变维控制系统瞬态动力学的实现

Naqi Fan[a],Lijun Zhang[a,b,*]

[a] *College of Intelligent Systems Science and Engineering, Harbin Engineering University, Harbin, 150001, China.*
[b] *School of Marine Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an, 710129, China.*

arXiv:2303.00432v1 [math.OC] 1 Mar 2023

摘要

变维控制系统的动态演化行为常见于基因调控网络和汽车离合器系统等。关于变维控制系统，一项重要且意义深远的研究是如何在不同维度的子系统之间平滑实现变维（瞬态动力学）过程。商空间方法被认为是对变维控制系统瞬态动力学进行建模的有效工具。本文研究变维控制系统瞬态动力学的实现问题。通过揭示商空间上线性系统的可控子空间结构，我们提出了变维控制系统瞬态动力学的实现条件，并据此给出一种瞬态动力学建模新方案。此外，所提出的方案验证了现有瞬态动力学建模策略的相关结论。最后通过一个数值示例说明理论结果。

关键词： 变维控制系统，瞬态动力学，能控性，商空间，实现。

1. 引言

变维控制系统，又称跨维控制系统，可用于对状态空间维数不同的复杂系统进行建模。在实际中，许多动态行为都可以用变维控制系统建模。例如，在互联网或其他一些基于服务的网络中，用户可能时不时地加入或退出 [1]。在基因调控网络中，细胞可能随时死亡或新生 [2, 3]。航天器的对接、分离、出发和加入都具有"短暂的"变维过程 [4]。在变维过程中，变维控制系统会从一个模型演化到另一个维数不同的模型。

过去，研究人员对变维控制系统开展了一些研究，通常将变维控制系统视为切换系统，并基于切换系统理论研究其稳定性和控制设计问题[5, 6, 7, 4]。然而，这种方案忽略了系统在变维过程中的瞬态动力学。事实上，这一暂态期间可能足够长，以至于不能忽略此过程中的动力学 [4, 8]。例如，在汽车

*本研究得到陕西省自然科学基础研究计划资助，项目编号：2021JZ- 12。

*通讯作者地址：西北工业大学海洋技术学院，西安 710072，中国。*Email address:* zhanglj7385@nwpu.edu.cn (Lijun Zhang)

工程中，图1所示的汽车离合器系统可根据离合器处于“分离”还是“接合”状态，描述为二维系统或一维系统 [9, 10]。完成“分离”或“接合”的瞬态过程大约需要1秒。航天器编队中的对接、分离、出发和加入过程所需时间甚至更长 [6, 7, 4]。因此，研究变维控制系统的瞬态动力学具有重要意义。对变维控制系统的瞬态动力学进行建模和控制设计，可以提升机械系统或其他系统的性能。

然而，数十年来，由于缺乏合适的理论工具，关于变维控制系统瞬态动力学的数学研究寥寥无几。幸运的是，Cheng 教授 [11] 于2019年创立了变维控制系统理论，探究了变维控制系统的数学基础，并精辟阐述了如何利用变维控制系统对线性系统的变维过程动力学进行建模与分析。具体而言，Cheng 基于商空间理论，在 [10] 提出了变维控制系统的投影系统，该系统定义在一个构造出的商空间上，其中包含不同维数系统的状态等价类。因此，对变维控制系统瞬态动力学的研究可转化为对商空间上相应投影系统的研究。

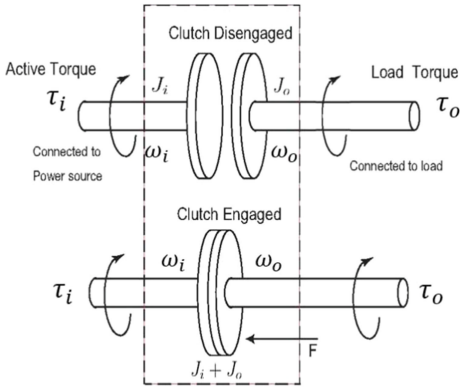


图 1：汽车离合器系统。

具体而言，对于由两个维数不同的线性子系统组成的给定变维控制系统：

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &: \dot{x}(t) = A_1 x(t) + B_1 u_1(t), \quad x \in \mathbb{R}^p, \\ \Sigma_2 &: \dot{y}(t) = A_2 y(t) + B_2 u_2(t), \quad y \in \mathbb{R}^q, \end{aligned} \tag{1}$$

其中， $x(t)$和 $y(t)$分别是子系统 Σ_1 和 Σ_2 的状态， $A_1 \in \mathbb{R}^{p\times p}$、 $A_2 \in \mathbb{R}^{q\times q}$、 $B_1 \in \mathbb{R}^{p\times r}$和 $B_2 \in \mathbb{R}^{q\times s}$是用于表征这些子系统的常矩阵， $u_i(t)$ $(i = 1, 2)$表示子系统 Σ_i的控制输入。在变维过程中，系统(1)将从 Σ_1演化至 Σ_2 （或从 Σ_2 演化至 Σ_1）。对于系统(1)，一个众所周知的难题是， Σ_1 和 Σ_2 的维数不同，导致瞬态动力学难以建模。为克服这一难题，Cheng [12, 11]首次提出了不同维数空间上线性系统的等价关系，并基于该等价关系构造了一个商空间，随后通过将变维控制系统投影到商空间上，对变维控制系统的瞬态动力学进行了建模。因此，若能设计 $u_1(t)$和 $u_2(t)$，使得 Σ_1

(Σ_2)在暂态期间能够演化至 Σ_2 (Σ_1)。由此，从理论上说，通过控制设计可以尽可能平稳地实现变维控制系统的瞬态过程。

近年来，Cheng [11] 提出的变维控制系统理论引起了广泛关注。Zhang 等人 [13] 给出了跨维系统跨维状态空间的一组基，证明其具有可数无限维。Feng 等人 [14]研究了一类跨维线性系统的变化，并建立了一种用于计算跃迁时间后状态维数的算法。关于变维控制系统的其他最新研究，请参见 [15, 16, 17, 18]。然而，据我们所知，除 Cheng 的研究[12, 11, 10], 外，上述研究均未涉及变维控制系统瞬态动力学的实现问题。值得一提的是，Cheng [10]将其理论应用于车辆离合器系统瞬态动力学的建模（图 1），并据此设计了离合器系统变维过程的控制。 [10] 中针对车辆离合器系统瞬态动力学的控制实现促使我们提出一个问题："控制实现"的条件是什么?

Cheng 的研究成果*[12, 11, 10]* 为我们研究维数变化控制系统的瞬态动力学提供了一个有前景的方向，并已建立起基本的理论框架。然而，对于维数变化控制系统瞬态动力学的实现，仍存在若干引人关注且富有挑战性的问题：

1. 是 否系统 (1) 的实现问题等价于其投影系统的实现问题 $m?$

2. 系统 (1) 实现瞬态过程需要满足哪些条件?

