利用物理信息神经网络评估非线性系统的有限时间稳定性

A. Mele[a], A. Pironti[b]

[a]*Dipartimento di Economia, Ingegneria, Società e Impresa, Università degli Studi della Tuscia, Viterbo, Italy*
[b]*Dipartimento di Ingegneria Elettrica e delle Tecnologie dell'Informazione, Università degli Studi di Napoli Federico II, via Claudio 21,* 80125*, Napoli, Italy*

arXiv:2303.00437v1 [math.OC] 1 Mar 2023

摘要

本文研究一般非线性系统有限时间稳定性（FTS）性质的评估问题。首先，给出保证一般非线性系统具有有限时间稳定性的若干充要条件；这些条件以适当的李雅普诺夫型函数的存在性来表述。本文讨论了所给主要理论结果与用于线性时变（LTV）系统的、基于线性矩阵不等式（LMI）的典型条件之间的联系，并将结果扩展至离散时间系统。随后，我们提出一种方法，用于验证一大类非线性系统是否满足所得条件。该方法利用神经网络作为通用函数逼近器的能力来求得李雅普诺夫型函数。与物理信息神经网络类似，通过在一组（大量）配点上强制满足定义该函数的条件，生成网络训练数据。为说明所提方法的有效性，本文给出并讨论了一些数值示例。本文提出的技术能够以闭式形式求得所需的李雅普诺夫型函数。这具有双重优势：a）为非常广泛的一类系统提供一种实用方法，以验证所考虑的有限时间稳定性性质，并在有限时间稳定性领域实现前所未有的灵活性；b）为有限时间稳定性与控制框架下基于李雅普诺夫方法的控制应用铺平道路。

*Ke*关键词：有限时间稳定性、神经网络、通用逼近、李雅普诺夫方法 s

1. 引言

有限时间稳定性（FTS）的概念有时也称为实际稳定性，最初于20世纪50年代在俄罗斯文献中提出 [1, 2, 3]；在接下来的十年里，西方科学界也开展了这一主题的研究 [4, 5, 6]。粗略地说，若对于给定的时间范围 T、初始时刻 t_0、初始集Ω_0 以及一个轨迹集（该轨迹集可能随时间区间 $[t_0\,, t_0+T]$变化）Ω_t，只要状态轨迹的初始点位于Ω_0,内，该轨迹在所有 $t\in[t_0\,, t_0+T]$内都被限制在Ω_t 内，则称该动力系统具有有限时间稳定性。[1]（见图1）。

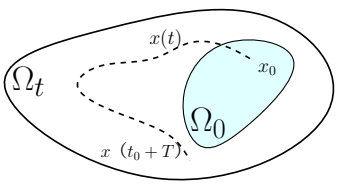


图 1：二维系统有限时间稳定性的图示。

有限时间稳定性（FTS）与李雅普诺夫稳定性相关，但彼此独立，因为它本质上关注定量结果，从而将关注重点从稳态转向所考虑系统的瞬态行为。然而，在许多情况下，可以利用李雅普诺夫型函数评估动态系统[2]的有限时间稳定性；例如，Bernfeld 和 Lakshmikantham 的开创性研究中给出了基于李雅普诺夫函数的非线性系统有限时间稳定性的充要条件 [8]。沿着同一研究思路，本文的主要目标是利用与 [8] 中类似的条件，为一大类非线性系统所考虑的有限时间稳定性提供一种实用的评估方法。

在某些情况下，可以将有限时间稳定性的李雅普诺夫类条件改写为代数（LMI）和微分（DLMI）线性矩阵不等式，从而高效求解。近年来，求解（D）LMI 的高效工具不断涌现，这一事实也重新激发了人们对该主题的兴趣。例如，对于定义在椭球域、多面体域和分段二次域上的线性时变系统，已有研究提出了基于时变二次或分段二次李雅普诺夫函数的技术（综述请参见著作 [9] 及其中的参考文献）。此外，还可以利用类似技术，为同类系统寻找有限时间稳定控制器。技术文献中已有多项研究将有限时间稳定性框架扩展至不确定 [10, 11], 混杂 [12, 13], 随机 [14, 15] 以及

Email addresses: adriano.mele@unitus.it (A. Mele), pironti@unina.it (A. Pironti)[1]请注意，本文所采用的有限时间稳定性概念，不应与文献中的另一种有限时间稳定性概念相混淆；后者指的是在有限时间区间内达到稳定平衡点这一事实 [7]。

[2]为简洁起见，我们也将这些函数称为李雅普诺夫函数，尽管它们必须满足的条件与标准李雅普诺夫稳定性情形下的条件略有不同。

时滞系统 [16], , 有时还会考虑环域的情形 [17, 18, 19, 20], , 此时状态变量同时具有上界和下界。近期，文献 [21]提出了一种基于极值寻优算法的方法，用于对控制方向未知的线性时变系统进行有限时间稳定化。也有一些研究尝试将类似技术扩展至非线性系统；例如，文献 [22]针对一类特殊的非线性二次系统给出了基于DLMI的充分条件。然而，对于非线性系统，通常无法通过（D）LMI 可行性问题来求解，因此必须考虑其他技术。基于这一思路，我们旨在提出一种用于评估非线性系统有限时间稳定性的方法。据我们所知，技术文献中尚无此类研究。本文探讨的主要问题可分为以下两点：

- 为一般非线性、非自治系统的有限时间稳定性（FTS）寻找充要条件；
- 找到一种实用方法来评估此类条件（至少适用于相当大一类非线性系统，而标准的基于线性矩阵不等式（LMI）的结果并不适用于这些系统）。

为此，我们首先以略微简化的形式重新表述文献 [8] 中给出的连续时间非线性系统有限时间稳定性的充要条件。随后，我们讨论这些条件如何推广了文献 [9] 中针对椭球域上线性系统给出的条件。此外，这一理论结果也扩展到了离散时间情形。

由于所提出的条件以存在合适的李雅普诺夫型函数为前提，我们接下来将注意力转向如何找到这类函数的表达式。本文讨论的一种可行方法是设计专门的训练过程，训练一个合适的神经网络（NN），使其充当所需的李雅普诺夫函数。在控制领域的文献中，使用神经网络表示李雅普诺夫函数并非新鲜事，这得益于神经网络（NN）能够充当通用函数逼近器 [23]。相关应用包括自治非线性系统 [24] 和机器人学 [25]；在后者的论文中，提出了一种学习器-证伪器训练过程，以加快训练过程。 [26], 中也采用了类似的训练架构，其中使用神经网络来估计离散时间多项式系统中给定控制器的吸引域。 [26] 和 [27], 均使用多输出神经网络，并结合二次表达式来保证 Lyapunov 函数的正定性。尽管基于神经网络的函数逼近已知会受到所谓维数灾难的影响，但 [28] 讨论了具有小增益性质的系统如何拥有组合式李雅普诺夫函数，并且只需使用数量随状态维数呈多项式增长的神经元即可对其进行估计。有趣的是，用于通过神经网络获得李雅普诺夫函数的训练过程，通常旨在对网络输出及其相对于输入参数的导数施加所需条件。深度神经网络通过利用描述物理过程的控制方程来满足涉及偏导数的条件，因此这些技术自然与物理信息神经网络（PINN）框架相关 [29]。

本文借鉴这些近期技术的思路，并将其与非线性非自治系统有限时间稳定性的一般条件相结合，旨在提供一种灵活的方法，用于在形状任意的域上检验一大类动力系统的有限时间稳定性。为此，我们提出一种训练神经网络，使其充当李雅普诺夫函数的方法。该过程依赖标准的 Adam 算法 [30] ，通过优化一个代价函数，在大量配点上施加所需条件。该方法利用现成的算法实现，并可在支持GPU的计算机上运行。据我们所知，这是首次提出并实现一种实用算法，用于检验如此广泛的一类系统的有限时间稳定性。

