于每个整数 $p \geq 3$,

$$t_3(2p+1,p+1) = \frac{1}{4}.$$

鉴于这些结果，他们提出了以下问题。

问题 1.6（Frankl-Huang-R¨odl, [11]）。对于每个正实数 $\gamma > 1$，以下命题是否有可能成立:

$$\lim_{p\to\infty} t_r(\gamma p+1,p+1) = 1 - \min_{F\in\mathcal{F}} \pi(F) = \frac{1}{\lfloor\gamma\rfloor^{r-1}},$$

其中，$\mathcal{F}$ 是所有满足 $\nu(F) \geq \gamma\alpha(F)$ 的 r-均匀超图所构成的族 ?

1.3 我们的结果

本节介绍我们的主要结果。我们的第一个结果定理 1.7 给出了問題 1.6 中第一个等式的一个较弱版本，而第二个结果定理 1.8 则涉及局部 Tur´án 密度的一些精确值，这意味着問題 1.6 中关于极限值的第二个等式一般并不成立（另一方面，该等式在若干子区间上确实成立）。

定理 1.7。设 $r \geq 3$ 为一个整数，$\gamma > 1$ 为一个实数。我们有

$$\lim_{p\to\infty} t_r(\lfloor\gamma p\rfloor + 1, p+1) = 1 - \pi(\mathcal{F}_\gamma^r),$$

其中 $\mathcal{F}_\gamma^r = \{r\text{-均匀图 } F\colon \nu(F) > \gamma\alpha(F)\}$。此外，对于任意整数 $r \geq 3$，存在一个实数 γ 和一个正整数 $p_0 = p_0(r,\gamma)$，使得对于任意整数 $p \geq p_0$，都有$t_r(\lfloor\gamma p\rfloor + 1, p+1) = 1 - \pi(\mathcal{F}_\gamma^r)$。

注记1. 根据定理 1.7，将问题 1.6 中的超图族 $\mathcal{F}$ 替换为 $\mathcal{F}_\gamma^r$ 后，如果我们能够证明 $\pi(\mathcal{F}_\gamma^r) = \min^{F\in\mathcal{F}_\gamma^r}\pi(F)$，*那么问题 1.6 的第一个等式成立。

定理 1.8。关于局部 Tur´an 密度，有如下结果成立。(1) 对于固定的正实数 γ，存在正整数 $p_0 = p_0(\gamma)$，使得对所有整数 $p \geq p_0$，我们有如下

$$t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) = \begin{cases} \frac{7}{9}, & if\ \frac{3}{2} \leq \gamma < \frac{5}{3}, \\ \frac{19}{27}, & if\ \frac{5}{3} \leq \gamma < \frac{7}{4}, \\ \frac{1}{4}, & if\ 2 \leq \gamma < \frac{7}{3}, \\ \frac{1}{9}, & if\ 3 \leq \gamma < \frac{22}{7}. \end{cases}$$

(2) 设 γ 为满足 $\frac{4}{3} \leq \gamma < \frac{7}{5}$ 的正实数，则存在正整数 $p_0 = p_0(\gamma)$，使得对所有整数 $p \geq p_0$，都有 $t_4(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) = 1 - {}^{4}!\overline{4^4}$。
(3) 对于整数 $r \geq 3$ 和 $p \geq r^2 - r - 1$，$t_r(rp+1,(r-1)p+1) = 1 - {}^{r}!\overline{r^r}$。

注记2。我们指出，严格来说，問題 1.6 中的第一个等式未必成立。例如，设 $r = 3$ 和 $\gamma = \frac{3}{2}$。那么，問題 1.6 中的超图族 $\mathcal{F}$ 包含单条边作为其成员。因此，$1 - \min_{F\in\mathcal{F}}\pi(F) = 1$。但定理 1.8 表明，$t_3(\lfloor \frac{3}{2}p \rfloor + 1, p+1) = \frac{7}{9}$，这意味着在此情形下，問題 1.6 中的第一个等式不成立。在定理 1.7 中，我们将相应的定义修改为 $\nu(F) > \gamma\alpha(F)$。

注记3. 从证明中可以看出，将 $\lfloor \gamma p \rfloor$ 替换为 $\lceil \gamma p \rceil$ 后，定理 1.7 和定理 1.8 的结论仍然成立。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们证明定理 1.7。在第3节中，我们给出一些局部 Tur´an 密度的极值构造，并证明定理 1.8。在第4节中，我们以一些关于该主题的评述和自然问题作结。

2 定理 1.7 的证明

本节将证明定理 1.7。所用方法源自文献[11]中定理 1.4 的证明。对于满足 $q \leq \gamma p$ 的整数对 (q,p)，令 $e(q,p) = \gamma p - q$。注意，由于 $q \geq p$，我们总有 $e(q,p) \leq \gamma q - q = (\gamma - 1)q$。我们还需要以下定义和引理。

定义 2.1（Frankl-Huang-R¨odl, [11]）。对于 $H \subset \binom{X}{r}$，顶点集 $Z \subset X$ 是一个（w,v）-洞，当且仅当 $|Z| = w > \gamma v$，且 $H[Z]$ 的团数为 v。
引理 2.2（Frankl-Huang-R¨odl, [11]）。假设 $H \subset \binom{X}{r}$ 具有性质（q,p），且 Z 是 H 的一个（w,v）-洞，其中 $w < q$，那么 $H[X \setminus Z]$ 具有性质（$q-w, p-v$）。

证明。任取一个集合 $U \in \binom{X\setminus Z}{q-w}$，然后 $U \cup Z \in \binom{X}{q}$。由于 H 具有性质 (q,p)，$H[U \cup Z]$包含一个大小为 p 的团。因此，$H[U]$ 包含一个大小为 $p-v$ 的团。然后 $H[X \setminus Z]$ 具有性质 $(q-w, p-v)$。 □

*对于一般的超图族 $\mathcal{G}$，已知 $\pi(\mathcal{G}) = \min_{G\in\mathcal{G}}\pi(G)$ 不成立。

