arXiv:2303.00434v1 [math.AP] 1 Mar 2023

水波的 Boussinesq 方程：第四扇区的孤子分解猜想

C. CHARLIER[1] 和 J. LENELLS[2]

[1]隆德大学数学科学中心，瑞典隆德 *22100*。[2]瑞典斯德哥尔摩 *10044*，皇家理工学院数学系。

Abstract. 我们研究定义在实数轴上的 Boussinesq 方程，考虑一大类与水波相关的施瓦茨初始数据。在近期的一项工作中，我们确定了描述解渐近行为的十个主要扇区，并针对每个扇区给出了无孤子情况下首项渐近项的精确表达式。本文在存在孤子的情况下，推导了第四扇区中的渐近公式，该扇区由$\frac{x}{t} \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$表征。具体而言，我们的结果给出了孤子-辐射相互作用首阶项的精确表达式，并验证了 Boussinesq 方程在第四扇区中的孤子分解猜想。

AMS Subject Classification (2020): 35C08、35G25、35Q15、37K40、76B15。Keywords: Boussinesq 方程、长时间渐近行为、黎曼-希尔伯特问题。

1. Introduction

Boussinesq 方程 [3]

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxxx}, \tag{1.1}$$

其中 $u(x,t)$ 是一个实值函数，下标表示偏导数。该方程描述浅水中向右和向左传播的小振幅色散波，参见例如 [12]。方程 (1.1) 支持孤子 [1, 2, 10]，并且存在一个 Lax对[16]。直到最近 [4], ，方程 (1.1) 的解的长时间渐近行为仍是一个未解决问题，参见例如 Deift 的未解决问题列表 [8]。

在 [4], 中，我们研究了方程 (1.1) 的正散射问题和逆散射问题。此外，我们证明，对于一大类与水波相关的初始数据，解是唯一的且全局存在。我们确定了十个主要渐近扇区，并计算了每个扇区中解的主导渐近项。出于简洁性考虑， [4] 省略了其中一些渐近公式的证明。此外，我们仅考虑了无孤子解。

本文旨在推导存在孤子时，扇区$\frac{x}{t} \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$中解的渐近公式。该扇区在 [4] 中被称为第四扇区。在不存在孤子的特殊情形下，我们的公式简化为 [4], 中公布的公式，从而为该公式提供了证明。存在孤子时，我们的公式量化了孤子对第四扇区中解的渐近影响。

对于可积方程，孤子分解猜想表达了这样一种预期：具有一般初始数据的方程解最终会演化为一组叠加在色散辐射背景上的孤子。由于 $x/t < 1$ 在第四扇区

E-mail address: christophe.charlier@math.lu.se, jlenells@kth.se.

以及 (1.1) 的所有单孤子解的传播速度都大于 1 [10], ，孤子分解猜想表明，(1.1) 在第四扇区的渐近行为中，不应存在由孤子产生的 1 阶贡献。这正是我们得到的结果：我们的公式表明，(1.1) 在第四扇区的解为 $O(t^{-1/2})$，当 $t \to \infty$时。因此，我们的结果验证了 Boussinesq 方程在该扇区中的孤子分解猜想。需要强调的是，尽管在大时间下无法直接观测到第四扇区中的孤子本身，但它们确实会对第四扇区中的辐射产生非平凡影响；我们精确计算了这一影响的首阶贡献。

需要注意的是，我们将研究范围限制在不含高频模态的初始数据上（其含义将在下文假设 (iii) 中精确定义）。这一假设与将 Boussinesq 方程作为水波模型的推导相符；该推导假定不存在高频傅里叶模态，或至少这些模态受到强烈抑制。事实上，如果存在高频模态，解中将包含随时间指数增长的分量，孤子分解猜想也就必然不成立。

主要结果将在第 2 节给出。证明依赖于 Deift–Zhou [9] 最速下降分析，该分析针对一个行向量 Riemann–Hilbert（RH）问题；此 RH 问题将在第 3 节陈述。第 4 节将简要概述证明。在第 5 节和 6 节中，我们对 RH 问题进行了两次变换。在第 7 节引入全局参数子后，我们在第 8 节和 9 节中进一步进行了两次变换。利用分别在第 10 节和 11 节构造的两个局部参数解，我们得到一个小范数 RH 问题，其大 t 行为将在第 12 节分析。最后，解 $u(x,\ t)$ 的长时间渐近行为将在第 1.1 式的第 13 节中得到。

1.1. 记号。 本文中始终使用以下记号。
– $C > 0$ 和 $c > 0$ 表示一般常数，其值在计算过程中可能发生变化。– $[A]_1$、$[A]_2$和 $[A]_3$ 分别表示矩阵 3×3 A的第一、第二和第三列。– 若 A 是一个 $n \times m$ 矩阵，则定义 $|A| \geq 0$ 为$|A|^2 = \Sigma_{i,\ j}|A_{ij}|^2$。对于分段光滑轮廓 $\gamma \subset \mathbb{C}$ 和 $1 \leq p \leq \infty$，定义$\|A\|_{L^p(\gamma)}$: $= \||A|\|_{L^p(\gamma)}$。– $\mathbb{D} = \{k \in \mathbb{C} \,|\, |k| < 1\}$ 表示开单位圆盘，$\partial\mathbb{D} = \{k \in \mathbb{C} \,|\, |k| = 1\}$ 表示单位圆。– $\mathcal{S}(\mathbb{R})$表示在 $\mathbb{R}$上快速衰减函数的施瓦茨空间。– $\mathcal{Q} : = \{\kappa_j\}_{j=1}^6$ 以及 $\hat{} \mathcal{Q}$: $= \mathcal{Q} \cup \{0\}$，其中 $\{\kappa_j = e^{\frac{\pi i(j-1)}{3}}\}_1^6$ 为六次单位根。– $\{D_n\}_{n=1}^6$ 表示图 2 所示的复平面开子集。– $\Gamma = \cup_{j=1}^9 \Gamma_j$ 表示图 2 所示并按图中方向定向的轮廓。$\hat{}$– $\Gamma_j = \Gamma_j \cup \partial\mathbb{D}$ 表示 Γ_j 与单位圆的并集。

2. Main results

我们考虑以下方程的初值问题（1.1），其初始数据为

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), \tag{2.1}$$

其中 $u_0,\ u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是施瓦茨类中的实值函数。我们假设 u_1满足条件 $\int_{\mathbb{R}} u_1(x)dx = 0$; 这一假设很自然，因为它保证总质量 $\int_{\mathbb{R}} u(x,\ t)dx$ 随时间守恒。 [4] 的一项结果指出，初值问题（1.1）–（2.1）的解可以用行向量 RH 问题的解 n 表示。该 RH 问题的跳跃矩阵由两个标量反射系数表示，$r_1(k)$ 和 $r_2(k)$，其定义如下。

2.1. .....的定义 r_1 和 r_2。 令 $\omega := e^{\frac{2\pi i}{3}}$，并定义 $\{l_j(k)\, z_j(k)\}_{j=1}^3$ 为

$$l_j(k) = i\frac{\omega^j k + (\omega^j k)^{-1}}{2\sqrt{3}}, \qquad z_j(k) = i\frac{(\omega^j k)^2 + (\omega^j k)^{-2}}{4\sqrt{3}}, \qquad k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \tag{2.2}$$

令 $P(k)$ 和 $\mathsf{U}(x,\ k)$ 定义如下

$$P(k)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ l_1(k) & l_2(k) & l_3(k)\\ l_1(k)^2 & l_2(k)^2 & l_3(k)^2\end{pmatrix},\quad \mathsf{U}(x,k)=P(k)^{-1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -\frac{u_{0x}}{4} & -\frac{iv_0}{4\sqrt{3}} & -\frac{u_0}{2} & 0\end{pmatrix}P(k),$$

其中 $v_0(x)=\int_{-\infty}^{x}u_1(x')dx'$。令 $X,\ X^A,\ Y,\ Y^A$ 为 Volterra积分方程的唯一解

$$\begin{aligned}
X(x,k)&=I-\int_x^{\infty}e^{(x-x')\widehat{\mathcal{L}(k)}}(\mathsf{U}X)(x',k)dx',\\
X^A(x,k)&=I+\int_x^{\infty}e^{-(x-x')\widehat{\mathcal{L}(k)}}(\mathsf{U}^TX^A)(x',k)dx',\\
Y(x,k)&=I+\int_{-\infty}^{x}e^{(x-x')\widehat{\mathcal{L}(k)}}(\mathsf{U}Y)(x',k)dx',\\
Y^A(x,k)&=I-\int_{-\infty}^{x}e^{-(x-x')\widehat{\mathcal{L}(k)}}(\mathsf{U}^TY^A)(x',k)dx',
\end{aligned}$$

其中 $\mathcal{L}=\mathrm{diag}\,(l_1,\ l_2,\ l_3)$，$(\cdot)^T$表示转置运算，而 $e^{\mathcal{L}}$作用于矩阵 3×3 M 的方式为 $e^{\mathcal{L}}M=e^{\mathcal{L}}Me^{-\mathcal{L}}$。定义 $s(k)$ 和 $s^A(k)$如下

$$s(k)=I-\int_{\mathbb{R}}e^{-x\widehat{\mathcal{L}(k)}}(\mathsf{U}X)(x,k)dx,\qquad s^A(k)=I+\int_{\mathbb{R}}e^{x\widehat{\mathcal{L}(k)}}(\mathsf{U}^TX^A)(x,k)dx.$$

两个谱函数 $\{r_j(k)\}_1^2$ 定义如下

$$\begin{cases}r_1(k)=\frac{(s(k))_{12}}{(s(k))_{11}}, & k\in\hat{\Gamma}_1\setminus\hat{\mathcal{Q}},\\ r_2(k)=\frac{(s^A(k))_{12}}{(s^A(k))_{11}}, & k\in\hat{\Gamma}_4\setminus\hat{\mathcal{Q}}.\end{cases}\tag{2.3}$$

2.2. **孤子**。在 [6], 中，我们将 [4]的方法推广到了存在孤子的情形。在这种情况下，除了 $r_1(k)$ 和 $r_2(k)$之外，RH 问题的表述还涉及一组极点 Z 以及相应的留数常数集 $\{c_{k_0}\}_{k_0\in\mathsf{Z}}\subset\mathbb{C}$。下文将介绍 Z 和 $\{c_{k_0}\}_{k_0\in\mathsf{Z}}\subset\mathbb{C}$ 的定义方式。

孤子由函数 $s_{11}(k)$ 和 $s_{11}^A(k)$ 可能存在的零点产生。如 [4] 所示，s_{11} 和 s_{11}^A 分别可解析延拓至 $\bar{D}_1\cup\bar{D}_2$ 和 $\bar{D}_4\cup\bar{D}_5$ 的内部。我们将仅考虑一般情形，即 s_{11} 和 $s_{11}^A(k)$ 在轮廓 Γ 上均无零点。对称性 $s_{11}(k)=s_{11}(\omega/k)$ 和 $s_{11}^A(k)=s_{11}(\bar{k}^{-1})$（亦在 [4] 中得到证明）由此表明，只需考虑 s_{11} 在 D_2 中的零点。我们将开集 D_2 分解为三个部分：$D_2=D_{\mathrm{reg}}\sqcup D_{\mathrm{sing}}\sqcup(D_2\cap\mathbb{R})$，其中

$$\begin{aligned}
D_{\mathrm{reg}}&:=D_2\cap\big(\{k\,|\,|k|>1,\mathrm{Im}\,k>0\}\cup\{k\,|\,|k|<1,\mathrm{Im}\,k<0\}\big),\\
D_{\mathrm{sing}}&:=D_2\cap\big(\{k\,|\,|k|>1,\mathrm{Im}\,k<0\}\cup\{k\,|\,|k|<1,\mathrm{Im}\,k>0\}\big),
\end{aligned}$$

以及 $D_2\cap\mathbb{R}=(-1,\ 0)\cup(1,\ \infty)$。我们将 D_{reg}的右侧和左侧部分分别记为 D_{reg}^R和 D_{reg}^L，对于 D_{sing}也类似，见图1。

我们在 [6] 中证明了，D_{sing} 中的零点会产生带有奇异性的孤子。因此，我们将假设零点集 Z 属于 $s_{11}(k)$，且其包含于 $D_{\mathrm{reg}}\cup(-1,0)\cup(1,\infty)$。我们将考虑有限个简单零点这一一般情形。当初始数据 u_0 和 u_1 具有紧支集时，相应的留数常数定义如下：

$$c_{k_0}:=\begin{cases}-\frac{s_{13}(k_0)}{\dot{s}_{11}(k_0)}, & k_0\in\mathsf{Z}\setminus\mathbb{R},\\ -\frac{s_{12}(k_0)}{\dot{s}_{11}(k_0)}, & k_0\in\mathsf{Z}\cap\mathbb{R}.\end{cases}\tag{2.4}$$

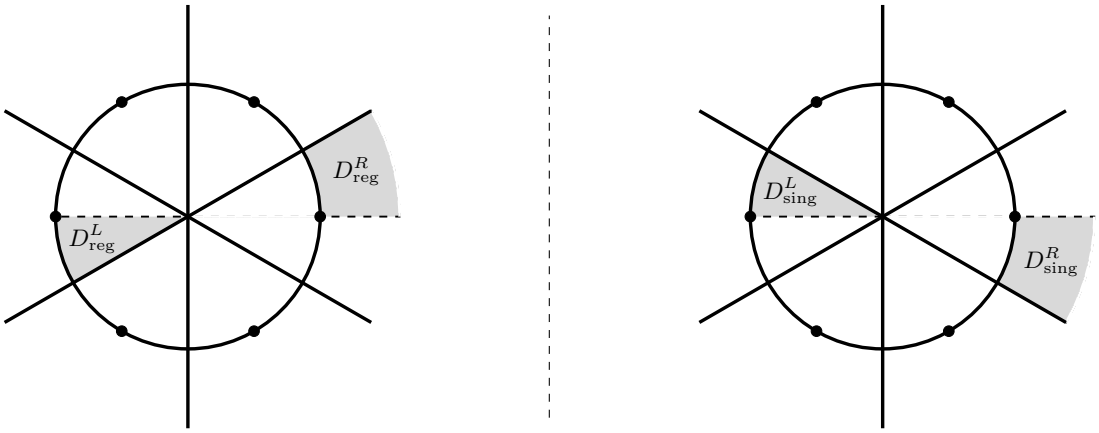


图1。 开集 D^R_{reg}、D^L_{reg}、D^R_{sing} 和 D^L_{sing}。

如果 u_0 和 v_0 不具有紧支集，则式（2.4）中的表达式通常没有定义，因此需要采用下面这个更复杂的定义：定义向量值函数 $w(x,k)$如下：

$$w = \begin{pmatrix} Y^A_{21}X^A_{32} - Y^A_{31}X^A_{22} \\ Y^A_{31}X^A_{12} - Y^A_{11}X^A_{32} \\ Y^A_{11}X^A_{22} - Y^A_{21}X^A_{12} \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

若 $k_0 \in \mathsf{Z} \setminus \mathbb{R}$，则将 c_{k_0} 定义为满足下列条件的唯一复常数

$$\frac{w(x,k_0)}{\dot{s}_{11}(k_0)} = c_{k_0} e^{(l_1(k_0)-l_3(k_0))x}[X(x,k_0)]_1 \qquad \text{for all } x \in \mathbb{R}. \tag{2.6a}$$

若 $k_0 \in \mathsf{Z} \cap \mathbb{R}$，则将 c_{k_0} 定义为满足下列条件的唯一复常数

$$\frac{[Y(x,k_0)]_2}{\dot{s}^A_{22}(k_0)} = c_{k_0} e^{(l_1(k_0)-l_2(k_0))x}[X(x,k_0)]_1 \qquad \text{for all } x \in \mathbb{R}. \tag{2.6b}$$

事实证明，$s_{11}(k)$ 在 D^R_{reg} 和 D^L_{reg} 中的简单零点分别产生右行和左行呼吸子孤子。同样，$s_{11}(k)$ 在 $(1,\infty)$ 和 $(-1,0)$ 中的简单零点分别产生右行和左行孤子；并且文献 [6] 表明，由 $(-1,0)$ 中的零点生成的孤子 $\cup(1,\infty)$ 是非奇异的，当且仅当相应的留数常数 c_{k_0} 满足 $i(\omega^2 k_0^2 - \omega)c_{k_0} \notin (-\infty,0)$。这促使我们对 Z 和$\{c_{k_0}\}_{k_0\in\mathsf{Z}}$作出以下假设。

2.3. 假设。 与 [6, 定理 2.11], 中一样，我们的结果在以下假设下成立：

(*i*) 非奇异孤子的数量有限：假设 $s_{11}(k)$在Z中的每一点都有一个简单零点，其中$\mathsf{Z} \subset D_{\text{reg}} \cup (-1,\ 0) \cup (1,\ \infty)$是一个有限基数的集合，并且$s_{11}(k)$在 $k \in (\bar{D}_2 \cup \partial\mathbb{D}) \setminus \hat{\mathcal{Q}}$中没有其他零点。如果 $k_0 \in \mathsf{Z} \setminus \mathbb{R}$，则我们还假设 $s^A_{22}(k_0) \neq 0$。如果 $k_0 \in \mathsf{Z} \cap \mathbb{R}$，则我们还假设 $i(\omega^2 k_0^2 - \omega)c_{k_0} \notin (-\infty,\ 0)$。

(*ii*) 谱函数 s 和 s^A 在 $k = 1$ 和 $k = -1$附近具有一般行为：我们假设对于 $k_\star = 1$ 和 $k_\star = -1$，

$\lim_{k\to k_\star}(k-k_\star)s(k)_{11} \neq 0$，$\lim_{k\to k_\star}(k-k_\star)s(k)_{13} \neq 0$，$\lim_{k\to k_\star}{}^{s}(k)_{31} \neq 0$，$\lim_{k\to k_\star}{}^{s}(k)_{33} \neq 0$，$\lim_{k\to k_\star}(k-k_\star)s^A(k)_{11} \neq 0$，$\lim_{k\to k_\star}(k-k_\star)s^A(k)_{31} \neq 0$，$\lim_{k\to k_\star} s^A(k)_{13} \neq 0$，$\lim_{k\to k_\star} s^A(k)_{33} \neq 0$.

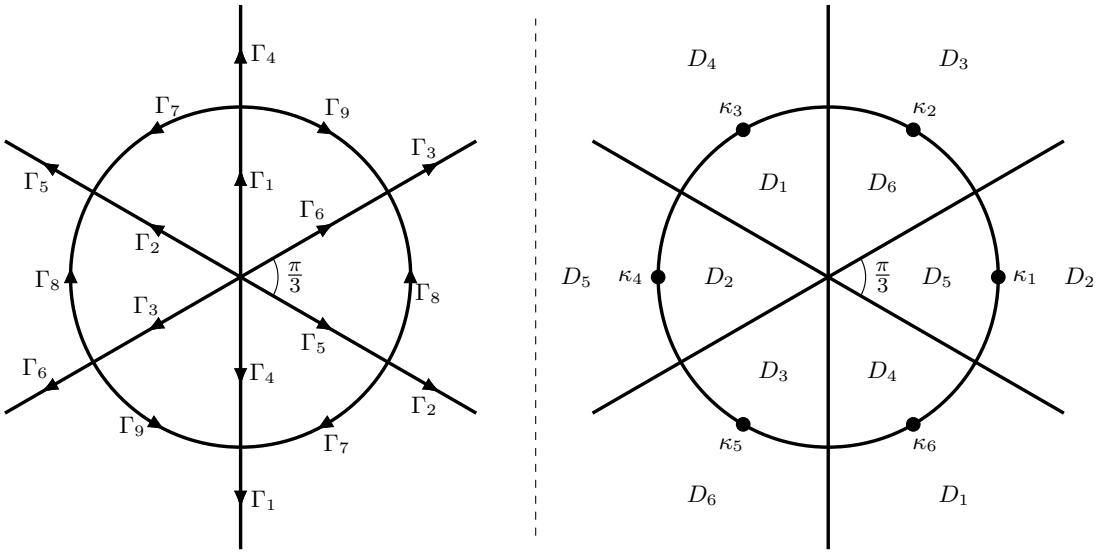


图 2。 复 k 平面中的轮廓 $\Gamma = \cup_{j=1}^{9}\Gamma_j$ （左），以及开集 D_n、$n = 1$、.. .、6，连同六次单位根 κ_j、 $j = 1$、.. .、6 （右）。

(*iii*) 无高频模态：我们假设对所有 $k \in [0, i]$， $r_1(k) = 0$，其中 $[0, i]$ 是从 0 到 i 的垂直线段。

我们强调，假设（*ii*）是一般性的。假设（*iii*）确保解属于物理上相关的解类，即不包含指数增长的高频模态。如果假设（*i*）–（*iii*）成立，那么初值问题（1.1）–（2.1）的解 $u(x, t)$ 全局存在 [6]。

2.4. 主要结果的陈述。 我们的主定理的表述涉及若干个量，现将其引入。设 $\zeta := x/t$，并假设 $\zeta \in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$。对于$k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ 和 $1 \le j < i \le 3$，定义 $\Phi_{ij}(\zeta, k)$ 如下：

$$\Phi_{ij}(\zeta, k) = (l_i(k) - l_j(k))\zeta + (z_i(k) - z_j(k)), \tag{2.7}$$

其中 $l_j(k)$ 和 $z_j(k)$ 如（2.2）所示。函数 $k \mapsto \Phi_{21}(\zeta, k)$ 有四个鞍点$\{k_j = k_j(\zeta)\}_{j=1}^{4}$，它们为

$$k_2 = \frac{1}{4}\left(\zeta - \sqrt{8+\zeta^2} - i\sqrt{2}\sqrt{4 - \zeta^2 + \zeta\sqrt{8+\zeta^2}}\right), \tag{2.8a}$$

$$k_4 = \frac{1}{4}\left(\zeta + \sqrt{8+\zeta^2} - i\sqrt{2}\sqrt{4 - \zeta^2 - \zeta\sqrt{8+\zeta^2}}\right), \tag{2.8b}$$

$k_1 = \bar{k}_2$，以及 $k_3 = \bar{k}_4$。注意， $|k_2| = |k_4| = 1$、$\arg k_2 \in (-\frac{3\pi}{4}, -\frac{2\pi}{3})$ 和 $\arg k_4 \in (-\frac{\pi}{6}, 0)$。另定义 $\delta_j(\zeta, k)$、 $j = 1$，.....，5，满足

$$\delta_1(\zeta,k) = \exp\left\{\frac{-1}{2\pi i}\int_i^{\omega k_4}\frac{\ln(1+r_1(s)r_2(s))}{s-k}ds\right\},\ \delta_4(\zeta,k) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^2 k_2}^{\omega}\frac{\ln f(s)}{s-k}ds\right\},$$

$$\delta_2(\zeta,k) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega k_4}^{\omega^2 k_2}\frac{\ln(1+r_1(s)r_2(s))}{s-k}ds\right\},\ \delta_5(\zeta,k) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^2 k_2}^{\omega}\frac{\ln f(\omega^2 s)}{s-k}ds\right\},$$

$$\delta_3(\zeta,k) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega k_4}^{\omega^2 k_2}\frac{\ln f(s)}{s-k}ds\right\}, \tag{2.9}$$

其中路径沿单位圆逆时针方向行进，对数使用主值分支，并且

$$f(k) := 1 + r_1(k)r_2(k) + r_1(\tfrac{1}{\omega^2 k})r_2(\tfrac{1}{\omega^2 k}), \qquad k \in \partial\mathbb{D}. \tag{2.10}$$

根据 [4, 定理 2.3 和引理 2.13]，r_1，r_2，f 在 $\partial\mathbb{D}\setminus\mathcal{Q}$ 上定义良好，且上述 $\{\delta_j(\zeta,\ k)\}_{j=1}^5$ 定义中出现的所有对数的真数均 >0。定义

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(k) &= \prod_{k_0\in\mathsf{Z}\cap D^R_{\mathrm{reg}}} \frac{(k-k_0)(k-k_0^{-1})(k-\omega^2\bar{k}_0)(k-\omega\bar{k}_0^{-1})}{(k-\bar{k}_0)(k-\bar{k}_0^{-1})(k-\omega k_0)(k-\omega^2 k_0^{-1})} \cdot \prod_{k_0\in\mathsf{Z}\cap(1,\infty)} \frac{(k-\omega^2 k_0)(k-\omega k_0^{-1})}{(k-\omega k_0)(k-\omega^2 k_0^{-1})},\\
\mathcal{D}_1(k) &= \frac{\delta_1(\omega k)\delta_1(\frac{1}{\omega^2 k})^2}{\delta_1(\omega^2 k)^2\delta_1(\frac{1}{\omega k})\delta_1(\frac{1}{k})} \frac{\delta_2(\omega^2 k)\delta_2(\frac{1}{k})^2}{\delta_2(\omega k)^2\delta_2(\frac{1}{\omega^2 k})\delta_2(\frac{1}{\omega k})} \frac{\delta_3(\omega k)\delta_3(\omega^2 k)\delta_3(\frac{1}{\omega k})^2}{\delta_3(\frac{1}{k})\delta_3(\frac{1}{\omega^2 k})}\\
&\quad\times \frac{\delta_4(\omega^2 k)^2\delta_4(\frac{1}{k})\delta_4(\frac{1}{\omega k})}{\delta_4(k)\delta_4(\omega k)\delta_4(\frac{1}{\omega^2 k})^2} \frac{\delta_5(\omega k)^2\delta_5(\frac{1}{\omega k})\delta_5(\frac{1}{\omega^2 k})}{\delta_5(k)\delta_5(\frac{1}{k})^2\delta_5(\omega^2 k)},\\
\mathcal{D}_2(k) &= \frac{\delta_1(\omega k)^2\delta_1(\frac{1}{\omega^2 k})\delta_1(\frac{1}{k})}{\delta_1(\omega^2 k)\delta_1(\frac{1}{\omega k})^2\delta_1(k)} \frac{\delta_2(\frac{1}{k})\delta_2(\frac{1}{\omega k})}{\delta_2(\omega k)\delta_2(\frac{1}{\omega^2 k})^2\delta_2(\omega^2 k)} \frac{\delta_3(\omega^2 k)^2\delta_3(\frac{1}{\omega k})\delta_3(\frac{1}{\omega^2 k})}{\delta_3(\frac{1}{k})^2\delta_3(\omega k)}\\
&\quad\times \frac{\delta_4(\omega^2 k)\delta_4(\frac{1}{\omega k})^2}{\delta_4(\omega k)^2\delta_4(\frac{1}{\omega^2 k})\delta_4(\frac{1}{k})} \frac{\delta_5(\omega k)\delta_5(\frac{1}{\omega^2 k})^2\delta_5(\omega^2 k)}{\delta_5(\frac{1}{k})\delta_5(\frac{1}{\omega k})}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

定义 $\chi_j(\zeta,\ k)$、$j=1,\ 2,\ 3$ 和 $\tilde{\chi}_j(\zeta,\ k)$、$j=2,\ 3,\ 4,\ 5$，如下

$$\begin{aligned}
\chi_1(\zeta,k) &= -\frac{1}{2\pi i}\int_i^{\omega k_4} \ln_s(k-s)d\ln(1+r_1(s)r_2(s)),\\
\chi_2(\zeta,k) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega k_4}^{\omega^2 k_2} \ln_s(k-s)d\ln(1+r_1(s)r_2(s)),\\
\chi_3(\zeta,k) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega k_4}^{\omega^2 k_2} \ln_s(k-s)d\ln(f(s)),\\
\tilde{\chi}_2(\zeta,k) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega k_4}^{\omega^2 k_2} \tilde{\ln}_s(k-s)d\ln(1+r_1(s)r_2(s)),\\
\tilde{\chi}_3(\zeta,k) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\omega k_4}^{\omega^2 k_2} \tilde{\ln}_s(k-s)d\ln(f(s)),\\
\tilde{\chi}_4(\zeta,k) &= \frac{1}{2\pi i}\fint_{\omega^2 k_2}^{\omega} \tilde{\ln}_s(k-s)d\ln(f(s))\\
&:= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0_+}\left(\int_{\omega^2 k_2}^{e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}} \tilde{\ln}_s(k-s)d\ln(f(s)) - \tilde{\ln}_\omega(k-\omega)\ln(f(e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}))\right),\\
\tilde{\chi}_5(\zeta,k) &= \frac{1}{2\pi i}\fint_{\omega^2 k_2}^{\omega} \tilde{\ln}_s(k-s)d\ln(f(\omega^2 s))\\
&:= \frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0_+}\left(\int_{\omega^2 k_2}^{e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}} \tilde{\ln}_s(k-s)d\ln(f(\omega^2 s)) - \tilde{\ln}_\omega(k-\omega)\ln(f(e^{-i\epsilon}))\right),
\end{aligned} \tag{2.12}$$

其中路径沿 $\partial\mathbb{D}$ 逆时针方向行进。对于 $s\in\{e^{i\theta}\,|\,\theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]\}$，$k\mapsto \ln_s(k-s) = \ln|k-s| + i\arg_s(k-s)$ 的割线沿 $\{e^{i\theta}\,|\,\theta\in[\frac{\pi}{2},\arg s]\}\cup(i,i\infty)$，且分支满足 $\arg_s(1)=2\pi$。此外，对于 $s\in\{e^{i\theta}\,|\,\theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]\}$，$k\mapsto \tilde{\ln}_s(k-s) := \ln|k-s| + i\,\tilde{\arg}_s(k-s)$ 的割线沿 $\{e^{i\theta}\,|\,\theta\in[\arg s,\pi]\}\cup(-\infty,0)$，并满足 $\tilde{\arg}_s(1)=0$。