3. 对维数变化控制系统的瞬态动力学进行建模需要满足哪些条件?

受上述问题启发，本文将研究维数变化控制系统瞬态动力学的实现问题。具体而言，本文从系统能控性理论的角度出发，旨在为商空间上维数变化控制系统瞬态动力学的建模提供理论依据。通过分析商空间上线性系统的可控子空间，我们首先证明，维数变化控制系统的实现可等价于其在商空间上的投影系统的实现。具体而言，我们给出了商空间上线性系统用于能控性分解的坐标变换，并揭示了维数变化控制系统的能控性与其投影系统能控性之间的关系。此外，我们基于投影系统的能控性，提出了维数变化控制系统瞬态动力学实现的一个条件。特别是，基于所提出的条件，我们构建了一种新的维数变化控制系统瞬态动力学建模方案，并据此论证了 [10] 中车辆离合器系统瞬态动力学的实现。

本文的结构安排如下：第2节介绍商空间的相关预备知识并提出问题。第3节分析商空间上线性系统的能控性，并给出用于能控性分解的坐标变换。第4节给出维数变化控制系统瞬态动力学实现的条件。第5节给出维数变化控制系统瞬态动力学建模的条件，

其中我们还回顾了 [11]中的一个示例，以说明所提出理论结果的有效性。结论见第6节。

2. 预备知识与问题描述

本节概述商空间的基本定义和概念，并介绍商空间上的线性系统。更多详情请参阅 [19]。本节末尾将提出关于维数变化控制系统瞬态动力学实现的问题。

首先给出一些记号。符号 $\otimes$ 表示矩阵的克罗内克积。单元素向量记为$\mathbf{1}_n = [1, \cdots, 1]^T$。将元素为 $\frac{1}{k}$ 的 $k \times k$ 矩阵记为$\mathbf{J}_k$。混合维数n向量的集合定义为 $\mathcal{V} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$, –其中 $\mathcal{V}_n$ 是一个 n维向量空间。为简洁起见，假设$\mathcal{V}_n = \mathbb{R}^n$。所有矩阵的集合定义为 $\mathcal{M} := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m\times n}$，其中 $\mathcal{M}_{m\times n}$ 表示 $m \times n$ 维实矩阵的集合。

2.1. 预备知识

定义1. *[19] 1)* 设 $x, y \in \mathcal{V}$. x 和 y 称为等价的，记作 $x \leftrightarrow y$，如果存在$\mathbf{1}_\alpha$ 和 $\mathbf{1}_\beta$，使得 $x \otimes \mathbf{1}_\alpha = y \otimes \mathbf{1}_\beta$.

2) 等价类记作

$$\bar{x} = \{y \in \mathcal{V} \mid y \leftrightarrow x\}.$$

3) 若不存在 y 和 $\mathbf{1}_s$, $s > 1$使得 $x_1 = y \otimes \mathbf{1}_s$，则向量 $x_1 \in \bar{x}$ 称为不可约的。于是， $\bar{x}$ 中的所有元素均可表示为 $x_i = x_1 \otimes \mathbf{1}_i, i = 1, 2, 3, \ldots$，且 x_1 是唯一的不可约元素。*4)* $\mathcal{V}$ 在等价关系 $\leftrightarrow$下的商向量空间，记作Ω，为

$$\Omega := \{\bar{x} \mid x \in \mathcal{V}\}.$$

定义2. *[19]* 设 $x \in \mathcal{V}_m$, $y \in \mathcal{V}_n$，且 $t = m \vee n$ 是 m 和 n的最小公倍数。 x 与 y 的加法定义为 $x \vec{+} y := \left(x \otimes \mathbf{1}_{t/m}\right) + \left(y \otimes \mathbf{1}_{t/n}\right) \in \mathcal{V}_t$。相应地，减法定义为 $x \vec{-} y := x \vec{+} (-y)$。于是，对于 $\bar{x}, \bar{y} \in \Omega$ 和 $a \in \mathbb{R}$,

$$\bar{x} \vec{+} \bar{y} := \overline{x \vec{+} y},$$
$$\bar{x} \vec{-} := \overline{x \vec{-} y},$$
$$a\bar{x} := \overline{ax}.$$

定义2表明，商空间 Ω 是一个向量空间。

定义 3. *[19]* 设 $A, B \in \mathcal{M}$。 A 和 B 称为等价，记作 $A \approx B$，如果存在$\hat{}\mathbf{J}_\alpha$ 和 $\mathbf{J}_\beta$，使得 $A \otimes \mathbf{J}_\alpha = B \otimes \mathbf{J}_\beta \cdot$ 等价类记作 $A = \{B \mid B \approx A\}.$，商空间记作 $\Xi := \mathcal{M}/\approx$.

定义4. *[19] 1)*设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}, B \in \mathcal{M}_{p\times q}$，且 $t = n \vee p$。则 A 和 B的第二半张量积，记作 $A \circ B$，定义为

$$A \circ B := \left(A \otimes J_{t/n}\right)\left(B \otimes J_{t/p}\right).$$

$\hat{}\hat{}$ $\overbrace{\quad}$ *2)* 在 Ξ 上定义乘积为 $A \circ B := A \circ B$.

以下定义给出了两个矩阵的向量等价关系，用于描述商空间上的线性系统。

定义 5. *[19]* 设 $B, D \in \mathcal{M}$. B 和 D 称为向量等价，记作 $B \leftrightarrow D$，如果存在 $\mathbf{1}_\alpha$ 和 $\mathbf{1}_\beta$，使得 $B \otimes \mathbf{1}_\alpha = D \otimes \mathbf{1}_\beta$. B 的等价类记作 $B = \{D \mid D \leftrightarrow B\}$.