引理 2.3。对于每个 $r \geq 3$、 $\gamma > 1$ 和 $\epsilon > 0$，存在 $\ell_0 = \ell_0(r, \epsilon, \gamma)$，使得对所有 $\ell \geq \ell_0$ 以下结论成立。设一个 r-图 H 的顶点集为 X，并且对于所有满足 $q \leq \ell$、 $p = \lceil \frac{q}{\gamma} \rceil$ 的点对 (q,p)， H 具有性质 (q,p)（换言之， H 不含有带 $\ell \geq w > \gamma v$ 的 (w,v)-洞）。那么对于所有 $Y \in \binom{X}{l}$，

$$e(H[Y]) \geq (1-\epsilon)(1-\pi(\mathcal{F}_\gamma^r))\binom{\ell}{r}.$$

证明。由于 $\lim_{\ell \to \infty} \frac{\mathrm{ex}(\ell, \mathcal{F}_\gamma^r)}{\binom{\ell}{r}} = \pi(\mathcal{F}_\gamma^r)$，存在 $\ell_0 = \ell_0(r, \epsilon, \gamma)$，使得对所有 $\ell \geq \ell_0$， $\mathrm{ex}(\ell, \mathcal{F}_\gamma^r) \leq (\pi(\mathcal{F}_\gamma^r) + \epsilon(1-\pi(\mathcal{F}_\gamma^r)))\binom{\ell}{r}$。对于 $Y \subset \binom{X}{\ell}$， $H[Y]$ 对所有满足 $q \leq \ell, p = \lceil \frac{q}{\gamma} \rceil$ 的点对 (q,p) 都具有性质 (q,p)，这意味着 $\overline{H[Y]}$ 是 $\mathcal{F}_\gamma^r$-自由的。因此，我们有

$$e(H[Y]) = \binom{\ell}{r} - e(\overline{H[Y]}) \geq \binom{\ell}{r} - \mathrm{ex}(\ell, \mathcal{F}_\gamma^r) \geq (1-\epsilon)(1-\pi(\mathcal{F}_\gamma^r))\binom{\ell}{r}.$$

□

现在我们可以证明定理 1.7 了。

定理1.7的证明。设 H 是具有 n 个顶点的最大 $\mathcal{F}_\gamma^r$-自由 r-图，则 $\overline{H}$ 具有性质 $(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1)$（并且也具有性质 $(\lceil \gamma p \rceil + 1, p+1)$、$(\lfloor \gamma p \rfloor, p)$ 和 $(\lceil \gamma p \rceil, p)$）。因此， $t_r(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) \leq 1 - \pi(\mathcal{F}_\gamma^r)$。

现在我们关注下界。给定 $\epsilon > 0$，令我们固定一个较大的整数 $\ell \geq \ell_0 = \ell_0(r, \frac{\epsilon}{2}, \gamma)$，其中 $\ell_0(r, \frac{\epsilon}{2}, \gamma)$ 由引理 2.3 得到。令

$$\theta_0 = \min\{w - \gamma v : w > \gamma v, w \leq \ell, v \geq r-1\}.$$

然后固定一个大得多的整数 $L \geq \frac{4\gamma \ell^2}{\theta_0}$。考虑一个足够大的 r-均匀超图 $H \subset \binom{[n]}{r}$，其具有性质 (q,p)，其中 $q = \lfloor \gamma L \rfloor$ 且 $p = L$。我们的目标是找到一个子集 $X \subset [n]$，满足 $\binom{|X|}{r} > (1-\frac{\epsilon}{2})\binom{n}{r}$，使得 $H[X]$ 不含有一个具有 $w \leq \ell$ 和 $v \geq r-1$ 的 (w,v)-洞。

我们从 $H_0 = H$ 开始，并归纳地定义 H_i。令 $q_0 = q$、 $p_0 = p$ 和 $X_0 = [n]$。假设 $H_i \subset \binom{X_i}{r}$ 具有性质 (q_i, p_i)，但仍然含有一个 (w_i, v_i)-洞。于是我们取这样一个 (w_i, v_i)-洞 $Z_i \subset X_i$，并令

$$X_{i+1} = X_i \setminus Z_i, \qquad H_{i+1} = H_i[X_{i+1}].$$

根据引理 2.2， H_{i+1} 具有性质 $(q_i - w_i, \ p_i - v_i)$。此外，

$$e(q_i - w_i, p_i - v_i) = \gamma(p_i - v_i) - (q_i - w_i) = (\gamma p_i - q_i) - (\gamma v_i - w_i) \geq e(q_i, p_i) + \theta_0.$$

令 $q_{i+1} = q_i - w_i$， $p_{i+1} = p_i - v_i$ 并重复此过程。每一步我们都有

$$\gamma(r-1) \leq \gamma v_i < |X_i| - |X_{i-1}| = w_i \leq \ell.$$

由于对于所有 i 和 $p_0 = p$， $v_i \geq r-1$，我们有 $i \leq \frac{p}{r-1}$。假设在步骤 i，超图 H_i 不再包含满足 $w \leq \ell$ 的 (w,v)-洞。于是，我们从 $V(H_i)$ 中均匀随机地选取一个大小为 ℓ 的子集 Q。根据引理 2.3，我们有

$$\frac{e(H_i)}{\binom{|X_i|}{r}} = \frac{\mathbb{E}[e(H_i[Q])]}{\binom{\ell}{r}} \geq (1-\frac{\epsilon}{2})(1-\pi(\mathcal{F}_\gamma^r)).$$

另一方面，$|X_i| \geq n - i\ell \geq n - \frac{p\ell}{r-1}$。因此，对于充分大的 n，$\binom{|X_i|}{r} \geq (1-\frac{\epsilon}{2})\binom{n}{r}$。因此，

$$e(H) \geq e(H_i) \geq \left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)^2(1-\pi(\mathcal{F}_\gamma^r))\binom{n}{r} \geq (1-\epsilon)(1-\pi(\mathcal{F}_\gamma^r))\binom{n}{r}.$$