在定义 $\tilde{\chi}_4, \tilde{\chi}_5$时需要正则化积分，因为 $f(1) = f(\omega) = 0$(参见[4, 引理 2.13 (i)])。定义 $\{\nu_j\}_{j=1}^4$, $\hat{\nu}_1$, 和 $\hat{\nu}_2$ 如下：

$$\nu_1(k) = -\frac{1}{2\pi}\ln(1 + r_1(\omega k)r_2(\omega k)), \qquad \nu_2(k) = -\frac{1}{2\pi}\ln(1 + r_1(\omega^2 k)r_2(\omega^2 k)),$$
$$\nu_3(k) = -\frac{1}{2\pi}\ln(f(\omega k)), \qquad \nu_4(k) = -\frac{1}{2\pi}\ln(f(\omega^2 k)),$$
$$\hat{\nu}_1(k) := \nu_3(k) - \nu_1(k), \qquad \hat{\nu}_2(k) = \nu_2(k) + \nu_3(k) - \nu_4(k).$$

以下函数$d_{1,\,0}$ 和 $d_{2,\,0}$ 出现在我们的最终结果中：

$$d_{1,0}(\zeta,t) := e^{-\chi_1(\zeta,\omega k_4)-\tilde{\chi}_2(\zeta,\omega k_4)+2\tilde{\chi}_3(\zeta,\omega k_4)} \times e^{i(\nu_2(k_2)-2\nu_4(k_2))\tilde{\ln}_{\omega^2 k_2}(\omega k_4-\omega^2 k_2)} t^{-i\hat{\nu}_1(k_4)} z_{1,\star}^{-2i\hat{\nu}_1(k_4)} \mathcal{D}_1(\omega k_4), \tag{2.13}$$

$$d_{2,0}(\zeta,t) := e^{-2\chi_2(\zeta,\omega^2 k_2)+\chi_3(\zeta,\omega^2 k_2)-\tilde{\chi}_4(\zeta,\omega^2 k_2)+2\tilde{\chi}_5(\zeta,\omega^2 k_2)} \times e^{i(\nu_3(k_4)-2\nu_1(k_4))\ln_{\omega k_4}(\omega^2 k_2-\omega k_4)} t^{-i\hat{\nu}_2(k_2)} z_{2,\star}^{-2i\hat{\nu}_2(k_2)} \mathcal{D}_2(\omega^2 k_2), \tag{2.14}$$

其中 $z_{1,\,\star}$, $z_{2,\,\star}$ 由下式给出

$$z_{1,\star} = z_{1,\star}(\zeta) := \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\omega\frac{4 - 3k_4\zeta - k_4^3\zeta}{4k_4^4}}, \qquad -i\omega k_4 z_{1,\star} > 0,$$
$$z_{2,\star} = z_{2,\star}(\zeta) := \sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{-\omega^2\frac{4 - 3k_2\zeta - k_2^3\zeta}{4k_2^4}}, \qquad -i\omega^2 k_2 z_{2,\star} > 0,$$

复幂 $z_{j,\,\star}^{\alpha} = e^{\alpha \ln z_{j,\,\star}}$的分支由下式确定

$$\ln z_{1,\star} = \ln|z_{1,\star}| + i\arg z_{1,\star} = \ln|z_{1,\star}| + i\big(\tfrac{\pi}{2} - \arg(\omega k_4)\big),$$
$$\ln z_{2,\star} = \ln|z_{2,\star}| + i\arg z_{2,\star} = \ln|z_{2,\star}| + i\big(\tfrac{\pi}{2} - \arg(\omega^2 k_2)\big),$$

其中 $\arg(\omega k_4) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ 且 $\arg(\omega^2 k_2) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$。另定义

$q_3 = |\tilde{r}(\frac{1}{k_4})|^{\frac{1}{2}} r_1(\frac{1}{k_4})$ $q_2 = \tilde{r}(\omega^2 k_2)^{\frac{1}{2}} r_1(\omega^2 k_2)$ $q_5 = |\tilde{r}(\omega k_2)|^{\frac{1}{2}} r_1(\omega k_2)$ $q_6 = |\tilde{r}(\frac{1}{k_2})|^{\frac{1}{2}} r_1(\frac{1}{k_2})$,
其中

$$\tilde{r}(k) := \frac{\omega^2 - k^2}{1 - \omega^2 k^2}, \qquad k \in \mathbb{C} \setminus \{\omega^2, -\omega^2\}. \tag{2.15}$$

现在陈述我们的主要结果。陈述中出现了伽马函数 $\Gamma(k)$，以及 $\hat{\nu}_1(k_4)$ 和 $\hat{\nu}_2(k_2)$ 的平方根。根据不等式 $\hat{\nu}_1(k_4) \geq 0$ 和 $\hat{\nu}_2(k_2) \geq 0$，这些平方根有定义且 ≥ 0；这些不等式由 [4, 引理 2.13]以及 $\arg k_2 \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{2\pi}{3})$ 和 $\arg k_4 \in (-\frac{\pi}{6}, 0)$ 这一事实推出。

定理 *2.1*（第四扇区中的渐近行为）。设 $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 为实值函数，且满足$\int_{\mathbb{R}} u_1 dx = 0$。设 $v_0(x) = \int_{-\infty}^{x} u_1(x')dx'$，并假设假设 *(i)–(iii)* 成立。设 $\mathcal{I}$为 $(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$ 的一个固定紧子集。初值问题 ***(1.1)*** 的整体解 $u(x,t)$，其初始数据为 u_0, u_1，当 $t \to \infty$ 时具有如下渐近行为：

$$u(x,t) = \frac{A_1(\zeta)}{\sqrt{t}}\cos\alpha_1(\zeta,t) + \frac{A_2(\zeta)}{\sqrt{t}}\cos\alpha_2(\zeta,t) + O\left(\frac{\ln t}{t}\right), \tag{2.16}$$

对 $\zeta := \frac{x}{t} \in \mathcal{I}$ 一致成立，其中

$$A_1(\zeta) := \frac{4\sqrt{3}\sqrt{\hat{\nu}_1(k_4)}\operatorname{Im} k_4}{-i\omega k_4 z_{1,\star}|\tilde{r}(\frac{1}{k_4})|^{\frac{1}{2}}}\sin(\arg(\omega k_4)),$$

$$A_2(\zeta) := \frac{-4\sqrt{3}\sqrt{\hat{\nu}_2(k_2)}|\tilde{r}(\frac{1}{k_2})|^{\frac{1}{2}}\operatorname{Im} k_2}{-i\omega^2 k_2 z_{2,\star}} \sin(\arg(\omega^2 k_2)),$$

$$\alpha_1(\zeta,t) := \frac{3\pi}{4} + \arg q_3 + \arg\Gamma(i\hat{\nu}_1(k_4)) + \arg d_{1,0} + \arg\tfrac{\mathcal{P}(\omega k_4)}{\mathcal{P}(\omega^2 k_4)} - t\operatorname{Im}\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4),$$

$$\alpha_2(\zeta,t) := \frac{3\pi}{4} - \arg(q_6 - q_2 q_5) + \arg\Gamma(i\hat{\nu}_2(k_2)) + \arg d_{2,0} + \arg\tfrac{\mathcal{P}(\omega^2 k_2)}{\mathcal{P}(\omega k_2)} - t\operatorname{Im}\Phi_{32}(\zeta,\omega^2 k_2).$$

孤子对 $u(x,t)$ 渐近行为 (2.16) 的影响，编码在分别出现在 α_1 和 α_2 的定义中的相移 $\arg\ ^{\mathcal{P}(\omega k_4)}\ \mathcal{P}(\omega^2 k_4)$ ~~和 $\arg\ ^{\mathcal{P}(\omega^2 k_2)}\ \mathcal{P}(\omega k_2)$~~ 里。若不存在孤子（即集合 Z 为空），则这些相移不存在，公式 (2.16) 就化为 [4] 中给出的第四扇区公式。事实上，集合 Z 在上述定义中唯一出现之处是 $\mathcal{P}(k)$ 的定义 (2.11) 中；若 Z 为空，则 $\mathcal{P}(k)$ 恒等于 1。因此，这些相移描述了第四扇区中的主阶孤子-辐射相互作用。我们注意到，$\mathcal{P}$ 的定义中的乘积只遍历 Z 中实部为正的零点；这对应于只有右行孤子会在第四扇区产生相移这一事实。

3. The RH problem for n

我们将通过分析一个行向量 RH 问题来证明定理 2.1，其解记为 n。接下来，我们回顾 [6] 中的这个 RH 问题。令 $\theta_{ij}(x,t,k) = t\,\Phi_{ij}(\zeta,k)$。对于 $j = 1,\dots,6$，我们记作 $\Gamma_j = \Gamma_{j'} \cup \Gamma_{j''}$，其中 $\Gamma_{j'} = \Gamma_j \setminus \mathbb{D}$ 和 $\Gamma_{j''} := \Gamma_j \setminus \Gamma_{j'}$，且 Γ_j 如图 2 所示。跳跃矩阵 $v(x,t,k)$ 对 $k \in \Gamma$ 定义为

$$v_{1'} = \begin{pmatrix} 1 & -r_1(k)e^{-\theta_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{1''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_1(\frac{1}{k})e^{\theta_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{2'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_2(\frac{1}{\omega k})e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_{2''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_2(\omega k)e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix},\ v_{3'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -r_1(\omega^2 k)e^{\theta_{31}} & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{3''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_1(\frac{1}{\omega^2 k})e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_{4'} = \begin{pmatrix} 1 & -r_2(\frac{1}{k})e^{-\theta_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{4''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ r_2(k)e^{\theta_{21}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{5'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r_1(\omega k)e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_{5''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & r_1(\frac{1}{\omega k})e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix},\ v_{6'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -r_2(\frac{1}{\omega^2 k})e^{\theta_{31}} & 0 & 1 \end{pmatrix},\ v_{6''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_2(\omega^2 k)e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_7 = \begin{pmatrix} 1 & -r_1(k)e^{-\theta_{21}} & r_2(\omega^2 k)e^{-\theta_{31}} \\ -r_2(k)e^{\theta_{21}} & 1 + r_1(k)r_2(k) & \big(r_2(\frac{1}{\omega k}) - r_2(k)r_2(\omega^2 k)\big)e^{-\theta_{32}} \\ r_1(\omega^2 k)e^{\theta_{31}} & \big(r_1(\frac{1}{\omega k}) - r_1(k)r_1(\omega^2 k)\big)e^{\theta_{32}} & f(\omega^2 k) \end{pmatrix},$$

$$v_8 = \begin{pmatrix} f(k) & r_1(k)e^{-\theta_{21}} & \big(r_1(\frac{1}{\omega^2 k}) - r_1(k)r_1(\omega k)\big)e^{-\theta_{31}} \\ r_2(k)e^{\theta_{21}} & 1 & -r_1(\omega k)e^{-\theta_{32}} \\ \big(r_2(\frac{1}{\omega^2 k}) - r_2(\omega k)r_2(k)\big)e^{\theta_{31}} & -r_2(\omega k)e^{\theta_{32}} & 1 + r_1(\omega k)r_2(\omega k) \end{pmatrix},$$

$$v_9 = \begin{pmatrix} 1 + r_1(\omega^2 k)r_2(\omega^2 k) & \big(r_2(\frac{1}{k}) - r_2(\omega k)r_2(\omega^2 k)\big)e^{-\theta_{21}} & -r_2(\omega^2 k)e^{-\theta_{31}} \\ \big(r_1(\frac{1}{k}) - r_1(\omega k)r_1(\omega^2 k)\big)e^{\theta_{21}} & f(\omega k) & r_1(\omega k)e^{-\theta_{32}} \\ -r_1(\omega^2 k)e^{\theta_{31}} & r_2(\omega k)e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

其中 $v_j, v_{j'}, v_{j''}$ 是 v 在 Γ_j, $\Gamma_{j'}$ 和 $\Gamma_{j''}$ 上的限制。令 $\Gamma_\star = \{i\kappa_j\}_{j=1}^6 \cup \{0\}$ 为 Γ 的交点集合。令 Z 如假设 (*i*) 中所述，并令

$$\hat{\mathsf{Z}} := \mathsf{Z} \cup \mathsf{Z}^* \cup \omega\mathsf{Z} \cup \omega\mathsf{Z}^* \cup \omega^2\mathsf{Z} \cup \omega^2\mathsf{Z}^* \cup \mathsf{Z}^{-1} \cup \mathsf{Z}^{-*} \cup \omega\mathsf{Z}^{-1} \cup \omega\mathsf{Z}^{-*} \cup \omega^2\mathsf{Z}^{-1} \cup \omega^2\mathsf{Z}^{-*},$$

其中 $\mathsf{Z}^{-1} = \{k_0^{-1} \,|\, k_0 \in \mathsf{Z}\}$、$\mathsf{Z}^* = \{\bar{k}_0 \,|\, k_0 \in \mathsf{Z}\}$ 和 $\mathsf{Z}^{-*} = \{\bar{k}_0^{-1} \,|\, k_0 \in \mathsf{Z}\}$。

RH 问题 3.1 (关于 n 的 RH 问题)。求一个 1×3 行向量值函数 $n(x,t,k)$，使其满足以下性质：

(a) $n(x,t,\cdot)$: $\mathbb{C} \setminus (\Gamma \cup \hat{\mathsf{Z}}) \to \mathbb{C}^{1\times 3}$ 是解析的。(b) $n(x,t,k)$ 当 k 从左侧和右侧趋近 $\Gamma\backslash\Gamma_\star$ 时，其极限存在，在 $\Gamma \setminus \Gamma_\star$ 上连续，分别记为 n_+ 和 n_-。此外，它们满足关系

$$n_+(x,t,k) = n_-(x,t,k)v(x,t,k) \qquad for \quad k \in \Gamma \setminus \Gamma_\star. \tag{3.2}$$

(c) $n(x,\ t,\ k) = O(1)$ 当 $k \to k_\star \in \Gamma_\star$。

(d) 对于 $k \in \mathbb{C} \setminus (\Gamma \cup \hat{\mathsf{Z}})$，$n$ 满足对称性

$$n(x,t,k) = n(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1} = n(x,t,k^{-1})\mathcal{B}, \tag{3.3}$$

其中，$\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是由下式定义的矩阵

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad and \qquad \mathcal{B} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

(e) $n(x,\ t,\ k) = (1,\ 1,\ 1) + O(k^{-1})$ 为 $k \to \infty$。

(f) 在 f 的每个点处的一个元素至多具有一个简单极点，而另外两个元素是解析的。以下留数条件在 Z 中的各点处成立：对于每个 $k_0 \in \mathsf{Z} \setminus \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{k=k_0} n_3(k) = c_{k_0} e^{-\theta_{31}(k_0)} n_1(k_0), && \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0} n_2(k) = \omega c_{k_0} e^{-\theta_{31}(k_0)} n_3(\omega k_0),\\
&\operatorname*{Res}_{k=\omega^2 k_0} n_1(k) = \omega^2 c_{k_0} e^{-\theta_{31}(k_0)} n_2(\omega^2 k_0), && \operatorname*{Res}_{k=k_0^{-1}} n_3(k) = -k_0^{-2} c_{k_0} e^{-\theta_{31}(k_0)} n_2(k_0^{-1}),\\
&\operatorname*{Res}_{k=\omega^2 k_0^{-1}} n_1(k) = -\frac{\omega^2}{k_0^2} c_{k_0} e^{-\theta_{31}(k_0)} n_3(\omega^2 k_0^{-1}), && \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0^{-1}} n_2(k) = -\frac{\omega}{k_0^2} c_{k_0} e^{-\theta_{31}(k_0)} n_1(\omega k_0^{-1}),\\
&\operatorname*{Res}_{k=\bar{k}_0} n_2(k) = d_{k_0} e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)} n_3(\bar{k}_0), && \operatorname*{Res}_{k=\omega\bar{k}_0} n_1(k) = \omega d_{k_0} e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)} n_2(\omega\bar{k}_0),\\
&\operatorname*{Res}_{k=\omega^2\bar{k}_0} n_3(k) = \omega^2 d_{k_0} e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)} n_1(\omega^2\bar{k}_0), && \operatorname*{Res}_{k=\bar{k}_0^{-1}} n_1(k) = -\bar{k}_0^{-2} d_{k_0} e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)} n_3(\bar{k}_0^{-1}),\\
&\operatorname*{Res}_{k=\omega^2\bar{k}_0^{-1}} n_2(k) = -\frac{\omega^2}{\bar{k}_0^2} d_{k_0} e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)} n_1(\omega^2\bar{k}_0^{-1}), && \operatorname*{Res}_{k=\omega\bar{k}_0^{-1}} n_3(k) = -\frac{\omega}{\bar{k}_0^2} d_{k_0} e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)} n_2(\omega\bar{k}_0^{-1}),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

并且，对每个 $k_0 \in \mathsf{Z} \cap \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{k=k_0} n_2(k) = c_{k_0} e^{-\theta_{21}(k_0)} n_1(k_0), && \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0} n_1(k) = \omega c_{k_0} e^{-\theta_{21}(k_0)} n_3(\omega k_0),\\
&\operatorname*{Res}_{k=\omega^2 k_0} n_3(k) = \omega^2 c_{k_0} e^{-\theta_{21}(k_0)} n_2(\omega^2 k_0), && \operatorname*{Res}_{k=k_0^{-1}} n_1(k) = -k_0^{-2} c_{k_0} e^{-\theta_{21}(k_0)} n_2(k_0^{-1}),\\
&\operatorname*{Res}_{k=\omega^2 k_0^{-1}} n_2(k) = -\frac{\omega^2}{k_0^2} c_{k_0} e^{-\theta_{21}(k_0)} n_3(\omega^2 k_0^{-1}), && \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0^{-1}} n_3(k) = -\frac{\omega}{k_0^2} c_{k_0} e^{-\theta_{21}(k_0)} n_1(\omega k_0^{-1}),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中，为了简洁起见，省略了 n 和 θ_{ij} 对 (x,t) 的依赖关系，而复常数 d_{k_0} 定义为

$$d_{k_0} := \frac{\bar{k}_0^2 - 1}{\omega^2(\omega^2 - \bar{k}_0^2)} \bar{c}_{k_0}, \qquad k_0 \in \mathsf{Z} \setminus \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

若 $k_0 \in$Z 满足 $c_{k_0} = 0$，则 n 在 k_0 处的极点是可去的，因此可以从 k_0 中去掉 Z，而不影响 RH 问题 3.1。因此，在本文余下部分，我们将假设 $c_{k_0} \neq 0$ 对所有 $k_0 \in$Z均成立。

4. Brief overview of the proof

在定理 2.1 的假设下，RH 问题 3.1 对每个 $(n(x,\ t,\ k)$ 均有唯一解 $x,\ t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$，函数

$$n_3^{(1)}(x,t) := \lim_{k\to\infty} k(n_3(x,t,k) - 1)$$

对 $(x,\ t) \in \mathbb{R} \times [0,\infty)$ 定义良好且光滑，并且

$$u(x,t) := -i\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x} n_3^{(1)}(x,t) \tag{4.1}$$

是方程 (1.1 在 $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ 上的施瓦茨类解，初始数据为 $u_0,\ u_1$ [6]。利用 Deift–Zhou 最速下降法的论证，我们将推导出 $n_3^{(1)}$ 的渐近公式。将此公式代入 (4.1)，即可得到定理2.1中的公式。

RH 问题的最速下降分析3.1 涉及三个相位函数的鞍点 Φ_{21}、 Φ_{31}和 Φ_{32}，它们的符号表见图 3。函数 $\{k_j\}_{j=1}^4$ 的 Φ_{21} 鞍点由式（2.8）给出。利用以下关系

$$\Phi_{31}(\zeta,k) = -\Phi_{21}(\zeta,\omega^2 k), \qquad \Phi_{32}(\zeta,k) = \Phi_{21}(\zeta,\omega k), \tag{4.2}$$

我们看到，$\{\omega k_j\}_{j=1}^4$ 是 Φ_{31} 的鞍点，而 $\{\omega^2 k_j\}_{j=1}^4$ 是 Φ_{32}的鞍点。结果表明，在第四扇区中，$u(x,\ t)$的长时间渐近行为的主要贡献来自全局参数子 Δ^{-1} 以及鞍点 $\{k_j, \omega k_j, \omega^2 k_j\}_{j=1}^4$附近的十二个局部参数解。

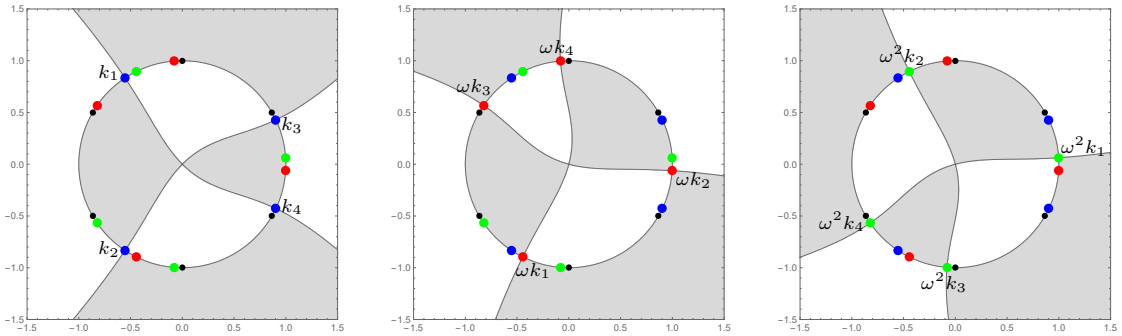


图 3。从左至右：第四扇区中 Φ_{21}、 Φ_{31}和 Φ_{32} 的符号表。在所有图中，阴影区域对应于 $\{k\,|\mathrm{Re}\ \Phi_{ij} > 0\}$，白色区域对应于$\{k\,|\mathrm{Re}\ \Phi_{ij} < 0\}$。点 k_1、 k_2、 k_3、 k_4 以蓝色表示，点 ωk_1、 ωk_2、 ωk_3、 ωk_4 以红色表示，点 $\omega^2 k_1$、 $\omega^2 k_2$、 $\omega^2 k_3$、 $\omega^2 k_4$ 以绿色表示。较小的黑点是点 $i\kappa_j$、 $j = 1$，.....、6。

我们的证明采用一系列变换 $n \to n^{(1)} \to n^{(2)} \to n^{(3)} \to n^{(4)} \to \hat{n}$，将 RH 问题3.1 化为一个小范数 RH 问题。这些变换均可逆，因此 $\{n^{(j)}\}_1^4$ 和 $\hat{n}$ 所满足的 RH 问题与 RH 问题

3.1。将 $\{n^{(j)}\}_1^4$ 和 $\hat{}n$ 对应的 RH 问题的跳跃轮廓记作 $\{\Gamma^{(j)}\}_1^4$和 $\hat{}\Gamma$，相应的跳跃矩阵分别记作 $\{v^{(j)}\}_1^4$ 和 $\hat{}v$。

该 mp 矩阵 v 在 (3.1) 中根据 (3.3) 满足以下对称性：

$$v(x,t,k) = \mathcal{A}v(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{B}v(x,t,k^{-1})^{-1}\mathcal{B}, \qquad k \in \Gamma. \tag{4.3}$$

我们将在每一步保留对称性 (3.3) 和 (4.3)，因此，对于 $j = 1,2,3,4,$

$$v^{(j)}(x,t,k) = \mathcal{A}v^{(j)}(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{B}v^{(j)}(x,t,k^{-1})^{-1}\mathcal{B}, \qquad k \in \Gamma^{(j)}, \tag{4.4}$$

$$n^{(j)}(x,t,k) = n^{(j)}(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1} = n^{(j)}(x,t,k^{-1})\mathcal{B}, \qquad k \in \mathbb{C}\setminus\Gamma^{(j)}, \tag{4.5}$$

$\hat{}n$ 和 $\hat{}v$也同理。这些对称性意味着，我们只需在 ωk_4 和 $\omega^2 k_2$附近构造局部参数解，并且只需在扇区 S := $\{k \in \mathbb{C} | \arg k \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]\}$中定义变换$n \to n^{(1)}$、 $n^{(j)} \to n^{(j+1)}$和 $n^{(4)} \to \hat{}n$。在$\mathbb{C}\setminus$ S 中，我们将利用 $\mathcal{A}$- 和$\mathcal{B}$-对称性来定义局部参数解和变换。

由 [4, 定理 2.3] 可知，函数 r_1 和 r_2 满足以下性质：$r_1 \in C^\infty(\hat{}\Gamma_1)$， $r_2 \in C^\infty(\hat{}\Gamma_4\setminus\{\omega^2,-\omega^2\})$， $r_1(\kappa_j) \neq 0$对于 $j = 1,$ ……，6， $r_2(k)$ 在 $k = \pm\omega^2$处有简单极点，在 $k = \pm\omega$处有简单零点，并且 r_1， r_2 当$|k| \to \infty$时迅速衰减。此外，

$$r_1(\tfrac{1}{\omega k}) + r_2(\omega k) + r_1(\omega^2 k)r_2(\tfrac{1}{k}) = 0, \qquad k \in \partial\mathbb{D}\setminus\{\omega,-\omega\}, \tag{4.6}$$

$$r_2(k) = \tilde{r}(k)\overline{r_1(\bar{k}^{-1})}, \qquad \tilde{r}(k) := \frac{\omega^2-k^2}{1-\omega^2k^2}, \qquad k \in \hat{\Gamma}_4\setminus\{0,\omega^2,-\omega^2\}, \tag{4.7}$$

$$r_1(1) = r_1(-1) = 1, \qquad r_2(1) = r_2(-1) = -1. \tag{4.8}$$

这些性质将在整个证明过程中反复使用。

留数条件 (3.5) 涉及指数函数 $e^{-\theta_{31}(x,t,k_0)}$ 和 $e^{\theta_{32}(x,t,\bar{k}_0)}$。由图 3 可知，当 $k_0 \in$ Z $\setminus\mathbb{R}$ 且 Re $k_0 < 0$ 时，对于 $t \to \infty$，这些指数函数很小（回想一下，Z $\setminus\mathbb{R} \subset D_{\text{reg}}$）。类似地，留数条件 (3.6) 涉及指数函数$e^{-\theta_{21}(x,t,k_0)}$；由图 3 可知，当 $k_0 \in$Z$\cap\mathbb{R}$ 且 Re $k_0 < 0$ 时，对于 $t \to \infty$，该指数函数很小（回想一下，Z $\cap\mathbb{R} \subset$ (−1, 0) ∪ (1, ∞)）。这表明，Z 中满足 Re $k_0 < 0$ 的点 k_0（即对应于左行孤子的点）在任何有限阶的第四扇区渐近行为中都不会产生贡献，而这正是我们将要证明的结果。另一方面，对于满足 Re $k_0 > 0$ 的 $k_0 \in$ Z，当 $t \to \infty$ 时，上述指数函数很大。通过在全局参数子中加入适当的因子，我们可以翻转这些指数函数中指数的符号，从而使它们在 t 较大时变小。加入全局参数子的因子会产生相移 arg $^{\mathcal{P}}$(ωk_4) $\mathcal{P}$($\omega^2 k_4$) 和 arg $^{\mathcal{P}(\omega^2 k_2)}$ $\mathcal{P}$(ωk_2)，这些相移由定理 2.1 中所见的右行孤子产生。

5. The $n \to n^{(1)}$ transformation

我们将在 $\partial\mathbb{D}\setminus\mathcal{Q}$ 周围打开透镜区域。定义

$$\hat{r}_j(k) := \frac{r_j(k)}{1+r_1(k)r_2(k)}, \qquad j = 1,2,$$

并令

$$r_{j,1}(k) := r_j(k), \quad r_{j,2}(k) := \hat{r}_j(k), \quad r_{j,3}(k) := \frac{r_j(k) - r_j(\frac{1}{\omega k})r_j(\frac{1}{\omega^2 k})}{1+r_1(\frac{1}{\omega k})r_2(\frac{1}{\omega k})},$$

$$r_{j,4}(k) := \frac{r_j(k)}{f(k)}, \quad r_{j,5}(k) = \frac{r_j(k) - r_j(\frac{1}{\omega k})r_j(\frac{1}{\omega^2 k})}{f(k)}.$$

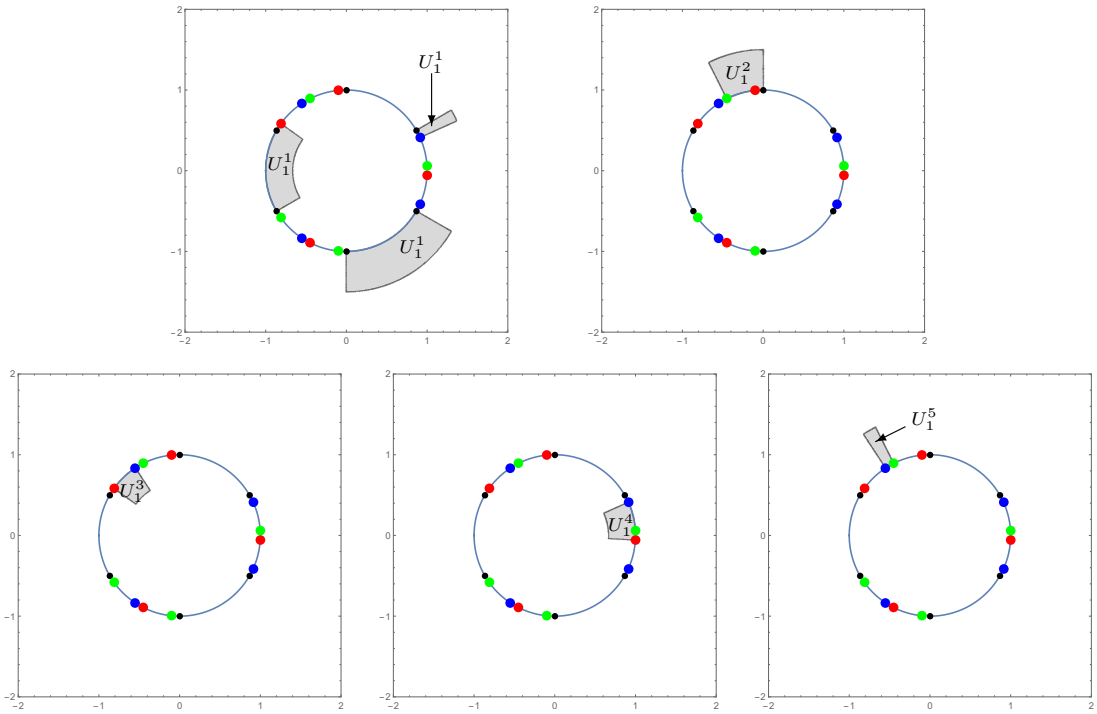


图4. 复 k 平面中的开子集 $\{U_1^\ell\}_{\ell=1}^5$。

这些谱函数的定义域（通常）只是 Γ的子集。因此，要在 $\partial\mathbb{D}$周围打开透镜区域，就有必要将它们分解为解析部分和一个小余项。令 $M>1$并定义开集 $\{U_1^\ell = U_1^\ell(\zeta,\ M)\}_{\ell=1}^5$如下（见图4）

$$
\begin{aligned}
U_1^1 &= \{k|\operatorname{Re}\Phi_{21}>0\}\cap\big(\{k|\arg k\in(\arg(\omega k_3),\pi]\cup[-\pi,-\tfrac{5\pi}{6}),\ M^{-1}<|k|<1\}\\
&\quad\cup\{k|\arg k\in(-\tfrac{\pi}{2},-\tfrac{\pi}{6})\cup(\arg k_3,\tfrac{\pi}{6}),\ 1<|k|<M\}\big),\\
U_1^2 &= \{k|\operatorname{Re}\Phi_{21}>0\}\cap\{k|\arg k\in(\tfrac{\pi}{2},\arg(\omega^2k_2)),\ 1<|k|<M\},\\
U_1^3 &= \{k|\operatorname{Re}\Phi_{21}>0\}\cap\{k|\arg k\in(\arg k_1,\arg(\omega k_3)),\ M^{-1}<|k|<1\},\\
U_1^4 &= \{k|\operatorname{Re}\Phi_{21}>0\}\cap\{k|\arg k\in(\arg(\omega k_2),\arg k_3),\ M^{-1}<|k|<1\},\\
U_1^5 &= \{k|\operatorname{Re}\Phi_{21}>0\}\cap\{k|\arg k\in(\arg(\omega^2k_2),\arg k_1),\ 1<|k|<M)\}.
\end{aligned}
$$