定义 6. *[19] 1)* 设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n} \subset \mathcal{M}$, $x \in \mathcal{V}_r \subset \mathcal{V}$ 和 $t = n \vee r$。则 A 与 x的乘积记作 $\vec{\circ}$，定义为

$$A\vec{\circ}x := \left(A \otimes \mathbf{J}_{t/n}\right)\left(x \otimes \mathbf{1}_{t/r}\right). \tag{2}$$

2) Ξ 在Ω 上的作用记作$\hat{}A\vec{\circ}\bar{x}\colon = A\vec{\circ}x$。

将矩阵 B 视为一组列向量，上述定义很容易扩展到两个矩阵 A 和 B的情形:

定义7。 *1)* 设 $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$、 $B \in \mathcal{M}_{r\times s}$ 和 $t = n \vee r$。那么

$$A\vec{\circ}B := \left(A \otimes \mathbf{J}_{t/n}\right)\left(B \otimes \mathbf{1}_{t/r}\right). \tag{3}$$

2) 在 Ξ 上的作用记为 $\hat{}A\vec{\circ}\bar{B} := A\vec{\circ}B$。

根据定义2，Cheng [10] 将线性系统在商空间上的投影系统定义如下。

定义8。 *[10] 1)* 考虑一个线性系统

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}^r. \tag{4}$$

商空间 Ω 上的以下系统称为*(4)*的投影系统

$$\dot{\bar{x}}(t) = \hat{A}\vec{\circ}\bar{x}(t) + \bar{B}u(t), \quad \bar{x}(t) \in \Omega. \tag{5}$$

反过来，如果 $A \in \hat{}A$ 且 $B \in \bar{B}$，则系统 (4) 称为 $\mathbb{R}^r$上(5) 的提升系统。
2）设 Θ_0 为商空间上的线性控制系统， Θ_n 为其在 $\mathbb{R}^n$上的提升系统。则所有提升系统均称为等价的。

2.2. 问题描述

注意，商空间上的一个系统是由不同维数的等价系统组成的集合，因此，不同维数的系统可以“提升”到维数相同的空间中。这使得在商空间上对变维控制系统的瞬态动力学进行建模成为可能。因此，根据定义8，系统（1）在商空间上的投影可描述如下。

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_1 &: \dot{\bar{x}}(t) = \hat{A}_1\vec{\circ}\bar{x}(t) + \bar{B}_1u_1(t), \quad \bar{x} \in \bar{\mathbb{R}}^p, \\ \bar{\Sigma}_2 &: \dot{\bar{y}}(t) = \hat{A}_2\vec{\circ}\bar{y}(t) + \bar{B}_2u_2(t), \quad \bar{y} \in \bar{\mathbb{R}}^q, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $\mathbb{R}^p = \{\bar{x} | x \in \mathbb{R}^p\}$ 且 $\mathbb{R}^q = \{\bar{y} | y \in \mathbb{R}^q\}$。为简便起见，以下用符号 Ω 表示 $\mathbb{R}^p$ 或 $\mathbb{R}^q$。根据系统 (6)，我们可以将系统 (1) 在暂态期间 $[t_0, t_e]$从 Σ_1 到 Σ_2 的瞬态动力学，转化为商空间上 Σ_1 在 $[t_0, t_e]$期间从 Σ_2 到 的瞬态动力学。

定义 9。 *[10]* 对于系统 (1)，如果在暂态期间 $[t_0, t_e]$内，对于系统 (6)，存在控制量 $u_1(t)$ 和 $u_2(t)$，使得给定的初始状态 $\bar{x}(t_0)$ 能够在商空间Ω上被控制到状态 $\bar{y}(t_e)$，则称从给定的初始状态 $x(t_0) \in \mathbb{R}^p$ 到 $y(t_e) \in \mathbb{R}^q$ 的瞬态动力学得到了适当实现。

这里出现了一些引人入胜且颇具挑战性的问题:

1. 系统（1）的实现问题是否等价于系统（6）的实现问题)?

2. 系统（1）要实现瞬态过程，需要满足什么条件?

3. 对维数变化控制系统的瞬态动力学进行建模需要满足什么条件?

现在，我们将详细讨论这些问题。

3. 商空间上线性系统的一些分析

本节旨在通过研究商空间上投影系统 (5) 的可控子空间，说明系统 (1) 的实现问题等价于系统 (6) 的实现问题。此外，我们给出了投影系统的坐标变换，为后续研究提供支持。

3.1. Ω 上线性系统的可控子空间

引理1. 设 $\mathcal{C}$ = 张成 $\left\{B, AB, \cdots, A^{r-1}B\right\}$ 为系统 (4) 的可控子空间，则投影系统 (5) 的可控子空间记为 $\mathcal{C}$，为

$$\overline{\mathcal{C}} = \operatorname{span}\{\bar{B}, \overline{AB}, \overline{A^2B}, \cdots, \overline{A^{r-1}B}\}$$

证明. 容易计算得出，投影系统 (5) 在初始状态 $\bar{x}(t_0)$ 下的轨迹为

$$\bar{x}(t) = \mathrm{e}^{\hat{A}t} \vec{\circ} \bar{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\hat{A}(t-\tau)} \vec{\circ} \bar{B} u(\tau) \mathrm{d}\tau. \tag{7}$$

设 $\mathbf{0} := \{[\underbrace{0, 0, \cdots, 0}]^T \mid n = 1, 2, \cdots\}$。假设 $\bar{x}(t_0)$ 被驱动到原点 $\bar{x}(t) = \mathbf{0}$，则 (7) 可进一步写为

$$\bar{x}(t_0) = -\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\hat{A}(t_0-\tau)} \vec{\circ} \bar{B} u(\tau) \mathrm{d}\tau. \tag{8}$$

ˆ 根据定义 3 可知， A 的秩与 A的秩相等。利用凯莱¨CHamilton 定理 $[20]$, ，可得以下泰勒展开,

$$\mathrm{e}^{\hat{A}(t_0-\tau)} = \sum_{j=0}^{r-1} \lambda_j(t_0 - \tau) \hat{A}^j,$$

其中 $\hat{A}^j = \hat{A}^0 \circ \hat{A}^1 \circ \ldots \hat{A}^j$。

令 $\gamma_j = \int_{t_0}^{t} \lambda_j(t_0 - \tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$，则式（8）可改写为

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_0) &= -\sum_{j=0}^{r-1} \hat{A}^j \vec{\sigma} \bar{B} \gamma_j \\ &= -[\ \bar{B} \quad \hat{A}\vec{\sigma}\bar{B} \quad \cdots \quad \hat{A}^{r-1}\vec{\sigma}\bar{B}\ ][\ \gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \cdots \quad \gamma_{r-1}\ ]^T \end{aligned} \tag{9}$$

根据定义4，有$\hat{}A^j = \widehat{A^j}$。结合定义7，可得$\hat{}A^j \vec{\sigma} \bar{B} = \widehat{A^j} \vec{\sigma} \bar{B} = A^j \vec{\sigma} B$。此外，注意到 A 的列数等于$\overline{B}$的行数，因此有 $A^j \vec{\sigma} B = A^j B$。于是，(9)可表示为

$$\begin{aligned} \bar{x}(t_0) &= -[\ \bar{B} \quad \overline{A\vec{\sigma}B} \quad \cdots \quad \overline{A^{r-1}\vec{\sigma}B}\ ][\ \gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \cdots \quad \gamma_{r-1}\ ]^T \\ &= -[\ \bar{B} \quad \overline{AB} \quad \cdots \quad \overline{A^{r-1}B}\ ][\ \gamma_0 \quad \gamma_1 \quad \cdots \quad \gamma_{r-1}\ ]^T \end{aligned}$$

