arXiv:2303.00447v1 [math.CO] 1 Mar 2023

图的雅可比群的 Fitting 理想

片岡武典

Abstract. 图的雅可比群是一个有限阿贝尔群，可借此以代数方式研究图。当一个图是另一个图的有限阿贝尔覆盖时，其雅可比群带有伽罗瓦群的作用。本文研究雅可比群作为群环上的模时的 Fitting 理想。我们还研究无限覆盖中的相应问题。此外，本文还介绍了图的岩泽理论的模论方法。

1. Introduction

对于一个（有限）图 X，令 Jac(X) 表示其雅可比群，也称为沙堆群。已知 Jac(X) 是一个有限阿贝尔群。关于图及其雅可比群的基本概念，请参见 §2。

设 Y/X 是连通图的一个阿贝尔覆盖，且 Γ 是其伽罗瓦群。于是，雅可比群 Jac(Y) 自然带有一个 $\mathbb{Z}[\Gamma]$-模结构，这也是本文的主题。更具体地说，我们关注它的 Fitting 理想（定义见 §A.1）。本文的主要结果给出了该 Fitting 理想的完整描述

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[\Gamma]/(N_\Gamma)}(\mathrm{Jac}(Y)/N_\Gamma \mathrm{Jac}(Y)).$$

这里， N_Γ 表示 Γ的范数元。具体陈述见§1.1。如下文注释1.3所述，这一结果可视为数论中 Atsuta 与作者的一项结果 [1] 的类比。

我们还将在§6中以某种意义研究无限阿贝尔覆盖。在这种情况下，我们可以完整描述相关雅可比群本身的 Fitting 理想，而无需除以底图的雅可比群。

图的无限覆盖研究在某种意义上是数论中岩泽理论的一个类比。最近，人们发展了图的岩泽理论类比（例如 Gonet [5] 以及 Valli`ères 的一系列工作，包括 [14]）。本工作直接受到图论与岩泽理论之间这一状况的启发。此外，在 §8 中，作为一项旁论，我们简要证明了岩泽类数公式和木田公式的类比形式。这些结果已经由其他人证明，但作者希望，这能让熟悉岩泽理论技术的读者更容易理解图的岩泽理论。

日期：2023年3月2日。2020年数学主题分类。05C25（主要），11R23，16E05。关键词与短语：图、雅可比群、Ihara ζ函数、Fitting 理想。

1.1. 有限覆盖的主要结果。现在我们陈述主要结果。设 Y/X 是连通图的一个阿贝尔覆盖，Γ 是其伽罗瓦群。在 §2 中，我们将引入一个元素 $Z_{Y/X} \in \mathbb{Z}[\Gamma]$，它通过三项行列式公式与（等变）Ihara ζ 函数相关（见 §5.3）。

取一个分解

$$\Gamma = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_s,$$

其中，对于每个 $1 \le l \le s$，Δ_l 是一个阶为 $n_l \ge 1$ 的循环群。对于每个 l，我们固定 Δ_l 的一个生成元 σ_l，并定义 τ_l、$\nu_l \in \mathbb{Z}[\Delta_l] \subset \mathbb{Z}[\Gamma]$ 为

$$\tau_l = \sigma_l - 1, \quad \nu_l = 1 + \sigma_l + \sigma_l^2 + \cdots + \sigma_l^{n_l-1}.$$

那么 ν_l 是 Δ_l 的范数元。由 $N_\Gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma$ 定义的 Γ 的范数元满足 $N_\Gamma = \nu_1 \cdots \nu_s$。我们还定义一个元素 $D_l \in \mathbb{Z}[\Delta_l]$ 为

$$D_l = \sigma_l + 2\sigma_l^2 + \cdots + (n_l - 1)\sigma_l^{n_l-1}.$$

主要结果如下。证明将在第 3–4 节给出。

定理 1.1。我们有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[\Gamma]/(N_\Gamma)}(\mathrm{Jac}(Y)/N_\Gamma \,\mathrm{Jac}(Y)) \\
&\quad = Z_{X,\Gamma} \sum_{l=1}^{s} \left(\nu_1 \cdots \nu_{l-1} \cdot \frac{D_l}{n_l} \cdot \nu_{l+1} \cdots \nu_s \right) \\
&\qquad + Z_{X,\Gamma} \left(\nu_1^{e_1} \cdots \nu_s^{e_s} \tau_1^{f_1} \cdots \tau_s^{f_s} \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \le e_l \le 1, f_l \ge 0, \\ e_1 + \cdots + e_s + f_1 + \cdots + f_s = s - 2 \end{array} \right).
\end{aligned}$$