本文其余部分安排如下：第 2 节概述全文所用的符号，并给出一些预备结果。第 3 节介绍本文的主要结果。具体而言，第 3.1 节给出连续时间非线性、非自治系统有限时间稳定性的充要条件；第 3.2 节将这些条件扩展至离散时间情形。第 3.3 节讨论第 3.1 节的结果与现有连续时间线性系统结果之间的联系。第 3.4 节介绍一种基于神经网络（NNs）的数值过程，用于求得满足第 3.1 节主要结果所要求性质的李雅普诺夫函数。第 4 节给出一些数值示例，以展示所提方法的有效性。最后，第 5 节讨论所得结果并给出一些总结性意见。

2. 符号与预备知识

给定一个向量 $x \in \mathbb{R}^n$， $||x||$ 表示其标准欧几里得范数。Ω表示集合 Ω 的闭包， $|\Omega|$ 表示其测度， $\partial\Omega$表示其边界； $f(\Omega)$是集合 Ω 经函数 $f(\cdot)$ 映射所得的像。 $M \prec 0$ 表示矩阵 M 为负定， $M \succ 0$ 表示其为正定， I 表示单位矩阵（其维数可由上下文确定）。

本文将考虑如下形式的系统

$$\dot{x}(t) = f(t,x), \qquad x(t_0) = x_0\,, \tag{1}$$

其中 $f(t,x)$：$J \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，且 $J = [t_0, T]$。(1)的演化函数记为 $\varphi(t, t_0, x_0)$，而 $\phi(t, t_0)$表示线性时变系统的状态转移矩阵，其中

$$\phi(t,t_0)x_0 = \varphi(t,t_0,x_0)\,.$$

本文将考虑李雅普诺夫函数 $V(t,x)$，它们是连续的标量函数，并且关于 x 满足局部利普希茨条件。此类函数沿(1)的轨迹的轨道导数记为（参见 [31, 第 1] 章）

$$\begin{aligned}\dot{V}(t,x) &= \overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\{V(t+h, x(t+h)) - V(t,x(t))\} \\ &= \overline{\lim_{h\to 0^+}}\frac{1}{h}\{V(t+h, x+hf(t,x)) - V(t,x)\}\,.\end{aligned} \tag{2}$$

请注意，在上述定义中，出现的是右上迪尼导数。通常，对于时间的任意函数 $v(t)$，该迪尼导数记作

$D^+v(t)$；不过，为了清楚地区分相对于 t 和 x 变量的导数，我们选择采用更常见的点记号 $\dot{v}(t)$。当考虑可微函数时（如第 3.4 节所述的数值过程），标准导数与右上迪尼导数相同。

最后，我们采用以下记号表示紧性

$$\inf_{\substack{t\in J\\ x\in\Omega_t}} g(t,x) = \inf_{t\in J}\inf_{x\in\Omega_t} g(t,x)\,,$$

其中，集合 Ω_t 取决于 t 的值。

假设 1. 方程（1）中的映射 $f(t,x)$ 关于 t 连续，并且对每个紧集 $\mathcal{A}\subset\mathbb{R}^n$，均满足利普希茨条件

$$||f(t,x)-f(t,y)|| \le \lambda_{\mathcal{A}}(t)||x-y|| \qquad \forall x,y,\in\mathcal{A}\,, \quad (3)$$

其中，$\lambda_A(t)$ 是定义在 J 上的非负连续函数。

对于每个 $(t^*,x^*)\in J\times\mathbb{R}^n$，假设 1 保证演化函数 $\varphi(t,t^*,x^*)$ 的存在唯一性，其中所有 t 均位于 t^* 的某个适当邻域内（例如参见 [32] 中的定理 3.1）。

给定初始集 Ω_0、一个（可能随时间变化的）轨迹集 Ω_t 以及两个标量 t_0 和 T，当且仅当满足以下条件时，系统（1）称为关于 $(t_0,T,\Omega_0,\Omega_t)$ 有限时间稳定（有限时间稳定性）：

$$x_0\in\Omega_0 \implies x(t)\in\Omega_t \quad \forall t\in[t_0,t_0+T]\,, \qquad (4)$$

其中，Ω_0 是闭集，Ω_t 是开集，且二者均连通且有界 $\forall t\in J$。注意，为使定义良好，要求在 $t=t_0$处满足 $\Omega_t\supset\Omega_0$。

3. 主要结果

本节介绍本文的主要结果。首先，定理 1 给出了假设 1 下，形式为（1）的非线性非自治系统满足有限时间稳定性的充要条件。然后，定理2将这些条件扩展至离散时间系统。第 3.3 节讨论了这些条件与线性时变系统通常采用的基于线性矩阵不等式的条件之间的联系（为便于参考，将后者列为定理 3）。最后，第 3.4 节提出了一种基于神经网络的数值方法，用于求得所需李雅普诺夫函数的闭式表达式。

3.1. 有限时间稳定性的充要条件

以下定理给出了系统（1）有限时间稳定性的充要条件 [3]。

定理1. 系统（1）相对于（t_0,T,Ω_0,Ω_t）具有有限时间稳定性，当且仅当存在一个连续函数 $V\colon J\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，且在 x 上局部 Lipschitz，使得以下条件成立

$$\dot{V}(t,x)\le 0 \quad \forall t\in J, x\in\bar{\Omega}_t \qquad (5)$$

$$\sup_{x\in\Omega_0} V(t_0,x) < \inf_{\substack{t\in J\\ x\in\partial\Omega_t}} V(t,x) \qquad (6)$$

[3]证明过程与 [8, 定理 3.1]中的论证基本一致。

证明. 我们首先证明充分性。假设 $\exists V\colon J\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足条件（5-6）。此外，采用反证法，假设对于某个初始点 x_0,$\exists t^*\in J$，有 $x(t^*)\in\partial\Omega_{t^*}$ 且 $x(t)\in\Omega_t\ \forall t\in[t_0,t^*)$。根据下确界的定义

$$V\left(t^*,x(t^*)\right)\ge \inf_{\substack{t\in J\\ x\in\partial\Omega_t}} V(t,x)\,.$$

另一方面，由式（5）可得

$$V\left(t^*,x(t^*)\right)\le V(t_0,x_0)\le \sup_{\xi\in\Omega_0} V(t_0,\xi)\,.$$

这与（6）矛盾。充分性得证。

为证明必要性，假设系统（1）关于（t_0，T，Ω_0,Ω_t）是有限时间稳定的。我们寻找一个连续、局部 Lipschitz 函数 $V(t,x)$，使其满足条件（5-6）。为此，考虑系统

$$\dot{x}(t)=F(t,x)\,, \qquad (7)$$

其中，F 在 $J\times\mathbb{R}^n$中有界，并满足全局利普希茨条件

$$||F(t,x)-F(t,y)||\le\lambda(t)||x-y|| \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n\,, \qquad (8)$$

$\lambda(t)$为连续非负标量函数，最后

$$F(t,x)=f(t,x)\,,\ \forall(t,x)\in J\times D\,, \qquad (9)$$

其中，D 为一个紧集，对所有 $t\in J$，均有 $D\supseteq\Omega_t$。此类 $F(t,x)$的存在性由假设1保证。此外，[33] 中的主要结果表明，方程(9)的演化函数 $\varphi_F(t_1,t_2,\hat{}x)$在 $J\times J\times\mathbb{R}^n$中有定义、唯一且连续。考虑

$$V(t,x):=\inf_{\xi\in\Omega_0}||\varphi_F(t_0,t,x)-\xi|| \qquad (10)$$

注意，$\varphi_F(t_0,t,x)$是通过从(t,x)沿方程(7)的轨迹向后追溯至 t_0而得到的初始点；函数 $V(t,x)$将(t,x)映射为该轨迹初始点到初始集Ω_0的距离。函数 V 在 $\mathbb{R}^n$的每个紧子集上连续且有界；现将证明 $V(t,x)$在 x中也是利普希茨的。首先注意到，根据Gronwall不等式，我们有

$$||\varphi_F(t,s,x)-\varphi_F(t,s,y)||\le\exp\left(\int_J\lambda(\tau)\,d\tau\right)||x-y||\,. \qquad (11)$$

现在考虑

$$V(t,x)\le||\varphi_F(t_0,t,x)-\xi|| \quad \forall\xi\in\Omega_0\,.$$

应用三角不等式可得

$$V(t,x)\le||\varphi_F(t_0,t,x)-\varphi_F(t_0,t,y)||+||\varphi_F(t_0,t,y)-\xi|| \quad \forall\xi\in\Omega_0\,,$$