否则，假设这个过程会继续产生 (w,v)-洞。令 m 为满足 $q_m < 2l$ 的第一个指标。由于 $e(q_m, p_m) \leq (\gamma-1)q_m$，并且 $e(q_i,p_i)$ 在每一步之后都严格增加至少 θ_0，因此 $m \leq {}_{(\gamma-1)_{\theta_0}}{}^{q_m}$。于是，

$$\lfloor \gamma L \rfloor = q_0 = q_m + \sum_{i=0}^{m-1} w_i \leq 2\ell + m\ell < 2\ell + \frac{2(\gamma-1)\ell^2}{\theta_0} < \frac{4\gamma\ell^2}{\theta_0},$$

这与 $L \geq \frac{4\gamma\ell^2}{\theta_0}$ 矛盾。至此，我们完成了定理 1.7 第一部分的证明。另一部分的证明由定理 1.8 给出。 □

3 某些局部 Turˊan 密度的精确值

本节基于已知的超图 Turˊan 密度，确定某些局部 Turˊan 密度的精确值。

3.1 极值构造

本节构造两个超图族，为局部 Turˊan 密度提供上界。

定义 3.1. 对于整数 n、$a \geq 1$、$r \geq 3$ 和 $k \geq 1$，令 $\mathcal{K}_{n,a,k}^r$ 为由 r 个顶点组成的超图族 H，其中 $\nu(H) = n$ 且 $V(H)$ 存在一个顶点划分 $V(H) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_a$ 和 $V_a = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_k$，使得 $E(H) = \left(\bigcup_{i=1}^{a-1}\binom{V_i}{r}\right) \bigcup \binom{V_a \setminus U_0}{r} \bigcup \left(\bigcup_{j=1}^{k}\binom{U_0 \cup U_j}{r}\right)$。令 $\rho_r(n,a,k) = \min\{e(H): H \in \mathcal{K}_{n,a,k}^r\}$ 且 $\rho_r(a,k) = \lim_{n\to\infty} \rho_r(n,a,k)$ ({v40})。

当 $k=1$ 时，这是 [11] 中考虑的极值构造，并且我们有 $\rho_r(a,1) = \frac{1}{a^{r-1}}$。我们通过以下命题计算 $r=3, a=1$ 情形下的精确值。

命题 3.2. 设 k 是一个整数。我们有 $\rho_3(1,k) = \frac{5k+4}{9k}$.

证明. 设 $H \in \mathcal{K}_{n,1,k}^3$。设 $V(H) = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_k$，且 $E(H) = \binom{V(H)}{3} \setminus \bigcup_{1\leq i_1 < i_2 \leq k} U_0 \times U_{i_1} \times U_{i_2}$。我们不妨假设 $|U_1| = |U_2| = \cdots = |U_k| = xn$。于是 $|U_0| = (1-kx)n$，并且 $0 \leq x \leq \frac{1}{k}$。因此 $e(H) = \binom{n}{3} - \binom{k}{2}(xn)^2(1-kx)n$。记 $f(x) = x^2(1-kx)$，其中 $0 \leq x \leq \frac{1}{k}$。直接计算可得 $f_{\max} = f(\frac{2}{3k}) = \frac{4}{27k^2}$。因此我们有 $\rho_3(1,k) = \lim_{n\to\infty} \frac{\binom{n}{3} - \binom{k}{2} f_{\max} n^3}{\binom{n}{3}} = \frac{5k+4}{9k}$. □

定理 3.3。设 a、$k \geq 1$、$r \geq 3$ 和 $p \geq r-1$ 为整数。对于足够大的 n 以及任意 r-一致超图 $H \in \mathcal{K}_{n,a,k}^r$、$H$ 具有性质（$\lfloor (a+1-\frac{1}{k})p \rfloor + 1$、$p+1$）。此外，我们有

$$t_r(\lfloor (a+1-\frac{1}{k})p \rfloor + 1, p+1) \leq \rho_r(a,k).$$

证明。设 $V(H)=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_a$ 为 $V(H)$ 的顶点集划分，其中 $V_a=U_0\cup U_1\cup\cdots\cup U_k$。对于任意顶点集 $X\in\binom{V(H)}{\lfloor(a+1-\frac{1}{k})p\rfloor+1}$，我们将证明 $H[X]$ 包含一个大小为 $p+1$ 的团。

我们可以假设，对于任意 $1\le i\le a-1$，$|X\cap V_i|\le p$；否则，$H[X\cap V_i]$ 包含一个大小至少为 $p+1$ 的团。因此，$|X\cap V_a|\ge 2p+1-\lfloor\frac{p}{k}\rfloor$。如果 $p<2k$，那么 $|X\cap V_a|\ge 2p$，很容易在 $H[X\cap V_a]$ 中找到一个大小至少为 $p+1$ 的团。现在我们假设 $p\ge 2k$。同理，我们可以假设 $p+1-\lfloor\frac{p}{k}\rfloor\le|X\cap U_0|\le p$；否则，$H[X\cap U_0]$ 或 $H[X\cap(U_1\cup\cdots\cup U_k)]$ 包含一个大小至少为 $p+1$ 的团。现在假设 $|X\cap U_0|=p-\lfloor\frac{p}{k}\rfloor+t$，其中 $1\le t\le\lfloor\frac{p}{k}\rfloor$。那么 $|X\cap(U_1\cup\cdots\cup U_k)|\ge p+1-t$。由鸽巢原理，存在某个 j，使得 $1\le j\le k$，且 $|X\cap U_j|\ge\lceil\frac{p+1-t}{k}\rceil$。因此，$|X\cap(U_0\cup U_j)|\ge p-\lfloor\frac{p}{k}\rfloor+t+\lceil\frac{p+1-t}{k}\rceil\ge p+1$。所以，$H[X\cap(U_0\cup U_j)]$ 包含一个大小至少为 $p+1$ 的团。

□

定义 3.4. 对于整数 $n,a\ge 1,r\ge 3$ 和 $2\le k\le r-1$，令 $\mathcal{L}^r_{n,a,k}$ 为 r-均匀超图 H 族，其中 $\nu(H)=n$ 且 $V(H)$ 存在顶点划分 $V(H)=V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_a$ 和 $V_a=U_0\cup U_1\cup\cdots\cup U_k$，使得 $E(H)=\left(\bigcup_{i=1}^{a-1}\binom{V_i}{r}\right)\bigcup\left(\bigcup_{j=0}^{k}\binom{V_a\setminus U_j}{r}\right)$。令 $\eta_r(n,a,k)=\min\{e(H):H\in\mathcal{L}^r_{n,a,k}\}$ 且 $\eta_r(a,k)=\lim_{n\to\infty}\frac{\eta_r(n,a,k)}{\binom{n}{r}}$。

根据以下命题，我们计算 $a=1$ 情形下的精确值。

命题 3.5。设 $r\ge 3$ 和 $2\le k\le r-1$。我们有 $\eta_r(1,k)=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k+1}{k+1-i}(\frac{k+1-i}{k+1})^r$.