这里，右侧实际上是 $\mathbb{Z}[\Gamma]$ 的一个理想，通过自然投影将其视为 $\mathbb{Z}[\Gamma]/(N_\Gamma)$ 的一个理想。

注 1.2。在数论中的欧拉系统理论里，元素 D_l 通常被称为科雷瓦金导数算子，并发挥着重要作用。这个元素对于与欧拉系统理论并无直接关系的计算也很有用，这一点似乎颇为有趣。事实上，据作者所知，这是科雷瓦金导数算子首次出现在 Fitting 理想的计算中。

在命题 3.5 中，我们将证明 $\mathrm{Jac}(X) \simeq N_\Gamma \mathrm{Jac}(Y)$ 的一个同构。因此，定理 1.1 可以看作是对 $\mathrm{Jac}(Y)/\mathrm{Jac}(X)$ 的 Fitting 理想的描述。遗憾的是，确定 $\mathrm{Fitt}^{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathrm{Jac}(Y))$ 本身似乎超出了我们的能力范围。

注 1.3。定理 1.1 可以视为 Atsuta 与作者 [1] 关于数论中类群的 Fitting 理想所得结果的一个类比。我们粗略回顾一下该结果。设 L/K 是数域的一个有限阿贝尔扩张，使得 K 是全实的，而 L 是一个 CM域。我们考虑 L 的 T-射线类群 Cl_L^T，其中 T 是 K 的有限素点的一个辅助有限集。于是，在 [1], 中（假设相关的等变 Tamagawa 数猜想成立），我们给出了 Fitting 理想的完整描述

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[\mathrm{Gal}(L/K)]^-}(\mathrm{Cl}_L^{T,-}),$$

其中，上标 $(-)^-$ 表示关于复共轭的负分量。正分量似乎超出了我们的能力范围。这与定理 1.1 中的情形类似。

1.2. 证明思路。在数论中，关于算术模的 Fitting 理想已有不少研究。特别是在岩泽理论领域，Greither–Kurihara（例如，[7], [8] 与 Tokio 等人）研究了岩泽模的 Fitting 理想。

在 [11], 中，作者提出了 Fitting 理想的“移位理论”，我们将在 §A.2 中回顾这一理论。它是一种计算算术模的 Fitting 理想的实用技巧。粗略地说，该技巧分为两步：

(1) 我们研究算术模，并利用一个显式的代数因子来描述 Fitting 理想；(2) 我们以纯代数的方式计算该代数因子。

这一理论最初在 [11] 中应用于岩泽理论，即数域的无限扩张。之后，Atsuta 和作者 [1] 将其应用于数域的类群，详见注 1.3。

本文再次采用移位理论作为基本技巧，以证明定理 1.1 以及关于无限覆盖的结果。因此，我们遵循上述两个步骤。第一步和第二步分别见定理 3.4 和 4.1。

定理 4.1 中需要计算的代数因子似乎是一个新的因子，正如备注 1.2 中所讨论的那样。此外，该公式的证明并不容易，是本文中技术性最强的部分。尽管这个问题纯粹是代数问题，我们仍采用组合方法（运用图论）。值得注意的是，Greither–Kurihara–Tokio [8] 也运用图论计算 Fitting 理想。

另一方面，无限覆盖情形下需要计算的代数因子似乎并不新。事实上，可以利用 [1] 中得到的公式进行计算。不过，一个相对次要的问题是，本文处理的交换环不一定是诺特环。因此，我们必须推广移位理论；该理论在 [11] 中仅针对诺特环建立。本节内容将在 §A.2 中解释。