由 [4, 引理 2.13] 可知，当且仅当 $k\in\{\pm1,\pm\omega\}$ 时，$f(k)=0$；并且对于所有满足 $\arg k\in(\pi/3,\pi)\cup(-2\pi/3,0)$ 的 $k\in\partial\mathbb{D}$，都有 $1+r_1(k)r_2(k)>0$。因此，对于每个 $\ell\in\{1,2,3\}$，$r_{1,\ell}$ 在 $k\in\partial U_1^\ell\cap\partial\mathbb{D}$ 上有定义；$r_{1,4}$ 在 $k\in(\partial U_1^4\cap\partial\mathbb{D})\setminus\{1\}$ 上有定义；而 $r_{1,5}$ 在 $k\in(\partial U_1^5\cap\partial\mathbb{D})\setminus\{\omega\}$ 上有定义。令 $n_1\geq0$ 表示满足当 $k\to1$, $k\in\partial\mathbb{D}$ 时，$(k-1)^{n_1}r_{1,4}(k)=O(1)$ 的最小整数；令 $n_\omega\geq0$ 表示满足当 $k\to\omega$, $k\in\partial\mathbb{D}$ 时，$(k-\omega)^{n_\omega}r_{1,5}(k)=O(1)$ 的最小整数。

现在求出 $\{r_{1,\ell}\}_{\ell=1}^5$的分解；随后将利用对称性（4.7）得到 $\{r_{2,\ell}\}_{\ell=1}^5$ 的分解。设 $N\geq1$ 为一个整数。

引理 5.1（分解引理）。存在 $M>1$ 以及分解

$$
r_{1,\ell}(k)=r_{1,\ell,a}(x,t,k)+r_{1,\ell,r}(x,t,k),\qquad k\in\partial U_1^\ell\cap\partial\mathbb{D},\ \ell=1,\dots,5,\tag{5.1}
$$

使得 $\{r_{1,\ell,a},r_{1,\ell,r}\}_{\ell=1}^5$ 满足以下性质：

（a）对于每个 $\zeta\in\mathcal{I}$、 $t\geq 1$ 和 $\ell\in\{1,\dots,5\}$、 $r_{1,\,\ell,\,a}$（x、 t、 k）均有定义且连续于 $k\in\bar{U}_1^\ell$，并在 $k\in U_1^\ell$ 上解析。（b）对于每个 $\zeta\in\mathcal{I}$、 $t\geq 1$ 和 $\ell\in\{1,\dots,5\}$、 $r_{1,\,\ell,\,a}$ 满足

$$\left|r_{1,\ell,a}(x,t,k)-\sum_{j=0}^{N}\frac{r_{1,\ell}^{(j)}(k_\star)}{j!}(k-k_\star)^j\right|\leq C|k-k_\star|^{N+1}e^{\frac{t}{4}|\operatorname{Re}\Phi_{21}(\zeta,k)|},\ k\in\bar{U}_1^\ell,\ k_\star\in\mathcal{R}_\ell,$$

其中 $\mathcal{R}_1=\{\omega k_3,e^{\pm 5\pi i/6},-1,-i,-\omega,e^{\pm\frac{\pi i}{6}},k_1\}$、 $\mathcal{R}_2=\{i,\omega k_4,\omega^2 k_2\}$、 $\mathcal{R}_3=\{k_1,\omega k_3\}$、 $\mathcal{R}_4=\{\omega k_2,\omega^2 k_1,k_3\}$、 $\mathcal{R}_5=\{\omega^2 k_2,k_1\}$ 以及常数 C 与 ζ、 t、 k 无关。此外，对于 $\zeta\in\mathcal{I}$ 和 $t\geq 1$，

$$\left|r_{1,4,a}(x,t,k)-\sum_{j=0}^{N+n_1}\frac{[(\cdot-1)^{n_1}r_{1,4}(\cdot)]^{(j)}(1)}{j!}(k-1)^{j-n_1}\right|\leq C|k-1|^{N+1}e^{\frac{t}{4}|\operatorname{Re}\Phi_{21}(\zeta,k)|},$$

$$\left|r_{1,5,a}(x,t,k)-\sum_{j=0}^{N+n_\omega}\frac{[(\cdot-\omega)^{n_\omega}r_{1,5}(\cdot)]^{(j)}(\omega)}{j!}(k-\omega)^{j-n_\omega}\right|\leq C|k-\omega|^{N+1}e^{\frac{t}{4}|\operatorname{Re}\Phi_{21}(\zeta,k)|},$$

并且这些估计分别对 $k\in\bar{U}_1^4$ 和 $k\in\bar{U}_1^5$ 成立。
（c）对于每个 $1\leq p\leq\infty$ 和 $\ell\in\{1,\dots,5\}$，r_1 的 L^p-范数$_{,\ell,r}(x$、 t、 $\cdot)$ 在 $\partial\bar{U}_1^\ell\cap\partial\mathbb{D}$ 上为 $O(t^{-N})$，并且当 $t\to\infty$ 时对 $\zeta\in\mathcal{I}$ 一致成立。

证明。函数 $\theta\mapsto -i\Phi_{21}(\zeta,e^{i\theta})=(\zeta-\cos\theta)\sin\theta$ 在 $\partial U_1^\ell\cap\partial\mathbb{D}$, $\ell=1,\dots,5$ 的每个连通分支上均为实值双射。因此，可以用与 [9] 中类似的论证证明该结论。由于这些论证如今已相当标准，我们省略细节。□

在下文中，如有必要，缩小 $M>1$，我们假设对所有 $k_0\in\mathsf{Z}\cap\left(D_{\mathrm{reg}}^R\cup(1,\infty)\right)$，都有 $|k_0|>M$，并且对所有 $k_0\in\mathsf{Z}\cap\left(D_{\mathrm{reg}}^L\cup(-1,0)\right)$，都有 $|k_0|<M^{-1}$。

容易验证（利用 (4.7) 中的第二个方程），对于 $k\in\partial\mathbb{D}\setminus\{-\omega^2,\omega^2\}$，有 $\tilde{r}(k)\in\mathbb{R}$，且 $\tilde{r}(k)=\tilde{r}(\frac{1}{\omega k})\tilde{r}(\frac{1}{\omega^2 k})$。再利用 (4.7) 中的第一个方程，我们推得 $r_{2,\ell}(k)=\tilde{r}(k)r_{1,\ell}(\bar{k}^{-1})$，$k\in\partial\mathbb{D}\cap U_1^\ell$，$\ell=1,\dots,5$。因此，对于每个 $\ell\in\{1,\dots,5\}$，我们令 $U_2^\ell:=\{k|\bar{k}^{-1}\in U_1^\ell\}$，并定义分解 $r_{2,\ell}=r_{2,\ell,a}+r_{2,\ell,r}$ 如下：

$$r_{2,\ell,a}(k):=\tilde{r}(k)\overline{r_{1,\ell,a}(\bar{k}^{-1})},\quad k\in U_2^\ell,\qquad r_{2,\ell,r}(k):=\tilde{r}(k)\overline{r_{1,\ell,r}(\bar{k}^{-1})},\quad k\in\partial U_2^\ell\cap\partial\mathbb{D}.$$

现在定义第一个变换 $n\to n^{(1)}$，其做法是在$\partial\mathbb{D}\setminus\mathcal{Q}$周围打开透镜区域。如第4节所述，我们只需在扇区S中对其进行明确的定义。我们引入一条新的轮廓 $\Gamma^{(0)}$，它作为集合与 $\Gamma\cap$ S重合，但取向和标记方式不同，见图5。令 $\Gamma_j^{(0)}$ 表示 $\Gamma^{(0)}$ 中在图 j 5中标记为的子轮廓。例如，

$$\Gamma_8^{(0)}:=\{e^{i\theta}\,|\,\theta\in(\arg(\omega^2k_2),\tfrac{2\pi}{3})\},\qquad \Gamma_{9_r}^{(0)}:=\{e^{i\theta}\,|\,\theta\in(\tfrac{\pi}{3},\tfrac{\pi}{2})\}.$$

我们将在$\Gamma^{(0)}$的四个部分以不同方式打开透镜区域。在 $\Gamma_{9_r}^{(0)}$ 上，我们将使用以下因式分解

$$v_{9_r}=v_{9_L}^{(1)}v_{9_r}^{(1)}v_{9_R}^{(1)},$$

其中

$$v_{9_L}^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&-r_{2,a}(\omega^2k)e^{-\theta_{31}}\\ r_{1,a}(\frac{1}{k})e^{\theta_{21}}&1&r_{1,a}(\omega k)e^{-\theta_{32}}\\ 0&0&1\end{pmatrix},\quad v_{9_R}^{(1)}=\begin{pmatrix}1&r_{2,a}(\frac{1}{k})e^{-\theta_{21}}&0\\ 0&1&0\\ -r_{1,a}(\omega^2k)e^{\theta_{31}}&r_{2,a}(\omega k)e^{\theta_{32}}&1\end{pmatrix},$$

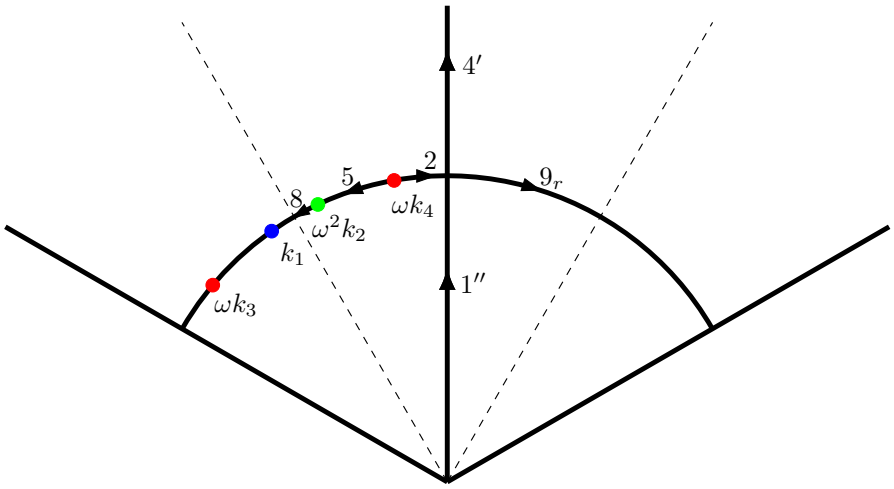


图 5。 轮廓 $\Gamma^{(0)}$ （实线）、S 的边界（虚线），以及鞍点 ωk_4（红色）、 $\omega^2 k_2$ （绿色）、 k_1 （蓝色）和 ωk_3 （红色）。

$$v_{9_r}^{(1)} = I + \begin{pmatrix} r_{1,r}(\omega^2 k) r_{2,r}(\omega^2 k) & g_2(\omega k) e^{-\theta_{21}} & -r_{2,r}(\omega^2 k) e^{-\theta_{31}} \\ g_1(\omega k) e^{\theta_{21}} & g(\omega k) & h_1(\omega k) e^{-\theta_{32}} \\ -r_{1,r}(\omega^2 k) e^{\theta_{31}} & h_2(\omega k) e^{\theta_{32}} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

and

$$\begin{aligned} h_1(k) &= r_{1,r}(k) + r_{1,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) r_{2,r}(\omega k), \qquad h_2(k) = r_{2,r}(k) + r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) r_{1,r}(\omega k), \\ g_1(k) &= r_{1,r}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) - r_{1,r}(\omega k)\big(r_{1,r}(k) + r_{1,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) r_{2,r}(\omega k)\big), \\ g_2(k) &= r_{2,r}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) - r_{2,r}(\omega k)\big(r_{2,r}(k) + r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) r_{1,r}(\omega k)\big), \\ g(k) &= r_{1,r}(k)\big(r_{1,r}(\omega k) r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) + r_{2,r}(k)\big) \\ &\quad + r_{1,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) r_{2,r}(\omega k)\big(r_{1,r}(\omega k) r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) + r_{2,r}(k)\big) + r_{1,r}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) r_{2,r}(\tfrac{1}{\omega^2 k}). \end{aligned}$$

在 $\Gamma_2^{(0)}$ 上，我们将使用因式分解

$$v_7^{-1} = v_3^{(1)} v_2^{(1)} v_1^{(1)}, \qquad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 + r_1(k) r_2(k) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 + r_1(k) r_2(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + v_{2,r}^{(1)}, \tag{5.3}$$

$$v_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_{1,a}(\frac{1}{\omega^2 k}) e^{-\theta_{31}} \\ \hat{r}_{2,a}(k) e^{\theta_{21}} & 1 & -r_{2,a}(\frac{1}{\omega k}) e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{r}_{1,a}(k) e^{-\theta_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r_{2,a}(\frac{1}{\omega^2 k}) e^{\theta_{31}} & -r_{1,a}(\frac{1}{\omega k}) e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix}.$$

在 $\Gamma_5^{(0)}$ 上，我们将使用以下因式分解

$$v_7 = v_4^{(1)} v_5^{(1)} v_6^{(1)}, \qquad v_5^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + r_1(k) r_2(k) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f(k)}{1 + r_1(k) r_2(k)} \end{pmatrix} + v_{5,r}^{(1)},$$

$$v_4^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & a_{12,a} e^{-\theta_{21}} & a_{13,a} e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{32,a} e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix}, \qquad v_6^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21,a} e^{\theta_{21}} & 1 & a_{23,a} e^{-\theta_{32}} \\ a_{31,a} e^{\theta_{31}} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

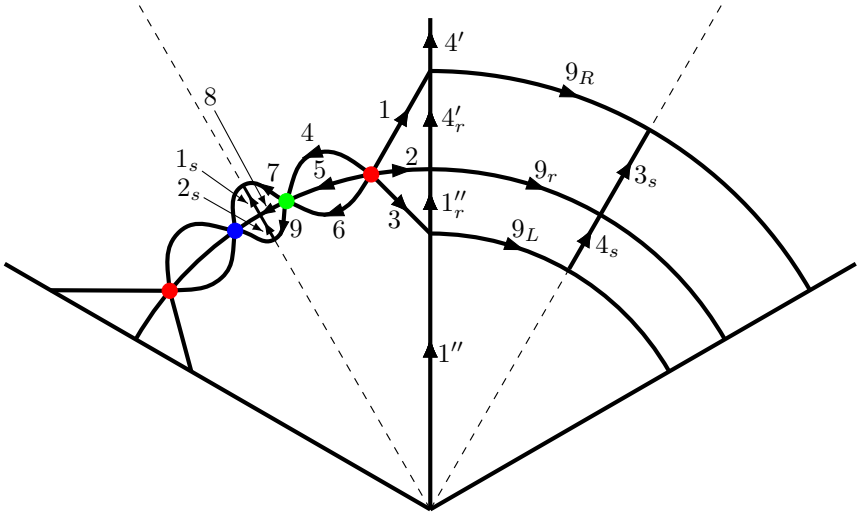


图 6. 轮廓 $\Gamma^{(1)}$ （实线）与S 的边界（虚线）。从右到左，这些点依次为 ωk_4 （红色）、 $\omega^2 k_2$ （绿色）、 k_1 （蓝色）和 ωk_3 （红色）。

其中

$$a_{12} = -\hat{r}_1(k), \qquad a_{13} = -\frac{r_1(\frac{1}{\omega^2 k})}{f(k)}, \qquad a_{23} = \frac{r_2(\frac{1}{\omega k}) - r_2(k) r_2(\omega^2 k)}{1 + r_1(k) r_2(k)},$$
$$a_{21} = -\hat{r}_2(k), \qquad a_{31} = -\frac{r_2(\frac{1}{\omega^2 k})}{f(k)}, \qquad a_{32} = \frac{r_1(\frac{1}{\omega k}) - r_1(k) r_1(\omega^2 k)}{1 + r_1(k) r_2(k)}.$$

和 $a_{ij,\ a}$， $a_{ij,\ r}$ 是引理 a_{ij} 5.1 中的解析延拓和余项，例如， $a_{13,\ a} = -r_{1,\ 4,\ a}(\ {}^{1}_{\omega^2 k})$ 以及 $a_{23,\ a} = r_{2,\ 3,\ a}(\ {}^{1}_{\omega k})$。—— —

最后，在 $\Gamma_8^{(0)}$ 上，我们将使用如下因式分解

$$v_7 = v_7^{(1)} v_8^{(1)} v_9^{(1)}, \qquad v_8^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{f(k)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f(k)}{f(\omega^2 k)} & 0 \\ 0 & 0 & f(\omega^2 k) \end{pmatrix} + v_{8,r}^{(1)},$$
$$v_7^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & b_{12,a} e^{-\theta_{21}} & b_{13,a} e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & b_{23,a} e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v_9^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{21,a} e^{\theta_{21}} & 1 & 0 \\ b_{31,a} e^{\theta_{31}} & b_{32,a} e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

其中

$$b_{12} = -\frac{r_1(k) - r_1(\frac{1}{\omega k}) r_1(\frac{1}{\omega^2 k})}{f(k)}, \qquad b_{13} = \frac{r_2(\omega^2 k)}{f(\omega^2 k)}, \qquad b_{23} = \frac{r_2(\frac{1}{\omega k}) - r_2(k) r_2(\omega^2 k)}{f(\omega^2 k)},$$
$$b_{21} = -\frac{r_2(k) - r_2(\frac{1}{\omega k}) r_2(\frac{1}{\omega^2 k})}{f(k)}, \qquad b_{31} = \frac{r_1(\omega^2 k)}{f(\omega^2 k)}, \qquad b_{32} = \frac{r_1(\frac{1}{\omega k}) - r_1(k) r_1(\omega^2 k)}{f(\omega^2 k)},$$

而 $b_{ij、\ a}$、 $b_{ij、\ r}$ 是引理 5.1 中 b_{ij} 的解析延拓和余项，例如， $b_{12、\ a} = -r_{1、5、a}(k)$ 以及 $b_{23、\ a} = r_{2、5、a}(\ {}^{1}_{\omega k})$。我们不写出 $v_{2\ r}^{(1)}$、、 $v_{5\ r}^{(1)}$ 和 $v_{8\ r}^{(1)}$ 的冗长表达式，它们与 $v_{2\ r}^{(1)}$ 的表达式类似，后者见 [4, 第 8] 节；对我们而言，这些矩阵唯一重要的性质是

$$\|v_{j,r}^{(1)}\|_{(L^1 \cap L^\infty)(\Gamma_j^{(0)})} = O(t^{-1}), \qquad \text{as } t \to \infty,\ j = 2, 5, 8,$$

根据引理5.1。

令 $\Gamma^{(1)}$ 为图 6所示的轮廓，并将 $G^{(1)}$ 定义为 $k\in$S 上的

$$G^{(1)}=\begin{cases} v_{9_L}^{(1)}, & k \text{ on the } - \text{ side of } \Gamma_{9_r}^{(1)},\\ (v_{9_R}^{(1)})^{-1}, & k \text{ on the } + \text{ side of } \Gamma_{9_r}^{(1)},\\ v_3^{(1)}, & k \text{ on the } - \text{ side of } \Gamma_2^{(1)},\\ (v_1^{(1)})^{-1}, & k \text{ on the } + \text{ side of } \Gamma_2^{(1)}, \end{cases} \quad G^{(1)}=\begin{cases} v_4^{(1)}, & k \text{ on the } - \text{ side of } \Gamma_5^{(1)},\\ (v_6^{(1)})^{-1}, & k \text{ on the } + \text{ side of } \Gamma_5^{(1)},\\ v_7^{(1)}, & k \text{ on the } - \text{ side of } \Gamma_8^{(1)},\\ (v_9^{(1)})^{-1}, & k \text{ on the } + \text{ side of } \Gamma_8^{(1)},\\ I, & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.6}$$

现在我们利用 $\mathcal{A}$-和 $\mathcal{B}$-对称性，将 $G^{(1)}$ 的定义扩展到整个复平面：

$$G^{(1)}(x,t,k)=\mathcal{A}G^{(1)}(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{B}G^{(1)}(x,t,k^{-1})\mathcal{B},\qquad k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(1)}. \tag{5.7}$$

定义分段亚纯函数 $n^{(1)}$ 如下

$$n^{(1)}(x,t,k)=n(x,t,k)G^{(1)}(x,t,k),\qquad k\in\mathbb{C}\setminus(\Gamma^{(1)}\cup\hat{\mathsf{Z}}). \tag{5.8}$$

函数 $G^{(1)}$ 和 $n^{(1)}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(1)}$ 上解析。事实上，以透镜区域内 $\Gamma_8^{(1)}$ 的 $-$ 一侧区域为例；在该区域中，$G^{(1)}=v_7^{(1)}$ 由 r_1,5,$a(k)$、r_2,5,$a(\frac{1}{\omega k})$ 和 r_2,4,$a(\omega^2 k)$ 表示。根据引理 5.1 以及 U_1^5、U_2^5 和 U_2^4 的定义可知，这些函数在该区域内均为解析函数。

以下引理是图 3 的直接推论。在该引理中，圆盘 $D_\epsilon(\omega^j)$ 被排除在外；这是因为 $v_7^{(1)},v_8^{(1)},v_9^{(1)}$ (因此 $n^{(1)}(x,t,k)$ 也同样如此) 在 $k=\omega$ 处是奇异的，这是由于 $f(\omega)=f(1)=0$。

引理 5.2. 对于任意 $\epsilon>0$, $G^{(1)}(x,t,k)$ 和 $G^{(1)}(x,t,k)^{-1}$ 关于$k\in\mathbb{C}\setminus(\Gamma^{(1)}\cup\cup_{j=0}^{2}D_\epsilon(\omega^j))$、$t\geq 1$和 $\zeta\in\mathcal{I}$均一致有界。此外，对所有充分大的 $|k|$, $G^{(1)}(x,t,k)=I$。

令 $\Gamma_\star^{(1)}$为 $\Gamma^{(1)}$的自交点集。跳跃矩阵 $v^{(1)}$ 对于 $n^{(1)}$在 $\Gamma^{(1)}\setminus\Gamma_\star^{(1)}$上的定义如下：对于 $j=9_L,\ 9_r,\ 9_R,\ 1,\ \ldots,\ 9$，矩阵 $v_j^{(1)}$ 由 (5.2) – (5.5) 给出；对于 $j=1'',\ 1_r'',\ 4_r',\ 4'$ 则由下式给出

$$v_{1''}^{(1)}=v_{1''},\quad v_{1_r''}^{(1)}=(v_{9_L}^{(1)})^{-1}v_{1''}v_3^{(1)},\quad v_{4_r'}^{(1)}=v_{9_R}^{(1)}v_{4'}(v_1^{(1)})^{-1},\quad v_{4'}^{(1)}=v_{4'}; \tag{5.9}$$

对于 $j=1_s$，其表达式为

$$\begin{aligned} v_{1_s}^{(1)}&=G_-^{(1)}(k)^{-1}G_+^{(1)}(k)=v_7^{(1)}(k)^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}v_9^{(1)}(\tfrac{1}{\omega k})^{-1}\mathcal{B}\mathcal{A}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix} 1 & -(b_{12,a}(k)+b_{32,a}(\frac{1}{\omega k}))e^{-t\Phi_{21}} & (v_{1_s}^{(1)})_{13}\\ 0 & 1 & -(b_{21,a}(\frac{1}{\omega k})+b_{23,a}(k))e^{-t\Phi_{32}}\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

$(v_{1_s}^{(1)})_{13}:=\big(b_{12,a}(k)(b_{21,a}(\frac{1}{\omega k})+b_{23,a}(k))+b_{21,a}(\frac{1}{\omega k})b_{32,a}(\frac{1}{\omega k})-b_{13,a}(k)-b_{31,a}(\frac{1}{\omega k})\big)e^{-t\Phi_{31}}$，对于 $j=2_s$、3_s、4_s，类似的表达式同样成立。利用 (4.4) 中的对称性，我们将 $v^{(1)}$ 扩展到整个 $\Gamma^{(1)}\setminus\Gamma_\star^{(1)}$。

由于 $n^{(1)}=n$ 在 $\hat{\mathsf{Z}}$ 的所有点附近，留数条件 (3.5)–(3.6) 不受变换的影响 $n\to n^{(1)}$。因此，函数 $n^{(1)}$ 满足以下关于 $j=1$的 RH 问题。

RH 问题 5.3 （关于 $n^{(j)}$ 的 RH 问题）。求 $n^{(j)}(x,t,k)$，使其满足以下性质：(a) $n^{(j)}(x,t,\cdot):\mathbb{C}\setminus(\Gamma^{(j)}\cup\hat{\mathsf{Z}})\to\mathbb{C}^{1\times 3}$ 是解析的。

(*b*) 在 $\Gamma^{(j)} \setminus \Gamma_\star^{(j)}$ 上，$n^{(j)}$ 的边界值存在且连续，并满足 $n_+^{(j)} = n^{(j)} v^{(j)}$。(*c*) $n^{(j)}(x,t,k) = O(1)$，当 $k \to k_\star \in \Gamma_\star^{(j)} \setminus \{1, \omega, \omega^2\}$ 时。(*d*) $n^{(j)}$ 满足对称性 $n^{(j)}(x,t,k) = n^{(j)}(x,t,\omega k)$ $\mathcal{A}^{-1} = n^{(j)}(x,t,k^{-1})$，对于 $k \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^{(j)}$。(*e*) $n^{(j)}(x,t,k) = (1,1,1) + O(k^{-1})$，当 $k \to \infty$ 时。(*f*) 在 $\hat{Z}$ 的每个点，$n^{(j)}$ 的一个分量至多有一个简单极点，而另外两个分量均为解析的。此外，$n^{(j)}$ 满足留数条件 *(3.5)–(3.6)*，其中以 $n^{(j)}$ 替换 n。

注意，通常 $n^{(1)}$ 在点 1，ω，ω^2 处是奇异的。$n^{(1)}$ 在这些奇异性附近的行为如下：当 $k \to \omega$ 从 $\Gamma_8^{(1)}$ 的右侧趋近（即 $k \in D_4$ 和 $|k| > 1$）时，

$$n^{(1)}(x,t,k) = \begin{pmatrix} O(1) & O(1) & O(1) \end{pmatrix} v_7^{(1)} = \begin{pmatrix} O(1) & O(1) & O(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & O(b_{12,a}) & O(\frac{1}{f(\omega^2 k)}) \\ 0 & 1 & O(\frac{k-\omega}{f(\omega^2 k)}) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

而当 $k \to \omega$ 从 $\Gamma_8^{(1)}$ 的左侧趋近（即 $k \in D_1$ 和 $|k| < 1$）时，

$$\begin{aligned} n^{(1)}(x,t,k) &= \begin{pmatrix} O(1) & O(1) & O(1) \end{pmatrix} (v_9^{(1)})^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} O(1) & O(1) & O(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ O(\frac{k-\omega}{f(k)}) & 1 & 0 \\ O(b_{21,a} b_{32,a} - b_{31,a}) & O(b_{32,a}) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由 [4, 引理 2。13] 可知，$f(\pm 1) = f(\pm\omega) = 0$。由于 $f \geq 0$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上，这些零点必定至少是二重零点。我们可以尝试通过进一步详细指定点 1，ω，ω^2 处的极点结构，使这个奇异 RH 问题的解唯一；但由于下文的全局参数子会消除点 1，ω，ω^2 处的奇异性，因此无须这样做。

6. The $n^{(1)} \to n^{(2)}$ transformation

跳跃矩阵 $v^{(1)}$ 在 $\Gamma^{(1)} \cap \mathfrak{S}$ 上具有以下因式分解（下标 u和 d 表示将对相应矩阵进行向上或向下变形）：

$$\begin{aligned} &v_1^{(1)} = v_1^{(2)} v_{1u}, && v_3^{(1)} = v_{3d} v_3^{(2)}, && v_4^{(1)} = v_{4u} v_4^{(2)} = v_{7u} v_7^{(2)}, \\ &v_6^{(1)} = v_6^{(2)} v_{6d} = v_8^{(2)} v_{8d}, && v_7^{(1)} = v_{9u} v_9^{(2)}, && v_9^{(1)} = v_{11}^{(2)} v_{11d}, \end{aligned}$$