由此得到

$$V(t,x)\le ||\varphi_F(t_0,t,x)-\varphi_F(t_0,t,y)||+\inf_{\xi\in\Omega_0}||\varphi_F(t_0,t,y)-\xi||= ||\varphi_F(t_0,t,x)-\varphi_F(t_0,t,y)||+V(t,y)$$

同样，我们有

$$V(t,y)\le||\varphi_F(t_0,t,x)-\varphi_F(t_0,t,y)||+V(t,x)$$

因此

$$|V(t,x)-V(t,y)| \le ||\varphi_F(t_0,t,x)-\varphi_F(t_0,t,y)||\,. \quad (12)$$

现在，考虑方程（11），我们得到

$$|V(t,x)-V(t,y)| \le \exp\left(\int_J \lambda(\tau)\,d\tau\right)||x-y||\,. \quad (13)$$

方程（13）保证了 $V(t,x)$ 存在按（2）定义的轨道导数。显然可以验证，沿着系统（7）的轨迹，该导数恒为零，因为初始点保持不变。现在，考虑方程（9）以及系统（1）满足有限时间稳定性的事实，我们有

$$V(t,\varphi(t,t_0,x_0)) = V(t,\varphi_F(t,t_0,x_0))\,,\forall (t,x_0)\in J\times\Omega_0\,,$$

因此，（5）成立（等号成立）。为证明 $V(t,x)$ 满足（6），注意到 $\sup_{x\in\Omega_0} V(t_0,x) = 0$，因为每个点 $x\in\Omega_0$ 到集合 Ω_0 的距离均为零。现在再次考虑一般点 $x^*\in\partial\Omega_{t^*}$，$t^*\in J$，并假设 $\exists x_0^*$ s.t. $x^*=\varphi(t^*,t_0,x_0^*)$。由于假设系统（1）具有有限时间稳定性，初始点 x_0^* 不可能属于集合 Ω_0。因此，$V(t^*,x^*(t^*))>0$。由于该条件对 $x^*\in\partial\Omega_{t^*}$ 的所有可能取值以及所有 $t^*\in J$ 均成立，并且考虑到 $V(t,x)$ 关于 x 连续，且 Ω_t 有界并且闭，可得

$$\inf_{\substack{t\in J\\ x\in\partial\Omega_t}} V(t,x) > 0 = \sup_{x\in\Omega_0} V(t_0,x)\,,$$

即 $V(t,x)$ 满足条件（6）。证明至此完成。 ■

注释1. 考虑有限维状态空间时，$\partial\Omega_t$、Ω_0 通常是紧集，且公式（6）中的 inf 和 sup 分别可以替换为 min 和 max。

注释2. 请注意，与经典的李雅普诺夫稳定性不同，在有限时间稳定性框架中，并未明确要求 $V(t,x)$ 是正定的。

注释3. 在 *[8,* 定理 3.*1],* 中，(5) 的一个限制较少的版本要求，对于 $(t,x)\in J\times\bar{\Omega}_t$，有 $\dot{V}(t,x)\le g(t,V(t,x))$，其中 $g:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$。采用这一选择后，$V$ 的轨道导数可以取正值，但这种更大自由度的代价是，必须借助比较引理 *[34,* 引理 3.*4]* 来使条件（6）变得复杂。然而，并未说明如何先验地选择函数 $g(t,V(t,x))$，而且 *[8,* 定理 3.*1]* 中的必要性证明最终也假设了 $g\equiv 0$。基于这些原因，我们从一开始就设定 $g\equiv 0$；这一选择也简化了第 3.4 节的训练过程。

此外，相对于 *[8,* 定理 3。*1],* 定理 1 的表述自动考虑了轨迹域 Ω_t 随时间变化的可能性。这也使得 *[8,* 定理 3。*1]* 中的条件（b-ii）变得不必要。

鉴于定理 1 中条件的数值实现，陈述以下推论是有益的。

推论1. 对于 $(t_0,T,\Omega_0,\Omega_t)$，系统（1）具有有限时间稳定性，当且仅当存在连续函数 $V:\ J\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$，使得条件（5）成立，并且条件（6）替换为

$$\inf_{\substack{t\in J\\ x\in\partial\Omega_t}} V(t,x) - \sup_{x\in\Omega_0} V(t_0,x) > \alpha \quad (14)$$

对于某个固定的 $\alpha>0$ 值。

证明。假设式 (6) 成立，且

$$\inf_{\substack{t\in J\\ x\in\partial\Omega_t}} V(t,x) - \sup_{x\in\Omega_0} V(t_0,x) > \varepsilon$$

对于某个 $V(t,x)$ 和 $\varepsilon>0$。函数 $\tilde{V}(t,x):=\beta V(t,x)$，满足 $\beta>0$，因而满足条件（5），因为 $\tilde{V}(t,)\ \beta V(t,x)\le 0$。取 $\beta=\alpha/\varepsilon$，现在很容易验证 $\tilde{V}(t,x)$ 同样满足条件（14）。 ■

这个推论的证明显而易见，因为李雅普诺夫函数可以乘以任意常数进行缩放。然而，这一结果的实用之处在于，它允许自由选择参数 α，使其成为第 3.4 节所述数值算法中的调节参数。此外，它还可用于建立关于线性时变系统有限时间稳定性的成熟结果与定理 1 之间的联系；第 3.3 节将对此进行说明。

3.2. 离散时间系统的扩展

考虑如下形式的系统

$$x(k+1) = f(k,x(k))\,. \quad (15)$$

如果且仅如果根据定义，$x(0)\in\Omega_0 \implies x(k)\in\Omega_k$ for $k=0,1,...,N$，则称系统 (15) 关于 (Ω_0,Ω_k,N) 有限时间稳定（注意，假设指标 k 从 0 开始并不失一般性）。与连续时间情形一样，我们假设 Ω_0 为闭集，Ω_k 为开集。此外，我们定义集合

$$\Omega_k^{fwd} := [f(k,\bar{\Omega}_k)\setminus\Omega_{k+1}]\cup\partial f(k,\bar{\Omega}_k)$$

and

$$dV(k,x) := V(k+1,f(k,x)) - V(k,x)\,.$$

以下定理给出了系统（15）具有有限时间稳定性的充要条件。

定理2. 若存在一个函数 $V(k,x)$，其关于 x, V 连续，且满足以下条件，则系统（15）相对于 (Ω_0,Ω_k,N) 有限时间稳定：$\{0,...,N\}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

$$dV(k,x)\le 0\,,\quad x\in\Omega_k\quad k=0,...,N-1 \quad (16)$$

$$\sup_{x\in\Omega_0} V(0,x) < \inf_{\substack{0\le k<N\\ x\in\Omega_k^{fwd}}} V(k+1,x)\,. \quad (17)$$

此外，若 $f(k,x)$ 关于 x 连续，并且对 $k\in\{0,...,N\}$ 存在其逆函数 $f^{-1}(k,x)$，则条件（16-17）也是必要的。

证明。为证明充分性，假设 $\exists V:\ \{0,...,N\}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 满足条件（16-17）。此外，假设对于某个初始点 x_0，$\exists k^*\in\{0,...,N-1\}$，使得 $x(k^*)\in\Omega_{k^*}$ 且 $x(k^*+1)\notin\Omega_{k^*+1}$。由于 $x(k^*+1)\in f(k,\Omega_k)\subset f(k,\Omega_k)$，可得 $x(k^*+1)\in\Omega_k^{fwd}$。根据定义，有

$$V\left(k^*+1,x(k^*+1)\right) \le \inf_{\substack{0\le k<N\\ x\in\Omega_k^{fwd}}} V(k+1,x)\,. \quad (18)$$