1.3. 本文结构。§2 介绍图的基本概念。随后在 §3 中，我们将定理 1.1 的证明归结为一个代数问题。该代数问题将在 §4 中解决。

在§5介绍电压图及其导出图的预备知识之后，我们将在§6陈述并证明关于无限覆盖的结果。

在§7中，我们探讨雅可比群的自对偶性，这与数论中的类似情况形成对比。在§8中，我们说明图的岩泽理论的模论方法。§§7和§8均可独立阅读。最后，在§A中，我们回顾 Fitting 理想的定义和移位理论。

2. Graphs and their Jacobian groups

本节将介绍有关图及其雅可比群的基本概念。参见 Corry–Perkinson [4, 第 1 章和 2] 以及 Baker–Norine [2, §1.3]。此外，也可以参考 Valli`ères 的近期论文，例如 Hammer–Mattman–Sands–Valli`eres [9, §2] 以及 Ray–Valli`ères [17, §2]。

本文中的图均假设为有限图。我们允许图含有多重边和环（因此也可以称其为多重图）。更确切地说，我们采用 Serre 的形式体系 [18, 第 I 章第 §2.1]节如下定义图。

定义 2.1. 图 X 由顶点的有限集 V_X、边的有限集 $\mathbb{E}_X$、 $\mathbb{E}_X$ 上的一个自同构（记作 $e \mapsto \overline{e}$），以及从 $\mathbb{E}_X$ 到 V_X 的两个映射 s_X、 t_X （通常简写为 $s = s_X$ 和 $t = t_X$）组成，并满足以下条件：

- 对任意 $e \in \mathbb{E}_X$，都有 $\overline{e} \neq e$ 和 $\overline{e} = e$；也就是说，自同构 $e \mapsto \overline{e}$ 是 $\mathbb{E}_X$ 上的一个无不动点对合。
- 对任意 $e \in \mathbb{E}_X$，都有 $s(\overline{e}) = t(e)$，且 $t(\overline{e}) = s(e)$。

$e \in \mathbb{E}_X$ 中的每个元素都视为一条从 $s(e)$ 到 $t(e)$ 的边，而 $\overline{e}$ 视为 e的逆元。令 E_X 表示通过将 e 与$\overline{e}$等同而得到的 $\mathbb{E}_X$ 的商集。于是存在一个从 $\mathbb{E}_X$ 到 E_X的典范二对一映射，因此它们的基数满足 $\#E_X = \frac{1}{2} \cdot \#\mathbb{E}_X$。

对于每个 $v \in V_X$，我们定义

$$\mathbb{E}_{X,v} = \{e \in \mathbb{E}_X \mid s(e) = v\},$$

它是从 v出发的边的集合。

这种涉及 $\mathbb{E}_X$ 和对合的形式化方法，将有助于在§5中引入电压图。另一方面，我们可以通过商集 E_X将 X 视为无向（多重）图。本节将引入的概念，本质上是针对相应的无向图结构定义的。

为简便起见，本文通常讨论连通图。连通性并非必要假设，因为一般情形可以很容易地推导得出。

在本节余下部分，设 X 为一个连通图。

定义 2.2。我们将除子群 $\mathrm{Div}(X)$定义为集合 V_X上的自由 $\mathbb{Z}$-模，即，

$$\mathrm{Div}(X) = \bigoplus_{v \in V_X} \mathbb{Z}[v].$$

记作

$$\deg_X : \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}$$

表示将任意 $v \in V_X$ 的 $[v]$ 映射为 1 的 $\mathbb{Z}$-同态。我们将 $\deg_X$ 的核定义为 $\mathrm{Div}^0(X)$。

显然，我们有一个正合列

$$0 \to \mathrm{Div}^0(X) \to \mathrm{Div}(X) \overset{\deg_X}{\to} \mathbb{Z} \to 0. \tag{2.1}$$

定义 2.3。我们定义 $\mathbb{Z}$-同态

$$\mathcal{L}_X, A_X, D_X : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(X)$$

by

$$A_X([v]) = \sum_{e \in \mathbb{E}_{X,v}} [t(e)], \quad D_X([v]) = (\#\mathbb{E}_{X,v})[v]$$