其中

$$v_1^{(2)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r_{2,a}(\frac{1}{\omega^2 k}) e^{\theta_{31}} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_{1u} := \begin{pmatrix} 1 & \hat{r}_{1,a} e^{-\theta_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & (-r_{1,a}(\frac{1}{\omega k}) - \hat{r}_{1,a}(k) r_{2,a}(\frac{1}{\omega^2 k})) e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_3^{(2)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & r_{1,a}(\frac{1}{\omega^2 k}) e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad v_{3d} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \hat{r}_{2,a} e^{\theta_{21}} & 1 & (-r_{2,a}(\frac{1}{\omega k}) - r_{1,a}(\frac{1}{\omega^2 k}) \hat{r}_{2,a}(k)) e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$v_4^{(2)} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13,a} e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v_{4u} := \begin{pmatrix} 1 & a_{12,a} e^{-\theta_{21}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{32,a} e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix},$$

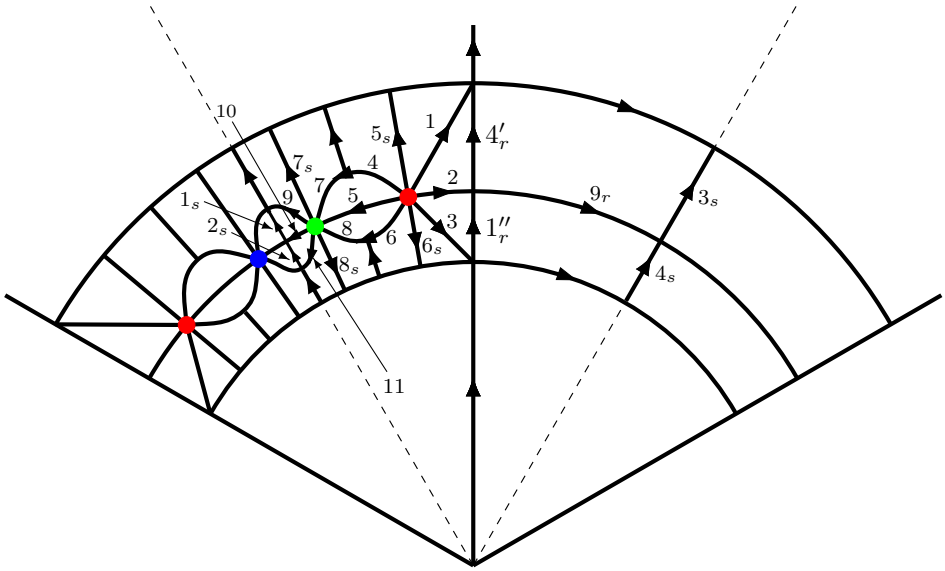


图 7. 轮廓 $\Gamma^{(2)}$ （实线）和S 的边界（虚线）。从右到左，这些点依次为 ωk_4 （红色）、 $\omega^2 k_2$ （绿色）、 k_1 （蓝色）和 ωk_3 （红色）。

$$
\begin{aligned}
v_6^{(2)} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{31,a}e^{\theta_{31}} & 0 & 1 \end{pmatrix}, & v_{6d} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21,a}e^{\theta_{21}} & 1 & a_{23,a}e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
v_7^{(2)} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_{32,a}e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix}, & v_{7u} &:= \begin{pmatrix} 1 & (a_{12,a}-a_{13,a}a_{32,a})e^{-\theta_{21}} & a_{13,a}e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
v_8^{(2)} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_{23,a}e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & v_{8d} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (a_{21,a}-a_{23,a}a_{31,a})e^{\theta_{21}} & 1 & 0 \\ a_{31,a}e^{\theta_{31}} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
v_9^{(2)} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_{23,a}e^{-\theta_{32}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & v_{9u} &:= \begin{pmatrix} 1 & b_{12,a}e^{-\theta_{21}} & (b_{13,a}-b_{12,a}b_{23,a})e^{-\theta_{31}} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
v_{11}^{(2)} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & b_{32,a}e^{\theta_{32}} & 1 \end{pmatrix}, & v_{11d} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{21,a}e^{\theta_{21}} & 1 & 0 \\ (b_{31,a}-b_{21,a}b_{32,a})e^{\theta_{31}} & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{6.1}
$$

令 $\Gamma^{(2)}$ 为图 7所示的轮廓，并令 $\Gamma_j^{(2)}$ 为 $\Gamma^{(2)}$ 中标记为 j 的子轮廓（见图 7）。我们强调， $\Gamma_{10}^{(2)} := \{e^{i\theta} \,|\, \theta \in (\arg(\omega^2 k_2) \ \frac{2\pi}{3})\}$ 终止于 ω。定义分段亚纯函数 $n^{(2)}$ 如下:

$$
n^{(2)}(x,t,k) = n^{(1)}(x,t,k) G^{(2)}(x,t,k), \qquad k \in \mathbb{C} \setminus (\Gamma^{(2)} \cup \hat{\mathsf{Z}}), \tag{6.2}
$$

其中， $G^{(2)}$ 由下式定义于 $k \in$S:

$$G^{(2)}(x,t,k)=\begin{cases} v_{1u}^{-1}, & k \text{ above } \Gamma_1^{(2)},\\ v_{3d}, & k \text{ below } \Gamma_3^{(2)},\\ v_{4u}, & k \text{ above } \Gamma_4^{(2)},\\ v_{6d}^{-1}, & k \text{ below } \Gamma_6^{(2)}, \end{cases} \qquad G^{(2)}(x,t,k)=\begin{cases} v_{7u}, & k \text{ above } \Gamma_7^{(2)},\\ v_{8d}^{-1}, & k \text{ below } \Gamma_8^{(2)},\\ v_{9u}, & k \text{ above } \Gamma_9^{(2)},\\ v_{11d}^{-1}, & k \text{ below } \Gamma_{11}^{(2)},\\ I, & \text{otherwise}, \end{cases} \tag{6.3}$$

并且 $G^{(2)}$ 利用 $\mathbb{C}\setminus\Gamma^{(2)}$-和 $\mathcal{A}$-对称性（如（5.7）中所示），将其延拓到 $\mathcal{B}$的全部范围。利用引理5.1 和图 3，我们推断出以下结论。

引理6.1。对于任意 $\epsilon>0$、 $G^{(2)}$（x、t、k）以及 $G^{(2)}$（x、t、k）$^{-1}$，当 $k\in\mathbb{C}\setminus$（$\Gamma^{(2)}\cup\cup_{j=0}^{2}D_\epsilon(\omega^j)$）时一致有界，其中 $t>0$，且 $\zeta\in\mathcal{I}$。此外，当 $|k|$充分大时， $G^{(2)}$（x、t、k）$=I$。

跳跃 $v_j^{(2)}$ 的 $n^{(2)}$ 对于 $j=1$，.....，11 由（6.1）给出，并且

$$v_2^{(2)}:=v_2^{(1)},\quad v_5^{(2)}:=v_5^{(1)},\quad v_{10}^{(2)}:=v_8^{(1)}. \tag{6.4}$$

其余跳跃在 $\Gamma^{(2)}\cap$S 上均为小量，当 $t\to\infty$时。事实上，这可由图3 中的符号表以及以下观察得出。在 $\Gamma_{9_r}^{(2)}$ 上， $v^{(2)}-I$ 很小，因为其中包含小的余项。在 $\Gamma_{4_r'}^{(2)}$ 和 $\Gamma_{1_r''}^{(2)}$ 上，$v^{(2)}-I$ 很小，这是以下引理的推论；该引理的证明与 [4,引理85]的证明相同。

引理6.2。 $v^{(2)}-I$在 $\Gamma_{4_r'}^{(2)}\cup\Gamma_{1_r''}^{(2)}$ 上的 L^∞范数为 $O(t^{-N-1})$，当 $t\to\infty$ 时关于$\zeta\in\mathcal{I}$一致成立。

最后，我们考虑跳跃 $v_j^{(2)}=v_j^{(1)}$、 $j=1_s$、.....、 4_s 以及

$$v_{5_s}^{(2)}=v_{1u}v_{4u},\quad v_{6_s}^{(2)}=v_{6d}v_{3d},\quad v_{7_s}^{(2)}=v_{7u}^{-1}v_{9u},\quad v_{8_s}^{(2)}=v_{11d}v_{8d}^{-1}.$$

若初始数据 u_0， v_0 具有紧支集，使得所有谱函数都可作解析延拓，并且我们可以选取 $b_{ij,a}=b_{ij}$，那么经过直接计算可知，这些跳跃不存在（即 $v_j^{(2)}=I$， $j=1_s$，.....，8_s），这是关系式（4.6）以及 $f(k)$ 的定义（2.10）的结果。一般而言，构造能够保持非线性关系（4.6）的解析逼近似乎很困难。因此，跳跃矩阵$v_j^{(2)}$， $j=1_s$，.....， 8_s通常并非平凡。不过，正如下一个引理所示，选取解析逼近使得当 t较大时，这些跳跃一致地很小并不困难。

引理 6.3。可以选取解析逼近，使得 L^∞-范数在 $\Gamma_j^{(2)}$、 $j=1_s$、.....、 8_s上的$v_j^{(2)}-I$为 $O(t^{-N})$，当 $t\to\infty$ 时，对于 $\zeta\in\mathcal{I}$一致成立。

证明。我们来考虑 $v_{1_s}^{(2)}$；其他跳跃条件的处理方法类似。由（5.10）可知$v_{1_s}^{(2)}=v_{1_s}^{(1)}$ 的对角线上元素均为 1，且每个非对角元素都带有形如 $e^{-t|\mathrm{Re}\,\Phi_{ij}|}$的指数衰减因子，其中 $|\mathrm{Re}\,\Phi_{ij}(\zeta,\ k)|\geq c|k-\omega|$ 在 $\Gamma_{1_s}^{(2)}$ 上。于是，由引理 5.1， $v_{1_s}^{(2)}-I$ 在 $\Gamma_{1_s}^{(2)}$ 上处处都很小，$t\to\infty$ 但在 ω附近可能例外。另一方面，我们知道，如果所有谱函数都存在解析延拓，那么矩阵 $v_{1_s}^{(2)}-I$ 在 $\Gamma_{1_s}^{(2)}$ 上恒等于零，这归因于（4.6）。这意味着，如果我们选择所有解析逼近，使其与所逼近的函数在每个六次单位根处都达到足够高阶的一致

κ_j （下文（6.5）的意义下），那么我们就能确保

$$\|v_{1_s}^{(2)} - I\|_{L^\infty(\Gamma_{1_s}^{(2)})} \le C \sup_{k\in\Gamma_{1_s}^{(2)}} |k-\omega|^N e^{-\frac{c}{2}t|k-\omega|} \le Ct^{-N},$$

对 $\zeta \in \mathcal{I}$ 一致成立，引理得证。

为构造上述类型的解析逼近，我们按如下步骤进行。为明确起见，考虑 b_{13}。在 $\mathcal{U}:=\{k \,|\, \arg k \in (\arg(\omega^2 k_2) \frac{2\pi}{3}) \ \ 1<|k|<M\}$ 这一位于 $\Gamma_8^{(1)} = \Gamma_{10}^{(2)}$ 右侧的区域内，需要对 b_{13} 作解析逼近 $b_{13,a}$。由于 $f(1)\overline{\ }=0$ 且 $r_2(1) = -1$，b_{13} 在 ω 处有一个奇点。因此，我们首先选取 $m \ge 1$，使得 $B(k) := (k-\omega)^m b_{13}(k)$ 在 ω 处正则。应用 [9], 的方法，我们构造一个分解 $B = B_a + B_r$，使得

$$\left| B_a(x,t,k) - \sum_{j=0}^{N_1} \frac{B^{(j)}(\omega)}{j!}(k-\omega)^j \right| \le C|k-\omega|^{N_1} e^{\frac{t}{8}|\mathrm{Re}\,\Phi_{31}(\zeta,k)|}, \qquad k\in\mathcal{U},\ \zeta\in\mathcal{I}.$$

这尤其意味着 B_r 在 $k=\omega$ 处至少有一个 N_1 阶零点。接着，我们定义$b_{13,a} := (k-\omega)^{-m} B_a$ 和 $b_{13,r} := (k-\omega)^{-m} B_r$。通过将 N_1 取得足够大，可以确保当 t 足够大时，$b_{13,r}$ 的 L^∞-范数一致地足够小，并且

$$\left| b_{13,a}(x,t,k) - \sum_{j=-m}^{N} b_j (k-\omega)^j \right| \le C|k-\omega|^N e^{\frac{t}{8}|\mathrm{Re}\,\Phi_{31}(\zeta,k)|}, \qquad k\in\mathcal{U},\ \zeta\in\mathcal{I}, \tag{6.5}$$

其中 $\sum_{j=-m}^{N} b_j(k-\omega)^j$ 表示 b_{13} 在 ω处的 N 阶展开，即满足当 $k\to\omega$ 时，$b_{13}(k) - \sum_{j=-m}^{N} b_j(k-\omega)^j = O((k-\omega)^{N+1})$ 的展开。这意味着，$b_{13,\ a}$在 ω处以 N 阶精度逼近 b_{13}。类似地，我们构造解析逼近，使其在定义域内的每个 κ_j 处都与所逼近的函数相差 N 阶。□

利用对称性（4.4），可以得到 $\Gamma^{(2)} \setminus \mathsf{S}$ 上的跳跃。

函数 $n^{(2)}$ 满足带有 5.3 的 RH 问题 $j=2$。下一步变换 $n^{(2)} \to n^{(3)}$ 将使 $v^{(3)} - I$ 在新的轮廓 $\Gamma^{(3)}$上处处很小，但以鞍点 $\{k_j, \omega k_j, \omega^2 k_j\}_{j=1}^4$为中心的十二个小十字形区域除外。它还将改变留数条件（3.5）–（3.6）。为了定义这一变换，我们首先需要构造一个全局参数子。

7. Global parametrix

对每个 $\zeta\in\mathcal{I}$，定义解析函数

$$\delta_1(\zeta,\cdot) : \mathbb{C}\setminus\Gamma_2^{(2)} \to \mathbb{C}, \quad \delta_2(\zeta,\cdot), \delta_3(\zeta,\cdot) : \mathbb{C}\setminus\Gamma_5^{(2)} \to \mathbb{C}, \quad \delta_4(\zeta,\cdot), \delta_5(\zeta,\cdot) : \mathbb{C}\setminus\Gamma_{10}^{(2)} \to \mathbb{C}$$

由（2.9）。函数 $\{\delta_j\}_1^5$ 满足跳跃关系

$$\begin{aligned}
\delta_{1,+}(\zeta,k) &= \delta_{1,-}(\zeta,k)(1+r_1(k)r_2(k)), && k\in\Gamma_2^{(2)},\\
\delta_{2,+}(\zeta,k) &= \delta_{2,-}(\zeta,k)(1+r_1(k)r_2(k)), && k\in\Gamma_5^{(2)},\\
\delta_{3,+}(\zeta,k) &= \delta_{3,-}(\zeta,k)f(k), && k\in\Gamma_5^{(2)},\\
\delta_{4,+}(\zeta,k) &= \delta_{4,-}(\zeta,k)f(k), && k\in\Gamma_{10}^{(2)},\\
\delta_{5,+}(\zeta,k) &= \delta_{5,-}(\zeta,k)f(\omega^2 k), && k\in\Gamma_{10}^{(2)},
\end{aligned}$$

其中，围道 $\Gamma_2^{(2)}$ ， $\Gamma_5^{(2)}$ 和 $\Gamma_{10}^{(2)}$ 的取向如图 7所示，且

$$\delta_j(\zeta,k)=1+O(k^{-1}),\qquad k\to\infty,\ j=1,\dots,5. \tag{7.1}$$

函数 δ_j 的更多性质汇总于以下引理中。

引理 7.1。 函数 $\delta_j(\zeta,k)$、 $j=1$、.....、5具有以下性质：(a) 函数 $\{\delta_j(\zeta,k)\}_{j=1}^5$ 可写为

$$\begin{aligned}
\delta_1(\zeta,k)&=\exp\Big(-i\nu_1\ln_{\omega k_4}(k-\omega k_4)-\chi_1(\zeta,k)\Big),\\
\delta_2(\zeta,k)&=\exp\Big(-i\nu_1\ln_{\omega k_4}(k-\omega k_4)+i\nu_2\ln_{\omega^2 k_2}(k-\omega^2 k_2)-\chi_2(\zeta,k)\Big),\\
\delta_3(\zeta,k)&=\exp\Big(-i\nu_3\ln_{\omega k_4}(k-\omega k_4)+i\nu_4\ln_{\omega^2 k_2}(k-\omega^2 k_2)-\chi_3(\zeta,k)\Big),\\
\delta_4(\zeta,k)&=\exp\Big(-i\nu_4\ln_{\omega^2 k_2}(k-\omega^2 k_2)-\chi_4(\zeta,k)\Big),\\
\delta_5(\zeta,k)&=\exp\Big(-i\nu_5\ln_{\omega^2 k_2}(k-\omega^2 k_2)-\chi_5(\zeta,k)\Big),
\end{aligned}$$

其中，对于 $s\in\{e^{i\theta}:\ \theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]\}$, $k\mapsto\ln_s(k-s)$: $=\ln|k-s|+i\arg_s(k-s)$ 在 $\{e^{i\theta}:\ \theta\in[\frac{\pi}{2},\arg s]\}\cup(i,i\infty)$上有一条割线，并且满足 $\arg_s(1)=2\pi$。ν_j 定义为

$$\nu_1=-\frac{1}{2\pi}\ln(1+r_1(\omega k_4)r_2(\omega k_4)),\qquad \nu_2=-\frac{1}{2\pi}\ln(1+r_1(\omega^2 k_2)r_2(\omega^2 k_2)),$$
$$\nu_3=-\frac{1}{2\pi}\ln(f(\omega k_4)),\qquad \nu_4=-\frac{1}{2\pi}\ln(f(\omega^2 k_2)),\qquad \nu_5=-\frac{1}{2\pi}\ln(f(\omega k_2)),$$

函数 χ_j 定义为

$$\begin{aligned}
\chi_1(\zeta,k)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^{(2)}}\ln_s(k-s)d\ln(1+r_1(s)r_2(s)),\\
\chi_2(\zeta,k)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_5^{(2)}}\ln_s(k-s)d\ln(1+r_1(s)r_2(s)),\\
\chi_3(\zeta,k)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_5^{(2)}}\ln_s(k-s)d\ln(f(s)),\\
\chi_4(\zeta,k)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\omega^2 k_2}^{\omega}\ln_s(k-s)d\ln(f(s))\\
&:=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0_+}\left(\int_{\omega^2 k_2}^{e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}}\ln_s(k-s)d\ln(f(s))-\ln_\omega(k-\omega)\ln(f(e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}))\right),\\
\chi_5(\zeta,k)&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\omega^2 k_2}^{\omega}\ln_s(k-s)d\ln(f(\omega^2 s))\\
&:=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0_+}\left(\int_{\omega^2 k_2}^{e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}}\ln_s(k-s)d\ln(f(\omega^2 s))-\ln_\omega(k-\omega)\ln(f(e^{-i\epsilon}))\right),
\end{aligned}$$

以 $\omega^2 k_2$ 为起点的积分路径是 $\partial\mathbb{D}$ 的子集，方向为逆时针。

(b) </style}函数 $(\zeta,k)\}_{j=1}^5$ 可写为

$$\begin{aligned}
\delta_1(\zeta,k)&=\exp\big(-i\nu_1\tilde{\ln}_{\omega k_4}(k-\omega k_4)-\tilde{\chi}_1(\zeta,k)\big),\\
\delta_2(\zeta,k)&=\exp\big(-i\nu_1\tilde{\ln}_{\omega k_4}(k-\omega k_4)+i\nu_2\tilde{\ln}_{\omega^2 k_2}(k-\omega^2 k_2)-\tilde{\chi}_2(\zeta,k)\big),\\
\delta_3(\zeta,k)&=\exp\big(-i\nu_3\tilde{\ln}_{\omega k_4}(k-\omega k_4)+i\nu_4\tilde{\ln}_{\omega^2 k_2}(k-\omega^2 k_2)-\tilde{\chi}_3(\zeta,k)\big),
\end{aligned}$$

$$\delta_4(\zeta,k)=\exp\big(-i\nu_4\tilde{\ln}_{\omega^2k_2}(k-\omega^2k_2)-\tilde{\chi}_4(\zeta,k)\big),$$
$$\delta_5(\zeta,k)=\exp\big(-i\nu_5\tilde{\ln}_{\omega^2k_2}(k-\omega^2k_2)-\tilde{\chi}_5(\zeta,k)\big),$$

其中，对于 $s\in\{e^{i\theta}:\ \theta\in[\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}]\}$，$k\mapsto \tilde{\ln}_s(k-s):=\ln|k-s|+i\,\tilde{\arg}_s(k-s)$ 沿 $\{e^{i\theta}$ 有一条割线：$\theta\in[\arg s,\pi]\}\cup(-\infty,0)$ 满足 $\tilde{\arg}_s(1)=0$，并且 $\tilde{\chi}_j(\zeta,k)$ 的定义方式与 $\tilde{\chi}_j(\zeta,k)$ 相同，只是将 $\ln_s$ 替换为 $\ln_s$，将 $\ln_\omega$ 替换为 $\ln_\omega$。

(c) 对于每个 $\zeta\in\mathcal{I}$ 和 $j\in\{1,\dots,5\}$，$\delta_j(\zeta,k)$ 以及 $\delta_j(\zeta,k)^{-1}$ 在各自的定义域内都是 k 的解析函数。此外，对于任意 $\epsilon>0$，

$$\sup_{\zeta\in\mathcal{I}}\sup_{k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma_2^{(2)}}|\delta_1(\zeta,k)^{\pm1}|<\infty,\quad \sup_{\zeta\in\mathcal{I}}\sup_{k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma_5^{(2)}}|\delta_2(\zeta,k)^{\pm1}|<\infty,\quad \sup_{\zeta\in\mathcal{I}}\sup_{k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma_5^{(2)}}|\delta_3(\zeta,k)^{\pm1}|<\infty,$$
$$\sup_{\zeta\in\mathcal{I}}\sup_{\substack{k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma_{10}^{(2)}\\ |k-\omega|>\epsilon}}|\delta_4(\zeta,k)^{\pm1}|<\infty,\quad \sup_{\zeta\in\mathcal{I}}\sup_{\substack{k\in\mathbb{C}\setminus\Gamma_{10}^{(2)}\\ |k-\omega|>\epsilon}}|\delta_5(\zeta,k)^{\pm1}|<\infty. \tag{7.2}$$

(d) 当 $k\to\omega k_4$ 沿着一条与 $\partial\mathbb{D}$ 非切向的路径趋近时，我们有

$$|\chi_j(\zeta,k)-\chi_j(\zeta,\omega k_4)|\le C|k-\omega k_4|(1+|\ln|k-\omega k_4||),\qquad j=1,\ 2, \tag{7.3}$$

当 $k\to\omega^2k_2$ 沿着一条与 $\partial\mathbb{D}$ 非切向的路径趋近时，我们有

$$|\chi_j(\zeta,k)-\chi_j(\zeta,\omega^2k_2)|\le C|k-\omega^2k_2|(1+|\ln|k-\omega^2k_2||),\qquad j=2,3,4,5, \tag{7.4}$$

其中 C 与 $\zeta\in\mathcal{I}$ 无关。

证明。所有断言均由函数 δ_j 的定义（2.9）推出。 □

我们还需要以下结果。

引理 7.2。对于所有 $\zeta\in(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$，以下不等式成立：

$$\hat{\nu}_1:=\nu_3-\nu_1\ge0,\qquad\qquad \hat{\nu}_2:=\nu_2+\nu_5-\nu_4\ge0.$$

证明。对于 $\zeta\in(\frac{1}{\sqrt{3}},1)$，有 $\frac{\pi}{6}<\arg k_4<0$ 和 $-\frac{3\pi}{4}<\arg k_2<-\frac{2\pi}{3}$。因此，根据 [4,引理 2。13]，结论成立。 □

ˆ 在下文中，为了简洁起见，我们常将 $\delta_j(k)$ 写作 $\delta_j(\zeta,k)$。对于 $k\in\mathbb{C}\setminus(\partial\mathbb{D}\cup\mathbb{Z})$，我们定义

$$\Delta_{33}(\zeta,k)=\frac{\delta_1(\omega k)\delta_1(\frac{1}{\omega^2k})}{\delta_1(\omega^2k)\delta_1(\frac{1}{\omega k})}\frac{\delta_2(k)\delta_2(\frac{1}{k})}{\delta_2(\omega k)\delta_2(\frac{1}{\omega^2k})}\frac{\delta_3(\omega^2k)\delta_3(\frac{1}{\omega k})}{\delta_3(k)\delta_3(\frac{1}{k})}\frac{\delta_4(\omega^2k)\delta_4(\frac{1}{\omega k})}{\delta_4(\omega k)\delta_4(\frac{1}{\omega^2k})}\frac{\delta_5(\omega k)\delta_5(\frac{1}{\omega^2k})}{\delta_5(k)\delta_5(\frac{1}{k})}\mathcal{P}(k),$$

其中 $\mathcal{P}$ 由（2.11）给出。函数 Δ_{33} 满足 $\Delta_{33}(\zeta,\frac{1}{k})=\Delta_{33}(\zeta,k)^{-1}$，且

$$\Delta_{33,+}(\zeta,k)=\Delta_{33,-}(\zeta,k),\qquad k\in\Gamma_2^{(2)}, \tag{7.5a}$$
$$\Delta_{33,+}(\zeta,k)=\Delta_{33,-}(\zeta,k)\frac{1+r_1(k)r_2(k)}{f(k)},\qquad k\in\Gamma_5^{(2)}, \tag{7.5b}$$
$$\Delta_{33,+}(\zeta,k)=\Delta_{33,-}(\zeta,k)\frac{1}{f(\omega^2k)},\qquad k\in\Gamma_{10}^{(2)}. \tag{7.5c}$$

定义 $\Delta_{11}(\zeta,k)=\Delta_{33}(\zeta,\omega k)$ 以及 $\Delta_{22}(\zeta,k)=\Delta_{33}(\zeta,\omega^2k)$，并定义

$$\Delta(\zeta,k)=\begin{pmatrix}\Delta_{11}(\zeta,k)&0&0\\0&\Delta_{22}(\zeta,k)&0\\0&0&\Delta_{33}(\zeta,k)\end{pmatrix},\quad \zeta\in\mathcal{I},\ k\in\mathbb{C}\setminus(\partial\mathbb{D}\cup\hat{\mathbb{Z}}). \tag{7.6}$$

那么 Δ 满足对称性

$$\Delta(\zeta,k)=\mathcal{A}\Delta(\zeta,\omega k)\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{B}\Delta(\zeta,\tfrac{1}{k})\mathcal{B},$$

并满足跳跃关系

$$\Delta_{11,+}(\zeta,k)=\Delta_{11,-}(\zeta,k)\frac{1}{1+r_1(k)r_2(k)},\qquad k\in\Gamma_2^{(2)},\tag{7.7a}$$

$$\Delta_{11,+}(\zeta,k)=\Delta_{11,-}(\zeta,k)f(k),\qquad k\in\Gamma_5^{(2)},\tag{7.7b}$$

$$\Delta_{11,+}(\zeta,k)=\Delta_{11,-}(\zeta,k)f(k),\qquad k\in\Gamma_{10}^{(2)},\tag{7.7c}$$

and

$$\Delta_{22,+}(\zeta,k)=\Delta_{22,-}(\zeta,k)(1+r_1(k)r_2(k)),\qquad k\in\Gamma_2^{(2)},\tag{7.8a}$$

$$\Delta_{22,+}(\zeta,k)=\Delta_{22,-}(\zeta,k)\frac{1}{1+r_1(k)r_2(k)},\qquad k\in\Gamma_5^{(2)},\tag{7.8b}$$

$$\Delta_{22,+}(\zeta,k)=\Delta_{22,-}(\zeta,k)\frac{f(\omega^2k)}{f(k)},\qquad k\in\Gamma_{10}^{(2)}.\tag{7.8c}$$

以下引理是由（7.6）和引理 7.1直接得出的。

引理 7.3。 对于任意 $\epsilon>0$, $\Delta(\zeta,k)$ 以及 $\Delta(\zeta,k)^{-1}$，当 $k\in\mathbb{C}\setminus(\cup_{j=0}^{2}D_\epsilon(\omega^j)\cup\partial\mathbb{D}\cup\cup_{k_0\in\hat{}\mathrm{Z}D_\epsilon(k_0))}$ 且 $\zeta\in\mathcal{I}$ 时，它们一致有界。此外，当 $k\to\infty$ 时， $\Delta(\zeta,k)=I+O(k^{-1})$ 趋于 $k\to\infty$。

8. The $n^{(2)}\to n^{(3)}$ transformation

定义分段亚纯函数 $n^{(3)}$ 如下:

$$n^{(3)}(x,t,k)=n^{(2)}(x,t,k)\Delta(\zeta,k),\qquad k\in\mathbb{C}\setminus(\Gamma^{(3)}\cup\hat{\mathrm{Z}}),\tag{8.1}$$

其中 $\Gamma^{(3)}=\Gamma^{(2)}$。 $n^{(3)}$ 在 $\Gamma^{(3)}$ 上的跳跃为 $v^{(3)}=\Delta_-^{-1}v^{(2)}\Delta_+$.