证明。设 $H\in\mathcal{L}^3_{n,\,1,\,k}$，使其超边数最少。设 $V(H)=U_0\cup U_1\cup\cdots\cup U_k$ 和 $E(H)=\bigcup_{j=0}^{k}\binom{V(H)}{r}^{\setminus U_j}$. 我们不妨设$|U_0|=|U_1|=|U_2|=\cdots=|U_k|=\frac{n}{k+1}$。由容斥原理可得

$$\begin{aligned}e(H)&=|\bigcup_{j=0}^{k}E(H[V(H)\setminus U_j])|\\&=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\sum_{0\le\ell_1<\ell_2<\cdots<\ell_{k+1-i}\le k}e(H[U_{\ell_1}\cup U_{\ell_2}\cup\cdots\cup U_{\ell_{k+1-i}}])\\&=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k+1}{k+1-i}\binom{\frac{k+1-i}{k+1}n}{r}.\end{aligned}$$

那么 H 的边密度为

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k+1}{k+1-i}\binom{\frac{k+1-i}{k+1}n}{r}}{\binom{n}{r}}=\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k+1}{k+1-i}\left(\frac{k+1-i}{k+1}\right)^r+o(1),\ \text{as } n\to\infty.$$

□

注 3.6。设 $r\ge 3$。我们有 $\eta_r(1,\ r-1)=1-\frac{r!}{r^r}$.

定理 3.7. 设 $a\ge 1,r\ge 3$, $p\ge r-1$ 和 $2\le k\le r-1$ 为整数。对于足够大的 n 以及任意r-均匀超图 $H\in\mathcal{L}^r_{n,a,k}$, H具有性质 $(\lfloor(a+\frac{1}{k})p\rfloor+1,p+1)$。此外，我们有

$$t_r(\lfloor(a+\frac{1}{k})p\rfloor+1,p+1)\le\eta_r(a,k).$$

证明. 设 $V(H) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_a$ 为 $V(H)$ 的顶点集划分，其中 $V_a = U_0 \cup U_1 \cup \cdots \cup U_k$。对于任意顶点集 $X \in \binom{V(H)}{\lfloor (a+\frac{1}{k})p \rfloor + 1}$，我们将证明 $H[X]$ 包含一个大小为 $p+1$ 的团。

我们可以假设，对于任意 $1 \le i \le a-1$，都有 $|X \cap V_i| \le p$；否则，$X \cap V_i$ 中包含一个大小至少为 $p+1$ 的团。因此，$|X \cap V_a| \ge \lfloor \frac{(k+1)p}{k} \rfloor + 1 \ge \binom{(k+1)}{k}^{p+1}$。由鸽巢原理，存在某个 j，满足 $0 \le j \le k$，使得 $|X \cap (V_a \setminus U_j)| \ge \lceil \frac{k}{k+1} |X \cap V_a| \rceil \ge p+1$。因此，$H[X]$ 中包含一个大小至少为 $p+1$ 的团。

□

3.2 定理 1.8 的证明

在本小节中，我们证明定理 1.8。我们使用的关键工具是 r-均匀超图的“膨胀”操作。设 H 是一个顶点集为 $\{v_1, v_2, \ldots, v_l\}$ 的 r-均匀超图，且 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l)$ 是一个整数向量，其中每个 $\mu_i \ge 1$。那么，膨胀 $H(\boldsymbol{\mu})$ 是一个 r-均匀超图，它通过将 H 中的顶点 v_i 替换为互不相交的顶点类来构成：对每个 i，对应一个含有 μ_i 个顶点的类；并在对应于 H 中任意一条边的各顶点类之间，插入一个完全 r 部 r-均匀超图。给定一个由 r-均匀超图组成的族 $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_s\}$，以及一个由正整数向量组成的族 $\mathcal{T} = \{\boldsymbol{\mu}^1, \boldsymbol{\mu}^2, \ldots, \boldsymbol{\mu}^s\}$，其中每个 $\boldsymbol{\mu}^i$ 的维数为 $|V(H_i)|$，我们将 $\mathcal{T}$ 对 $\mathcal{H}$ 的膨胀定义为 $\mathcal{H}(\mathcal{T}) = \{H_i(\boldsymbol{\mu}^i) : 1 \le i \le s\}$。Brown 和 Simonovits [4] 证明了以下极其有用的结果。

定理 3.8（Brown-Simonovits, [4]）。如果 $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, \ldots, H_s\}$ 是一个 r-均匀超图族，且 $\mathcal{T} = \{\boldsymbol{\mu}^1, \boldsymbol{\mu}^2, \ldots, \boldsymbol{\mu}^s\}$ 是一个正整数向量族，其中每个 $\boldsymbol{\mu}^i$ 的维数为 $|V(H_i)|$，那么 $\pi(\mathcal{H}(\mathcal{T})) = \pi(\mathcal{H})$。

我们还需要以下关于超图 Tur´an 密度的结果。

定理 3.9（Frankl-F¨uredi, [9]）。设 $F_5 = \{123, 124, 345\}$，我们有 $\pi(F_5) = \frac{2}{9}$.

定理3.10（Baber-Talbot, [1]）。设 $H_1 = \{123, 124, 134, 234\}$, $H_2 = \{123, 124, 125, 345, 346\}$, $H_3 = \{123, 124, 345, 156, 256\}$, $H_4 = \{123, 124, 125, 346, 356, 456\}$，则 $\pi(\{H_1, H_2, H_3, H_4\}) = \frac{8}{27}$.