另一方面，条件（16）确保

$$V\left(k^*+1,x(k^*+1)\right) \le V(0,x_0) \le \sup_{x\in\Omega_0} V(0,x)\,,$$

这与条件（17）矛盾。

为证明必要性，可以使用与定理 1 中类似的论证。具体而言，可以证明候选李雅普诺夫函数

$$V(k,x) = \inf_{\xi\in\Omega_0} ||\varphi(0,k,x) - \xi||$$

在所考虑的系统具有有限时间稳定性时满足该定理的条件。然而，为使 $V(k,x)$ 有良好定义，我们需要函数 $f(k,x)$ 对所有 k 都可逆。 ■

3.3. 与椭球域上的连续时间线性时变系统的联系

将方程 (4) 替换为以下方程，即可用椭球初始域和轨迹域来重新表述有限时间稳定性的定义

$$x_0^T R x_0 \le 1 \implies x(t)^T \Gamma(t) x(t) < 1 \quad \forall t \in J \tag{19}$$

其中， R 是正定对称矩阵， $\Gamma(t)$ 是正定对称矩阵值函数。适定性条件变为 $R \succ \Gamma(t_0)$。针对线性时变系统的有限时间稳定性， [9, 定理2.1] 给出了若干等价的充要条件。具体而言，证明了以下定理。

定理 3。 *[9,定理2.1]* 考虑线性时变系统

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t), \quad x(t_0) = x_0 \tag{20}$$

其初始域为 $\Omega_0 = \{x | x^T R x \le 1\}$ ，轨迹域为 $\Omega_t := \{x | x^T \Gamma(t) x < 1\}$，其中 $\Gamma(t_0) \prec R$。系统 (20) 关于 $(t_0, T, \Omega_0, \Omega_t)$ 有限时间稳定，当且仅当存在正定矩阵值函数 $P(\cdot)$，满足以下离散线性矩阵不等式条件

$$\dot{P}(t) + P(t)A^T(t) + A(t)P(t) \prec 0\,, t \in J \tag{21a}$$
$$P(t) \succ \Gamma(t)\,, t \in J \tag{21b}$$
$$P(t_0) \prec R \tag{21c}$$

可以证明，该定理是第 3.1 节中定理 1 的一个特例。我们先选择 $V(t,x) = x(t)^T P(t) x(t)$（本节末尾将讨论这一选择的有效性）。然后，若考虑严格不等式[4], ，则性质（5）可化简为 (21a)，而通过观察 (21b-21c) 可得到条件 (6)：

$$V(t,x) > x(t)^T \Gamma(t) x(t) \implies \inf_{\substack{t\in J \\ x\in\partial\Omega_t}} V(t,x) > 1 \tag{22a}$$
$$V(t_0,x) < x(t_0)^T R x(t_0) \implies \sup_{x\in\Omega_0} V(t_0,x) < 1 \tag{22b}$$

因此，条件 (22a-22b) 蕴含 (6)。另一方面，一旦我们固定 $V(t,x) = x^T P(t) x$，逆向蕴含也成立。为证明这一点，首先注意到，可以始终将 $V(t,x)$ 放大，使得

$$\inf_{\substack{t\in J \\ x\in\partial\Omega_t}} x^T P(t) x > 1 > \sup_{x\in\Omega_0} x^T P(t_0) x\,,$$

而不影响条件 $\dot{V} \le 0$ （参见推论 1），即条件 (22a-22b) 成立。第一个不等式可改写为

$$x^T P(t) x > x^T \Gamma(t) x \qquad \forall x : x^T \Gamma(t) x = 1\,.$$

但由于 $\Gamma \succ 0$，对于任意其他选择的 $x \in \mathbb{R}^n$ ，都存在一个标量 c ，使得 $x^T \Gamma(t) x = c^2$。这意味着点 $\frac{x}{c}$ 位于 $\partial\Omega_t$ 上，因此

$$\frac{1}{c^2} x^T \Gamma(t) x = 1 < \frac{1}{c^2} x^T P(t) x \implies x^T \Gamma(t) x < x^T P(t) x$$

即 $P(t) \succ \Gamma(t)$。通过类似的论证可以证明 $P(t_0) \prec R$，因为

$$\sup_{x\in\Omega_0} V(t_0,x) < 1 \implies \sup_{x\in\partial\Omega_0} V(t_0,x) < 1\,.$$

最后，本节讨论选择 $V(t,x) = x^T(t) P(t) x(t)$ 如何源自定理 1 证明中必要性部分的相同论证。在定理 1 中，我们考虑了一个函数 $V(t,x)$，如 (10) 所示，即轨迹的初始点与集合 Ω_0 之间的距离。我们注意到，只要 $x(t) \in \partial\Omega_t$，如果系统具有有限时间稳定性，这一距离就必须严格为正。对于椭球域，这等价于

$$x^T(t)\Gamma(t)x(t) = 1 \implies x_0^T R x_0 > 1\,. \tag{23}$$

利用（20）的状态转移矩阵 $\phi(t,t_0)$，我们有

$$x^T(t)\Gamma(t)x(t) = x_0^T \phi(t,t_0)^T \Gamma(t) \phi(t,t_0) x_0(t)\,,$$

因此，（23）可化简为

$$\phi(t,t_0)^T \Gamma(t) \phi(t,t_0) \prec R\,.$$

此外，由于 $\phi(t,t_0)^{-1} = \phi(t_0,t)$

$$Q(t) := \phi(t_0,t)^T R \phi(t_0,t) \succ \Gamma(t)\,, \tag{24}$$

这与（21b）十分相似。由于 $\phi(t_0,t_0) = I$，我们立即得到

$$Q(t_0) = R$$

（将这些条件与 [9, 定理2.1（ii-iii）]进行比较）。最后，由连续性可知，我们可以选取任意小的$\varepsilon > 0$ ，使得条件（21b）-（21c）对

$$P(t) := Q(t)(1-\varepsilon)\,.$$

请注意，从本质上说，这种对 $Q(t)$ 的选择同样归结为沿着（20）的轨迹反向追踪，并通过与 $Q(t)$ 和 R 相关的二次型，评估初始点（t_0, x_0）到初始集的距离。

3.4. 通过物理信息神经网络进行李雅普诺夫函数近似

在本节中，我们提出一种训练神经网络的方法，使其输出为有限时间稳定性连续时间系统提供李雅普诺夫函数。考虑以下代价泛函

$$L(\dot{V}, V, \delta_2) = L_1(\dot{V}) + L_2(V, \delta_2)\,, \tag{25}$$

其中

$$L_1 = \frac{1}{T}\int_J \frac{1}{|\bar{\Omega}_t|} \int_{\bar{\Omega}_t} \left(\max\{\dot{V}(\tau,x), 0\}\right)^2 dx d\tau \tag{26a}$$

$$L_2 = \frac{1}{T}\int_J \frac{1}{|\partial\Omega_t|} \int_{\partial\Omega_t} \left(\max\{\delta V_b(\tau,x) + \delta_2, 0\}\right)^2 dx d\tau\,. \tag{26b}$$

[4]等号情形可以与 [9] 中的离散李雅普诺夫方程条件 (2.3a) 联系起来。为简洁起见，这里不对此进行讨论。

在式 (26b) 中，引入参数 $\delta_2 > 0$ 以确保式 (6) 中的严格不等式（见下文讨论）。式 (26b) 中出现的项δV_b 定义为

$$\delta V_b(t,x) = \sup_{\xi\in\Omega_0}\{V(t_0,\xi)\} - V(t,x)\,,$$

并在 $\partial\Omega_t$ 上进行评估。以下结果表明，对于形式为 (1) 的系统，寻找李雅普诺夫函数的问题等价于寻找一个 $V(t,x)$，使得对于 δ_2 的某个（任意）取值，$\mathcal{L}(V,\dot{V},\delta_2) = 0$。

命题 1. 连续函数 $V(t,x)$ 满足定理 1 的条件，当且仅当对于 $\delta_2 > 0$ 的某个取值，$L(V,\dot{V},\delta_2) = 0$。