引理 8.1。 当 $t\to\infty$ 时，跳跃矩阵 $v^{(3)}$ 一致地趋于单位矩阵 I，其中 $\zeta\in\mathcal{I}$ 和 $k\in\Gamma^{(3)}$，但十二个鞍点 $\{k_j,\omega k_j,\omega^2k_j\}_{j=1}^4$ 附近除外，即对于$\zeta\in\mathcal{I}$,

$$\|v^{(3)}-I\|_{(L^1\cap L^\infty)(\Gamma'^{(3)})}\le Ct^{-1},\quad where\quad \Gamma'^{(3)}:=\Gamma^{(3)}\setminus\cup_{\substack{j=1,\dots,4\\ l=0,1,2}}D_\epsilon(\omega^lk_j).\tag{8.2}$$

证明。 由 $v_j^{(1)}$ 、 $j=2$、5、8 在（5.3）–（5.5）中的表达式，结合（6.4）、（7.5）、（7.7）、（7.8），可推出

$$v_j^{(3)}=\Delta_-^{-1}v_j^{(1)}\Delta_+=I+\Delta_-^{-1}v_{j,r}^{(1)}\Delta_+,\quad j=2,5;\quad v_{10}^{(3)}=\Delta_-^{-1}v_8^{(1)}\Delta_+=I+\Delta_-^{-1}v_{8,r}^{(1)}\Delta_+.\tag{8.3}$$

利用矩阵 $\Delta_-^{-1}v_j^{(1)}$、$_r\Delta_+$、 $j=2$、5、8 在 $t\to\infty$ 时均很小，并回顾对称性（4.4）以及引理 6.2 和 6.3，可推知 $v^{(3)}-I$ 当 $t\to\infty$ 时趋于 0，且关于 $k\in\Gamma'^{(3)}$ 一致。 □

ˆ 接下来，我们考察 Z 中各点处的留数条件。

引理 8.2 （ 的留数条件）。 函数 $n^{(3)}$ 在ˆZ 中各点处满足以下留数条件:

(a) 对每个 $k_0\in\mathrm{Z}\setminus\mathbb{R}$ 满足 $\operatorname{Re}k_0>0$,

$$\operatorname*{Res}_{k=k_0}n_1^{(3)}(k)=\frac{c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{31}(k_0)}n_3^{(3)}(k_0)}{\Delta_{33}'(k_0)(\Delta_{11}^{-1})'(k_0)},\qquad \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0}n_3^{(3)}(k)=\frac{\omega^2c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{31}(k_0)}n_2^{(3)}(\omega k_0)}{\Delta_{22}'(\omega k_0)(\Delta_{33}^{-1})'(\omega k_0)},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2k_0}n_2^{(3)}(k)=\frac{\omega c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{31}(k_0)}n_1^{(3)}(\omega^2k_0)}{\Delta_{11}'(\omega^2k_0)(\Delta_{22}^{-1})'(\omega^2k_0)},\qquad \operatorname*{Res}_{k=k_0^{-1}}n_2^{(3)}(k)=\frac{-k_0^2c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{31}(k_0)}n_3^{(3)}(k_0^{-1})}{\Delta_{33}'(k_0^{-1})(\Delta_{22}^{-1})'(k_0^{-1})},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2k_0^{-1}} n_3^{(3)}(k)=\frac{-\omega k_0^2c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{31}(k_0)}n_1^{(3)}(\omega^2k_0^{-1})}{\Delta_{11}'(\omega^2k_0^{-1})(\Delta_{33}^{-1})'(\omega^2k_0^{-1})},\quad \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0^{-1}} n_1^{(3)}(k)=\frac{-\omega^2k_0^2c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{31}(k_0)}n_2^{(3)}(\omega k_0^{-1})}{\Delta_{22}'(\omega k_0^{-1})(\Delta_{11}^{-1})'(\omega k_0^{-1})},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\bar{k}_0} n_3^{(3)}(k)=\frac{d_{k_0}^{-1}e^{-\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_2^{(3)}(\bar{k}_0)}{\Delta_{22}'(\bar{k}_0)(\Delta_{33}^{-1})'(\bar{k}_0)},\quad \operatorname*{Res}_{k=\omega\bar{k}_0} n_2^{(3)}(k)=\frac{\omega^2d_{k_0}^{-1}e^{-\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_1^{(3)}(\omega\bar{k}_0)}{\Delta_{11}'(\omega\bar{k}_0)(\Delta_{22}^{-1})'(\omega\bar{k}_0)},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2\bar{k}_0} n_1^{(3)}(k)=\frac{\omega d_{k_0}^{-1}e^{-\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_3^{(3)}(\omega^2\bar{k}_0)}{\Delta_{33}'(\omega^2\bar{k}_0)(\Delta_{11}^{-1})'(\omega^2\bar{k}_0)},\quad \operatorname*{Res}_{k=\bar{k}_0^{-1}} n_3^{(3)}(k)=\frac{-\bar{k}_0^2d_{k_0}^{-1}e^{-\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_1^{(3)}(\bar{k}_0^{-1})}{\Delta_{11}'(\bar{k}_0^{-1})(\Delta_{33}^{-1})'(\bar{k}_0^{-1})},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2\bar{k}_0^{-1}} n_1^{(3)}(k)=\frac{\omega\bar{k}_0^2d_{k_0}^{-1}e^{-\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_2^{(3)}(\omega^2\bar{k}_0^{-1})}{-\Delta_{22}'(\omega^2\bar{k}_0^{-1})(\Delta_{11}^{-1})'(\omega^2\bar{k}_0^{-1})},\ \operatorname*{Res}_{k=\omega\bar{k}_0^{-1}} n_2^{(3)}(k)=\frac{\omega^2\bar{k}_0^2d_{k_0}^{-1}e^{-\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_3^{(3)}(\omega\bar{k}_0^{-1})}{-\Delta_{33}'(\omega\bar{k}_0^{-1})(\Delta_{22}^{-1})'(\omega\bar{k}_0^{-1})};\tag{8.4}$$

(*b*) 对每个 $k_0\in\mathsf{Z}\cap\mathbb{R}$ 满足 $\operatorname{Re}k_0>0$,

$$\operatorname*{Res}_{k=k_0} n_1^{(3)}(k)=\frac{c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{21}(k_0)}n_2^{(3)}(k_0)}{\Delta_{22}'(k_0)(\Delta_{11}^{-1})'(k_0)},\quad \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0} n_3^{(3)}(k)=\frac{\omega^2c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{21}(k_0)}n_1^{(3)}(\omega k_0)}{\Delta_{11}'(\omega k_0)(\Delta_{33}^{-1})'(\omega k_0)},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2k_0} n_2^{(3)}(k)=\frac{\omega c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{21}(k_0)}n_3^{(3)}(\omega^2k_0)}{\Delta_{33}'(\omega^2k_0)(\Delta_{22}^{-1})'(\omega^2k_0)},\quad \operatorname*{Res}_{k=k_0^{-1}} n_2^{(3)}(k)=\frac{-k_0^2c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{21}(k_0)}n_1^{(3)}(k_0^{-1})}{\Delta_{11}'(k_0^{-1})(\Delta_{22}^{-1})'(k_0^{-1})},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2k_0^{-1}} n_3^{(3)}(k)=\frac{-\omega k_0^2c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{21}(k_0)}n_2^{(3)}(\omega^2k_0^{-1})}{\Delta_{22}'(\omega^2k_0^{-1})(\Delta_{33}^{-1})'(\omega^2k_0^{-1})},\ \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0^{-1}} n_1^{(3)}(k)=\frac{\omega^2k_0^2c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{21}(k_0)}n_3^{(3)}(\omega k_0^{-1})}{-\Delta_{33}'(\omega k_0^{-1})(\Delta_{11}^{-1})'(\omega k_0^{-1})};\tag{8.5}$$

（*c*）对每个 $k_0\in\mathsf{Z}\setminus\mathbb{R}$ 满足 $\operatorname{Re}k_0<0$,

$$\operatorname*{Res}_{k=k_0} n_3^{(3)}(k)=\frac{c_{k_0}e^{-\theta_{31}(k_0)}n_1^{(3)}(k_0)}{\Delta_{11}(k_0)\Delta_{33}^{-1}(k_0)},\quad \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0} n_2^{(3)}(k)=\frac{\omega c_{k_0}e^{-\theta_{31}(k_0)}n_3^{(3)}(\omega k_0)}{\Delta_{33}(\omega k_0)\Delta_{22}^{-1}(\omega k_0)},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2k_0} n_1^{(3)}(k)=\frac{\omega^2c_{k_0}e^{-\theta_{31}(k_0)}n_2^{(3)}(\omega^2k_0)}{\Delta_{22}(\omega^2k_0)\Delta_{11}^{-1}(\omega^2k_0)},\quad \operatorname*{Res}_{k=k_0^{-1}} n_3^{(3)}(k)=\frac{-k_0^{-2}c_{k_0}e^{-\theta_{31}(k_0)}n_2^{(3)}(k_0^{-1})}{\Delta_{22}(k_0^{-1})\Delta_{33}^{-1}(k_0^{-1})},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2k_0^{-1}} n_1^{(3)}(k)=\frac{-\frac{\omega^2}{k_0^2}c_{k_0}e^{-\theta_{31}(k_0)}n_3^{(3)}(\omega^2k_0^{-1})}{\Delta_{33}(\omega^2k_0^{-1})\Delta_{11}^{-1}(\omega^2k_0^{-1})},\ \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0^{-1}} n_2^{(3)}(k)=\frac{-\frac{\omega}{k_0^2}c_{k_0}e^{-\theta_{31}(k_0)}n_1^{(3)}(\omega k_0^{-1})}{\Delta_{11}(\omega k_0^{-1})\Delta_{22}^{-1}(\omega k_0^{-1})},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\bar{k}_0} n_2^{(3)}(k)=\frac{d_{k_0}e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_3^{(3)}(\bar{k}_0)}{\Delta_{33}(\bar{k}_0)\Delta_{22}^{-1}(\bar{k}_0)},\quad \operatorname*{Res}_{k=\omega\bar{k}_0} n_1^{(3)}(k)=\frac{\omega d_{k_0}e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_2^{(3)}(\omega\bar{k}_0)}{\Delta_{22}(\omega\bar{k}_0)\Delta_{11}^{-1}(\omega\bar{k}_0)},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2\bar{k}_0} n_3^{(3)}(k)=\frac{\omega^2d_{k_0}e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_1^{(3)}(\omega^2\bar{k}_0)}{\Delta_{11}(\omega^2\bar{k}_0)\Delta_{33}^{-1}(\omega^2\bar{k}_0)},\quad \operatorname*{Res}_{k=\bar{k}_0^{-1}} n_1^{(3)}(k)=\frac{-\bar{k}_0^{-2}d_{k_0}e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_3^{(3)}(\bar{k}_0^{-1})}{\Delta_{33}(\bar{k}_0^{-1})\Delta_{11}^{-1}(\bar{k}_0^{-1})},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2\bar{k}_0^{-1}} n_2^{(3)}(k)=\frac{-\frac{\omega^2}{\bar{k}_0^2}d_{k_0}e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_1^{(3)}(\omega^2\bar{k}_0^{-1})}{\Delta_{11}(\omega^2\bar{k}_0^{-1})\Delta_{22}^{-1}(\omega^2\bar{k}_0^{-1})},\ \operatorname*{Res}_{k=\omega\bar{k}_0^{-1}} n_3^{(3)}(k)=\frac{-\frac{\omega}{\bar{k}_0^2}d_{k_0}e^{\theta_{32}(\bar{k}_0)}n_2^{(3)}(\omega\bar{k}_0^{-1})}{\Delta_{22}(\omega\bar{k}_0^{-1})\Delta_{33}^{-1}(\omega\bar{k}_0^{-1})};\tag{8.6}$$

(*d*) 对于每个 $k_0\in\mathsf{Z}\cap\mathbb{R}$，其中 $\operatorname{Re}k_0<0$,

$$\operatorname*{Res}_{k=k_0} n_2^{(3)}(k)=\frac{c_{k_0}e^{-\theta_{21}(k_0)}n_1^{(3)}(k_0)}{\Delta_{11}(k_0)\Delta_{22}^{-1}(k_0)},\quad \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0} n_1^{(3)}(k)=\frac{\omega c_{k_0}e^{-\theta_{21}(k_0)}n_3^{(3)}(\omega k_0)}{\Delta_{33}(\omega k_0)\Delta_{11}^{-1}(\omega k_0)},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2k_0} n_3^{(3)}(k)=\frac{\omega^2c_{k_0}e^{-\theta_{21}(k_0)}n_2^{(3)}(\omega^2k_0)}{\Delta_{22}(\omega^2k_0)\Delta_{33}^{-1}(\omega^2k_0)},\quad \operatorname*{Res}_{k=k_0^{-1}} n_1^{(3)}(k)=\frac{-k_0^{-2}c_{k_0}e^{-\theta_{21}(k_0)}n_2^{(3)}(k_0^{-1})}{\Delta_{22}(k_0^{-1})\Delta_{11}^{-1}(k_0^{-1})},$$

$$\operatorname*{Res}_{k=\omega^2 k_0^{-1}} n_2^{(3)}(k)=\frac{-\frac{\omega^2}{k_0^2}c_{k_0}e^{-\theta_{21}(k_0)}n_3^{(3)}(\omega^2k_0^{-1})}{\Delta_{33}(\omega^2k_0^{-1})\Delta_{22}^{-1}(\omega^2k_0^{-1})},\quad \operatorname*{Res}_{k=\omega k_0^{-1}} n_3^{(3)}(k)=\frac{-\frac{\omega}{k_0^2}c_{k_0}e^{-\theta_{21}(k_0)}n_1^{(3)}(\omega k_0^{-1})}{\Delta_{11}(\omega k_0^{-1})\Delta_{33}^{-1}(\omega k_0^{-1})},\tag{8.7}$$

ˆ为清晰起见，省略了 (x,t) 的依赖关系。此外，在 Z 的每一点， $n^{(3)}$ 的两个分量是解析的，而另一个分量至多有一个简单极点。

证明。由于 $\Delta(k)=\Delta(\zeta,k)$ 在 $k_0\in\mathsf{Z}\cap\{\operatorname{Re}k_0<0\}$ 的每一点都解析，因此关于满足 $\operatorname{Re}k_0<0$ 的点 $k_0\in\mathsf{Z}$ 的断言 (c) 和 (d) 可由 RH 问题 3.1 以及 $n^{(3)}=n\Delta$ 在 Z 的每一点附近成立这一事实轻易推出。剩下需要考虑的是满足 $\operatorname{Re}k_0>0$ 的点 $k_0\in\mathsf{Z}$。我们证明 (8.4) 中的第一个留数条件；其他条件的证明类似。令 $k_0\in\mathsf{Z}\setminus\mathbb{R}$ 满足 $\operatorname{Re}k_0>0$。回忆一下， $n^{(2)}$ 满足与 n 相同的留数条件；特别地，由 (3.5) 得，

$$\operatorname*{Res}_{k=k_0} n_3^{(2)}(k)=c_{k_0}e^{-\theta_{31}(k_0)}n_1^{(2)}(k_0).\tag{8.8}$$

由于 Δ_{33} 在 k_0 处有一个简单零点，且 $\Delta_{11}(k)=\Delta_{33}(\omega k)$ 在 k_0 处有一个简单极点， $n_3^{(3)}$ 在 k_0 处有一个可去奇点，而 $n_1^{(3)}$ 在 k_0处有一个简单极点。利用 (8.8)，可得

$$n_3^{(3)}(k_0)=\lim_{k\to k_0}n_3^{(2)}(k)\Delta_{33}(k)=\operatorname*{Res}_{k=k_0}n_3^{(2)}(k)\cdot\Delta_{33}'(k_0)=c_{k_0}e^{-\theta_{31}(k_0)}n_1^{(2)}(k_0)\Delta_{33}'(k_0),$$

因此

$$\operatorname*{Res}_{k=k_0}n_1^{(3)}(k)=\operatorname*{Res}_{k=k_0}n_1^{(2)}(k)\Delta_{11}(k)=\frac{n_1^{(2)}(k_0)}{(\Delta_{11}^{-1})'(k_0)}=\frac{c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{31}(k_0)}n_3^{(3)}(k_0)}{\Delta_{33}'(k_0)(\Delta_{11}^{-1})'(k_0)}.$$

这表明，只有 $n^{(3)}$ 的第一个分量在 k_0 处是奇异的，且相应的留数如（8.4）所述。□

利用引理 8.2，可推知 $n^{(3)}$ 满足关于 5.3 的 RH 问题，但 $j=3$ 中描述f在 Z 中各点附近行为的条目ˆ（f）必须替换为以下内容：

（f'）在ˆZ中的每一点， $n^{(3)}$ 有两个分量是解析的，而一个分量至多有一个简单极点。此外，对于满足 $\operatorname{Re}k_0\in\mathsf{Z}$ $k_0>0$ 的 $n^{(3)}$，其满足留数条件（8.4）–（8.5）；对于满足 $\operatorname{Re}k_0\in\mathsf{Z}$ $k_0<0$ 的 $n^{(3)}$，其满足留数条件（8.6）–（8.7）。

（8.4）–（8.7）中的留数条件涉及以下指数函数：(a) $e^{t\Phi_{31}(x,t,k_0)}$ 和 $e^{-t\Phi_{32}(x,t,\bar{k}_0)}$，对应 $k_0\in D_{\mathrm{reg}}^R$；(b) $e^{t\Phi_{21}(x,t,k_0)}$，对应 $k_0\in(1,\infty)$；(c) $e^{-t\Phi_{31}(x,t,k_0)}$ 和 $e^{t\Phi_{32}(x,t,\bar{k}_0)}$，对应 $k_0\in D_{\mathrm{reg}}^L$；以及 (d) $e^{-t\Phi_{21}(x,t,k_0)}$，对应 $k_0\in(-1,0)$。根据 Φ_{21}、 Φ_{31} 和 Φ_{32} 的符号表（见图 3），这些指数函数中所有指数的实部均为负。因此， $n^{(3)}$ 在 ˆZ 中各点处的所有留数都被 ˆ 指数小因子压制，当 $t\to\infty$时尤为如此。这表明，Z 中的极点不会影响 $n^{(3)}$ 的大 t 渐近行为的主导项。接下来的变换将帮助我们使这一结论更加精确。

9. The $n^{(3)}\to n^{(4)}$ transformation

第四次变换 $n^{(3)}\to n^{(4)}$ 将留数条件 (8.4)–(8.7) 替换为小圆上的跳跃。对于每个 $k_0\in$Z，我们令 $D_\epsilon(k_0)$ 为以k_0 为中心、半径为 $\epsilon>0$ 的小开圆盘。我们令 $D_\epsilon(k_0)^{-1}$ 和 $D_\epsilon(k_0)^*$ 分别为 $D_\epsilon(k_0)$ 在映射下的像

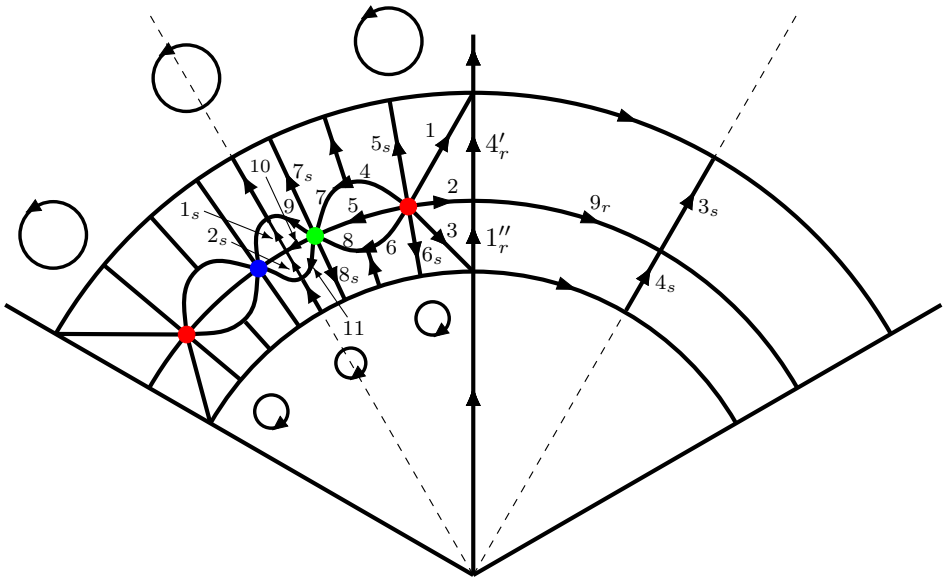


图 8。 在 Z 在 D^R_{reg} 中包含一个点、在 $(1,\ \infty)$ 中包含一个点且不包含其他点时的轮廓 $\Gamma^{(4)}$ （实线）；以及 S 的边界（虚线）。从右到左，各点依次为 ωk_4 （红色）、 $\omega^2 k_2$ （绿色）、 k_1 （蓝色）和 ωk_3 （红色）。

$k \mapsto k^{-1}$ 和 $k \mapsto \bar{k}$。若 $k_0 \in \mathbb{R}$，则 $D_\epsilon(k_0)^* = D_\epsilon(k_0)$。令 $\partial D_\epsilon(k_0)$ 和$\partial D_\epsilon(k_0)^*$ 取逆时针方向，令 $\partial D_\epsilon(k_0)^{-1}$ 取顺时针方向。令

$$\mathcal{D}_{\mathrm{sol}} = \bigcup_{k_0\in\mathsf{Z}}\bigcup_{j=0,1,2}\Big(\omega^j D_\epsilon(k_0)\cup\omega^j D_\epsilon(k_0)^{-1}\cup\omega^j D_\epsilon(k_0)^*\cup\omega^j D_\epsilon(k_0)^{-*}\Big),$$
$$\partial\mathcal{D}_{\mathrm{sol}} = \bigcup_{k_0\in\mathsf{Z}}\bigcup_{j=0,1,2}\Big(\omega^j \partial D_\epsilon(k_0)\cup\omega^j \partial D_\epsilon(k_0)^{-1}\cup\omega^j \partial D_\epsilon(k_0)^*\cup\omega^j \partial D_\epsilon(k_0)^{-*}\Big),$$

因此 $\partial\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}$ 是 $6|\mathsf{Z}\cap\mathbb{R}| + 12|\mathsf{Z}\setminus\mathbb{R}|$ 小圆的并集。通过在必要时缩小 $\epsilon > 0$，我们可以假设这些圆彼此不相交，并且不与 $\Gamma^{(3)}$相交。令 $\Gamma^{(4)} := \Gamma^{(3)}\cup\partial\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}$ 为 $\Gamma^{(3)}$ 与小圆的并集$\partial\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}$，见图 8。令 $\Gamma^{(4)}_\star$为 $\Gamma^{(4)}$的交点集合。显然， $\Gamma^{(4)}_\star = \Gamma^{(3)}_\star$。

函数 $n^{(4)}$ 定义为等于 $n^{(3)}$，但在 $\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}$中除外；在此处，我们按如下方式定义 $n^{(4)}(x,\ t,\ k)$。若 $k_0 \in \mathsf{Z}\setminus\mathbb{R}$，则对 $k \in D_\epsilon(k_0)\cup D_\epsilon(k_0)^*$，定义 $n^{(4)}$ 为

$$n^{(4)}(x,t,k) = \begin{cases} n^{(3)}(x,t,k)Q^R_1(x,t,k), & k\in D_\epsilon(k_0),\ k_0\in\mathsf{Z}\cap D^R_{\mathrm{reg}},\\ n^{(3)}(x,t,k)Q^R_7(x,t,k), & k\in D_\epsilon(k_0)^*,\ k_0\in\mathsf{Z}\cap D^R_{\mathrm{reg}},\\ n^{(3)}(x,t,k)Q^L_1(x,t,k), & k\in D_\epsilon(k_0),\ k_0\in\mathsf{Z}\cap D^L_{\mathrm{reg}},\\ n^{(3)}(x,t,k)Q^L_7(x,t,k), & k\in D_\epsilon(k_0)^*,\ k_0\in\mathsf{Z}\cap D^L_{\mathrm{reg}}, \end{cases} \tag{9.1}$$

其中

$$Q^R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \dfrac{-c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{31}(x,t,k_0)}}{\Delta'_{33}(k_0)(\Delta_{11}^{-1})'(k_0)(k-k_0)} & 0 & 1 \end{pmatrix},\qquad Q^R_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dfrac{-d_{k_0}^{-1}e^{-\theta_{32}(x,t,\bar{k}_0)}}{\Delta'_{22}(\bar{k}_0)(\Delta_{33}^{-1})'(\bar{k}_0)(k-\bar{k}_0)}\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q_1^L=\begin{pmatrix}1&0&\frac{-c_{k_0}e^{-\theta_{31}(x,t,k_0)}}{\Delta_{11}(k_0)\Delta_{33}^{-1}(k_0)(k-k_0)}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad Q_7^L=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{-d_{k_0}e^{\theta_{32}(x,t,\bar{k}_0)}}{\Delta_{33}(\bar{k}_0)\Delta_{22}^{-1}(\bar{k}_0)(k-\bar{k}_0)}&1\end{pmatrix},$$

并且，如果 $k_0\in\mathsf{Z}\cap\mathbb{R}$，我们定义 $n^{(4)}$ for $k\in D_\epsilon(k_0)$ 如下：

$$n^{(4)}(x,t,k)=\begin{cases}n^{(3)}(x,t,k)P_1^R(x,t,k), & k\in D_\epsilon(k_0),\ k_0\in\mathsf{Z}\cap(1,\infty),\\ n^{(3)}(x,t,k)P_1^L(x,t,k), & k\in D_\epsilon(k_0),\ k_0\in\mathsf{Z}\cap(-1,0),\end{cases}\tag{9.2}$$

其中

$$P_1^R=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{-c_{k_0}^{-1}e^{\theta_{21}(x,t,k_0)}}{\Delta_{22}'(k_0)(\Delta_{11}^{-1})'(k_0)(k-k_0)}&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad P_1^L=\begin{pmatrix}1&\frac{-c_{k_0}e^{-\theta_{21}(x,t,k_0)}}{\Delta_{11}(k_0)\Delta_{22}^{-1}(k_0)(k-k_0)}&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

然后，我们借助 $n^{(4)}$ 将其扩展到 $\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}$ 中的所有点，利用 $\mathcal{A}$-和 $\mathcal{B}$-对称性（4.5）.

根据上述对 $n^{(4)}$ 的定义以及引理 8.2 可知，$n^{(4)}$ 在ˆZ中的点处没有极点。此外，在 $\Gamma^{(4)}\setminus\Gamma_\star^{(4)}$上，$n^{(4)}$ 的边界值存在且连续，并满足 $n_+^{(4)}=n_-^{(4)}v^{(4)}$，其中 $v^{(4)}$ 在 Γ 上等于 $v^{(3)}$，而 $v^{(4)}$ 定义在 $\partial\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}$ 上，定义方式如下：

$$v(x,t,k)=\begin{cases}Q_1^R(x,t,k), & k\in\partial D_\epsilon(k_0),\ k_0\in\mathsf{Z}\cap D_{\mathrm{reg}}^R,\\ Q_7^R(x,t,k), & k\in\partial D_\epsilon(k_0)^*,\ k_0\in\mathsf{Z}\cap D_{\mathrm{reg}}^R,\\ Q_1^L(x,t,k), & k\in\partial D_\epsilon(k_0),\ k_0\in\mathsf{Z}\cap D_{\mathrm{reg}}^L,\\ Q_7^L(x,t,k), & k\in\partial D_\epsilon(k_0)^*,\ k_0\in\mathsf{Z}\cap D_{\mathrm{reg}}^L,\\ P_1^R(x,t,k), & k\in\partial D_\epsilon(k_0),\ k_0\in\mathsf{Z}\cap(1,\infty),\\ P_1^L(x,t,k), & k\in\partial D_\epsilon(k_0),\ k_0\in\mathsf{Z}\cap(-1,0),\end{cases}\tag{9.3}$$

a然后将其扩展到 $\partial\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}$ 中的所有点，利用 $\mathcal{A}$-和 $\mathcal{B}$-对称性（4.4 ）.