注意到Ω是一个向量空间（回顾定义2），系统(5)的可控子空间可表示为

$$\overline{\mathcal{C}} = \mathrm{span}\{\bar{B}, \overline{AB}, \overline{A^2B}, \cdots, \overline{A^{r-1}B}\}$$

□

$\bar{}$与 $\mathcal{C}$相比，我们可以看到， $\mathcal{C}$ 的元素是 $\mathcal{C}$中元素的等价类，这意味着投影系统(5)的可控状态是系统(4)的可控状态的等价类。

引理1表明，例如，如果系统(4)的初始状态 $x(t_0)$被控制到状态 $x(t_e)$，相应地，在Ω上的系统(5)中，$\bar{x}(t_0)$可以被控制到 $\bar{x}(t_e)$。这意味着，对系统(1)瞬态动力学的研究可以通过其在商空间上的对应投影系统(6)来进行。也就是说，对于变维控制系统，我们无需研究变维控制系统瞬态动力学的实现，而可以研究商空间上的对应问题。鉴于这一观察，我们将注意力限制在投影系统(6)上。

*3.2. Ω*上线性系统的坐标变换

为继续讨论，我们只需关注投影系统 (6) 的瞬态动力学。本小节将讨论系统 (6) 的坐标变换，以研究商空间上的能控性分解，为研究商空间上瞬态动力学的实现问题铺平道路。

定义10. *[11]*令 $A \in \mathcal{M}_{m\times n} \subset \mathcal{M}, x \in \mathcal{V}_r \subset \mathcal{V}$. 假设 $t = n \vee r$。则 A 与 x的乘积定义为

$$A \overrightarrow{\ltimes} x := \left(A \otimes I_{t/n}\right)\left(x \otimes \mathbf{1}_{t/r}\right). \tag{10}$$

现在，设 $y \in \bar{y}$ 和 $y_\pi \in \bar{y}_\pi$ 是维数相同的两个不可约向量，其中 $\bar{y}$， $\bar{y}_\pi \in \Omega$ 是商空间 Ω 上的两个向量，如定义1所示。我们有以下引理。

引理2. 设 T_Λ 为一个坐标变换矩阵，满足 $y_\pi = T_\Lambda y$。则称 $\langle T_\Lambda \rangle$ 为一个“伪坐标变换矩阵”，满足 $\bar{y}_\pi = \langle T_\Lambda \rangle \overrightarrow{\ltimes} \bar{y}$，其中 $\langle T_\Lambda \rangle = \{T_\Lambda, T_\Lambda \otimes I_2, \ldots, T_\Lambda \otimes I_n\}$。

证明. 只需证明，对于任意 $\xi \in \bar{y}$， $\xi_\pi = T_\Lambda \overrightarrow{\ltimes} x \in \bar{y}_\pi$ 成立。

由于 $\xi \in \bar{y}$，因此 $\xi = y \otimes 1_\alpha$，其中 $y \in \bar{y}$ 是一个不可约向量。根据引理1，我们有 e

$$\begin{aligned} \xi_\pi =& T_\Lambda \overrightarrow{\ltimes} \xi = T_\Lambda \overrightarrow{\ltimes} (y \otimes \mathbf{1}_\alpha) \\ =& (T_\Lambda \otimes I_\alpha)(y \otimes \mathbf{1}_\alpha) \\ =& T_\Lambda y \otimes \mathbf{1}_\alpha \\ =& y_\pi \otimes \mathbf{1}_\alpha. \end{aligned} \tag{11}$$

因此，我们有 $\xi_\pi \leftrightarrow y_\pi$ ，这意味着 $\xi_\pi \in \bar{y}_\pi$。也就是说，由于 ξ的任意性，根据式（11）的推导，我们有 $\bar{y}_\pi = \langle T_\Lambda \rangle \overrightarrow{\ltimes} \bar{y}$，其中 $\langle T_\Lambda \rangle$ 根据式（11）的第二行确定。

此外，坐标变换矩阵 T_Λ 意味着 $\langle T_\Lambda \rangle$ 中的任意元素都是非奇异的，因此可以认为 $\langle T_\Lambda \rangle$ 对向量 $\bar{y}$ 执行坐标变换。 □

我们注意到，显然， $\langle T_\Lambda \rangle$ 并非真正的坐标变换矩阵，因此称其为“伪坐标变换矩阵”。为便于表述，以下将“坐标变换矩阵”用于指代 $\langle T_\Lambda \rangle$ ，以免造成混淆。

然后，利用引理2，可以轻松得到 Ω 上投影系统的坐标变换。

引理3。 设提升系统 *(4)* 在坐标变换 $x_\pi = Tx$ 下变换为以下系统，

$$\dot{x}_\pi = A_\pi(t) x_\pi(t) + B_\pi(t) u(t), \quad x_\pi(t) \in \mathbb{R}^r, \tag{12}$$

那么，相应地，其在商空间上的投影系统 *(5)* 在“坐标变换”$\bar{x}_\pi = \langle T \rangle \overrightarrow{\ltimes} \bar{x}$ 下可转换为

$$\dot{\bar{x}}_\pi(t) = \hat{A}_\pi \vec{\circ} \bar{x}_\pi(t) + \bar{B}_\pi u(t), \quad \bar{x}(t) \in \Omega. \tag{13}$$

引理2和引理3为我们提供了适当的“坐标变换”，使系统能够在商空间上转化为能控性分解，这对于我们进一步研究商空间上变维控制系统瞬态动力学的实现具有重要意义。

4. Ω 上变维控制系统瞬态动力学的实现

本节给出了变维控制系统瞬态动力学实现的一个条件。为了准确表述主要结果，我们还需要一些记号和术语。

¯ ¯设 $\mathcal{W}$ 是一个向量空间。记 $\bar{\mathcal{W}} := \{\bar{\omega} \mid \omega \in \mathcal{W}\}$。容易看出 $\dim(\bar{\mathcal{W}}) = \dim(\mathcal{W})$。

定义 11. 设 $\mathcal{V}_m$ 和 $\mathcal{V}_n$ 是两个向量空间。 $\mathcal{V}_m$ 和 $\mathcal{V}_n$ 的和定义为 $\mathcal{V}_m | \vec{+} \mathcal{V}_n := \underline{= \{x | \vec{+} y | x \in \mathcal{V}_m, y \in \mathcal{V}_n\}}$。然后， $\bar{\mathcal{V}}_m$ 和 $\bar{\mathcal{V}}_n$ 的和定义为 $\bar{\mathcal{V}}_m | \vec{+} \bar{\mathcal{V}}_n := \mathcal{V}_m | \vec{+} \mathcal{V}_n$.