证明。若条件 (5) 成立，则对于每个$t \in J$以及每个 $x \in \Omega_t$，$V(t,x) \le 0$。因此，$\max\{V(\tau,x)\ 0\} = 0$，且 $L_1(V) = 0$。另一方面，由于 $L_1(V)$ 定义为非负量的积分，$L_1(V) = 0$ 意味着其被积项对所有 $t \in J$ 和$x \in \Omega_t$均为零，即 $V \le 0$。同理，$L_2(V,\delta_2) = 0$ 当且仅当对于每个 $t \in J$ 以及每个 $x \in \partial\Omega_t$，$\delta V_b(t,x,\delta_2) \le 0$。但这等价于要求

$$\begin{aligned} 0 &\ge \sup_{\substack{t\in J\\ x\in\partial\Omega_t}} \delta V_b(t,x) + \delta_2 \\ &= \sup_{\substack{t\in J\\ x\in\partial\Omega_t}} \left\{ \sup_{\xi\in\Omega_0}\{V(t_0,\xi)\} - V(t,x) \right\} + \delta_2 \\ &= \sup_{\xi\in\Omega_0}\{V(t_0,\xi)\} - \inf_{\substack{t\in J\\ x\in\partial\Omega_t}} \{V(t,x)\} + \delta_2\,. \end{aligned} \tag{27}$$

根据推论1，如果某个 $\delta_2 > 0$ 值满足该条件，那么条件（6）也成立。证明只需注意到 $L = 0$ 等价于 $L_1 = 0 \wedge L_2 = 0$，因为根据定义 $L_{1,\ 2} \ge 0$。■

在实践中，我们通过选择连续可微的激活函数，将关注范围限定为 C^1 类函数 $V(t,x)$。神经网络的通用逼近性质保证，即使选择了 C^1 激活函数，只要使用足够多的节点，网络就能以任意精度逼近任意连续函数。值得注意的是，通常要求在 $\mathbb{R}^n$ 的紧子集上评估神经网络所逼近的函数；有限时间稳定性正是这种情况，其中关于 $V(t,x)$ 的条件只需在感兴趣的（紧）域上满足。对于 $V(t,x) \in C^1$，轨道导数（2）可计算为

$$\dot{V}(t,x) = \frac{\partial V}{\partial t} + \mathcal{L}_f V = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x)\,, \tag{28}$$

其中，$\mathcal{L}_f V$表示$f(t,x)$沿$f(t,x)$的李导数。V相对于 x和 t 的偏导数可通过自动微分 [35]解析计算。为了训练网络，我们在一组（较大的）配点上对代价函数函数 $L(V,\dot{V})$进行采样。定义

$$\hat{L}_1(\dot{V},\delta_1) = \frac{1}{N_c}\sum_{i=1}^{N_c}\left(\max\{\dot{V}(x_i,t_i) + \delta_1, 0\}\right)^2,, \tag{29}$$

其中 N_c 是所考虑的配点总数

个点，位于 $t \in J, x \in\Omega_t$ 中，且

$$\begin{aligned} \hat{L}_2(V,\delta_2) &= \frac{1}{N_b}\sum_{i=1}^{N_b}\left(\max\left\{\delta\tilde{V}_b(t_i,x_i) + \delta_2, 0\right\}\right)^2 \\ \delta\tilde{V}_b(t_i,x_i) &= \max_{j\in[1,N_0]}\{V(t_0,\xi_j)\} - V(t_i,x_i)\,, \end{aligned} \tag{30}$$

其中，N_b 和 N_0 分别是取自$t \in J, x \in \partial\Omega_t$ 和Ω_0 中的点数。内部配点 N_c 通过在时间和空间中随机采样获得，而边界点 N_b 则通过将时间区间离散化为 N_t 个离散时刻，再为每个时刻选取 $n_b = N_b/N_t$ 个点来计算。N_0 个点在初始域Ω_0中均匀分布。在式（29）中，我们引入了容差参数 $\hat{}\ \delta_1$，用于惩罚 L_1 中 V 恰好等于或略小于零的点，这与式（26b）–（30）中的 δ_2 参数类似。此外，根据注释1，我们在 L_2的定义中用最大值代替上确界。由此得到的（近似）损失函数为

$$\hat{L}(\dot{V},V,\delta_1,\delta_2) = \alpha_1\hat{L}_1(\dot{V},\delta_1) + \alpha_2\hat{L}_2(V,\delta_2)\,, \tag{31}$$

其中，权重 $\alpha_{1,2} > 0$ 已作为算法中的附加调节参数引入。

网络使用 Matlab 对标准 Adam 算法 [30]的实现进行训练。采用默认参数，即全局学习率为 0.001、梯度衰减因子为 0.9、平方梯度衰减因子为 0.999。事实证明，对于所考虑的示例，这一选择足以获得良好的收敛特性。为计算 L_1，将 N_c 内部配点划分为小批次；而在每次训练迭代中，均使用 Ω_t 上的所有 $N_b + N_0$ 点以及初始域 Ω_0 中的所有点来计算 L_2。这一选择反映了这样一个事实：式 (6) 只要求 $V(t,x)$ 在所有边界点上的下确界大于 $V(t_0, x)$ 在初始域上的上确界。然而，在 L_2 的定义中，我们考虑了 Ω_t 上的所有配点，以获得相对于网络参数而言表现良好的代价函数梯度估计。当所有 N_c 内部配点上的 $V(t,x) \le 0$，且所有边界配点上的 $N_b\ (t,x) < 0$ 时，训练过程终止。最后，由于我们采用的是代价函数$L(V,\dot{V}, \delta_2)$ 的近似版本，因此找到解后，我们会在一组不同于训练过程中所用配点的测试点上验证定理条件是否满足。

在结束本节之前，需要注意的是，在数值实现中，定理1的条件实际上仅成为必要条件。如果所考虑的系统不具备有限时间稳定性，则该过程通常不会收敛到可行解；然而，即使系统具备有限时间稳定性，算法也可能不收敛，例如当神经网络中的节点数量不足以正确表示所需的李雅普诺夫函数时。

4. 数值示例

本节通过一些数值示例来展示所提出的方法。

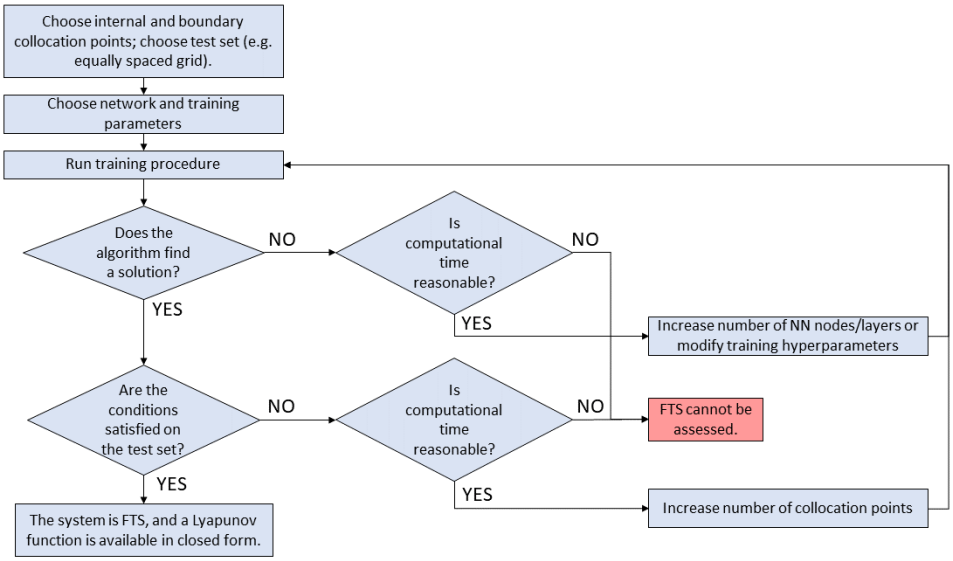


图2：描述所提出技术如何应用于第 sec. 节示例的流程图。

4.