引理 9.1。跳跃矩阵 $v^{(4)}$ 在 $t\to\infty$ 时一致收敛到单位矩阵 I，其中 $k\in\partial\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}$ 且 $\zeta\in\mathcal{I}$。更准确地说，对于 $\zeta\in\mathcal{I}$,

$$\|v^{(4)}-I\|_{(L^1\cap L^\infty)(\partial\mathcal{D}_{\mathrm{sol}})}\le Ct^{-N}.$$

证明。该结论直接源于定义 $Q_1^R,Q_7^R,Q_1^L,Q_7^L,P_1^R,P_1^L$ 中出现的指数函数的一致指数衰减，以及 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 对称性。□

由引理 8.1 及对称性（4.5），只需构造局部参数矩阵，使其在 $n^{(4)}$ 附近逼近 ωk_4 和 ω^2k_2。

10. Local parametrix near ωk_4

由于 $k\to\omega k_4$，我们有

$$-(\Phi_{31}(\zeta,k)-\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4))=\Phi_{31,\omega k_4}(k-\omega k_4)^2+O((k-\omega k_4)^3),\quad \Phi_{31,\omega k_4}:=\omega\frac{4-3k_4\zeta-k_4^3\zeta}{4k_4^4}.$$

我们将 $z_1=z_1(\zeta,\ t,\ k)$ 定义为

$$z_1=z_{1,\star}\sqrt{t}(k-\omega k_4)\hat{z}_1,\qquad \hat{z}_1:=\sqrt{\frac{2i(\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4)-\Phi_{31}(\zeta,k))}{z_{1,\star}^2(k-\omega k_4)^2}},$$

其中为 $\hat{}z_1=\hat{}z_1(\zeta,k)$ 选取主值分支，并且

$$z_{1,\star}:=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\Phi_{31,\omega k_4}},\qquad -i\omega k_4z_{1,\star}>0.$$

注意，$\hat{z}_1(\zeta,\omega k_4)=1$，且 $t(\Phi_{31}(\zeta,k)-\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4))=\frac{iz_1^2}{2}$。令 $\epsilon>0$ 足够小且与 t 无关。映射 z_1 将 $D_\epsilon(\omega k_4)$ 共形地映到 0 的一个邻域，其在 $k\to\omega k_4$ 时的展开为

$$z_1=z_{1,\star}\sqrt{t}(k-\omega k_4)(1+O(k-\omega k_4)).$$

对于所有 $k\in D_\epsilon(\omega k_4)$，我们有

$$\begin{aligned}\ln_{\omega k_4}(k-\omega k_4)&=\ln_0[z_{1,\star}(k-\omega k_4)\hat{z}_1]-\ln\hat{z}_1-\ln z_{1,\star},\\ \tilde{\ln}_{\omega k_4}(k-\omega k_4)&=\ln[z_{1,\star}(k-\omega k_4)\hat{z}_1]-\ln\hat{z}_1-\ln z_{1,\star},\end{aligned}$$

其中 $\ln_0(k):=\ln|k|+i\arg_0 k$，$\arg_0(k)\in(0,2\pi)$，且 ln 表示主值对数。如有必要，缩小 $\epsilon>0$，则 $k\mapsto\ln\hat{z}_1$ 在 $D_\epsilon(\omega k_4)$ 中解析，$\ln\hat{z}_1=O(k-\omega k_4)$ 当 $k\to\omega k_4$ 时，并且

$$\ln z_{1,\star}=\ln|z_{1,\star}|+i\arg z_{1,\star}=\ln|z_{1,\star}|+i\big(\tfrac{\pi}{2}-\arg(\omega k_4)\big),$$

其中 $\arg(\omega k_4)\in(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$。根据引理 7.1，我们有

$$\begin{aligned}\delta_1(\zeta,k)&=e^{-i\nu_1\ln_{\omega k_4}(k-\omega k_4)}e^{-\chi_1(\zeta,k)}=e^{-i\nu_1\ln_0 z_1}t^{\frac{i\nu_1}{2}}e^{i\nu_1\ln\hat{z}_1}e^{i\nu_1\ln z_{1,\star}}e^{-\chi_1(\zeta,k)},\\ \delta_2(\zeta,k)&=e^{-i\nu_1\ln z_1}t^{\frac{i\nu_1}{2}}e^{i\nu_1\ln\hat{z}_1}e^{i\nu_1\ln z_{1,\star}}e^{i\nu_2\tilde{\ln}_{\omega^2k_2}(k-\omega^2k_2)-\tilde{\chi}_2(\zeta,k)},\\ \delta_3(\zeta,k)&=e^{-i\nu_3\ln z_1}t^{\frac{i\nu_3}{2}}e^{i\nu_3\ln\hat{z}_1}e^{i\nu_3\ln z_{1,\star}}e^{i\nu_4\tilde{\ln}_{\omega^2k_2}(k-\omega^2k_2)-\tilde{\chi}_3(\zeta,k)}.\end{aligned}$$

为简便起见，对于 $a\in\mathbb{C}$，我们记作 $z_{1,(0)}^a:=e^{a\ln_0 z_1}$，$z_{1,\star}^a:=e^{a\ln z_{1,\star}}$，$\hat{z}_1^a:=e^{a\ln\hat{z}_1}$，以及 $z_1^a:=e^{a\ln z_1}$。利用上述 $\{\delta_j(\zeta,k)\}_{j=1}^3$ 的表达式，我们得到

$$\frac{\Delta_{33}(\zeta,k)}{\Delta_{11}(\zeta,k)}=\frac{\delta_1(\zeta,k)\delta_2(\zeta,k)}{\delta_3(\zeta,k)^2}\mathcal{D}_1(k)\frac{\mathcal{P}(k)}{\mathcal{P}(\omega k)}=d_{1,0}(\zeta,t)d_{1,1}(\zeta,k)z_1^{2i\nu_3}z_{1,(0)}^{-i\nu_1}z_1^{-i\nu_1},\tag{10.1}$$

其中 $d_{1,0}(\zeta,t)$ 在 (2.13) 中定义，并且

$$\begin{aligned}d_{1,1}(\zeta,k):=\ &e^{-\chi_1(\zeta,k)+\chi_1(\zeta,\omega k_4)-\tilde{\chi}_2(\zeta,k)+\tilde{\chi}_2(\zeta,\omega k_4)+2\tilde{\chi}_3(\zeta,k)-2\tilde{\chi}_3(\zeta,\omega k_4)}\\ &\times e^{i(\nu_2-2\nu_4)\left[\tilde{\ln}_{\omega^2k_2}(k-\omega^2k_2)-\tilde{\ln}_{\omega^2k_2}(\omega k_4-\omega^2k_2)\right]}\hat{z}_1^{2i(\nu_1-\nu_3)}\frac{\mathcal{D}_1(k)}{\mathcal{D}_1(\omega k_4)}\frac{\mathcal{P}(k)}{\mathcal{P}(\omega k)},\end{aligned}$$

我们总结了下文引理 10.1 中的一些性质：$d_{1,0}(\zeta,t)$ 和 $d_{1,0}(\zeta,k)$。定义

$$Y_1(\zeta,t)=d_{1,0}(\zeta,t)^{\frac{\sigma}{2}}e^{-\frac{t}{2}\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4)\sigma}\lambda_1^\sigma,$$

其中 $\sigma=\operatorname{diag}(1,0,-1)$，且 $\lambda_1\in\mathbb{C}$ 是一个稍后将选定的参数。对于 $k\in D_\epsilon(\omega k_4)$，定义

$$\tilde{n}(x,t,k)=n^{(4)}(x,t,k)Y_1(\zeta,t).\tag{10.2}$$

令 $\tilde{v}$ 为 $\tilde{n}$的跳跃矩阵，并令 $\tilde{v}_j$ 表示 $\tilde{v}$ 在 $\Gamma_j^{(4)}\cap D_\epsilon(\omega k_4)$ 上的限制。由 (6.1)、(8.1) 和 (10.1)，矩阵 $\tilde{v}_j$ 可写为

$$\tilde{v}_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\d_{1,1}^{-1}\lambda_1^2r_{2,a}(\frac{1}{\omega^2k})z_1^{-2i\nu_3}z_{1,(0)}^{i\nu_1}z_1^{i\nu_1}e^{\frac{iz_1^2}{2}}&0&1\end{pmatrix},\tag{10.3a}$$

$$\tilde{v}_4=\begin{pmatrix}1&0&-d_{1,1}\lambda_1^{-2}\big(\frac{r_1(\frac{1}{\omega^2k})}{f(k)}\big)_a z_1^{2i\nu_3}z_{1,(0)}^{-i\nu_1}z_1^{-i\nu_1}e^{-\frac{iz_1^2}{2}}\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\tag{10.3b}$$

$$\tilde{v}_6=\begin{pmatrix}1 & & 0 & 0\\ & 1 & 1 & 0\\ -d_{1,1}^{-1}\lambda_1^2\big(\frac{r_2(\frac{1}{\omega^2k})}{f(k)}\big)_a z_1^{-2i\nu_3}z_{1,(0)}^{i\nu_1}z_1^{i\nu_1}e^{\frac{iz_1^2}{2}} & & 0 & 1\end{pmatrix}, \tag{10.3c}$$

$$\tilde{v}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & d_{1,1}\lambda_1^{-2}r_{1,a}(\frac{1}{\omega^2k})z_1^{2i\nu_3}z_{1,(0)}^{-i\nu_1}z_1^{-i\nu_1}e^{-\frac{iz_1^2}{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{10.3d}$$

令 $\mathcal{X}_1^\epsilon:=\cup_{j=1}^4\mathcal{X}_{1,j}^\epsilon$，其中

$$\mathcal{X}_{1,1}^\epsilon=\Gamma_1^{(4)}\cap D_\epsilon(\omega k_4),\quad \mathcal{X}_{1,2}^\epsilon=\Gamma_4^{(4)}\cap D_\epsilon(\omega k_4),\quad \mathcal{X}_{1,3}^\epsilon=\Gamma_6^{(4)}\cap D_\epsilon(\omega k_4),\quad \mathcal{X}_{1,4}^\epsilon=\Gamma_3^{(4)}\cap D_\epsilon(\omega k_4).$$

令 $k_\star=\omega k_4$。上述关于 $\tilde{v}_j$ 的表达式表明，我们可以用 $Y_1\tilde{m}^{\omega k_4}$ 来近似 $\tilde{n}$，其中 $\tilde{m}^{\omega k_4}(x,t,k)$ 在 $k\in D_\epsilon(\omega k_4)\setminus\mathcal{X}_1$ 内解析，并在 $\mathcal{X}_1^\epsilon$ 上满足跳跃关系 $\tilde{m}_+^{\omega k_4}=\tilde{m}_-^{\omega k_4}\tilde{v}_{\mathcal{X}_1^\epsilon}^{\omega k_4}$，其中

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_{1,1}^\epsilon}^{\omega k_4}=\begin{pmatrix}1 & & 0 & 0\\ & 1 & 1 & 0\\ \frac{\mathcal{P}(\omega^2k_4)}{\mathcal{P}(\omega k_4)}\lambda_1^2r_2(\frac{1}{\omega^2k_\star})z_1^{-2i\nu_3}z_{1,(0)}^{i\nu_1}z_1^{i\nu_1}e^{\frac{iz_1^2}{2}} & & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_{1,2}^\epsilon}^{\omega k_4}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{\mathcal{P}(\omega k_4)}{\mathcal{P}(\omega^2k_4)}\lambda_1^{-2}\frac{r_1(\frac{1}{\omega^2k_\star})}{f(k_\star)}z_1^{2i\nu_3}z_{1,(0)}^{-i\nu_1}z_1^{-i\nu_1}e^{-\frac{iz_1^2}{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_{1,3}^\epsilon}^{\omega k_4}=\begin{pmatrix}1 & & 0 & 0\\ & 1 & 1 & 0\\ -\frac{\mathcal{P}(\omega^2k_4)}{\mathcal{P}(\omega k_4)}\lambda_1^2\frac{r_2(\frac{1}{\omega^2k_\star})}{f(k_\star)}z_1^{-2i\nu_3}z_{1,(0)}^{i\nu_1}z_1^{i\nu_1}e^{\frac{iz_1^2}{2}} & & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_{1,4}^\epsilon}^{\omega k_4}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{\mathcal{P}(\omega k_4)}{\mathcal{P}(\omega^2k_4)}\lambda_1^{-2}r_1(\frac{1}{\omega^2k_\star})z_1^{2i\nu_3}z_{1,(0)}^{-i\nu_1}z_1^{-i\nu_1}e^{-\frac{iz_1^2}{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

并且当 $t\to\infty$ 时，$\tilde{m}^{\omega k_4}\to I$ 对于 $k\in\partial D_\epsilon(\omega k_4)$ 一致成立。我们按如下方式选取自由参数λ_1：

$$\lambda_1:=\big(\tfrac{\mathcal{P}(\omega k_4)}{\mathcal{P}(\omega^2k_4)}\big)^{\frac12}|\tilde{r}(\tfrac{1}{\omega^2k_\star})|^{-\frac14}=\big(\tfrac{\mathcal{P}(\omega k_4)}{\mathcal{P}(\omega^2k_4)}\big)^{\frac12}|\tilde{r}(\tfrac{1}{k_4})|^{-\frac14}, \tag{10.4}$$

并将局部参数子 $m^{\omega k_4}$ 定义为

$$m^{\omega k_4}(x,t,k)=Y_1(\zeta,t)m^{X,(1)}(q_1,q_3,z_1(\zeta,t,k))Y_1(\zeta,t)^{-1},\qquad k\in D_\epsilon(\omega k_4), \tag{10.5}$$

其中 $m^{X,(1)}(\cdot)=m^{X,(1)}(q_1,q_3,\cdot)$ 是引理 A.1 中模型 RH 问题的解，满足

$$q_1=\tilde{r}(\omega k_4)^{\frac12}r_1(\omega k_4),\qquad \bar{q}_1=\tilde{r}(\omega k_4)^{-\frac12}r_2(\omega k_4)=\tilde{r}(\omega k_4)^{\frac12}\overline{r_1(\omega k_4)},$$
$$q_3=|\tilde{r}(\tfrac{1}{k_4})|^{\frac12}r_1(\tfrac{1}{k_4}),\qquad \bar{q}_3=-|\tilde{r}(\tfrac{1}{k_4})|^{-\frac12}r_2(\tfrac{1}{k_4})=|\tilde{r}(\tfrac{1}{k_4})|^{\frac12}\overline{r_1(\tfrac{1}{k_4})}.$$

引理10.1。函数 $Y_1(\zeta,t)$ 一致有界：

$$\sup_{\zeta\in\mathcal{I}}\sup_{t\geq2}|Y_1(\zeta,t)^{\pm1}|<C. \tag{10.6}$$

此外，函数 $d_{1,0}(\zeta,t)$ 和 $d_{1,1}(\zeta,k)$ 满足

$$|d_{1,0}(\zeta,t)|=e^{-\pi\nu_1},\qquad \zeta\in\mathcal{I},\ t\geq2, \tag{10.7}$$

$$|d_{1,\ 1}(\zeta,\ k)\ -\ \frac{\mathcal{P}(\omega k_4)}{\mathcal{P}(\omega k_4)}|\le C|k-\omega k_4|(1+|\ln|k-\omega k_4||),\qquad \zeta\in\mathcal{I},\ k\in\mathcal{X}_1^\epsilon. \tag{10.8}$$

证明。标准估计给出 (10.6) 和 (10.8)。为了证明 (10.7)，我们首先注意到

$$\begin{aligned}|d_{1,0}(\zeta,t)|:=\ & e^{-\mathrm{Re}\,\chi_1(\zeta,\omega k_4)-\mathrm{Re}\,\tilde\chi_2(\zeta,\omega k_4)+2\mathrm{Re}\,\tilde\chi_3(\zeta,\omega k_4)}\\ &\times e^{-(\nu_2-2\nu_4)\tilde{\mathrm{arg}}_{\omega^2k_2}(\omega k_4-\omega^2k_2)}e^{-2(\nu_1-\nu_3)\arg z_{1,\star}}|\mathcal{D}_1(\omega k_4)|.\end{aligned} \tag{10.9}$$

由引理 7.1 可知，若 $k\in\partial\mathbb{D}\setminus\{\arg\ k\in(\pi/2,2\pi/3)\}$，则

$$\begin{aligned}|\delta_1(\zeta,k)|&=e^{\nu_1\frac{\arg_i(k)+\arg(\omega k_4)+\pi}{2}-\mathrm{Re}\,\chi_1(\zeta,k)},\\ |\delta_2(\zeta,k)|&=e^{\nu_1\frac{\arg_i(k)+\arg(\omega k_4)+\pi}{2}-\nu_2\frac{\arg_i(k)+\arg(\omega^2k_2)+\pi}{2}-\mathrm{Re}\,\chi_2(\zeta,k)},\\ |\delta_3(\zeta,k)|&=e^{\nu_3\frac{\arg_i(k)+\arg(\omega k_4)+\pi}{2}-\nu_4\frac{\arg_i(k)+\arg(\omega^2k_2)+\pi}{2}-\mathrm{Re}\,\chi_3(\zeta,k)},\\ |\delta_4(\zeta,k)|&=e^{\nu_4\frac{\arg_i(k)+\arg(\omega^2k_2)+\pi}{2}-\mathrm{Re}\,\chi_4(\zeta,k)},\\ |\delta_5(\zeta,k)|&=e^{\nu_5\frac{\arg_i(k)+\arg(\omega^2k_2)+\pi}{2}-\mathrm{Re}\,\chi_5(\zeta,k)},\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\chi_1(\zeta,k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2^{(2)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(1+r_1(s)r_2(s))+\frac{\arg_i k+\pi}{2}\nu_1,\\ \mathrm{Re}\,\chi_2(\zeta,k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(2)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(1+r_1(s)r_2(s))+\frac{\arg_i k+\pi}{2}(\nu_1-\nu_2),\\ \mathrm{Re}\,\chi_3(\zeta,k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(2)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(f(s))+\frac{\arg_i k+\pi}{2}(\nu_3-\nu_4),\\ \mathrm{Re}\,\chi_4(\zeta,k)&=\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to0_+}\left(\int_{\omega^2k_2}^{e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(f(s))-\frac{\arg\omega}{2}\ln(f(e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}))\right)+\frac{\arg_i k+\pi}{2}\nu_4,\\ \mathrm{Re}\,\chi_5(\zeta,k)&=\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to0_+}\left(\int_{\omega^2k_2}^{e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(f(\omega^2s))-\frac{\arg\omega}{2}\ln(f(e^{-i\epsilon}))\right)+\frac{\arg_i k+\pi}{2}\nu_5,\end{aligned}$$

其中 $\arg_i(k)\in(\pi/2,\ 5\pi/2)$。因此，对于 $k\in\partial\mathbb{D}\setminus\{\arg\ k\in(\pi/2,\ 2\pi/3)\}$,

$$\begin{aligned}|\delta_1(\zeta,k)|&=e^{\nu_1\frac{\arg(\omega k_4)}{2}-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2^{(2)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(1+r_1(s)r_2(s))},\\ |\delta_2(\zeta,k)|&=e^{\nu_1\frac{\arg(\omega k_4)}{2}-\nu_2\frac{\arg(\omega^2k_2)}{2}-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(2)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(1+r_1(s)r_2(s))},\\ |\delta_3(\zeta,k)|&=e^{\nu_3\frac{\arg(\omega k_4)}{2}-\nu_4\frac{\arg(\omega^2k_2)}{2}-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(2)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(f(s))},\\ |\delta_4(\zeta,k)|&=e^{\nu_4\frac{\arg(\omega^2k_2)}{2}-\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to0_+}\left(\int_{\omega^2k_2}^{e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(f(s))-\frac{\arg\omega}{2}\ln(f(e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}))\right)},\\ |\delta_5(\zeta,k)|&=e^{\nu_5\frac{\arg(\omega^2k_2)}{2}-\frac{1}{2\pi}\lim_{\epsilon\to0_+}\left(\int_{\omega^2k_2}^{e^{i(\frac{2\pi}{3}-\epsilon)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(f(\omega^2s))-\frac{\arg\omega}{2}\ln(f(e^{-i\epsilon}))\right)}.\end{aligned} \tag{10.10}$$

注意，(10.10) 中的右端与 k 无关。由于各点 $k_4,\omega^2k_4,\frac{1}{k_4},\ \frac{1}{\omega k_4},\ \frac{1}{\omega^2k_4}$ 均位于 $\partial\mathbb{D}\setminus\{\arg\ k\in(\pi/2,2\pi/3)\}$中，我们得到

$$|\mathcal{D}_1(\omega k_4)|=\frac{e^{\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2^{(2)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(1+r_1(s)r_2(s))-\nu_1\frac{\arg(\omega k_4)}{2}}e^{2\nu_3\frac{\arg(\omega k_4)}{2}-2\nu_4\frac{\arg(\omega^2k_2)}{2}-2\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(2)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(f(s))}}{e^{\nu_1\frac{\arg(\omega k_4)}{2}-\nu_2\frac{\arg(\omega^2k_2)}{2}-\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(2)}}\frac{\arg s}{2}d\ln(1+r_1(s)r_2(s))}}.$$

类似的论证表明，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\chi_1(\zeta,\omega k_4) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_2^{(2)}} \frac{\arg s}{2} d\ln(1+r_1(s)r_2(s)) + \frac{\arg(\omega k_4)+\pi}{2}\nu_1,\\
\operatorname{Re}\tilde{\chi}_2(\zeta,\omega k_4) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(2)}} \frac{\arg s}{2} d\ln(1+r_1(s)r_2(s)) + \frac{\arg(\omega k_4)-\pi}{2}(\nu_1-\nu_2),\\
\operatorname{Re}\tilde{\chi}_3(\zeta,\omega k_4) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_5^{(2)}} \frac{\arg s}{2} d\ln(f(s)) + \frac{\arg(\omega k_4)-\pi}{2}(\nu_3-\nu_4).
\end{aligned}$$

将上述表达式代入（10.9），并利用

$$\tilde{\arg}_{\omega^2 k_2}(\omega k_4-\omega^2 k_2) = \frac{\arg(\omega k_4)+\arg(\omega^2 k_2)-\pi}{2} \quad \text{and} \quad \arg z_{1,\star} = \tfrac{\pi}{2} - \arg(\omega k_4),$$

直接计算可得 $|d_{1,\ 0}(\zeta,\ t)| = e^{-\pi\nu_1}$。 □

引理 10.2。 由 $m^{\omega k_4}(x,\ t,\ k)$ 在 （10.5）中定义，是关于 $k \in D_\epsilon(\omega k_4) \setminus \mathcal{X}_1^\epsilon$ 的解析函数，并且当 $t \geq 2,\ \zeta \in \mathcal{I}$ 和 $k \in D_\epsilon(\omega k_4) \setminus \mathcal{X}_1^\epsilon$ 时一致有界。在 $\mathcal{X}_1^\epsilon,\ m^{\omega k_4}$ 满足跳跃条件 $m_+^{\omega k_4} = m_-^{\omega k_4} v^{\omega k_4}$，其中 $v^{\omega k_4}$ 满足

$$\begin{cases} \|v^{(4)} - v^{\omega k_4}\|_{L^1(\mathcal{X}_1^\epsilon)} \leq Ct^{-1}\ln t, \\ \|v^{(4)} - v^{\omega k_4}\|_{L^\infty(\mathcal{X}_1^\epsilon)} \leq Ct^{-1/2}\ln t, \end{cases} \qquad \zeta \in \mathcal{I},\ t \geq 2. \tag{10.11}$$

此外，当 $t \to \infty$ 时，

$$\|m^{\omega k_4}(x,t,\cdot)^{-1} - I\|_{L^\infty(\partial D_\epsilon(\omega k_4))} = O(t^{-1/2}), \tag{10.12}$$

$$m^{\omega k_4} - I = \frac{Y_1(\zeta,t) m_1^{X,(1)} Y_1(\zeta,t)^{-1}}{z_{1,\star}\sqrt{t}(k-\omega k_4)\hat{z}_1(\zeta,k)} + O(t^{-1}) \tag{10.13}$$

对 $\zeta \in \mathcal{I}$ 和 $m^{X,\ 1\ (1)} = m^{X,\ 1\ (1)}$ $(q_1,\ q_3)$ 一致地由 （A.3）给出。

证明。 由（10.2）和（10.5），可得

$$v^{(4)} - v^{\omega k_4} = Y_1(\zeta,t)(\tilde{v} - v^{X,(1)})Y_1(\zeta,t)^{-1},$$

这里回顾一下， $\tilde{v}$ 由（10.3）给出。因此，回顾（10.6），只需证明10.11）中的界成立

$$\|\tilde{v}(x,t,\cdot) - v^{X,(1)}(x,t,z_1(\zeta,t,\cdot))\|_{L^1(\mathcal{X}_{1,j}^\epsilon)} \leq Ct^{-1}\ln t, \tag{10.14a}$$

$$\|\tilde{v}(x,t,\cdot) - v^{X,(1)}(x,t,z_1(\zeta,t,\cdot))\|_{L^\infty(\mathcal{X}_{1,j}^\epsilon)} \leq Ct^{-1/2}\ln t, \tag{10.14b}$$

对于 $j = 1,\ldots,4$. 我们给出（10.14）在 $j = 1$时的证明；当$j = 2,3,4.$ 时，类似论证同样适用。

对于 $k \in \mathcal{X}_{1,\ 1}^\epsilon$，矩阵 $\tilde{v} - v^{X,\ 1}$ 中只有 (31) 元素非零。由于 $-\bar{q}_3 = \frac{\mathcal{P}(\omega^2 k_4)}{\mathcal{P}(\omega k_4)} \frac{\lambda_1^2 r_2}{(-\frac{1}{k_4})}$ 且—

$$\left|e^{\frac{iz_1^2}{2}}\right| = e^{\operatorname{Re}(\frac{iz_1^2}{2})} = e^{-\frac{|z_1|^2}{2}},$$

我们可以如下估计 $|(\tilde{v} - v^{X,\ (1)})_{31}|$：

$$\begin{aligned}
|(\tilde{v}-v^{X,(1)})_{31}| &= \left| d_{1,1}^{-1}\lambda_1^2 r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) z_1^{-2i\nu_3} z_{1,(0)}^{i\nu_1} z_1^{i\nu_1} e^{\frac{iz_1^2}{2}} - (-\bar{q}_3 z_1^{-2i\nu_3} z_{1,(0)}^{i\nu_1} z_1^{i\nu_1} e^{\frac{iz_1^2}{2}}) \right| \\
&= \left| z_1^{-2i\nu_3} z_{1,(0)}^{i\nu_1} z_1^{i\nu_1} \right| \left| (d_{1,1}^{-1} - \tfrac{\mathcal{P}(\omega^2 k_4)}{\mathcal{P}(\omega k_4)})\lambda_1^2 r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) + \left(\tfrac{\mathcal{P}(\omega^2 k_4)}{\mathcal{P}(\omega k_4)}\lambda_1^2 r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) - (-\bar{q}_3)\right) \right| \left| e^{\frac{iz_1^2}{2}} \right| \\
&\leq C\left(|d_{1,1}^{-1} - \tfrac{\mathcal{P}(\omega^2 k_4)}{\mathcal{P}(\omega k_4)}| |\lambda_1^2 r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k})| + |\tfrac{\mathcal{P}(\omega^2 k_4)}{\mathcal{P}(\omega k_4)}\lambda_1^2 r_{2,a}(\tfrac{1}{\omega^2 k}) - (-\bar{q}_3)| \right) e^{-\frac{|z_1|^2}{2}}
\end{aligned}$$

$$\le C\Big(|d_{1,1}^{-1}-\tfrac{\mathcal{P}(\omega^2k_4)}{\mathcal{P}(\omega k_4)}|+|k-\omega k_4|\Big)e^{\frac{t}{4}|\operatorname{Re}\Phi_{31}(\zeta,k)|}e^{-\frac{|z_1|^2}{2}}$$
$$\le C\Big(|d_{1,1}^{-1}-\tfrac{\mathcal{P}(\omega^2k_4)}{\mathcal{P}(\omega k_4)}|+|k-\omega k_4|\Big)e^{-ct|k-\omega k_4|^2},\qquad k\in\mathcal{X}_{1,1}^{\epsilon}.$$

利用（10.8），可得

$$|(\tilde v-v^{X,(1)})_{31}|\le C|k-\omega k_4|(1+|\ln|k-\omega k_4||)e^{-ct|k-\omega k_4|^2},\qquad k\in\mathcal{X}_{1,1}^{\epsilon}.$$

因此

$$\|(\tilde v-v^{X,(1)})_{31}\|_{L^1(\mathcal{X}_{1,1}^{\epsilon})}\le C\int_0^\infty u(1+|\ln u|)e^{-ctu^2}du\le Ct^{-1}\ln t,$$
$$\|(\tilde v-v^{X,(1)})_{31}\|_{L^\infty(\mathcal{X}_{1,1}^{\epsilon})}\le C\sup_{u\ge0}u(1+|\ln u|)e^{-ctu^2}\le Ct^{-1/2}\ln t.$$

变量 z_1 在 $t\to\infty$ 趋于无穷大，当 $k\in\partial D_\epsilon(\omega k_4)$ 时，因为

$$|z_1|=|z_{1,\star}|\sqrt{t}|k-\omega k_4|\,|\hat z_1|\ge c\sqrt{t}.$$

因此方程（A.3）给出

$$m^{X,(1)}(q_1,q_3,z_1(\zeta,t,k))=I+\frac{m_1^{X,(1)}(q_1,q_3)}{z_{1,\star}\sqrt{t}(k-\omega k_4)\hat z_1(\zeta,k)}+O(t^{-1}),\qquad t\to\infty,$$

关于 $k\in\partial D_\epsilon$（ωk_4）一致地，并且 $\zeta\in\mathcal{I}_\circ$。回顾 $m^{\omega k_4}$（10.5）的定义，这给出

$$m^{\omega k_4}-I=\frac{Y_1(\zeta,t)m_1^{X,(1)}(q_1,q_3)Y_1(\zeta,t)^{-1}}{z_{1,\star}\sqrt{t}(k-\omega k_4)\hat z_1(\zeta,k)}+O(t^{-1}),\qquad t\to\infty,\tag{10.15}$$

对 $k\in\partial D_\epsilon(\omega k_4)$ 和 $\zeta\in\mathcal{I}$. 这证明了 (10.12) 和 (10.13)。 □

11. Local parametrix near ω^2k_2

由于 $k\to\omega^2k_2$，我们有

$$-(\Phi_{32}(\zeta,k)-\Phi_{32}(\zeta,\omega^2k_2))=\Phi_{32,\omega^2k_2}(k-\omega^2k_2)^2+O((k-\omega^2k_2)^3),$$
$$\Phi_{32,\omega^2k_2}:=-\omega^2\frac{4-3k_2\zeta-k_2^3\zeta}{4k_2^4}.$$

我们将 $z_2=z_2(\zeta,t,k)$ 定义为

$$z_2=z_{2,\star}\sqrt{t}(k-\omega^2k_2)\hat z_2,\qquad \hat z_2:=\sqrt{\frac{2i(\Phi_{32}(\zeta,\omega^2k_2)-\Phi_{32}(\zeta,k))}{z_{2,\star}^2(k-\omega^2k_2)^2}},$$

其中，$\hat z_2=\hat z_2(\zeta,k)$ 取主值分支，并且

$$z_{2,\star}:=\sqrt{2}e^{\frac{\pi i}{4}}\sqrt{\Phi_{32,\omega^2k_2}},\qquad -i\omega^2k_2z_{2,\star}>0.$$

注意，$\hat z_2(\zeta,\omega^2k_2)=1$，且 $t(\Phi_{32}(\zeta,k)-\Phi_{32}(\zeta,\omega^2k_2))=\frac{iz_2^2}{2}$。若 $\epsilon>0$ 取得足够小，则映射 z_2 从 $D_\epsilon(\omega^2k_2)$ 共形映到 0 的一个邻域，其在 $k\to\omega^2k_2$ 时的展开为

$$z_2=z_{2,\star}\sqrt{t}(k-\omega^2k_2)(1+O(k-\omega^2k_2)).$$

对于所有 $k\in D_\epsilon(\omega^2k_2)$，我们有

$$\ln_{\omega^2k_2}(k-\omega^2k_2)=\ln_0[z_{2,\star}(k-\omega^2k_2)\hat z_2]-\ln\hat z_2-\ln z_{2,\star},$$
$$\tilde{\ln}_{\omega^2k_2}(k-\omega^2k_2)=\ln[z_{2,\star}(k-\omega^2k_2)\hat z_2]-\ln\hat z_2-\ln z_{2,\star},$$