给定向量 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_m)^T \in \mathcal{V}_m$ 和向量空间 $\mathcal{V}_n$，其中 $m \leq n$。 ε 在 $\mathcal{V}_n$ 上的嵌入映射定义为 $\varphi_n(\varepsilon) := (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots\ldots, \varepsilon_m, 0, 0, \ldots\ldots, 0)^T$，则将嵌入的$\underbrace{\quad}_{n-m}$空间记为 $\mathcal{V}_n^m = \text{span}\{\varphi_n(\varepsilon)\}$。也就是说， ε 中缺失的元素用 0 填充。

定义 12。 设 $\mathcal{V}_m$ 和 $\mathcal{V}_n$ 是两个向量空间，且 $m \leq n$。 $\mathcal{V}_n^m$和 $\mathcal{V}_n$ 的直和定义为 $\mathcal{V}_n^m \vec{\oplus} \mathcal{V}_n := \{\varphi_n(x) + y | \varphi_n(x) \cap y = \emptyset,\ x \in \mathcal{V}_m,\ y \in \mathcal{V}_n\}$。那么， $\bar{\mathcal{V}}_n^m$和 $\bar{\mathcal{V}}_n$ 的直和定义为 $\bar{\mathcal{V}}_n^m \vec{\oplus} \bar{\mathcal{V}}_n := \mathcal{V}_n^m \vec{\oplus} \mathcal{V}_n$。

不失一般性，我们假设系统 (1) 满足 $p < q$ 。于是，维数变化控制系统 (6) 的瞬态动力学实现条件如下。

定理 1. 考虑系统 (6)。设 $\mathcal{C}_i, i = 1,2$ 是 Σ_i 的可控子空间。那么，在商空间 Ω 上， $\bar{x}(t_0)$ 可在暂态期间 $[t_0, t_e]$ 控制到状态 $\bar{y}(t_e)$ ，当且仅当存在 $\mathcal{C}_{2^*} \subset \mathcal{C}_2$ 使得

$$\bar{\mathcal{C}}_1 \vec{\oplus} \bar{\mathcal{C}}_{2^*} = \bar{\mathbb{R}}^q,$$

其中 $\mathbb{R}_q = \{\bar{y} \mid y \in \mathbb{R}^q\}$。

证明。 稍作修改后，系统 Σ_1 可描述如下:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu_1, \quad x \in \mathbb{R}^p, \\ \dot{x^c} = \mathbf{0}_{q-p}, \quad x^c \in \mathbb{R}^{q-p}, \end{cases} \tag{14}$$

其中 $\mathbf{0}_{q-p} = [\underbrace{0, \ldots, 0}_{}]$。 令 $w = (x, x^c)$, 则 (14) 在商空间 Ω 上的投影系统为$q-p$

记作

$$\bar{\Sigma}_3 : \dot{\bar{w}}(t) = \hat{A}_3 \vec{\circ} \bar{w}(t) + \bar{B}_3 u_1(t), \quad \bar{w} \in \Omega.$$

注意到， Σ_3 与 Σ_1具有相同的可控空间。因此，系统 (6) 的瞬态动力学与下列系统的瞬态动力学相同。

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}_3 : \dot{\bar{w}}(t) &= \hat{A}_3 \vec{\circ} \bar{w}(t) + \bar{B}_3 u_1(t), \quad \bar{w} \in \Omega, \\ \bar{\Sigma}_2 : \dot{\bar{y}}(t) &= \hat{A}_2 \vec{\circ} \bar{y}(t) + \bar{B}_2 u_2(t), \quad \bar{y} \in \Omega. \end{aligned} \tag{15}$$

因此，接下来我们研究系统 (15) 的瞬态动力学。

对于系统 (15)，根据定义 9，我们需要证明存在控制量 u_1 和 u_2 ，使得系统 (15) 的瞬态动力学能够在暂态期间 $[t_0, t_e]$内，从系统 Σ_3 的给定状态 $\bar{w}(t_0)$实现到系统 Σ_2 的状态 $\bar{y}(t_e)$。

令 $\mathcal{C}_3$ 和 $\mathcal{C}_3$ 分别为系统 (14) 和系统 Σ_3 的可控子空间。在假设 $p < q$ 下，可以看出 $\dim(\mathcal{C}_3) < q$.

接下来我们考虑两种情况。

情形 1: $\dim(\mathcal{C}_2) = q$.

由于 $\dim(\mathcal{C}_3) < q$，因此存在一个坐标变换 $\mathbf{w} = T_1 w$ ，使系统 (14) 可转换为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{w}}_1 = A_3^{11} \mathbf{w}_1 + A_3^{12} \mathbf{w}_2 + B_3 u_1, \\ \dot{\mathbf{w}}_2 = A_3^{22} \mathbf{w}_2. \end{cases} \tag{16}$$

然后，根据引理3，相应地存在坐标变换 $\bar{\mathbf{w}} = \langle T_1 \rangle \vec{\ltimes} \bar{w}$ ，使得 $\bar{\Sigma}_3$ 转化为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{w}}}_1 = \hat{A}_3^{11} \vec{\circ} \bar{\mathbf{w}}_1 + \hat{A}_3^{12} \vec{\circ} \bar{\mathbf{w}}_2 + \bar{B}_3 u_1, \\ \dot{\bar{\mathbf{w}}}_2 = \hat{A}_3^{22} \vec{\circ} \bar{\mathbf{w}}_2. \end{cases} \tag{17}$$

注意，$\dim(\bar{\mathcal{C}}_2) = q$，类似地，在“坐标变换” $\bar{\mathbf{y}} = \langle T_1\rangle \vec{\ltimes} \bar{y}$ 下， $\bar{\Sigma}_2$ 转化为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{y}}}_1 = \hat{A}_2^{11} \vec{\circ} \bar{\mathbf{y}}_1 + \hat{A}_2^{12} \vec{\circ} \bar{\mathbf{y}}_2 + \bar{B}_2^1 u_2 \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}_2 = \hat{A}_2^{21} \vec{\circ} \bar{\mathbf{y}}_1 + \hat{A}_2^{22} \vec{\circ} \bar{\mathbf{y}}_2 + \bar{B}_2^2 u_2 \end{cases} \tag{18}$$

令 $\bar{w}(t_0) = (\bar{\mathbf{w}}_1(t_0)\ \bar{\mathbf{w}}_2(t_0))$ 和 $\bar{y}(t_e) = (\bar{\mathbf{y}}_1(t_e)\ \bar{\mathbf{y}}_2(t_e))$。那么，只需证明瞬态动力学可以从系统 (17) 实现到系统 (18)。显然， $\bar{\mathbf{w}}_1(t_0)$ 是可控的。接下来，我们只需考虑如何将 $\bar{\mathbf{w}}_2(t_0)$ 控制到 $\bar{\mathbf{y}}_2(t_e)$。注意到在 (18) 中，$(\hat{A}_2^{22}, \bar{B}_2^2)$ 是可控的，根据定义 9，存在 u_2 使得 $\bar{\mathbf{w}}_2(t_0)$ 被控制到 $\bar{\mathbf{y}}_2(t_e)$。因此，$\bar{w}(t_0)$ 可以被控制到 $\bar{y}(t_e)$。

$\bar{}$情况2：$\dim(\mathcal{C}_2) < q$.