设 $H_2^- = \{123, 124, 125, 345\}$。注意到 H_2 是某个 H_2^- 的膨胀的子图，因此我们有如下推论。

推论 3.11。 $\pi(\{H_1, H_2^-, H_3, H_4\}) = \frac{8}{27}$.

定理 3.12（Mubayi-R¨odl, [17]）。设 $H_7 = \binom{[4]}{3} \cup \{(a, x, y) : a \in [4], x, y \in \{5, 6, 7\}, x \ne y\} \setminus \{(1, 5, 6)\}$，则 $\pi(H_7) = \frac{3}{4}$.

对于 $r \ge 3$，令广义三角形 T^r 为一个 r-一致超图，其顶点数为 $(2r-1)$，含有三条边 $\{1, \ldots, r\}$、$\{1, \ldots, r-1, r+1\}$ 和 $\{r, r+1, \ldots, 2r-1\}$。Pikhurko [18] 得到了 T^4 的 Tur´an 密度。

定理 3.13 (Pikhurko, [18])。 $\pi(T^4) = {}^{4!}\overline{4^4}$.

对于 $r \ge 3$，记作 F^r 的广义扇是由 $r+1$ 条边 $e_1, \ldots, e_r, e$ 构成的 r-均匀超图，其中 $e_i \cap e_j = \{x\}$ 对所有 $i \ne j$ 都成立，且 $x \notin e$，并且 $|e_i \cap e| = 1$ 对所有 i 都成立。Mubayi 和 Pikhurko [16] 得到了 F^r 的 Tur´an 密度。

定理 3.14 (Mubayi-Pikhurko, [16])。 $\pi(F^r) = {}^{r}! \overline{r^r}$.

现在我们准备好证明定理 1.8。

定理 1.8 的证明。(1) 若 $\frac{3}{2} \le \gamma < \frac{5}{3}$，由定理 3.3 和命题 3.2， $t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) \le t_3(\lfloor \frac{3}{2}p \rfloor + 1, p+1) \le \rho_3(1,2) = \frac{7}{9}$. 我们只需证明下界。令 $\boldsymbol{\mu} = (\frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{5}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{5}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{5}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{5}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{5})$†。由定理 3.8 和定理 3.9，我们有 $\pi(F_5(\boldsymbol{\mu})) = \pi(F_5) = \frac{2}{9}$。此外， $\alpha(F_5(\boldsymbol{\mu})) \le {}^{3}(\lfloor \gamma p \rfloor+1)_5 + O(1) < p+1$ 当 p 足够大时成立。由 (1)，当 p 足够大时，我们有 $t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) \ge 1 - \pi(F_5(\boldsymbol{\mu})) = \frac{7}{9}$。

若 $\frac{5}{3} \le \gamma < \frac{7}{4}$，由定理 3.3 和命题 3.2， $t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) \le t_3(\lfloor \frac{5}{3}p \rfloor + 1, p+1) \le \rho_3(1,3) = \frac{19}{27}$。我们只需证明下界。令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}^1 &= (\frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{4}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{4}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{4}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{4}),\\
\boldsymbol{\mu}^2 &= (\frac{2(\lfloor \gamma p \rfloor + 1)}{7}, \frac{2(\lfloor \gamma p \rfloor + 1)}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}),\\
\boldsymbol{\mu}^3 &= (\frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}, \frac{2(\lfloor \gamma p \rfloor + 1)}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}),\\
\boldsymbol{\mu}^4 &= (\frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{7}, \frac{2(\lfloor \gamma p \rfloor + 1)}{7}).
\end{aligned}$$

于是，当 p 足够大时， $\alpha(H_1(\boldsymbol{\mu}^1)) \le \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{2} + O(1) < p+1$， $\alpha(H_2^-(\boldsymbol{\mu}^2)) \le {}^{4}(\lfloor \gamma p \rfloor+1)_7 + O(1) < p+1$， $\alpha(H_3(\boldsymbol{\mu}^3)) \le {}^{4}(\lfloor \gamma p \rfloor+1)_7 + O(1) < p+1$， $\alpha(H_4(\boldsymbol{\mu}^4)) \le {}^{4}(\lfloor \gamma p \rfloor+1)_7 + O(1) < p+1$。由 (1)、定理 3.8 和推论 3.11，当 p 足够大时，我们有 $t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) \ge 1 - \pi(\{H_1(\boldsymbol{\mu}^1)\ H_2^-(\boldsymbol{\mu}^2)\ H_3(\boldsymbol{\mu}^3)\ H_4(\boldsymbol{\mu}^4)\}) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$。

若 $2 \le \gamma < \frac{7}{3}$，由定理 3.3 和命题 3.2， $t_3(\lfloor \gamma p \rfloor+1, p+1) \le t_3(2p+1, p+1) \le \rho_3(2,1) = 14$。我们只需证明下界。设 $\boldsymbol{\mu} = (\frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7})$。由定理 3.8 和定理 3.12，得到 $\pi(H_7(\boldsymbol{\mu})) = \pi(H_7) = \frac{3}{4}$. 此外， $\alpha(H_7(\boldsymbol{\mu})) \le {}^{3}(\lfloor \gamma p \rfloor+1)_7 + O(1) < p+1$，当 p 足够大时成立。由 (1)，当 p 足够大时，有 $t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) \ge 1 - \pi(H_7(\boldsymbol{\mu})) = \frac{1}{4}$。

对于 $3 \le \gamma < \frac{22}{7}$，证明将在第 3.3 小节给出（见定理 3.20）。

（2）对于 $\frac{4}{3} \le \gamma < \frac{7}{5}$，由定理 3.7 和注 3.6， $t_4(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) \le t_4(\lfloor \frac{4}{3}p \rfloor + 1, p+1) \le \eta_4(1,3) = 1 - {}^{4}!\overline{4^4}$。现在我们着重证明下界。令 $\boldsymbol{\mu} = (\frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7}, \frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{7})$。由定理 3.8 和定理 3.13，我们有 $\pi(T^4(\boldsymbol{\mu})) = \pi(T^4) = {}^{4}!\overline{4^4}$。此外，当 p 足够大时， $\alpha(T^4(\boldsymbol{\mu})) \le {}^{5}(\lfloor \gamma p \rfloor+1)_7 + O(1) < p+1$。由 (1)，当 p 足够大时，我们有 $t_4(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) \ge 1 - \pi(T^4(\boldsymbol{\mu})) = 1 - {}^{4}!\overline{4^4}$。