值得注意的是，定理 1 中的条件基于函数 $V(t,x)$ 的轨道导数；当 V 通过神经网络表示时，可利用自动微分技术对其进行计算。另一方面，定理2中的条件基于递归方程，并要求在每个时间步长计算集合 Ω_k^{fwd} 。下文将利用 Matlab 中实现的自动微分例程，仅关注连续时间系统。请注意，为简单起见，所提出的示例考虑椭球域。不过，算法仅使用位于这些域内及其边界上的配点，因此该技术可轻松应用于形状任意的域。

所提出的流程已应用于图2所示的各个示例。对于所有示例，我们均采用带有 softplus 激活层的多层感知机架构（各示例的参数列于表2）。初步选定配点以及神经网络和训练参数后，即运行优化过程。如果找到解，则在一组合适的测试点上（例如，在所考虑的域上均匀细密分布的网格）进一步检验所需条件。如果测试通过，则可认为属性评估成功。如果测试未通过，则可扩大配点训练集，例如，加入测试未通过的点，然后重新运行流程。如果算法未能收敛，则可修改神经网络和训练参数（例如，增加神经网络的节点数或层数以增强其表达能力，或降低学习率以提高稳定性），再重新运行流程。如果在一组合理的参数下和／或合理的时间内未找到解，则认为测试失败（图2中的红框）。这可能是因为系统不满足有限时间稳定性，也可能是数值方面的原因。值得注意的是，这一特点是大多数李雅普诺夫方法的共性；这些方法往往没有直接的途径来验证系统是否不稳定（无论是经典意义上还是有限时间意义上）。

本节中的所有示例均使用 Matlab 实现，并在一台笔记本电脑上运行。该电脑配备 Intel Core i7-8750H CPU @2.20GHz 处理器、16 GB 内存和 NVIDIA GeForce GTX 1050 Ti 显卡。代码可在 https://github.com/AdrianoMele/NeuralNetFTS 获取。

例1

我们首先通过一个简单示例验证该流程，即一个具有固定椭球域的二维线性时不变系统。具体而言，考虑以下系统

$$\dot{x}(t) = -\begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix} x(t)\,, \tag{32}$$

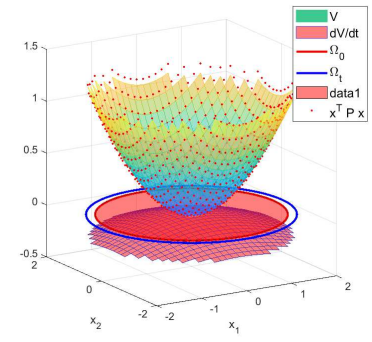
其中 $t_0 = 0$、 $T = 1$ ，域由下式定义

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \{x \in \mathbb{R}^2 | x^T R x \leq 1\},\ R = 0.3I \\ \Omega_t &= \{x \in \mathbb{R}^2 | x^T \Gamma x \leq 1\},\ \Gamma = 0.25I\,. \end{aligned} \tag{33}$$

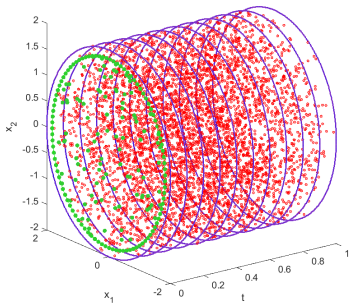
经典有限时间稳定性结果保证，该示例的解可以用时间不变二次李雅普诺夫函数 $V_Q(x) = x^T(t)Px(t)$ 表示（另见第3.3节的讨论）。事实上，该系统也是李雅普诺夫稳定的，并且可以证明，在这种情况下，定理3中的有限时间稳定性条件可简化为寻找一个同时满足条件（21b-21c）的静态李雅普诺夫函数。我们将第3.4节提出的技术应用于所考虑的系统和域；我们预期该算法会找到一个非常接近二次函数的解 $V(x)$。

本例使用的训练参数列于表1-2中。该算法仅经过2轮训练（约2秒）便找到了一个解。所得的 $V(x)$如图3a所示，而配点以及初始域和轨迹域如图3b所示。对 $V(x)$（图3a中的红点）进行二次最佳拟合，得到对称正定矩阵

$$P = \begin{bmatrix} 0.3064 & -0.0063 \\ -0.0063 & 0.3120 \end{bmatrix}$$



(a)



(b)

图3：（a）示例#1的 $V(t,x)$和 $\dot{V}(t,x)$结果；红点表示二次近似函数（出于绘图原因，在 $V(x)$上加上了一个常数，使得 $V(0) = 0$）。（b）示例#1的配点。绿点表示初始域中的 N_0 点，红点表示用于强制满足（5）的 N_c 内部点，蓝点表示用于强制满足（6）的 $N_b = n_b N_t$ 边界点。

$PA^T + AP$的特征值为 $[-0.06322, -0.06044]$，即所得的 P满足条件(21a)。另一方面， P 的特征值为 $[0.3022, 0.3161]$，即条件(21c)不成立。如第3.3节所述，通过适当缩放 P，可以得到满足(21b-21c)的函数 $V_Q(x)$。

示例2

考虑以下系统 [36, (1.1.5)]

$$\begin{aligned}\dot{x_1}(t) &= -x_1 - x_2 + k(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2)\\ \dot{x_2}(t) &= x_1 - x_2 + k(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2)\end{aligned} \tag{34}$$

其中常数 k 取为0.1。该系统为所考虑的数值过程提供了一个有趣的解析基准。事实上，在 [36] 中证明了，令 $r^2(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t)$，方程（34）的解具有以下性质

$$r^2(t) = \frac{1}{k\mu} r_0^2\,, \quad \mu = r_0^2 + \left(\frac{1}{k} - r_0^2\right) e^{2(t-t_0)} \tag{35}$$

我们考虑 $t_0 = 0, T = 1$ 和

$$\begin{aligned}&\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 | x^T R x \le 1\},\ R = I\\ &\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^2 | x^T \Gamma(t) x < 1\},\ \Gamma(t) = 0.8 k \mu(t) I\,.\end{aligned} \tag{36}$$

其中 $r_0 = 1$。由式（35）可知，系统（34）相对于（t_0, T, Ω_0, Ω_t）具有有限时间稳定性。图9a展示了系统（34）的一些示例轨迹，以及初始域和轨迹域。对于这些参数采用表1-2中报告的参数，经过9个训练轮次（约60秒训练）后得到一个解。所得的 $V(t,x)$ 在不同时间点的结果如图7所示，而对于所考虑参数，所得训练曲线（轮次与损失的关系）如图6所示。

为了深入了解配点的选择如何影响算法性能，我们针对本例扫描了表1中的参数 N_c, n_b, N_t, N_0。具体而言，我们改变了内部配点的数量（$N_c = \{5, 10, 30, 50, 55, 70\} \times 10^3$），同时保持其他参数不变（$N_0$ =700， $n_b = 200$，且时间步长设为 $dt = 10^{-1}$，即 $N_t = 11$；参见表1）。然后，我们设定 $N_c = 5 \times 10^4$，并改变初始域中的配点数量（$N_0 = 100$）、每个时间步长下轨迹域边界上的配点数量（$n_b = \{50, 1000\}$）以及时间点的数量 N_t（将时间步长减小至 $dt = 10^{-2}s$，同时保持 $n_b = 200$）。图4报告了这项分析的结果。在所有考察的情况下，算法均收敛；但虚线所示的情况除外（这些情况对应内部配点或边界配点过少），这些情况得到了假阳性，即得到的神经网络李雅普诺夫函数在测试集中的某些点上违反了所需条件。本次分析的测试集通过采用一组不同的内部配点生成：将 50×50 等间距网格限制在初始域和轨迹域内，同时保持边界点不变。为完整起见，文中也报告了算法达到收敛所需的时间；不过请注意，我们并未努力优化代码性能。此外，还应指出，该过程隐含地包含一定程度的随机性（网络参数的初始化以及配点的选择），并且所用平台并非实时平台。图6所示的情况对应于图4中的红线。

示例3

最后，考虑阻尼摆的方程

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}\sin(x_1) - \frac{b}{ml^2} x_2\,,\end{aligned} \tag{37}$$

这是系统与控制理论领域广泛使用的基准问题。我们设 $g = 9.81$ m/s^2,$m = 0.15$ kg， $l = 0.15$ m， $b = 0.1$ kg m^2/s。我们考虑 $t_0 = 0, T = 2$ s 的情况，并且

$$\begin{aligned}&\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^2 | x^T R x \le 1\},\ R = \frac{4}{\pi^2} I\\ &\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^2 | x^T \Gamma(t) x < 1\},\ \Gamma(t) = \Theta \tilde{\Gamma} \Theta^T\,,\end{aligned} \tag{38}$$