令 $r = \dim(\bar{\mathcal{C}}_1)$，显然 $\bar{\mathbf{w}}_2(t) \in \bar{\mathbb{R}}^{q-p} \vec{\oplus} \bar{\mathbb{R}}^{p-r}$。根据假设 $\bar{\mathcal{C}}_1 \vec{\oplus} \bar{\mathcal{C}}_{2^*} = \bar{\mathbb{R}}_q$with $\bar{\mathcal{C}}_{2^*} \subset \bar{\mathcal{C}}_2$，可得 $\bar{\mathcal{C}}_{2^*} = \bar{\mathbb{R}}^{q-p} \vec{\oplus} \bar{\mathbb{R}}^{p-r}$。即， $\bar{\mathbf{w}}_2(t) \subset \bar{\mathcal{C}}_2$。因此我们有

$$\bar{\mathbb{R}}^q = \bar{\mathcal{C}}_1 \vec{\oplus} \bar{\mathbb{R}}^{q-p} \vec{\oplus} \bar{\mathbb{R}}^{p-r}. \tag{19}$$

根据 (19)，由引理3可知，存在适当的“坐标变换” $\bar{\mathbf{w}} = \langle T_2\rangle \vec{\ltimes} w$ ，可进一步将 Σ_3 分解为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{w}}}_1 = \hat{A}_3^{11} \vec{\circ} \bar{\mathbf{w}}_1 + \hat{A}_3^{12} \vec{\circ} \bar{\mathbf{w}}_2^1 + \hat{A}_3^{13} \vec{\circ} \bar{\mathbf{w}}_2^2 + \bar{B}_3^1 u_1, & \bar{\mathbf{w}}_1 \in \bar{\mathbb{R}}^r, \\ \dot{\bar{\mathbf{w}}}_2^1 = \hat{A}_3^{22} \vec{\circ} \bar{\mathbf{w}}_2^1 + \hat{A}_3^{23} \vec{\circ} \bar{\mathbf{w}}_2^2, & \bar{\mathbf{w}}_2^1 \in \bar{\mathbb{R}}^{p-r}, \\ \dot{\bar{\mathbf{w}}}_2^2 = \hat{A}_3^{33} \vec{\circ} \bar{\mathbf{w}}_2^2, & \bar{\mathbf{w}}_2^2 \in \bar{\mathbb{R}}^{q-p}. \end{cases} \tag{20}$$

$\bar{}$采用相同的“坐标变换矩阵” $\langle T_2\rangle$ ， Σ_2 可分解为

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{y}}}_1^1 = \hat{A}_2^{11} \vec{\circ} \bar{\mathbf{y}}_1^1, & \bar{\mathbf{y}}_1^1 \in \bar{\mathbb{R}}^r, \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}_1^2 = \hat{A}_2^{21} \vec{\circ} \bar{\mathbf{y}}_1^1 + \hat{A}_2^{22} \vec{\circ} \bar{\mathbf{y}}_1^2 + \hat{A}_2^{23} \vec{\circ} \bar{\mathbf{y}}_2 + \bar{B}_2^1 u_2, & \bar{\mathbf{y}}_1^2 \in \bar{\mathbb{R}}^{p-r}, \\ \dot{\bar{\mathbf{y}}}_2 = \hat{A}_2^{31} \vec{\circ} \bar{\mathbf{y}}_1^1 + \hat{A}_2^{32} \vec{\circ} \bar{\mathbf{y}}_1^2 + \hat{A}_2^{33} \vec{\circ} \bar{\mathbf{y}}_2 + \bar{B}_2^2 u_2, & \bar{\mathbf{y}}_2 \in \bar{\mathbb{R}}^{q-p}. \end{cases} \tag{21}$$

现在我们分析系统 (20) 和系统 (21) 的瞬态动力学。

对于系统 (20)，由于 $(\hat{A}_3^{11}, \bar{B}_3^1)$ 可控，存在控制 u_1 ，使状态 $\bar{\mathbf{w}}_1(t)$ 受控到 $\bar{\mathbf{y}}_1^1(t_e)$。同样，由于 $(\hat{A}_2^{22}, \hat{B}_2^1)$ 和 $(\hat{A}_2^{33}, \hat{B}_2^2)$ 可控，存在控制 u_2 ，使状态 $\bar{\mathbf{w}}_2^1(t)$ 和 $\bar{\mathbf{w}}_2^2(t)$ 可控。也就是说，对于系统 (20) 和系统 (21)，我们可以找到控制 u_1 和 u_2 ，使得在暂态期间 $[t_0, t_e]$ 内，状态从初始状态 $\bar{w}(t_0)$ 瞬态演化至目标状态$\bar{y}(t_e)$。

□

因此，定理 1 在欧几里得空间上的版本可表述如下。

推论1. 考虑系统 (1)。设 $\mathcal{C}_i, i = 1,2$ 为 Σ_i 的可控子空间。若存在 $\mathcal{C}_{2^*} \subset \mathcal{C}_2$ ，使得系统 (1) 的维数瞬态性得到恰当实现，则

$$\mathcal{C}_1 \vec{\oplus} \mathcal{C}_{2^*} = \mathbb{R}^q.$$

5. 维数变化系统瞬态动力学建模的条件

本节提出了瞬态动力学建模的一个必要条件，并据此开发了一种对维数变化控制系统的瞬态动力学进行建模的新方案。此外，还给出了一个数值示例，以说明所提出理论结果的有效性。

根据定义 9，商空间 Ω 上维数变化控制系统 (6) 的瞬态动力学可建模为以下统一形式:

$$\dot{\bar{z}} = \bar{F}(\bar{z}, u_1, u_2), \bar{z} \in \Omega. \tag{22}$$

(22) 被称为瞬态动力学模型。我们的目的是借助 Ω 上的瞬态动力学模型 (22) 实现 (6) 的瞬态过程。根据定理 1，可以自然地得到对瞬态动力学进行建模的必要条件。