其中 $\ln_0(k) := \ln|k| + i\arg_0 k$，$\arg_0(k) \in (0, 2\pi)$，且 ln 为主值对数。必要时缩小 $\epsilon > 0$，则 $k \mapsto \ln \hat{} z_2$ 在 $D_\epsilon(\omega^2 k_2)$ 中解析，$\ln \hat{} z_2 = O(k - \omega^2 k_2)$ 当 $k \to \omega^2 k_2$ 时，并且

$$\ln z_{2,\star} = \ln|z_{2,\star}| + i\arg z_{2,\star} = \ln|z_{2,\star}| + i\big(\tfrac{\pi}{2} - \arg(\omega^2 k_2)\big),$$

其中 $\arg(\omega^2 k_2) \in (\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$。根据引理 7.1，可得

$$\begin{aligned}
\delta_2(\zeta,k) &= e^{-i\nu_1 \ln_{\omega k_4}(k-\omega k_4)} e^{-\chi_2(\zeta,k)} t^{-\frac{i\nu_2}{2}} z_{2,(0)}^{i\nu_2} \hat{z}_2^{-i\nu_2} z_{2,\star}^{-i\nu_2},\\
\delta_3(\zeta,k) &= e^{-i\nu_3 \ln_{\omega k_4}(k-\omega k_4)} e^{-\chi_3(\zeta,k)} t^{-\frac{i\nu_4}{2}} z_{2,(0)}^{i\nu_4} \hat{z}_2^{-i\nu_4} z_{2,\star}^{-i\nu_4},\\
\delta_4(\zeta,k) &= t^{\frac{i\nu_4}{2}} z_2^{-i\nu_4} \hat{z}_2^{i\nu_4} z_{2,\star}^{i\nu_4} e^{-\tilde{\chi}_4(\zeta,k)},\\
\delta_5(\zeta,k) &= t^{\frac{i\nu_5}{2}} z_2^{-i\nu_5} \hat{z}_2^{i\nu_5} z_{2,\star}^{i\nu_5} e^{-\tilde{\chi}_5(\zeta,k)},
\end{aligned}$$

这里我们使用记号 $z_{2,(0)}^a := e^{a\ln_0 z_2}$，$\hat{z}_2^a := e^{a\ln \hat{} z_2}$，$z_{2,\star}^a := e^{a\ln z_{2,\star}}$，以及$z_2^a := e^{a\ln z_2}$表示 $a \in \mathbb{C}$。我们得到

$$\frac{\Delta_{33}(\zeta,k)}{\Delta_{22}(\zeta,k)} = \frac{\delta_2(\zeta,k)^2\delta_4(\zeta,k)}{\delta_3(\zeta,k)\delta_5(\zeta,k)^2}\mathcal{D}_2(k)\frac{\mathcal{P}(k)}{\mathcal{P}(\omega^2 k)} = d_{2,0}(\zeta,t)d_{2,1}(\zeta,k)z_2^{i(2\nu_5-\nu_4)}z_{2,(0)}^{i(2\nu_2-\nu_4)}, \quad (11.1)$$

其中 $d_{2,0}(\zeta, t)$ 定义见式 (2.14)，并且

$$\begin{aligned}
d_{2,1}(\zeta,k) := {} & e^{-2\chi_2(\zeta,k)+2\chi_2(\zeta,\omega^2k_2)+\chi_3(\zeta,k)-\chi_3(\zeta,\omega^2k_2)-\tilde{\chi}_4(\zeta,k)+\tilde{\chi}_4(\zeta,\omega^2k_2)+2\tilde{\chi}_5(\zeta,k)-2\tilde{\chi}_5(\zeta,\omega^2k_2)}\\
& \times e^{i(\nu_3-2\nu_1)\left[\ln_{\omega k_4}(k-\omega k_4)-\ln_{\omega k_4}(\omega^2k_2-\omega k_4)\right]}\hat{z}_2^{2i(\nu_4-\nu_5-\nu_2)}\frac{\mathcal{D}_2(k)}{\mathcal{D}_2(\omega^2k_2)}\frac{\mathcal{P}(k)}{\mathcal{P}(\omega^2k)}. \quad (11.2)
\end{aligned}$$

我们在下文的引理 11.1 中陈述 $d_{2,0}(\zeta, t)$ 和 $d_{2,1}(\zeta, k)$ 的一些性质。定义

$$Y_2(\zeta,t) = d_{2,0}(\zeta,t)^{\frac{\tilde{\sigma}}{2}} e^{-\frac{t}{2}\Phi_{32}(\zeta,\omega^2k_2)\tilde{\sigma}}\lambda_2^{\tilde{\sigma}},$$

其中 $\tilde{\sigma} := \mathrm{diag}(0, 1, -1)$，而 $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ 是一个将在下文选取的参数。对于$k \in D_\epsilon(\omega^2 k_2)$，定义

$$\tilde{n}(x,t,k) = n^{(4)}(x,t,k)Y_2(\zeta,t).$$

令 $\tilde{v}$ 为 $\tilde{n}$的跳跃矩阵，且令 $\tilde{v}_j$ 为 $\tilde{v}$ 在 $\Gamma_j^{(4)} \cap D_\epsilon(\omega^2 k_2)$ 上的值。根据 (6.1)、(8.1) 和 (11.1)，矩阵 $\tilde{v}_j$ 可写为

$$\tilde{v}_7^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -d_{2,1}^{-1}\lambda_2^2\big(\frac{r_1(\frac{1}{\omega k})-r_1(k)r_1(\omega^2k)}{1+r_1(k)r_2(k)}\big)_a z_2^{-i(2\nu_5-\nu_4)}z_{2,(0)}^{-i(2\nu_2-\nu_4)}e^{\frac{iz_2^2}{2}} & 1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_9 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & d_{2,1}\lambda_2^{-2}\big(\frac{r_2(\frac{1}{\omega k})-r_2(k)r_2(\omega^2k)}{f(\omega^2k)}\big)_a z_2^{i(2\nu_5-\nu_4)}z_{2,(0)}^{i(2\nu_2-\nu_4)}e^{-\frac{iz_2^2}{2}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & d_{2,1}^{-1}\lambda_2^2\big(\frac{r_1(\frac{1}{\omega k})-r_1(k)r_1(\omega^2k)}{f(\omega^2k)}\big)_a z_2^{-i(2\nu_5-\nu_4)}z_{2,(0)}^{-i(2\nu_2-\nu_4)}e^{\frac{iz_2^2}{2}} & 1\end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_8^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -d_{2,1}\lambda_2^{-2}\big(\frac{r_2(\frac{1}{\omega k})-r_2(k)r_2(\omega^2k)}{1+r_1(k)r_2(k)}\big)_a z_2^{i(2\nu_5-\nu_4)}z_{2,(0)}^{i(2\nu_2-\nu_4)}e^{-\frac{iz_2^2}{2}}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

令 $\mathcal{X}_2^\epsilon := \cup_{j=1}^4 \mathcal{X}_{2,j}^\epsilon$，其中

$$\mathcal{X}_{2,1}^\epsilon = \Gamma_7^{(4)} \cap D_\epsilon(\omega^2 k_2), \qquad \mathcal{X}_{2,2}^\epsilon = \Gamma_9^{(4)} \cap D_\epsilon(\omega^2 k_2),$$
$$\mathcal{X}_{2,3}^\epsilon = \Gamma_{11}^{(4)} \cap D_\epsilon(\omega^2 k_2), \qquad \mathcal{X}_{2,4}^\epsilon = \Gamma_8^{(4)} \cap D_\epsilon(\omega^2 k_2),$$

从 $\omega^2 k_2$ 向外定向。令 $k_\star = \omega^2 k_2$。上面对 $\tilde{v}_j$ 的表达式表明，我们将 $\tilde{n}$ 近似为 $(1, 1, 1) Y_2 \tilde{m}^{\omega^2 k_2}$，其中 $\tilde{m}^{\omega^2 k_2}(x, t, k)$ 在 $k \in D_\epsilon(\omega^2 k_2) \setminus \mathcal{X}_2$ 中解析，并在 $\mathcal{X}_2^\epsilon$ 上满足跳跃关系 $\tilde{m}_+^{\omega^2 k_2} = \tilde{m}_-^{\omega^2 k_2} \tilde{v}_{\mathcal{X}_2^\epsilon}^{\omega^2 k_2}$，其中

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_{2,1}^\epsilon}^{\omega^2 k_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\mathcal{P}(\omega^2 k_\star)}{\mathcal{P}(k_\star)} \lambda_2^2 \frac{r_1(\frac{1}{\omega k_\star}) - r_1(k_\star) r_1(\omega^2 k_\star)}{1 + r_1(k_\star) r_2(k_\star)} z_2^{-i(2\nu_5 - \nu_4)} z_{2,(0)}^{-i(2\nu_2 - \nu_4)} e^{\frac{i z_2^2}{2}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_{2,2}^\epsilon}^{\omega^2 k_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\mathcal{P}(k_\star)}{\mathcal{P}(\omega^2 k_\star)} \lambda_2^{-2} \frac{r_2(\frac{1}{\omega k_\star}) - r_2(k_\star) r_2(\omega^2 k_\star)}{f(\omega^2 k_\star)} z_2^{i(2\nu_5 - \nu_4)} z_{2,(0)}^{i(2\nu_2 - \nu_4)} e^{-\frac{i z_2^2}{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_{2,3}^\epsilon}^{\omega^2 k_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\mathcal{P}(\omega^2 k_\star)}{\mathcal{P}(k_\star)} \lambda_2^2 \frac{r_1(\frac{1}{\omega k_\star}) - r_1(k_\star) r_1(\omega^2 k_\star)}{f(\omega^2 k_\star)} z_2^{-i(2\nu_5 - \nu_4)} z_{2,(0)}^{-i(2\nu_2 - \nu_4)} e^{\frac{i z_2^2}{2}} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{v}_{\mathcal{X}_{2,4}^\epsilon}^{\omega^2 k_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\mathcal{P}(k_\star)}{\mathcal{P}(\omega^2 k_\star)} \lambda_2^{-2} \frac{r_2(\frac{1}{\omega k_\star}) - r_2(k_\star) r_2(\omega^2 k_\star)}{1 + r_1(k_\star) r_2(k_\star)} z_2^{i(2\nu_5 - \nu_4)} z_{2,(0)}^{i(2\nu_2 - \nu_4)} e^{-\frac{i z_2^2}{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a并且当 $k \to \infty$ 时满足 $\tilde{m}^{\omega^2 k_2} \to I$。我们如下选择自由参数 λ_2：

$$\lambda_2 = \left(\frac{\mathcal{P}(k_\star)}{\mathcal{P}(\omega^2 k_\star)}\right)^{\frac{1}{2}} |\tilde{r}(\tfrac{1}{\omega k_\star})|^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{\mathcal{P}(\omega^2 k_2)}{\mathcal{P}(\omega k_2)}\right)^{\frac{1}{2}} |\tilde{r}(\tfrac{1}{k_2})|^{\frac{1}{4}}, \tag{11.3}$$

并通过下式定义局部参数子 $m^{\omega^2 k_2}$

$$m^{\omega^2 k_2}(x, t, k) = Y_2(\zeta, t) m^X, {}^{(2)}(q_2, q_4, q_5, q_6, z_2(\zeta, t, k)) Y_2(\zeta, t)^{-1}, \qquad k \in D_\epsilon(\omega^2 k_2), \tag{11.4}$$

其中 $m^X, {}^{(2)}(\cdot) = m^X, {}^{(2)}(q_2, q_4, q_5, q_6, \cdot)$ 是引理 A.2 的模型 RH 问题的解，并且

$$q_2 = \tilde{r}(k_\star)^{\frac{1}{2}} r_1(k_\star), \qquad \bar{q}_2 = \tilde{r}(k_\star)^{-\frac{1}{2}} r_2(k_\star) = \tilde{r}(k_\star)^{\frac{1}{2}} \overline{r_1(k_\star)},$$
$$q_4 = |\tilde{r}(\tfrac{1}{\omega^2 k_\star})|^{\frac{1}{2}} r_1(\tfrac{1}{\omega^2 k_\star}), \qquad \bar{q}_4 = -|\tilde{r}(\tfrac{1}{\omega^2 k_\star})|^{-\frac{1}{2}} r_2(\tfrac{1}{\omega^2 k_\star}) = |\tilde{r}(\tfrac{1}{\omega^2 k_\star})|^{\frac{1}{2}} \overline{r_1(\tfrac{1}{\omega^2 k_\star})},$$
$$q_5 = |\tilde{r}(\omega^2 k_\star)|^{\frac{1}{2}} r_1(\omega^2 k_\star), \qquad \bar{q}_5 = -|\tilde{r}(\omega^2 k_\star)|^{-\frac{1}{2}} r_2(\omega^2 k_\star) = |\tilde{r}(\omega^2 k_\star)|^{\frac{1}{2}} \overline{r_1(\omega^2 k_\star)},$$
$$q_6 = |\tilde{r}(\tfrac{1}{\omega k_\star})|^{\frac{1}{2}} r_1(\tfrac{1}{\omega k_\star}), \qquad \bar{q}_6 = -|\tilde{r}(\tfrac{1}{\omega k_\star})|^{-\frac{1}{2}} r_2(\tfrac{1}{\omega k_\star}) = |\tilde{r}(\tfrac{1}{\omega k_\star})|^{\frac{1}{2}} \overline{r_1(\tfrac{1}{\omega k_\star})}.$$

利用关系式（4.6），并结合以下事实

$$\left|\tilde{r}(\tfrac{1}{\omega^2 k})\right|^{-\frac{1}{2}} = \left|\tilde{r}(\omega^2 k)\right|^{\frac{1}{2}} = |\tilde{r}(k)|^{-\frac{1}{2}} \left|\tilde{r}(\tfrac{1}{\omega k})\right|^{\frac{1}{2}}, \qquad k \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\},$$

我们推得 $q_4 - \bar{q}_5 - q_2 \bar{q}_6 = 0$，因此（A.5）如预期般成立。以下引理的证明与引理 10.1 的证明类似。

引理 11.1。函数 $Y_2(\zeta, t)$ 一致有界，即 上确界$_{\zeta \in \mathcal{I}}$ 上确界$_{t \geq 2}$ $|Y_2(\zeta, t)^{\pm 1}| < C$。此外，函数 $d_{2,0}(\zeta, t)$ 和 $d_{2,1}(\zeta, t)$ 满足

$$|d_{2,0}(\zeta, t)| = e^{\pi(2\nu_2 - \nu_4)}, \qquad \zeta \in \mathcal{I},\ t \geq 2, \tag{11.5}$$
$$|d_{2,1}(\zeta, k) - \mathcal{P}_{(\omega^2 k_2)} \mathcal{P}(\omega k_2)| \leq C |k - \omega^2 k_2| (1 + |\ln |k - \omega^2 k_2||), \qquad \zeta \in \mathcal{I},\ k \in \mathcal{X}_2^\epsilon. \tag{11.6}$$

第 n 此引理可由与证明引理 10.2 时所用的同类论证得出 .

引理 11.2. 函数 $m^{\omega^2k_2}(x,\ t,\ k)$ 在 (11.4) 中定义，是关于$k \in D_\epsilon(\omega^2k_2) \setminus \mathcal{X}_2^\epsilon$的解析函数，且对于 $t \geq 2,\ \zeta \in \mathcal{I}$，以及 $k \in D_\epsilon(\omega^2k_2) \setminus \mathcal{X}_2^\epsilon$一致有界。在 $\mathcal{X}_2^\epsilon$ 上， $m^{\omega^2k_2}$满足跳跃条件 $m_+^{\omega^2k_2} = m_-^{\omega^2k_2} v^{\omega^2k_2}$，其中 $v^{\omega^2k_2}$满足

$$\begin{cases} \|v^{(4)} - v^{\omega^2k_2}\|_{L^1(\mathcal{X}_2^\epsilon)} \leq Ct^{-1}\ln t, \\ \|v^{(4)} - v^{\omega^2k_2}\|_{L^\infty(\mathcal{X}_2^\epsilon)} \leq Ct^{-1/2}\ln t, \end{cases} \qquad \zeta \in \mathcal{I},\ t \geq 2. \tag{11.7}$$

此外，当 $t \to \infty$ 时，

$$\|m^{\omega^2k_2}(x,t,\cdot)^{-1} - I\|_{L^\infty(\partial D_\epsilon(\omega^2k_2))} = O(t^{-1/2}), \tag{11.8}$$

$$m^{\omega^2k_2} - I = \frac{Y_2(\zeta,t)m_1^{X,(2)}(q_2,q_4,q_5,q_6)Y_2(\zeta,t)^{-1}}{z_{2,\star}\sqrt{t}(k-\omega^2k_2)\hat{z}_2(\zeta,k)} + O(t^{-1}) \tag{11.9}$$

对于 $\zeta \in \mathcal{I}$一致地，其中 $\partial D_\epsilon(\omega^2k_2)$ 取顺时针方向，且 $m^{X,\ (2)}_{,\ 1}$ 由 (A.7)给出。

12. The $n^{(4)} \to \hat{n}$ transformation

我们利用对称性

$$m^{\omega k_4}(x,t,k) = \mathcal{A}m^{\omega k_4}(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{B}m^{\omega k_4}(x,t,k^{-1})\mathcal{B},$$
$$m^{\omega^2k_2}(x,t,k) = \mathcal{A}m^{\omega^2k_2}(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{B}m^{\omega^2k_2}(x,t,k^{-1})\mathcal{B},$$

将 $m^{\omega k_4}$ 和 $m^{\omega^2k_2}$ 的定义域分别从 $D_\epsilon(\omega k_4)$ 和 $D_\epsilon(\omega^2k_2)$ 扩展到 $\mathcal{D}_{\omega k_4}$ 和 $\mathcal{D}_{\omega^2k_2}$，其中

$$\mathcal{D}_{\omega k_4} := D_\epsilon(\omega k_4) \cup \omega D_\epsilon(\omega k_4) \cup \omega^2 D_\epsilon(\omega k_4) \cup D_\epsilon(\tfrac{1}{\omega k_4}) \cup \omega D_\epsilon(\tfrac{1}{\omega k_4}) \cup \omega^2 D_\epsilon(\tfrac{1}{\omega k_4}),$$
$$\mathcal{D}_{\omega^2k_2} := D_\epsilon(\omega^2k_2) \cup \omega D_\epsilon(\omega^2k_2) \cup \omega^2 D_\epsilon(\omega^2k_2) \cup D_\epsilon(\tfrac{1}{\omega^2k_2}) \cup \omega D_\epsilon(\tfrac{1}{\omega^2k_2}) \cup \omega^2 D_\epsilon(\tfrac{1}{\omega^2k_2}).$$

我们将证明，由下式定义的解 $\hat{n}(x,\ t,\ k)$

$$\hat{n} = \begin{cases} n^{(4)}(m^{\omega k_4})^{-1}, & k \in \mathcal{D}_{\omega k_4}, \\ n^{(4)}(m^{\omega^2k_2})^{-1}, & k \in \mathcal{D}_{\omega^2k_2}, \\ n^{(4)}, & \text{elsewhere}, \end{cases} \tag{12.1}$$

当 t 较大时很小。令 $\hat{\Gamma} = \Gamma^{(4)} \cup \partial\mathcal{D}$，其中 $\mathcal{D} :\ = \mathcal{D}_{\omega k_4} \cup \mathcal{D}_{\omega^2k_2}$ 为图 9所示的轮廓，其中属于 $\partial\mathcal{D}$ 的每个圆均取负向定向，并将跳跃矩阵 $\hat{v}$定义为

$$\hat{v} = \begin{cases} v^{(4)}, & k \in \hat{\Gamma} \setminus \bar{\mathcal{D}}, \\ m^{\omega k_4}, & k \in \partial\mathcal{D}_{\omega k_4}, \\ m^{\omega^2k_2}, & k \in \partial\mathcal{D}_{\omega^2k_2}, \\ m_-^{\omega k_4} v^{(4)} (m_+^{\omega k_4})^{-1}, & k \in \hat{\Gamma} \cap \mathcal{D}_{\omega k_4}, \\ m_-^{\omega^2k_2} v^{(4)} (m_+^{\omega^2k_2})^{-1}, & k \in \hat{\Gamma} \cap \mathcal{D}_{\omega^2k_2}. \end{cases} \tag{12.2}$$

$\hat{}\ \hat{}\ \hat{}$ 函数 $\hat{n}$ 在 $\mathbb{C}\setminus\Gamma$ 上解析，并满足 $\hat{n}_+ = \hat{n}_-\hat{v}$ （ $k \in \Gamma \setminus \Gamma_\star$），其中 $\Gamma_\star$ 表示 $\hat{\Gamma}$ 的自交点。当 $k \to \infty$ 时，$\hat{n}(x,\ t,\ k) = (1,\ 1,\ 1) + O(k^{-1})$。

设 $\hat{\mathcal{X}}^\epsilon = \bigcup_{j=1}^2 \left(\mathcal{X}_j^\epsilon \cup \omega\mathcal{X}_j^\epsilon \cup \omega^2\mathcal{X}_j^\epsilon \cup (\mathcal{X}_j^\epsilon)^{-1} \cup (\omega\mathcal{X}_j^\epsilon)^{-1} \cup (\omega^2\mathcal{X}_j^\epsilon)^{-1}\right)$。

引理 12.1. 设 $\hat{w} = \hat{v} - I$。以下估计对 $t \geq 2$ 和 $\zeta \in \mathcal{I}$ 一致成立：

$$\|\hat{w}\|_{(L^1\cap L^\infty)(\hat{\Gamma}\setminus(\partial\mathcal{D}\cup\hat{\mathcal{X}}^\epsilon))} \leq Ct^{-1}, \tag{12.3a}$$

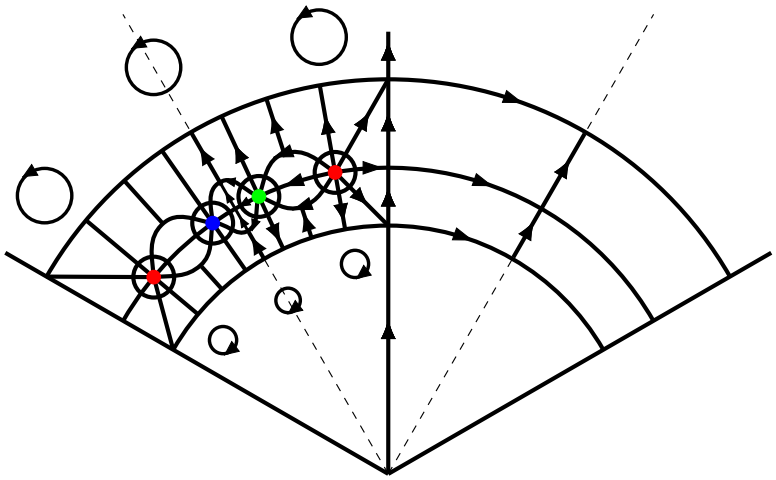


图 9. 对于 $\hat{\Gamma} = \Gamma^{(4)} \cup \partial\mathcal{D}$ 的轮廓$\arg k \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$（实线）以及 S 的边界（虚线）。

$$\|\hat{w}\|_{(L^1\cap L^\infty)(\partial\mathcal{D})} \le Ct^{-1/2}, \tag{12.3b}$$
$$\|\hat{w}\|_{L^1(\hat{\mathcal{X}}^\epsilon)} \le Ct^{-1}\ln t, \tag{12.3c}$$
$$\|\hat{w}\|_{L^\infty(\hat{\mathcal{X}}^\epsilon)} \le Ct^{-1/2}\ln t. \tag{12.3d}$$

证明。在 $\Gamma \setminus \mathcal{D}$ 上，估计式 (12.3a) 由 (12.2) 以及引理 8.1 和 9.1 得出；在 $\hat{\Gamma}\cap\mathcal{D}) \setminus \mathcal{X}^\epsilon$ 上，该估计由 (12.2) 以及引理 6.3、7.3、10.2 和 11.2 得出。估计式 (12.3b) 由 (12.2)、(10.12) 和 (11.8) 得出。最后，(12.3c) 和 (12.3d) 由 (12.2)、(10.11) 和 (11.7) 得出。□

引理 12.1 中的估计表明

$$\begin{cases} \|\hat{w}\|_{L^1(\hat{\Gamma})} \le Ct^{-1/2}, \\ \|\hat{w}\|_{L^\infty(\hat{\Gamma})} \le Ct^{-1/2}\ln t, \end{cases} \qquad t \ge 2,\ \zeta \in \mathcal{I}, \tag{12.4}$$

因此，利用一般恒等式 $\|f\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1}^{1/p}\|f\|_{L^\infty}^{(p-1)/p}$，

$$\|\hat{w}\|_{L^p(\hat{\Gamma})} \le Ct^{-\frac{1}{2}}(\ln t)^{\frac{p-1}{p}}, \qquad t \ge 2,\ \zeta \in \mathcal{I}, \tag{12.5}$$

对每个 $1 \le p \le \infty$。估计式（12.5）蕴含 $\hat{w} \in (L^2\cap L^\infty)(\hat{\Gamma})$，且存在一个 T，使得 $I - \hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}(x,t,\cdot)} \in \mathcal{B}(L^2(\hat{\Gamma}))$ 可逆，只要 $\zeta \in \mathcal{I}$ 且 $t \ge T$。因此，标准的黎曼-希尔伯特理论给出

$$\hat{n}(x,t,k) = (1,1,1) + \hat{\mathcal{C}}(\hat{\mu}\hat{w}) = (1,1,1) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\Gamma}} \hat{\mu}(x,t,s)\hat{w}(x,t,s)\frac{ds}{s-k} \tag{12.6}$$

对于 $\zeta \in \mathcal{I}$ 和 $t \ge T$，其中

$$\hat{\mu} := (1,1,1) + (I - \hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}})^{-1}\hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}}(1,1,1) \in (1,1,1) + L^2(\hat{\Gamma}). \tag{12.7}$$

引理 12.2。 令 $1 < p < \infty$。对于所有充分大的 t，我们有

$$\|\hat{\mu} - (1,1,1)\|_{L^p(\hat{\Gamma})} \le Ct^{-\frac{1}{2}}(\ln t)^{\frac{p-1}{p}}, \qquad \zeta \in \mathcal{I}.$$

证明。假设 t 足够大，使得 $\|\hat{w}\|_{L^\infty(\hat{\Gamma})} < K_p^{-1}$，其中 $K_p := \|\hat{\mathcal{C}}_-\|_{\mathcal{B}(L^p(\hat{\Gamma}))}$ 是有限的，因为 $p > 1$。估计式（12.5）蕴含 $\hat{w} \in L^p(\Gamma)$，因此 $\mathcal{C}_{\hat{w}}(1,\ 1,\ 1) \in L^p(\Gamma)$。

Thus

$$\|\hat{\mu}-(1,1,1)\|_{L^p(\hat{\Gamma})} \le \sum_{j=1}^{\infty} \|\hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}}\|^{j-1}_{\mathcal{B}(L^p(\hat{\Gamma}))} \|\hat{\mathcal{C}}_{\hat{w}}(1,1,1)\|_{L^p(\hat{\Gamma})} \le \sum_{j=1}^{\infty} K_p^j \|\hat{w}\|^{j-1}_{L^\infty(\hat{\Gamma})} \|\hat{w}\|_{L^p(\hat{\Gamma})}$$
$$= \frac{K_p\|\hat{w}\|_{L^p(\hat{\Gamma})}}{1-K_p\|\hat{w}\|_{L^\infty(\hat{\Gamma})}}.$$

现在，该结论可由（12.4）和（12.5）推出。 □

现在我们转而研究 $\hat{}n$ 的渐近行为。如下极限存在： $k\to\infty$

$$\hat{n}^{(1)}(x,t) := \lim_{k\to\infty} k(\hat{n}(x,t,k)-(1,1,1)) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\Gamma}} \hat{\mu}(x,t,k)\hat{w}(x,t,k)dk.$$

引理 12.3. 当 $t\to\infty$,

$$\hat{n}^{(1)}(x,t) = -\frac{(1,1,1)}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \hat{w}(x,t,k)dk + O(t^{-1}\ln t). \tag{12.8}$$

证明. 由于

$$\hat{n}^{(1)}(x,t) = -\frac{(1,1,1)}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}} \hat{w}(x,t,k)dk - \frac{(1,1,1)}{2\pi i}\int_{\hat{\Gamma}\setminus\partial\mathcal{D}} \hat{w}(x,t,k)dk$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\hat{\Gamma}} (\hat{\mu}(x,t,k)-(1,1,1))\hat{w}(x,t,k)dk,$$

该引理由引理 12.1 和 12.2 以及直接估计即可得出。 □

我们定义函数 $\{F_{(l)1}, F_2^{(l)}\}_{l\in\mathbb{Z}}$ 为

$$F_1^{(l)}(\zeta,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon(\omega k_4)} k^{l-1}\hat{w}(x,t,k)dk = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon(\omega k_4)} k^{l-1}(m^{\omega k_4}-I)dk,$$
$$F_2^{(l)}(\zeta,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon(\omega^2 k_2)} k^{l-1}\hat{w}(x,t,k)dk = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon(\omega^2 k_2)} k^{l-1}(m^{\omega^2 k_2}-I)dk.$$

由（10.13）和（11.9）可推知 $F_{(l)1}$ 以及 $F_2^{(l)}$ 满足（回想一下，$\hat{}z_1(\zeta,\omega k_4) = 1 = \hat{}z_2(\zeta,\omega^2 k_2)$，并且 $\partial D_\epsilon(\omega k_4)$ 和 $\partial D_\epsilon(\omega^2 k_2)$ 的方向均为负向）

$$F_1^{(l)}(\zeta,t) = (\omega k_4)^{l-1}\frac{Y_1(\zeta,t)m_1^{X,(1)}(q_1,q_3)Y_1(\zeta,t)^{-1}}{z_{1,\star}\sqrt{t}} + O(t^{-1})$$
$$= -i(\omega k_4)^l Z_1(\zeta,t) + O(t^{-1}) \qquad \text{as } t\to\infty, \tag{12.9}$$
$$F_2^{(l)}(\zeta,t) = (\omega^2 k_2)^{l-1}\frac{Y_2(\zeta,t)m_1^{X,(2)}(q_2,q_4,q_5,q_6)Y_2(\zeta,t)^{-1}}{z_{2,\star}\sqrt{t}} + O(t^{-1})$$
$$= -i(\omega^2 k_2)^l Z_2(\zeta,t) + O(t^{-1}) \qquad \text{as } t\to\infty, \tag{12.10}$$