（3）根据定理 3.7 和注 3.6， $t_r(rp+1, (r-1)p+1) \le \eta_r(1, r-1) = 1 - {}^{r}!\overline{r^r}$。现在我们着重证明下界。对于 $r \ge 3$ 和 $p \ge r^2 - r - 1$，令 F_p^r 为通过将 e 的每个顶点替换为 $p - r^2 + 2r$ 个顶点、将公共顶点 x 替换为 $(r-1)^2$ 个顶点，并将 $V(F^r) \setminus (e \cup \{x\})$ 中的每个顶点替换为 $r-1$ 个顶点而得到的 F^r 的膨胀。根据定理 3.8 和定理 3.14，有 $\pi(F_p^r) = \pi(F^r) = {}^{r}!\overline{r^r}$。注意， $\nu(F_p^r) = rp+1$。此外， $\alpha(F_p^r) = (r-1)p$。由（1）可得 $t_r(rp+1, (r-1)p+1) \ge 1 - \pi(F_p^r) + O(1) = 1 - {}^{r}!\overline{r^r}$。 □

†当 $\frac{\lfloor \gamma p \rfloor+1}{5}$ 不是整数时，我们总是将其设为下取整或上取整，使得 $\boldsymbol{\mu}$ 中所有元素的和等于 $\lfloor \gamma p \rfloor + 1$。本文其余部分遇到类似情况时，我们也采用相同的处理方式。

当 $3 \le \gamma < \frac{22}{7}$ 时定理 1.8 的证明

为获得局部 Tur´an 密度的更多精确值，我们考虑定理 3.12 的一个扩展。我们定义由 $\mathcal{H}_a$ 组成的 3-均匀超图族。

定义 3.15. 对于整数 $a \ge 2$，设 P 和 Q 是两个不相交的顶点集，且 $|P| = 2a$ 和 $Q = a+1$。设 H_a 是顶点集为 $P \cup Q$ 的 3-均匀超图，其中 $E(H_a) = \binom{P}{3} \cup \{xyz\colon x \in P, y, z \in Q\}$。设

$$\mathcal{H}_a = \{H : \binom{P}{3} \subset E(H) \subset H_a,\ for\ all\ y, z \in Q, d_H(yz) \ge 2a-1\}.$$

利用 Tur´an 定理 [21], ，我们得到关于多重图中 Tur´an 数的以下引理。

引理 3.16. 设 $n \ge a \ge 2$ 为整数，且 G 是一个有 n 个顶点的多重图。若 G 的任意 $a+1$ 个顶点都会诱导出至少一条重数至少为 2 的边，则 $e(G) \ge \frac{2}{a}\binom{n}{2} - n$.
证明。根据图兰定理 [21], $\mathrm{ex}(n, K_{a+1}) \le (1-\frac{1}{a})\binom{n}{2} + \frac{n}{2}$。因此 $T_2(n, a+1, 2) = \binom{n}{2} - \mathrm{ex}(n, K_{a+1}) \ge \frac{1}{a}\binom{n}{2} - \frac{n}{2}$。所以 $e(G) \ge 2 \times T_2(n, a+1, 2) \ge \frac{2}{a}\binom{n}{2} - n$. □

现在，在图兰猜想的一个较弱版本（猜想 1.2）成立的条件下，我们将计算族 $\mathcal{H}_a$ 的图兰密度。

定理 3.17。设 $a \ge 2$ 为一个整数。若 $\pi(K_{2a}^3) \le 1 - \frac{1}{a^2}$，则 $\pi(\mathcal{H}_a) = 1 - \frac{1}{a^2}$。
证明。设 $G_{n,a} = \binom{[n]}{3} \setminus (\binom{V_1}{3} \cup \binom{V_2}{3} \cup \cdots \cup \binom{V_a}{3})$，其中 $V_1 \sqcup V_2 \sqcup \cdots \sqcup V_a = [n]$ 且 $V_i \in \{\lfloor \frac{n}{a} \rfloor, \lceil \frac{n}{a} \rceil\}$.。容易验证，$G_{n,a}$ 是 $\mathcal{H}_a$-自由的，并且 $e(G_{n,a}) = (1 - \frac{1}{a^2} + o(1))\binom{n}{3}$，当 $n \to \infty$ 时成立。因此 $\pi(\mathcal{H}_a) \ge 1 - \frac{1}{a^2}$。

对于上界，我们只需证明：对于任意实数 $0 < \varepsilon < \frac{1}{a^2}$，存在一个整数 $N = N(\varepsilon)$ 和一个实数 $C = C(N)$，使得对任意整数 $n \ge N$，$\mathrm{ex}(n, \mathcal{H}_a) < (1 - \frac{1}{a^2} + \varepsilon)\binom{n}{3} + an^2 + C$。我们对 $n \ge N$ 使用归纳法证明。由于 $\pi(K_{2a}^3) \le 1 - \frac{1}{a^2}$，我们可以选取一个足够大的整数 $N_1 = N_1(\varepsilon)$，使得对 $n \ge N_1$，$\mathrm{ex}(n, K_{2a}^3) \le (1 - \frac{1}{a^2} + \varepsilon)\binom{n}{3}$ 成立。此外，我们可以选取一个整数 $N = N(\varepsilon) \ge N_1$ 和一个实数 C，使得 $(1 - \frac{1}{a^2} + \varepsilon)\binom{N}{3} + aN^2 + C = \binom{N}{3}$ 且 $(1 - \frac{1}{a^2} + \varepsilon)\binom{n}{3} + an^2 + C < \binom{n}{3}$ 对 $n > N$ 成立。