推论 2。 采用与定理 *1* 相同的记号。令 $\mathcal{C}_z$ 为(22) 的可控子空间。那么，对系统(6) 的瞬态动力学进行建模的必要条件如下:

$$\bar{\mathcal{C}}_1 + \bar{\mathcal{C}}_2 \subset \bar{\mathcal{C}}_z. \tag{23}$$

接下来，我们将证明 Cheng 教授 [11] 提出的变维控制系统瞬态动力学建模策略满足推论 2 的条件。

令 $n = p \vee q$ 为 p 和 q的最小公倍数。则 (6) 可以“提升”为 $\mathbb{R}^n$，即

$$\begin{aligned} \Sigma_z^1 &: \dot{z}(t) = \mathbf{A_1} z(t) + \mathbf{B_1} u_1(t), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n, \\ \Sigma_z^2 &: \dot{z}(t) = \mathbf{A_2} z(t) + \mathbf{B_2} u_2(t), \quad z(t) \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{A_1} &= A_1 \otimes \mathbf{J}_{n/p}, \mathbf{B_1} = B_1 \otimes \mathbf{1}_{n/p}, \\ \mathbf{A_2} &= A_2 \otimes \mathbf{J}_{n/q}, \mathbf{B_2} = B_2 \otimes \mathbf{1}_{n/q}. \end{aligned}$$

Cheng [11]将系统 (24) 的瞬态动力学建模为如下线性组合形式 s:

$$\dot{z}(t) = [\mu \mathbf{A}_1 + (1-\mu)\mathbf{A}_2]\, z(t) + \mu \mathbf{B}_1 u_1 + (1-\mu)\mathbf{B}_2 u_2. \tag{25}$$

其中，$\mu = \frac{m_1}{m_1+m_2}$、$m_1$ 和 m_2 是两个系统的“形式质量”。为便于记号，令$\mathbf{A}^* = \mu\mathbf{A}_1 + (1-\mu)\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1^* = \mu\mathbf{B}_1$以及$\mathbf{B}_2^* = 1-\mu\mathbf{B}_2$。则系统 (24) 的瞬态动力学模型 (22) 可表示为

$$\dot{\bar{z}}(t) = \hat{\mathbf{A}}^* \vec{\circ} \bar{z}(t) + \bar{\mathbf{B}}_1^* u_1 + \bar{\mathbf{B}}_2^* u_2. \tag{26}$$

命题 1。 采用与定理 *1* 相同的记号。令 $\mathcal{C}_z^*$ 为瞬态动力学 (26) 的可控子空间。则对于系统 (24)

$$\bar{\mathcal{C}}_1 + \bar{\mathcal{C}}_2 \subset \bar{\mathcal{C}}_z^*.$$

证明。 满足 $\bar{z}(0) = \bar{z}_0$ 的 (26) 的解为

$$\bar{z}(t) = \mathrm{e}^{\hat{\mathbf{A}}^*(t-t_0)} \vec{\circ} \bar{z}_0 + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\hat{\mathbf{A}}^*(t-\tau)} \vec{\circ} \bar{\mathbf{B}}_1^* u_1(\tau) \mathrm{d}\tau + \int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\hat{\mathbf{A}}^*(t-\tau)} \vec{\circ} \bar{\mathbf{B}}_2^* u_2(\tau) \mathrm{d}\tau$$

类似于引理1的证明，(26) 的可控子空间为

$$\bar{\mathcal{C}}_z^* = \mathrm{span}\{[\ \bar{\mathbf{B}}_1^* \quad \overline{\mathbf{A}^*\mathbf{B}_1^*} \quad \cdots \quad \overline{(\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{B}_1^*}\ ]\} + \mathrm{span}\{[\ \bar{\mathbf{B}}_2^* \quad \overline{\mathbf{A}^*\mathbf{B}_2^*} \quad \cdots \quad \overline{(\mathbf{A}^*)^{n-1}\mathbf{B}_2^*}\ ]\},$$

简而言之,

$$\bar{\mathcal{C}}_z^* = \mathrm{span}\{\bar{\mathbf{C}}_1^*\} + \mathrm{span}\{\bar{\mathbf{C}}_2^*\}.$$

我们注意到 $\mathcal{C}_1 \subset$张成$\{\mathbf{C}_1^*\}$ 且 $\mathcal{C}_2 \subset$张成$\{\mathbf{C}_2\}$。因此，

$$\bar{\mathcal{C}}_1 + \bar{\mathcal{C}}_2 \subset \bar{\mathcal{C}}_z^*.$$

□

注释 1. 我们注意到，*[11]* 中提出的瞬态动力学模型(25) 采用凸组合形式表示。然而，根据命题 *1* 的证明，我们可以将对参数μ 的限制放宽至一般情形。事实上，只需设计系统(24)的瞬态动力学模型，使其满足条件(23)即可。例如，我们可以选择两个参数 α、 $\beta \in \mathbb{R}^+$，使得瞬态动力学

$$\dot{z}(t) = [\alpha \mathbf{A}_1 + \beta \mathbf{A}_2]\, z(t) + \alpha \mathbf{B}_1 u_1 + \beta \mathbf{B}_2 u_2, \tag{27}$$

满足(23)。

下面给出 Cheng [11] 中的一个数值示例，以验证推论 2 的条件。具体而言，所设计的瞬态动力学模型的参数无需满足 Cheng [11]中要求的凸组合约束。

例1. *[11]* 考虑一个维数变化控制系统，它包含两个模型(A_1、 B_1) 和(A_2、 B_2)，其形式为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + B_1 u_1(t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \dot{y}(t) &= A_2 y(t) + B_2 u_2(t), \quad y \in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \tag{28}$$

其中

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

令 $\mathcal{C}_1$ a nd $\mathcal{C}_2$ 分别为（A_1， B_1）和（A_2， B_2）的可控子空间。那么，我们有

$$\mathcal{C}_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \mathcal{C}_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

根据式（27），令 $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = \frac{1}{2}$。(28) 的瞬态动力学计算如下

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 3/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3/2 \\ 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} u_1(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_2(t), \quad z \in \mathbb{R}^6.$$

其可控性矩阵为

$$C_{z_1}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 9/16 & 27/32 & 9/64 & 27/128 & 0 & 1/4 & 3/8 & 3/32 & 3/32 & 3/128 \\ 0 & 3 & 9/16 & 27/32 & 9/64 & 27/128 & 0 & 1/4 & 3/8 & 3/32 & 3/32 & 3/128 \\ 0 & 4/9 & 3/8 & 9/16 & 3/32 & 9/64 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 1/16 & 1/16 & 1/64 \\ 3/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/2 & 3/8 & 9/16 & 3/32 & 9/64 & 27/128 & 0 & 1/4 & 3/8 & 3/32 & 3/32 & 3/128 \\ 3/2 & 3/8 & 9/16 & 3/32 & 9/64 & 27/128 & 0 & 1/4 & 3/8 & 3/32 & 3/32 & 3/128 \end{bmatrix}.$$