其中

$$\tilde{\Gamma} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi^2} e^{0.5t} & 0 \\ 0 & \frac{0.1}{\pi^2} e^{2t} \end{bmatrix} \tag{39}$$

且 Θ 是由下式给出的旋转矩阵

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos(0.2\pi t) & \sin(0.2\pi t) \\ -\sin(0.2\pi t) & \cos(0.2\pi t)\,. \end{bmatrix} \tag{40}$$

采用表1-2中报告的参数，经过10个训练轮次（约2分44秒）后得到一个解。

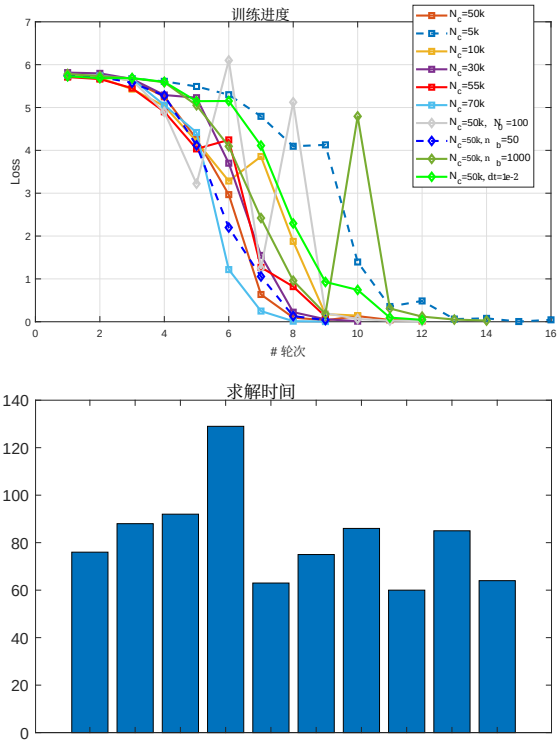


图4：示例#2（上图）中表1所列不同参数选择对应的训练曲线，以及各选择对应的收敛时间（下图）。

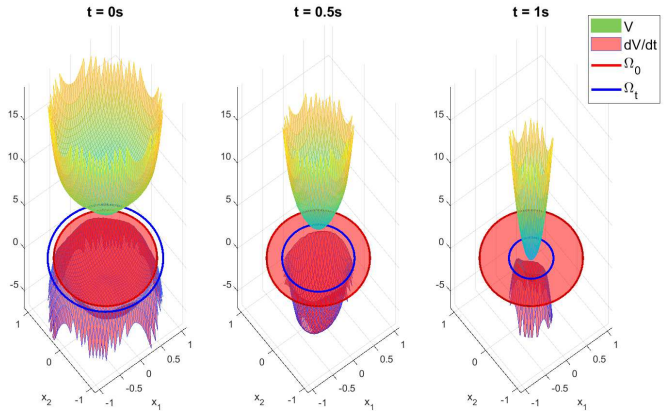


图5：示例#2在不同时间点的李雅普诺夫函数 $V(t,x)$ 及其导数 $\dot{V}(t,x)$（出于图示原因，添加了一个常数，使所得 $V(t,x)$ 位于 x_1-x_2 平面上方）。

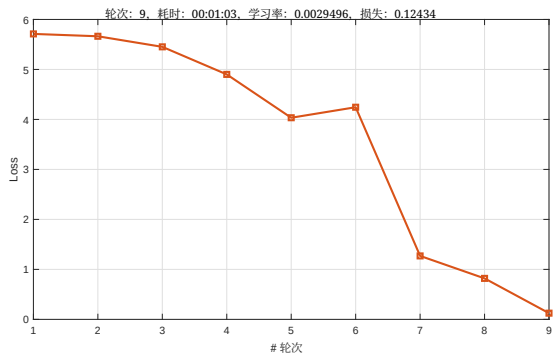


图6：示例#2的训练曲线。

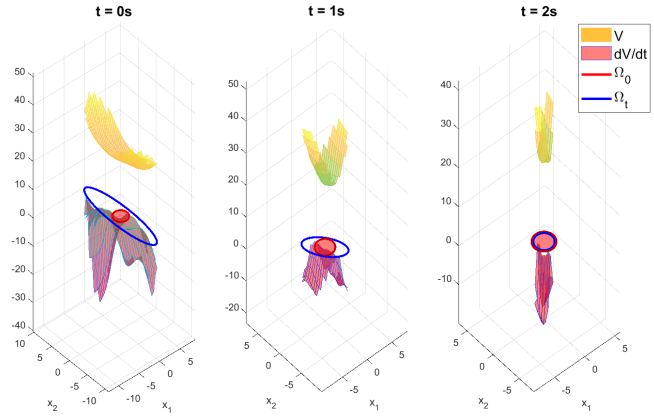


图7：示例#3在不同时间点得到的李雅普诺夫函数 $V(t,x)$ 及其导数 $\dot{V}(t,x)$。

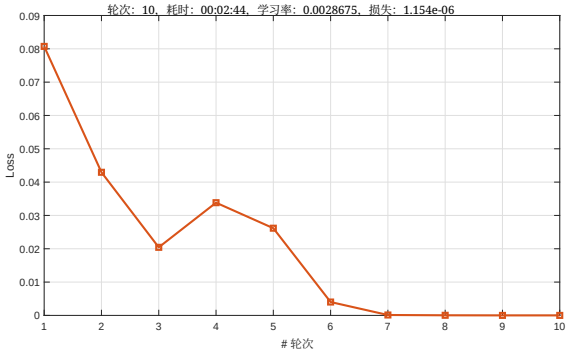


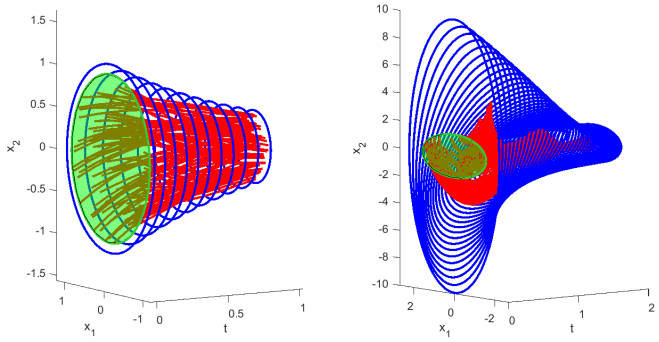
图8：示例#3的训练曲线。

系统(37)的一些示例轨迹如图9b所示，而不同时刻得到的 $V(t,x)$如图7所示。所考虑参数对应的训练曲线（轮次与损失的关系）如图8所示。

5. 结论

本文针对连续时间和离散时间下的非线性、非自治动力系统，提出了一些关于有限时间稳定性的必要条件和充分条件。对于连续时间情形，已证明所提出的条件是标准基于LMI的条件的推广，而后者通常用于椭球域上的线性系统。

随后提出了一种新方法，用于评估



(a) 系统 (34) 的轨迹。　(b) 系统 (37) 的轨迹。

图 9：示例 #2 和 #3 中系统的样本轨迹（红色），以及所考虑的初始域（绿色）和轨迹域（蓝色）。

Ex.	α_1	α_2	δ_1	δ_2	N_c	n_b	N_t	N_0
#1	1	1	1	0.1	5000	500	11	200
#2	5	1	1	3	55000	200	11	700
#3	5	1	0.1	1	60000	100	15	700

表1：所提出示例的训练参数 es.