其中

$$Z_1(\zeta,t) := \frac{Y_1 m_1^{X,(1)} Y_1^{-1}}{-i\omega k_4 z_{1,\star}\sqrt{t}} = \frac{1}{-i\omega k_4 z_{1,\star}\sqrt{t}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\beta_{12}^{(1)} d_{1,0}\lambda_1^2}{e^{t\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4)}} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta_{21}^{(1)} e^{t\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4)}}{d_{1,0}\lambda_1^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{12.11a}$$

$$Z_2(\zeta,t) := \frac{Y_2 m_1^{X,(2)} Y_2^{-1}}{-i\omega^2 k_2 z_{2,\star}\sqrt{t}} = \frac{1}{-i\omega^2 k_2 z_{2,\star}\sqrt{t}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_{12}^{(2)} d_{2,0}\lambda_2^2}{e^{t\Phi_{32}(\zeta,\omega^2 k_2)}} \\ 0 & \frac{\beta_{21}^{(2)} e^{t\Phi_{32}(\zeta,\omega^2 k_2)}}{d_{2,0}\lambda_2^2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{12.11b}$$

and

$$\beta_{12}^{(1)}=\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}e^{\frac{\pi\hat{\nu}_1}{2}}e^{2\pi\nu_1}\sqrt{2\pi}q_3}{(e^{\pi\hat{\nu}_1}-e^{-\pi\hat{\nu}_1})\Gamma(-i\hat{\nu}_1)},\qquad \beta_{21}^{(1)}=\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}e^{\frac{\pi\hat{\nu}_1}{2}}\sqrt{2\pi}\bar{q}_3}{(e^{\pi\hat{\nu}_1}-e^{-\pi\hat{\nu}_1})\Gamma(i\hat{\nu}_1)},\tag{12.12a}$$

$$\beta_{12}^{(2)}=\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}e^{\frac{\pi\hat{\nu}_2}{2}}e^{2\pi(\nu_4-\nu_2)}\sqrt{2\pi}(\bar{q}_6-\bar{q}_2\bar{q}_5)}{(e^{\pi\hat{\nu}_2}-e^{-\pi\hat{\nu}_2})\Gamma(-i\hat{\nu}_2)},\qquad \beta_{21}^{(2)}=\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}e^{\frac{\pi\hat{\nu}_2}{2}}e^{2\pi\nu_2}\sqrt{2\pi}(q_6-q_2q_5)}{(e^{\pi\hat{\nu}_2}-e^{-\pi\hat{\nu}_2})\Gamma(i\hat{\nu}_2)},\tag{12.12b}$$

以及 ν_1，$\hat{}\nu_1$，ν_2，$\hat{}\nu_2$，ν_4 已在引理7.1和7.2中定义。

引理12.4。对于 $l\in\mathbb{Z}$ 和 $j=0$，1、2，我们有

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon(\omega k_4)}k^l\hat{w}(x,t,k)dk=\omega^{j(l+1)}\mathcal{A}^{-j}F_1^{(l+1)}(\zeta,t)\mathcal{A}^j,\tag{12.13}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon((\omega k_4)^{-1})}k^l\hat{w}(x,t,k)dk=-\omega^{j(l+1)}\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}F_1^{(-l-1)}(\zeta,t)\mathcal{B}\mathcal{A}^j,\tag{12.14}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon(\omega^2 k_2)}k^l\hat{w}(x,t,k)dk=\omega^{j(l+1)}\mathcal{A}^{-j}F_2^{(l+1)}(\zeta,t)\mathcal{A}^j,\tag{12.15}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon((\omega^2 k_2)^{-1})}k^l\hat{w}(x,t,k)dk=-\omega^{j(l+1)}\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}F_2^{(-l-1)}(\zeta,t)\mathcal{B}\mathcal{A}^j.\tag{12.16}$$

证明。$\hat{}v$ 的对称性表明

$$\hat{w}(x,t,k)=\mathcal{A}\hat{w}(x,t,\omega k)\mathcal{A}^{-1}=\mathcal{B}\hat{w}(x,t,k^{-1})\mathcal{B},\qquad k\in\partial\mathcal{D}.$$

因此，对于 $j=0$，1，2，我们有

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon(\omega k_4)}k^l\hat{w}(x,t,k)dk=-\frac{\omega^{j(l+1)}}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon(\omega k_4)}k^l\hat{w}(x,t,\omega^j k)dk=\omega^{j(l+1)}\mathcal{A}^{-j}F_1^{(l+1)}(\zeta,t)\mathcal{A}^j,$$

and

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon((\omega k_4)^{-1})}k^l\hat{w}(x,t,k)dk=-\frac{\omega^{j(l+1)}}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon((\omega k_4)^{-1})}k^l\hat{w}(x,t,\omega^j k)dk\\&=-\frac{\omega^{j(l+1)}\mathcal{A}^{-j}}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon((\omega k_4)^{-1})}k^l\hat{w}(x,t,k)dk\mathcal{A}^j=-\frac{\omega^{j(l+1)}\mathcal{A}^{-j}}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon(\omega k_4)}k^{-l}\hat{w}(x,t,k^{-1})\frac{dk}{-k^2}\mathcal{A}^j\\&=\frac{\omega^{j(l+1)}\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}}{2\pi i}\int_{\partial D_\epsilon(\omega k_4)}k^{-l-2}\hat{w}(x,t,k)dk\mathcal{B}\mathcal{A}^j=-\omega^{j(l+1)}\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}F_1^{(-l-1)}(\zeta,t)\mathcal{B}\mathcal{A}^j.\end{aligned}$$

这就证明了（12.13）和（12.14）。对于（12.15）和（12.16）的证明类似 r. □

利用引理 12.4，我们得到

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\mathcal{D}}\hat{w}(x,t,k)dk=&-\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon(\omega k_4)}\hat{w}(x,t,k)dk-\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon((\omega k_4)^{-1})}\hat{w}(x,t,k)dk\\&-\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon(\omega^2 k_2)}\hat{w}(x,t,k)dk-\sum_{j=0}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\omega^j\partial D_\epsilon((\omega^2 k_2)^{-1})}\hat{w}(x,t,k)dk\\=&\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}F_1^{(1)}(\zeta,t)\mathcal{A}^j-\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}F_1^{(-1)}(\zeta,t)\mathcal{B}\mathcal{A}^j\\&+\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}F_2^{(1)}(\zeta,t)\mathcal{A}^j-\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}F_2^{(-1)}(\zeta,t)\mathcal{B}\mathcal{A}^j.\end{aligned}$$

因此，(12.8)、(12.9) 和 (12.10) 表明 $\hat{}n^{(1)} = (1,1,1)\,\hat{}m^{(1)}$，其中

$$\begin{aligned}\hat{m}^{(1)}(x,t) = &\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}F_1^{(1)}(\zeta,t)\mathcal{A}^j - \sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}F_1^{(-1)}(\zeta,t)\mathcal{B}\mathcal{A}^j\\ &+\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}F_2^{(1)}(\zeta,t)\mathcal{A}^j - \sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}F_2^{(-1)}(\zeta,t)\mathcal{B}\mathcal{A}^j + O(t^{-1}\ln t)\\ &= -i(\omega k_4)^1\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}Z_1(\zeta,t)\mathcal{A}^j + i(\omega k_4)^{-1}\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}Z_1(\zeta,t)\mathcal{B}\mathcal{A}^j\\ &- i(\omega^2 k_2)^1\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}Z_2(\zeta,t)\mathcal{A}^j + i(\omega^2 k_2)^{-1}\sum_{j=0}^{2}\omega^j\mathcal{A}^{-j}\mathcal{B}Z_2(\zeta,t)\mathcal{B}\mathcal{A}^j + O(t^{-1}\ln t)\end{aligned} \tag{12.17}$$

当 $\zeta\in\mathcal{I}$ 时，$t\to\infty$ 一致地成立。

13. Asymptotics of u

回顾 (4.1)，$u(x,t) = -i\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x}n_3^{(1)}(x,t)$，其中 $n_3(x,t,k) = 1 + n_3^{(1)}(x,t)k^{-1} + O(k^{-2})$，当 $k\to\infty$ 时成立。还要回顾的是，$n^{(4)}$ 定义为等于 $n^{(3)}$，但在 $\mathcal{D}_{\mathrm{sol}}$ 中除外。再考虑变换 (5.8)、(6.2)、(8.1) 和 (12.1)，我们得到

$$n = \hat{n}\Delta^{-1}(G^{(2)})^{-1}(G^{(1)})^{-1}$$

对于 $k\in\mathbb{C}\setminus(\hat{}\Gamma\cup\bar{\mathcal{D}}\cup\bar{\mathcal{D}}_{\mathrm{sol}})$，其中 $G^{(1)}$、$G^{(2)}$、Δ 分别定义于（5.6）、（6.3）和（7.6）中。因此

$$u(x,t) = -i\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\hat{n}_3^{(1)}(x,t) + \lim_{k\to\infty}k(\Delta_{33}(\zeta,k)^{-1}-1)\right) = -i\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x}\hat{n}_3^{(1)}(x,t) + O(t^{-1}) \tag{13.1}$$

当 $t\to\infty$。由（12.17），当 $t\to\infty$，

$$\begin{aligned}\hat{n}_3^{(1)} &= Z_{1,13}(i(\omega k_4)^{-1} - i(\omega k_4)^1) + Z_{1,31}(i\omega^2(\omega k_4)^{-1} - i\omega^1(\omega k_4)^1)\\ &\quad + Z_{2,23}(i(\omega^2 k_2)^{-1} - i(\omega^2 k_2)^1) + Z_{2,32}(i\omega^1(\omega^2 k_2)^{-1} - i\omega^2(\omega^2 k_2)^1) + O(t^{-1}\ln t).\end{aligned}$$

回顾引理 7.2，可知 $\hat{}\nu_1 = \nu_3 - \nu_1 \geq 0$ 和 $\hat{}\nu_2 = \nu_2 + \nu_5 - \nu_4 \geq 0$。由（10.7）、（11.5）、（12.11）以及（12.12），我们看到 $Z_{1,\ 13} = \lambda_1^4\overline{Z_{1,\ 31}}$ 以及 $Z_{2,\ 23} = \lambda_2^4\overline{Z_{2,\ 32}}$。此外，由（10.4）和（11.3），有 $\lambda_1^4 = -\tilde{r}(k_4^{-1})^{-1}\left(\begin{smallmatrix}\mathcal{P}\\ \mathcal{P}\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}(\omega k_4)\\ (\omega^2 k_4)\end{smallmatrix}\right)^2$ 以及 $\lambda_2^4 = -\tilde{r}(k_2^{-1})\left(\begin{smallmatrix}\mathcal{P}(\omega^2 k_2)\\ \mathcal{P}\ \omega k_2\end{smallmatrix}\ \begin{smallmatrix}(\ )\\ (\ )\end{smallmatrix}\right)^2$。因此，当 $t\to\infty$时，

$$\begin{aligned}\hat{n}_3^{(1)} &= 2i\,\mathrm{Im}\left(Z_{1,13}(i(\omega k_4)^{-1} - i(\omega k_4)^1) + Z_{2,23}(i(\omega^2 k_2)^{-1} - i(\omega^2 k_2)^1)\right) + O(t^{-1}\ln t)\\ &= 2i\,\mathrm{Im}\left[\frac{\beta_{12}^{(1)}d_{1,0}(i(\omega k_4)^{-1} - i(\omega k_4)^1)\mathcal{P}(\omega k_4)}{-i\omega k_4 z_{1,\star}\sqrt{t}e^{t\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4)}\left|\tilde{r}(\frac{1}{k_4})\right|^{\frac{1}{2}}\mathcal{P}(\omega^2 k_4)}\right.\\ &\quad\left. + \frac{\beta_{12}^{(2)}d_{2,0}(i(\omega^2 k_2)^{-1} - i(\omega^2 k_2)^1)\mathcal{P}(\omega^2 k_2)}{-i\omega^2 k_2 z_{2,\star}\sqrt{t}e^{t\Phi_{32}(\zeta,\omega^2 k_2)}\left|\tilde{r}(\frac{1}{k_2})\right|^{-\frac{1}{2}}\mathcal{P}(\omega k_2)}\right] + O(t^{-1}\ln t).\end{aligned}$$

函数 $\mathcal{P}(k)$ 满足对称性 $\mathcal{P}(k) = \mathcal{P}(k^{-1}) = \mathcal{P}(\bar{k})^{-1}$。由此可得，对于 $k\in\partial\mathbb{D}$，$|\mathcal{P}(k)| = 1$，因此

$$\left|\frac{\mathcal{P}(\omega k_4)}{\mathcal{P}(\omega^2 k_4)}\right| = \left|\frac{\mathcal{P}(\omega^2 k_2)}{\mathcal{P}(\omega k_2)}\right| = 1. \tag{13.2}$$

利用（12.12）、（13.2）以及以下恒等式

$$d_{1,0}(\zeta,t)=e^{-\pi\nu_1}e^{i\arg d_{1,0}(\zeta,t)},\qquad d_{2,0}(\zeta,t)=e^{\pi(2\nu_2-\nu_4)}e^{i\arg d_{2,0}(\zeta,t)},$$
$$i(\omega k_4)^{-1}-i(\omega k_4)^{1}=2\sin(\arg(\omega k_4(\zeta))),\quad i(\omega^2 k_2)^{-1}-i(\omega^2 k_2)^{1}=2\sin(\arg(\omega^2 k_2(\zeta))),$$
$$|\Gamma(i\nu)|=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\nu(e^{\pi\nu}-e^{-\pi\nu})}},\quad \nu\in\mathbb{R},\qquad q_4-\bar q_5-q_2\bar q_6=0,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\hat n_3^{(1)}&=\frac{4i\sqrt{\hat\nu_1}}{-i\omega k_4 z_{1,\star}\sqrt{t}|\tilde r(\frac{1}{k_4})|^{\frac12}}\sin(\arg(\omega k_4))\\
&\times\sin(\tfrac{3\pi}{4}+\arg q_3+\arg\Gamma(i\hat\nu_1)+\arg d_{1,0}+\arg\tfrac{\mathcal P(\omega k_4)}{\mathcal P(\omega^2k_4)}-t\mathrm{Im}\,\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4(\zeta)))\\
&+\frac{4i\sqrt{\hat\nu_2}|\tilde r(\frac{1}{k_2})|^{\frac12}}{-i\omega^2 k_2 z_{2,\star}\sqrt{t}}\sin(\arg(\omega^2k_2))\\
&\times\sin(\tfrac{3\pi}{4}-\arg(q_6-q_2q_5)+\arg\Gamma(i\hat\nu_2)+\arg d_{2,0}+\arg\tfrac{\mathcal P(\omega^2k_2)}{\mathcal P(\omega k_2)}-t\mathrm{Im}\,\Phi_{32}(\zeta,\omega^2k_2(\zeta)))\\
&+O(t^{-1}\ln t)\quad\text{as } t\to\infty.\end{aligned}$$

如 [7], 所述，可以证明，对 x 求导不会增加误差项。因此，当 $t\to\infty$时，

$$\begin{aligned}u(x,t)&=-i\sqrt{3}\frac{\partial}{\partial x}\hat n_3^{(1)}(x,t)+O(t^{-1})=\frac{-4\sqrt{3}\sqrt{\hat\nu_1}\frac{d}{d\zeta}\mathrm{Im}\,\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4(\zeta))}{-i\omega k_4 z_{1,\star}\sqrt{t}|\tilde r(\frac{1}{k_4})|^{\frac12}}\sin(\arg(\omega k_4))\\
&\times\cos(\tfrac{3\pi}{4}+\arg q_3+\arg\Gamma(i\hat\nu_1)+\arg d_{1,0}+\arg\tfrac{\mathcal P(\omega k_4)}{\mathcal P(\omega^2k_4)}-t\mathrm{Im}\,\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4(\zeta)))\\
&+\frac{-4\sqrt{3}\sqrt{\hat\nu_2}|\tilde r(\frac{1}{k_2})|^{\frac12}\frac{d}{d\zeta}\mathrm{Im}\,\Phi_{32}(\zeta,\omega^2k_2(\zeta))}{-i\omega^2 k_2 z_{2,\star}\sqrt{t}}\sin(\arg(\omega^2k_2))\\
&\times\cos(\tfrac{3\pi}{4}-\arg(q_6-q_2q_5)+\arg\Gamma(i\hat\nu_2)+\arg d_{2,0}+\arg\tfrac{\mathcal P(\omega^2k_2)}{\mathcal P(\omega k_2)}-t\mathrm{Im}\,\Phi_{32}(\zeta,\omega^2k_2(\zeta)))\\
&+O(t^{-1}\ln t).\end{aligned}$$

根据这些关系

$$\frac{d}{d\zeta}[\mathrm{Im}\,\Phi_{31}(\zeta,\omega k_4(\zeta))]=-\mathrm{Im}\,k_4(\zeta),\qquad \frac{d}{d\zeta}[\mathrm{Im}\,\Phi_{32}(\zeta,\omega^2 k_2(\zeta))]=\mathrm{Im}\,k_2(\zeta),$$

这就完成了定理 2.1 的证明。

Appendix A. Model RH problems

设 $X\subset\mathbb{C}$为由 $X=X_1\cup\cdots\cup X_4$定义的十字形，其中射线

$$X_1:=\{\rho e^{\frac{i\pi}{4}}\,|\,0\le\rho<\infty\},\qquad X_2:=\{\rho e^{\frac{3i\pi}{4}}\,|\,0\le\rho<\infty\},$$
$$X_3:=\{\rho e^{-\frac{3i\pi}{4}}\,|\,0\le\rho<\infty\},\qquad X_4:=\{\rho e^{-\frac{i\pi}{4}}\,|\,0\le\rho<\infty\},\tag{A.1}$$

均朝远离原点的方向。下面两个引理的证明与 [9, 11]中出现的抛物柱面模型问题的证明类似（但更复杂）。引理A.2 的详细证明可见 [5]。

引理 A.1（第四扇区中 $k=\omega k_4$ 附近所需的模型 RH 问题）。设 q_1，$q_3\in\mathbb{C}$ 满足 $1+|q_1|^2-|q_3|>0$，定义

$$\nu_1=-\tfrac{1}{2\pi}\ln(1+|q_1|^2),\qquad \nu_3=-\tfrac{1}{2\pi}\ln(1+|q_1|^2-|q_3|^2),$$

并定义跳跃矩阵 $v^{X,(1)}(z)$，对 $z\in X$ 定义为

$$v^{X,(1)}(z)=\begin{cases}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -\bar{q}_3 z^{-2i\nu_3} z_{(0)}^{i\nu_1} z^{i\nu_1} e^{\frac{iz^2}{2}} & 0 & 1\end{pmatrix}, & z\in X_1,\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{-q_3}{1+|q_1|^2-|q_3|^2} z^{2i\nu_3} z_{(0)}^{-i\nu_1} z^{-i\nu_1} e^{-\frac{iz^2}{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, & z\in X_2,\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\bar{q}_3}{1+|q_1|^2-|q_3|^2} z^{-2i\nu_3} z_{(0)}^{i\nu_1} z^{i\nu_1} e^{\frac{iz^2}{2}} & 0 & 1\end{pmatrix}, & z\in X_3,\\ \begin{pmatrix}1 & 0 & q_3 z^{2i\nu_3} z_{(0)}^{-i\nu_1} z^{-i\nu_1} e^{-\frac{iz^2}{2}}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, & z\in X_4,\end{cases} \tag{A.2}$$

其中，$z^{i\nu_3}$、$z^{i\nu_1}$ 的分支位于负实轴上，而 $z^{i\nu_1}{}_{(0)}$ 的分支位于正实轴上，使得 $z^{i\nu}=|z|^{i\nu}e^{-\nu\arg(z)}$、$\arg(z)\in(-\pi,\pi)$ 以及 $z_{(0)}^{i\nu}=|z|^{i\nu}e^{-\nu\arg_0(z)}$、$\arg_0(z)\in(0,2\pi)$。于是，*RH* 问题

(*a*) $m^{X,(1)}(q_1,\ q_3,\ \cdot)$：$\mathbb{C}\setminus X\to\mathbb{C}^{3\times3}$ 解析；(*b*) 在 $X\setminus\{0\}$ 上，的边界值$^{(1)}$ 存在且连续，并满足 $m^{X,(1)}_{+}=m^{X,(1)}_{-}v^{X,(1)}$；(

c) $m^{X,(1)}(q_1、\ q_3、\ z)=I+O(z^{-1})$ 如 $z\to\infty$，一个 $d\ m^{X,(1)}(q_1、\ q_3、\ z)=O(1)$ 当 $z\to$ 时；0

存在唯一解 $m^{X,(1)}(q_1、\ q_3、\ z)$。该解满足

$$m^{X,(1)}(z)=I+\frac{m_1^{X,(1)}}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right),\ z\to\infty,\qquad m_1^{X,(1)}:=\begin{pmatrix}0 & 0 & \beta_{12}^{(1)}\\ 0 & 0 & 0\\ \beta_{21}^{(1)} & 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{A.3}$$

其中，误差项关于 $\arg\ z\in[0,2\pi]$ 以及 q_1、q_3 在 $\{q_1,q_3\in\mathbb{C}\,|\,1+|q_1|^2-|q_3|>0\}$的紧子集上一致，并且 $\beta_{12}^{(1)}$、$\beta_{21}^{(1)}$ 定义为

$$\beta_{12}^{(1)}=\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}}e^{\frac{3\pi\hat{\nu}_1}{2}}e^{2\pi\nu_1}\sqrt{2\pi}q_3}{(e^{2\pi\hat{\nu}_1}-1)\Gamma(-i\hat{\nu}_1)},\qquad \beta_{21}^{(1)}=\frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}}e^{\frac{3\pi\hat{\nu}_1}{2}}\sqrt{2\pi}\bar{q}_3}{(e^{2\pi\hat{\nu}_1}-1)\Gamma(i\hat{\nu}_1)}, \tag{A.4}$$

其中 $\hat{\nu}_1:=\nu_3-\nu_1\geq0$。（注意，$\beta_{12}^{(1)}\beta_{21}^{(1)}=\hat{\nu}_1$。）

引理 A.2（$k=\omega^2k_2$附近所需的模型 RH 问题）。设 q_2、q_4、q_5、$q_6\in\mathbb{C}$ 满足 $1+|q_2|^2-|q_4|^2>0$、$1-|q_5|^2-|q_6|^2>0$，并且

$$q_4-\bar{q}_5-q_2\bar{q}_6=0. \tag{A.5}$$

定义 ν_2、ν_4、$\nu_5\in\mathbb{R}$ 如下

$$\nu_2=-\tfrac{1}{2\pi}\ln(1+|q_2|^2),\quad \nu_4=-\tfrac{1}{2\pi}\ln(1+|q_2|^2-|q_4|^2),\quad \nu_5=-\tfrac{1}{2\pi}\ln(1-|q_5|^2-|q_6|^2).$$

定义 $v^{X,(2)}(z)$ 对于 $z \in X$ 如下

$$v^{X,(2)}(z) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{q_6 - q_2 q_5}{1+|q_2|^2} z^{-i(2\nu_5-\nu_4)} z_{(0)}^{-i(2\nu_2-\nu_4)} e^{\frac{iz^2}{2}} & 1 \end{pmatrix}, & z \in X_1, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\bar{q}_6 - \bar{q}_2\bar{q}_5}{1-|q_5|^2-|q_6|^2} z^{i(2\nu_5-\nu_4)} z_{(0)}^{i(2\nu_2-\nu_4)} e^{-\frac{iz^2}{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & z \in X_2, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{q_6 - q_2 q_5}{1-|q_5|^2-|q_6|^2} z^{-i(2\nu_5-\nu_4)} z_{(0)}^{-i(2\nu_2-\nu_4)} e^{\frac{iz^2}{2}} & 1 \end{pmatrix}, & z \in X_3, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\bar{q}_6 - \bar{q}_2\bar{q}_5}{1+|q_2|^2} z^{i(2\nu_5-\nu_4)} z_{(0)}^{i(2\nu_2-\nu_4)} e^{-\frac{iz^2}{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & z \in X_4, \end{cases} \tag{A.6}$$

其中 $z^{i\nu}$ 沿 $(-\infty, 0]$ 有一条支割线，而 $z_{(0)}^{i\nu}$ 沿 $[0, +\infty)$ 有一条支割线，使得 $z^{i\nu} = |z|^{i\nu} e^{-\nu \arg(z)}$、$\arg(z) \in (-\pi, \pi)$，且 $z_{(0)}^{i\nu} = |z|^{i\nu} e^{-\nu \arg_0(z)}$、$\arg_0(z) \in (0, 2\pi)$。那么 *RH* 问题

(a) $m^{X,(2)}(\cdot) = m^{X,(2)}(q_2, q_4, q_5, q_6, \cdot) : \mathbb{C} \setminus X \to \mathbb{C}^{3\times 3}$ 是解析的；(b) 在 $X \setminus \{0\}$ 上，$m^{X,(2)}$ 的边界值存在、连续，并满足 $m^{X,(2)}_{+} = m^{X,(2)}_{-} v^{X,(2)}$;

(c) $m^{X,(2)}(z) = I + O(z^{-1})$ 当 $z \to \infty$，且 $m^{X,(2)}(z) = O(1)$ 当 $z \to 0$;
存在唯一解 $m^{X,(2)}(z)$。该解满足

$$m^{X,(2)}(z) = I + \frac{m_1^{X,(2)}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \to \infty, \quad m_1^{X,(2)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{12}^{(2)} \\ 0 & \beta_{21}^{(2)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.7}$$

其中误差项关于 $\arg z \in [-\pi, \pi]$ 是一致的，且 q_2, q_4, q_5, q_6 取遍
$\{q_2, q_4, q_5, q_6 \in \mathbb{C} \,|\, 1 + |q_2|^2 - |q_4|^2 > 0, 1 - |q_5|^2 - |q_6|^2 > 0, q_4 - \bar{q}_5 - q_2\bar{q}_6 = 0\}$的紧子集时，

$$\beta_{12}^{(2)} := \frac{e^{\frac{3\pi i}{4}} e^{\frac{\pi\hat{\nu}_2}{2}} e^{2\pi(\nu_4-\nu_2)} \sqrt{2\pi}(\bar{q}_6 - \bar{q}_2\bar{q}_5)}{(e^{\pi\hat{\nu}_2} - e^{-\pi\hat{\nu}_2})\Gamma(-i\hat{\nu}_2)}, \qquad \beta_{21}^{(2)} := \frac{e^{-\frac{3\pi i}{4}} e^{\frac{\pi\hat{\nu}_2}{2}} e^{2\pi\nu_2} \sqrt{2\pi}(q_6 - q_2 q_5)}{(e^{\pi\hat{\nu}_2} - e^{-\pi\hat{\nu}_2})\Gamma(i\hat{\nu}_2)}, \tag{A.8}$$

其中 $\hat{\nu}_2 := \nu_2 + \nu_5 - \nu_4$。（注意，$\beta_{12}^{(2)} \beta_{21}^{(2)} = \hat{\nu}_2$。）

致谢。本研究获得 Novo Nordisk 基金会项目（资助编号 0064428）、欧洲研究委员会（资助协议编号 682537）、瑞典研究理事会（资助编号 2015-05430、2021-04626 和 2021-03877）以及 Ruth and Nils-Erik Stenb¨ack 基金会的支持。

References

[1] J. G. Berryman，浅水中孤立波的稳定性，《流体物理》**19** (1976), 771–777.[2] L. V. Bogdanov 和 V. E. Zakharov，重新探讨 Boussinesq 方程，《物理学 *D*》**165** (2002), 137–162.

[3] J. Boussinesq，关于沿水平矩形水道传播的波与涌流，并使水道中的液体从表面到底部具有大致相同的速度，*J. Math. Pures Appl.* **17** (1872), 55–108.[4] C. Charlier 和 J. Lenells，关于水波的 Boussinesq 方程，arXiv:2204.02365.[5] C. Charlier 和 J. Lenells，水波的 Boussinesq 方程：第五扇区中的渐近行为，arXiv:2301.10669.[6] C. Charlier 和 J. Lenells，含孤子的 Boussinesq 方程的直接与反散射，arXiv:2302.14593.[7] C. Charlier、J. Lenells 和 D. Wang，“良性”Boussinesq 方程：长时间渐近行为，*Analysis & PDE*，即将发表，arXiv:2003.04789.[8] P. Deift，随机矩阵理论与可积系统理论中的一些未解决问题。载于可积系统与随机矩阵，419–430，Contemp. Math. **458**，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2008.[9] P. Deift 和 X. Zhou，振荡型黎曼-希尔伯特问题的最速下降法：修正Korteweg–de Vries方程的渐近行为，*Ann. of Math.* **137** (1993), 295–368.[10] R. Hirota，浅水长波波动方程及非线性格点的精确 N孤子解，*J. Math. Phys.* **14** (1973), 810–814.[11] A. R. Its，非线性薛定谔方程解的渐近行为，以及线性微分方程组的等单值变形，苏联科学院通报**261** (1981), 14–18（俄文）；*Soviet Math. Dokl.* **24** (1982), 452–456（英文）。[12] R. S. Johnson，水波数学理论导论。剑桥应用数学丛书。剑桥大学出版社，剑桥，1997.[13] H. A. Levine 和 B. D. Sleeman，关于 Boussinesq 方程初边值问题整体解不存在的一则注记 $u_{tt} = 3u_{xxxx} + u_{xx} - 12(u^2)_{xx}$，*J. Math.Anal. Appl.* **107** (1985), 206–210.[14] F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain，NIST 数学函数数字图书馆。http://dlmf.nist.gov/，2022年3月15日发布的 1.1.5 版。[15] Z. Yang，关于“坏”Boussinesq 型方程初边值问题解的局部存在性，*Nonlinear Anal.* **51** (2002), 1259–1271.[16] V. E. Zakharov，关于一维非线性振荡链的随机化，*SovietPhys. JETP* **38** (1974), 108–110.