容易看出，我们的断言对 $n = N$ 成立。现在令 $n > N$，并假设我们的断言对 $n-1$ 成立。令 G 为顶点集 $[n]$ 上的一个 3-均匀超图，满足 $e(G) \ge (1 - \frac{1}{a^2} + \varepsilon)\binom{n}{3} + an^2 + C$。因此，$G$ 包含一个有 $2a$ 个顶点的团。不失一般性，设 $\binom{[2a]}{3} \subset G$。对于 $i \in [2a]$，我们定义链接图 $G(i) = \left\{\{x, y\} \in \binom{[2a+1, n]}{2} : ixy \in G\right\}$。令 M 为一个多重图，其边集为（按重数计）$G(1) \cup G(2) \cup \cdots \cup G(2a)$ 的并集。令 $\overline{M} = G(1) \cup G(2) \cup \cdots \cup G(2a)$。若存在一个 $(a+1)$-子集 $S \subset [2a+1, n]$，使得 $\overline{M}$ 在 S 上的导出子图中每条边的重数至多为 1，换言之，M 在 S 上的导出子图中每条边的重数至少为 $2a-1$，那么顶点集 $[1, 2a] \cup S$ 在 G 中诱导出 $\mathcal{H}_a$ 中超图的一个副本。因此，我们假设 $\overline{M}$ 在 $[2a+1, n]$ 的任意 $(a+1)$-子集上的导出子图都至少包含一条重数不小于 2 的边。根据引理 3.16，$e(\overline{M}) \ge \frac{2}{a}\binom{n-2a}{2} - (n-2a)$。因此，$e(M) \le (2a - \frac{2}{a})\binom{n-2a}{2} + (n-2a)$。所以，存在一个顶点 $i \in [2a]$，使得

$e(G(i)) \le \frac{1}{2a}e(M) \le (1-\frac{1}{a^2})\binom{n-2a}{2} + \frac{n}{2a} - 1$。由此可得

$$\begin{aligned} d_G(i) &\le \binom{2a-1}{2} + (2a-1)(n-2a) + (1-\frac{1}{a^2})\binom{n-2a}{2} + \frac{n}{2a} - 1 \\ &\le 2a^2 + 2an - 4a^2 + (1-\frac{1}{a^2})\binom{n-1}{2} \\ &\le (1-\frac{1}{a^2}+\varepsilon)\binom{n-1}{2} + a(2n-1). \end{aligned}$$

根据归纳假设，我们有

$$e(G-i) = e(G) - d_G(i) \ge (1-\frac{1}{a^2}+\varepsilon)\binom{n-1}{3} + a(n-1)^2 + C > \mathrm{ex}(n-1, \mathcal{H}_a).$$

因此， $G-i$ 包含某个超图在 $\mathcal{H}_a$中的一个副本。由此可得

$$\mathrm{ex}(n, \mathcal{H}_a) < (1-\frac{1}{a^2}+\varepsilon)\binom{n}{3} + an^2 + C.$$

□

定理 3.18. 设 $a \ge 2$ 为一个整数。若 $\pi(\mathcal{H}_a) = 1 - \frac{1}{a^2}$，则对于任意满足$a \le \gamma < a + \frac{1}{2a+1}$的实数 γ，存在一个正整数 $p_0 = p(\gamma)$，使得对于所有整数 $p \ge p_0$,

$$t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) = \frac{1}{a^2}.$$

证明. 根据定理 3.3， $t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) \le t_3(ap+1, p+1) \le \rho_3(a, 1) = \frac{1}{a^2}$。我们只需证明下界。对于每个超图 $H \in \mathcal{H}_a$，令 $H^{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}$ 为 H 的膨胀：将 P 的每个顶点替换为 $^a(\lfloor \gamma p \rfloor + 1)\overline{2a^2+a+1}$ 个顶点，并将 Q的每个顶点替换为 $\frac{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}{2a^2+a+1}$ 个顶点。令$\mathcal{H}_a^{\lfloor \gamma p \rfloor + 1} = \{H^{\lfloor \gamma p \rfloor + 1} : \ H \in \mathcal{H}_a\}$。根据定理 3.8, $\pi(\mathcal{H}_a^{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}) = \pi(\mathcal{H}_a) = 1 - \frac{1}{a^2}$。当 p足够大时，$\alpha(H^{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}) \le (2a+1)(\lfloor \gamma p \rfloor + 1)_{2a^2+a+1} + O(1) < p+1$。由(1), ~~$t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) \ge 1 - \pi(\mathcal{H}_a^{\lfloor \gamma p \rfloor + 1}) = \frac{1}{a^2}$.~~ □

Vaughan [22] 利用旗代数计算出了 $\pi(K_6^3)$ 的一个上界。

定理 3.19（Vaughan, [22], [2]）。 $\pi(K_6^3) \le 0.8583903$.

结合定理 3.17、定理 3.18 和定理 3.19，我们得到以下结论。

定理 3.20。设 γ 为满足 $3 \le \gamma < \frac{22}{7}$ 的实数，则存在正整数 $p_0 = p(\gamma)$，使得对于所有整数 $p \ge p_0$,

$$t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) = \frac{1}{9}.$$

注 3.21. 结合定理 3.17 和定理 3.18，若 $\pi(K_{2a}^3) \le 1 - \frac{1}{a^2}$，则对于任意满足 $a \le \gamma < a + \frac{1}{2a+1}$的实数 γ，都存在正整数 $p_0 = p(\gamma)$，使得对于所有整数 $p \ge p_0$, $t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) = \frac{1}{a^2}$.。如果奇数 $k = 2a+1$的图兰猜想（猜想 1.2）成立，即 $\pi(K_{2a+1}^3) = 1 - \frac{1}{a^2}$，那么对于任意满足 $a \le \gamma < a + \frac{1}{2}$ 的实数 γ，都存在正整数 $p_0 = p(\gamma)$，使得对于所有整数 $p \ge p_0$, $t_3(\lfloor \gamma p \rfloor + 1, p+1) = \frac{1}{a^2}$.