Ex.	隐藏层	神经元	小批量批次	学习率 rate	衰减 rate
#1	1	128	100	0.01	10^{-5}
#2	3	32	200	0.003	10^{-5}
#3	3	32	500	0.003	10^{-5}

表2：所提示例的网络结构。

有限时间稳定性。其核心思想是利用神经网络作为通用函数逼近器的能力，从而为所需的李雅普诺夫型函数求得闭式表达式。通过连续时间系统的多个数值示例，展示了该方法的有效性。据我们所知，这是首个能够实际验证如此大类系统具有这一性质的数值方法。

正如引言的文献综述中所讨论的那样，有限时间稳定性概念在实践中的优势早已为人所知。然而，在一些开创性工作之后，围绕这一主题形成的研究群体几乎陷入沉寂，直到用于评估有限时间稳定性的实用基于（离散）线性矩阵不等式的条件问世，至少在线性系统领域是如此，这才重新激发了该领域的研究兴趣。多年来，这些条件已扩展到不确定、混合、随机、时滞线性系统以及特殊类别的非线性系统。本文提出了一种评估一般非线性系统有限时间稳定性的替代方法。基于这一思路，我们希望本文所讨论的方法能够进一步完善，并扩展到更具挑战性的动力系统类别，正如线性情形所经历的那样。

当然，用于验证定理 1 条件的数值方法具有近似性，这也带来了一些局限性。首先，由于考虑的是一个离散的配点集合，所提出的数值测试实际上仅是必要条件：关于 $V(t,x)$函数的要求条件可能在配点训练集之外、但在所关注的域内的区域中不成立。不过，在采用神经网络李雅普诺夫方法时，这一问题相当普遍。缓解这一问题的一种可能方法，是在一组不同于所考虑配点的点上测试这些条件（该点集也可以更大）；本文采用的正是这种方法。此外，目前已有一些新兴研究方向，致力于探讨如何在经典李雅普诺夫稳定性的框架下评估类似方法的安全性（例如参见 [24]）。所提出方法的另一项局限性在于，无法直接判断一个系统是否有限时间不稳定。在这种情况下，训练过程通常会失败，因为它无法找到满足所需条件的李雅普诺夫型函数。未来可能的研究方向之一，是将经典的李雅普诺夫不稳定性定理推广到有限时间稳定性分析领域。

最后，具备一个闭式李雅普诺夫函数，且能够通过自动微分技术简单地计算其关于时间和状态变量的导数，为基于李雅普诺夫方法的新型有限时间镇定与控制技术铺平了道路。

参考文献

[1] G. Kamenkov, 《有限时间区间内的运动稳定性》（俄文），J. Appl. Math. Mech. 17 (1953) 529–540。[2] A. Lebedev, 《给定时间区间内的运动稳定性》（俄文），J. Appl. Math. Mech. 18 (1954) 139–148。[3] A. Lebedev, 《有限时间区间内的稳定性问题》（俄文），J. Appl. Math. Mech. 18 (1954) 75–94。[4] P. Dorato, 《线性时变系统的短时稳定性》，Proc. IRE Int. Convention Record Pt. 4，第 83–87 页。[5] L. Weiss, E. Infante, 《扰动力作用下及乘积空间中的有限时间稳定性》，IEEE 自动控制汇刊 12 (1967) 54–59。[6] A. Michel, D. Porter, 《不连续系统的实际稳定性与有限时间稳定性》，IEEE 电路理论汇刊 19 (1972) 123–129。[7] S. P. Bhat, D. S. Bernstein, 《连续自治系统的有限时间稳定性》，SIAM Journal on Control and optimiza-tion 38 (2000) 751–766。[8] S. R. Bernfeld, V. Lakshmikantham, 《实际稳定性与 Lyapunov 函数》，东北数学杂志，第二辑 32 (1980) 607–613。[9] F. Amato, R. Ambrosino, M. Ariola, C. Cosentino, G. De Tom-masi, 《有限时间稳定性与控制》，控制与信息科学讲义，施普林格，伦敦，2014 年。[10] F. Amato, M. Ariola, P. Dorato, 《依赖于参数不确定性的线性系统的鲁棒有限时间镇定》，第

2 *Proceedings of the 37th IEEE Conference on Deci-* 卷，*sion and Control (Cat. No.98CH36171)* 1207 1208 2 页码 –，第 卷。[11] F. Amato, M. Ariola, P. Dorato, 《受参数不确定性与扰动影响的线性系统有限时间控制》，Automatica 37 (2001) 1459–1463。[12] S. Zhao, J. Sun, L. Liu, 《具有脉冲效应的线性时变奇异系统的有限时间稳定性》，国际控制杂志 81 (2008) 1824–1829。[13] F. Amato, G. De Tommasi, A. Pironti, 《脉冲动态线性系统有限时间稳定性的充要条件》，Automatica 49 (2013) 2546–2550。[14] X. Luan, F. Liu, P. Shi, 《具有部分已知转移跳变率的非线性随机系统有限时间滤波》，IET 控制理论与应用 4 (2010) 735–745。[15] Z. Yan, G. Zhang, W. Zhang, 《具有状态与控制相关噪声的线性 Itô 随机系统的有限时间稳定性与镇定》，亚洲控制杂志 15 (2013) 270–281。[16] X. Li, X. Yang, S. Song, 《时变时滞系统有限时间稳定性的 Lyapunov 条件》，Automatica 103 (2019) 135–140。[17] F. Amato, G. De Tommasi, A. Mele, A. Pironti, 《线性系统环域有限时间稳定性的新条件》，2016 年第 55 届 IEEE 决策与控制会议（CDC），IEEE，第 4925–4930 页。[18] G. Tartaglione, M. Ariola, C. Cosentino, G. De Tommasi, A. Pironti, F. Amato, 《随机线性时变系统的环域有限时间稳定性分析与综合》，国际控制杂志 94 (2021) 2252–2263。[19] G. Tartaglione, M. Ariola, G. De Tommasi, F. Amato, 《连续时间马尔可夫跳变线性系统的环域有限时间稳定性与镇定》，2019 年第 18 届欧洲控制会议（ECC），第 394–399 页。[20] G. Tartaglione, R. Ambrosino, M. Ariola, 《利用分段二次 Lyapunov 函数的环域随机有限时间稳定性》，IEEE 控制系统快报 6 (2022) 277–282。[21] A. Mele, G. De Tommasi, A. Pironti, 《通过极值寻优实现未知控制方向线性系统的有限时间镇定》，IEEE 自动控制汇刊 67 (2022) 5594–5601。[22] F. Amato, C. Cosentino, A. Merola, 《非线性二次系统有限时间稳定性与镇定的充分条件》，IEEE 自动控制汇刊 55 (2009) 430–434。[23] K. Hornik, M. Stinchcombe, H. White, 《多层前馈

网络是通用逼近器》，Neural Networks 2 (1989) 359–366。[24] A. Abate, D. Ahmed, M. Giacobbe, A. Peruffo，《Lyapunov 神经网络的形式化综合》，IEEE 控制系统快报 5 (2020) 773–778。[25] Y. Chang, N. Roohi, S. Gao，《神经李雅普诺夫控制》，神经信息处理系统进展 32 (2019)。[26] S. M. Richards, F. Berkenkamp, A. Krause，《Lyapunov 神经网络：用于动力系统安全学习的自适应稳定性认证》，机器人学习会议，PMLR，第 466–476 页。[27] N. Gaby, F. Zhang, X. Ye，《Lyapunov-net：用于李雅普诺夫函数近似的深度神经网络架构》，arXiv 预印本 arXiv:2109.13359 (2021)。[28] L. Gr¨une，《使用深度神经网络计算李雅普诺夫函数》，arXiv 预印本 arXiv:2005.08965 (2020)。[29] M. Raissi, P. Perdikaris, G. Karniadakis，《物理信息神经网络：用于求解涉及非线性偏微分方程的正问题与逆问题的深度学习框架》，Journal of Computational Physics 378 (2019) 686–707。[30] D. P. Kingma, J. Ba，《Adam：一种随机优化方法》，ICLR（海报）。[31] T. Yoshizawa，《李雅普诺夫第二方法稳定性理论》，日本数学会，1966 年。[32] J. K. Hale，《常微分方程》，罗伯特·E·克里格出版公司，马拉巴尔，1969 年。[33] J. L. Derrick W.，《常微分方程的整体存在唯一性定理》，Canadian Mathematical Bulletin 19 (1976) 105–107。[34] H. K. Khalil，《非线性系统》第三版，普伦蒂斯霍尔，Upple Saddle River，NJ 07458，2002 年。[35] A. G. Baydin, B. A. Pearlmutter, A. A. Radul, J. M. Siskind，《机器学习中的自动微分：综述》，Journal of Machine Learning Research 18 (2018) 1–43。[36] V. Lakshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk，《非线性系统的实际稳定性》，世界科学出版社，1990 年。