于是，我们得到 (28) 的可控子空间为

$$\mathcal{C}_{z_1}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\3/2\\3/2\\3/2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3\\3\\9/4\\0\\3/8\\3/8\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1/2\\1/2\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1/4\\1/4\\1/4\\0\\1/4\\1/4\end{bmatrix}\right\}.$$

因此，我们可以验证

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{C}}_1+\bar{\mathcal{C}}_2&=\operatorname{span}\left\{\overline{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}},\overline{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}\right\}+\operatorname{span}\left\{\overline{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}},\overline{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}},\overline{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}\right\}\\&=\operatorname{span}\left\{\overline{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}},\overline{\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}}\right\}+\operatorname{span}\left\{\overline{\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}},\overline{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}},\overline{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}}\right\}\subseteq\bar{\mathcal{C}}_{z_1}.\end{aligned}$$

此外，容易看出存在 $\mathcal{C}_{2^*}=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}^T\right\}\subseteq\mathcal{C}_2$ 使得

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1\vec{\oplus}\mathcal{C}_{2^*}&=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right\}\vec{\oplus}\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}\\&=\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}+\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}=\mathbb{R}_3.\end{aligned}$$

根据推论1，维数变化控制系统（1）能够实现瞬态动力学。

6. 结论

本文研究了变维控制系统瞬态动力学的实现问题。通过分析商空间上线性系统的可控子空间，

给出了变维控制系统瞬态过程的实现条件，并据此提出了一种在商空间上对变维控制系统瞬态动力学进行建模的新策略。因此，从理论上证明了，通过设计商空间上瞬态动力学模型的控制，可以实现不同维数系统之间的动态演化。数值示例验证了理论结果的正确性。

参考文献

参考文献

[1] R. Pastor-Satprras, A. Vespignani，《互联网的演化与结构：统计物理学方法》，剑桥大学出版社，伦敦，2004年。网址：https://dl.acm.org/doi/abs/10. 5555/1076357。[2] M. Vidal、M. E. Cusich、A.-L. Barabasi，互作组网络与人类疾病，《细胞》23 (2011) 2078–2089。网址：https://doi.org/10.1016/j.cell.2011.02.016。[3] R. Xu、L. Liu、Q. Zhu、J. Shen，维数可变矩阵模型在温室白粉虱种群动态模拟中的应用，《生态学报》1 (1981) 147–158。网址：http://en.cnki.com.cn/Article_en/CJFDTOTAL-STXB198102006.htm。

[4] H. Yang, B. Jiang, V.Cocquempot，《航天器编队稳定与容错：一种状态变化切换系统方法》，《系统与控制快报》62（2013）715–722。网址：https: //doi.org/10.1016/j.sysconle.2013.05.007。

[5] H. Yang, B. Jiang, V. Cocquempot，《状态变化的切换非线性系统》，施普林格，瑞士，2014。网址：https://doi.org/10.1007/978-3-319-07884-7_4.[6] A. Pakniyat, P. E. Caines，关于混合系统中极小值原理与动态规划之间关系的研究，载于：第53届IEEE决策与控制会议论文集，第62卷，2017年，第4347–4362页。网址：https://doi.org/10.1109/CDC.2014.7039353。[7] A. Pakniyat, P. E. Caines，双行星齿轮变速器电动汽车的混合最优控制，《非线性分析：混合系统》25（2017）263–282。网址：https://doi.org/10.1016/ j.nahs.2016.08.004。[8] J. Pan, H. Yang, B. Jiang，基于可变维数脉冲切换的航天器编队建模与控制，《计算机仿真》31（2014）124–128。网址：http://en.cnki.com.cn/Article_en/CJFDTotal-JSJZ201406028.htm。[9] R. Temporelli, M. Boisvert, P. Micheau，车辆稳态和加速状态下的精准离合器滑差控制器，IEEE/ASME《机电一体化汇刊》23（2018）2078–2089。网址：https: //doi.org/10.1109/TMECH.2018.2867281。

[10] D. Cheng, Z. Xu, T. Shen，维数变化线性系统的基于等价的模型，《IEEE自动控制汇刊》65 (2020) 5444–5449。网址：https://doi.org/10.1109/TAC.2020.2973581。

[11] D. Cheng, 《从无维矩阵理论到跨维动态系统》，爱思唯尔，纽约，2019年。[12] D. Cheng, H. Qi, Z. Liu，维数变化状态空间上的线性系统，载于：第14届IEEE国际控制与自动化会议（ICCA）论文集，2018年，第112–117页。网址：https://doi.org/10.1109/ICCA.2018.8444229。[13] K. Zhang, K. H. Johansson，跨维线性动力系统的长期行为，载于：第37届中国控制会议论文集，2019年，第158–163页。网址：https://doi.org/ 10.23919/ChiCC.2018.8482746。[14] J.-e. Feng, B. Wang, Y. Yu，线性离散维数无界系统的维数，《国际控制、自动化与系统期刊》18 (2021) 1–7。网址：https://doi.org/10.1007/s12555-019-0147-9。[15] P. Zhao, H. Guo, Y. Yu, J.-e. Feng，维数有界线性系统的维数，《中国科学：信息科学》64 (2021) 159202:1¨C159202:3。网址：https://doi.org/10.1007/s11432-018-9819-8。[16] Q.-l. Zhang, B. Wang, J.-e. Feng，连续时间跨维线性系统的解与稳定性，《信息与电子工程前沿》22 (2021) 210–221。网址：https://doi.org/10.1631/FITEE.1900504。[17] Y. Liu, H. Li，连续时间线性系统与其投影系统之间的能控性和能观性关系，载于：第40届中国控制会议论文集，2021年，第526–531页。网址：https://doi.org/10.23919/CCC52363.2021.9549855。[18] Q.-l. Zhang, B. Wang, J.-e. Feng，连续时间跨维线性系统的解与稳定性，载于：第31届中国控制与决策会议论文集，2019年，第1118–1123页。网址：10.1109/CCDC.2019.8832445。[19] D. Cheng，论矩阵等价，《亚洲数学杂志》23 (2019) 257–348。网址：https: //doi.org/10.48550/arXiv.1605.09523。[20] W. J. Rugh，《线性系统理论》，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州：普伦蒂斯-霍尔，1996年。