4 结语

本文确定了局部图兰密度的一些精确值，并部分回答了问题 1.6；特别是，我们的结果表明，问题 1.6 中关于极限精确值的等式并非普遍成立。局部图兰密度问题仍有许多未解之处。下面我们讨论一些自然的问题。

Frankl、Huang 和 R¨odl [11] 将定理 1.5 扩展到了 r-均匀超图，并提出了以下猜想。

猜想 4.1（Frankl-Huang-R¨odl, [11]）。对于充分大的整数 $r \geq 2$ 和 p，

$$t_r(2p+1, p+1) = \frac{1}{2^{r-1}}.$$

注意到，问题 1.6 是定理 1.4 的推广，并且与猜想 4.1 密切相关。基于定理 1.7，我们将问题 1.6 扩展为以下更一般的问题。回顾一下，对于一个整数 $r \geq 3$ 和一个实数 $\gamma > 1$，我们将 r-均匀超图的族 $\mathcal{F}_\gamma^r$ 定义为$\mathcal{F}_\gamma^r = \{r\text{-均匀图 } F\colon \nu(F) > \gamma\alpha(F)\}$.

问题 4.2。设 $r \geq 3$ 为一个整数，$\gamma > 1$ 为一个实数。是否存在一个正整数 $p_0 = p_0(r, \gamma)$，使得对于所有整数 $p \geq p_0$,

$$t_r(\gamma p + 1, p + 1) = 1 - \pi(\mathcal{F}_\gamma^r)?$$

利用 Brown 和 Simonovits 的膨胀定理 [4], ，可以证明問題 4.2 等价于以下问题。

問題 4.3. 设 $r \geq 3$ 是一个整数，$\gamma > 1$ 是一个实数。是否存在一个有限子族 $\mathcal{F}_{fin} \subset \mathcal{F}_\gamma^r$，使得

$$\pi(\mathcal{F}_{fin}) = \pi(\mathcal{F}_\gamma^r)?$$

若某个 $\mathcal{H}$ 族中的 r-均匀超图满足：存在一个有限子族 $\mathcal{H}_{fin} \subset \mathcal{H}$，使得 $\pi(\mathcal{H}_{fin}) = \pi(\mathcal{H})$（参见 [4] 中的猜想 1），则称该族为紧。在这个概念下，問題 4.3 问的是族 $\mathcal{F}_\gamma^r$ 是否紧。Frankl 和 Stechkin [13] 的结果表明，当 $1 \leq \gamma < \frac{r}{r-1}$ 时，族 $\mathcal{F}_\gamma^r$ 是紧的。定理 1.5 表明，族 $\mathcal{F}_2^3$ 是紧的。此外，定理 1.8 中考虑的每种情形所对应的超图族也都是紧的。

致謝。我们最近得知，Frankl 和 Nie [12] 也在这一主题上取得了成果；当 $r = 3$ 和 $2 \leq \gamma < 7/3$ 时，这些成果与我们的定理 1.8 部分重叠。

參考文獻

[1] R. Baber 和 J. Talbot，三元超图的新 Tur´an 密度，《電子組合學期刊》19 #P22。 (2012)

[2] J. Balogh、F. C. Clemen 和 B. Lidick´y，《 l_2-范数下的超图 Tur´an 问题》，《組合學綜述》，伦敦数学学会讲义丛书，剑桥大学出版社，剑桥，第 481 卷（2022 年），21–63 页。

[3] W. G. Brown，关于 Paul Tur´an 提出的一个三元超图未决问题，《纯数学研究》（1983 年），91–93 页。[4] W. G. Brown 和 M. Simonovits，《有向图极值问题、超图极值函数与图结构的密度》，《离散数学》48（1984 年），147–162 页。[5] P. Erd˝os 和 J. Spencer，《组合学中的概率方法》，《概率与数理统计》，第 17 卷，学术出版社，纽约—伦敦（1974 年），MR 52。[6] P. Erd˝os 和 M. Simonovits，《图论中的极限定理》，《匈牙利数学学报》1（1966 年），51–57 页。[7] P. Erd˝os 和 A. H. Stone，《线性图的结构》，《美国数学会通报》52（1946 年），1087–1091 页。[8] D. G. Fon-Der-Flaass，《一种构造 (3, 4)-图的方法》，《数学札记》44（1988 年），546–550 页。[9] P. Frankl 和 Z. F¨uredi，《Erd˝os-Ko-Rado 定理的一种新推广》，《组合数学》3（1983 年），341–349 页。[10] P. Frankl，《局部 Tur´an 问题的渐近解》，《匈牙利数学学报》19（1984 年），253–257 页。[11] P. Frankl、H. Huang 和 V. R¨odl，《关于局部 Tur´an 问题》，《组合理论杂志 A 辑》177（2021 年），105329。[12] P. Frankl 和 J. Nie，《关于渐近局部 Tur´an 问题》，准备中。[13] P. Frankl 和 B. Stechkin，《k元超图的局部 Tur´an 性质》，《苏联科学院数学札记》29（1981 年），45–51 页。[14] Gy. Katona、T. Nemetz 和 M. Simonovits，《图论中 Tur´an 的一个问题》，《数学札记》15（1964 年），228–238 页。[15] A. V. Kostochka，《一类用于 Tur´an (3, 4) 问题的构造》，《组合数学》2（1982 年），187–192 页。[16] D. Mubayi 和 O. Pikhurko，《Mantel定理对 k-元超图的一种新推广》，《组合理论杂志 B 辑》97（2007 年），669–678 页。[17] D. Mubayi 和 V. R¨odl，《关于三元系统的 Tur´an 数》，《组合理论杂志 A 辑》100（2002 年），136–152 页。[18] O. Pikhurko，《广义三角形的一个精确 Tur´an 结果》，《组合数学》28（2008 年），187–208 页。[19] A. Razborov，《关于不含四顶点构型的三元超图》，《SIAM 离散数学杂志》24（2010 年），946–963 页。

[20] A. Sanitt 和 J. Talbot，关于三部三元超图的一个精确 Tur´án 结果，《電子組合學期刊》22 (2015) #P4.3.[21] P. Tur´án，关于图论中的一个极值问题，Mat. Fiz. Lapok 48 (1941) 436–452.
[22]E. Vaughan，Flagmatic 软件包，网址：http://jakubsliacan.eu/flagmatic/ 或 http://lidicky.name/flagmatric/。