对于 $v \in V_X$ 和 $\mathcal{L}_X = D_X - A_X$。$\mathcal{L}_X$、$A_X$ 和 D_X 的表示矩阵（相对于基 $\{[v]\}_{v\in V_X}$）分别称为拉普拉斯矩阵、邻接矩阵和度矩阵。

容易看出 $\deg_X \circ \mathcal{L}_X = 0$，也就是说，$\mathcal{L}_X$ 的像包含于 $\mathrm{Div}^0(X)$ 中。因此，我们可以作出如下定义。

定义 2.4。我们将雅可比群 $\mathrm{Jac}(X)$ 和皮卡群 $\mathrm{Pic}(X)$ 定义为余核

$$\mathrm{Jac}(X) = \mathrm{Cok}(\mathcal{L}_X : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}^0(X))$$

and

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathrm{Cok}(\mathcal{L}_X : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(X)).$$

因此，由 (2.1) 可得一个正合列

$$0 \to \mathrm{Jac}(X) \to \mathrm{Pic}(X) \overset{\deg_X}{\to} \mathbb{Z} \to 0. \tag{2.2}$$

雅可比群的一个基本性质如下。

定理 2.5（基尔霍夫矩阵树定理）。雅可比群 $\mathrm{Jac}(X)$ 是一个有限$\mathbb{Z}$-模。事实上，$\mathrm{Jac}(X)$ 的阶等于 X 的生成树数。

我们来看看关于雅可比群的以下同调描述。

引理 2.6. 令 $\iota_X : \mathbb{Z} \to \mathrm{Div}(X)$ 为 $\mathbb{Z}$-同态，它将 1 映到 $\sum_{v\in V_X}[v]$。那么序列

$$0 \to \mathbb{Z} \overset{\iota_X}{\to} \mathrm{Div}(X) \overset{\mathcal{L}_X}{\to} \mathrm{Div}(X) \overset{\deg_X}{\to} \mathbb{Z} \to 0$$

这是一个复形，除了右端的 $\mathrm{Div}(X)$ 处外均为无挠；该处的同调群同构于 $\mathrm{Jac}(X)$。

证明。我们只需验证 $\mathrm{Im}(\iota_X) = \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_X)$；其他断言显然。容易看出 $\mathcal{L}_X \circ \iota_X = 0$，即 $\mathrm{Im}(\iota_X) \subset \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_X)$。根据定理 2.5，$\mathrm{Im}(\iota_X)$ 和 $\mathrm{Ker}(\mathcal{L}_X)$ 的 $\mathbb{Z}$-秩相同。此外，根据 ι_X 的定义，$\mathrm{Im}(\iota_X)$ 是 $\mathrm{Div}(X)$ 的一个饱和子模（即，ι_X 的余核是 $\mathbb{Z}$-无挠的）。这些观察表明 $\mathrm{Im}(\iota_X) = \mathrm{Ker}(\mathcal{L}_X)$。□

现在我们快速回顾连通图的伽罗瓦覆盖这一概念（详细内容见 Terras [19,第 13] 章或 [17, §2.1] ）。连通图的覆盖 Y/X 是指给定一个覆盖映射 $\pi : Y \to X$，它是满射且局部同构。对于任意选取的 $v \in V_X$，Y/X的度定义为 $\#(\pi^{-1}(v))$。Y/X的伽罗瓦群 Γ 定义为保持覆盖映射不变的 Y 的自同构群。若 Γ 的阶 $\#\Gamma$ 等于 Y/X的度，则称覆盖 Y/X为伽罗瓦覆盖（或正规覆盖）。若 Γ 是阿贝尔群，则称 Y/X 为阿贝尔的。

定义 2.7. 设 Y/X 是连通图的一个伽罗瓦覆盖，其伽罗瓦群为 Γ。容易看出，$\mathrm{Div}(Y)$ 是一个自由的 $\mathbb{Z}[\Gamma]$-模，且 $\mathrm{Div}(Y)$ 上的自同态 $\mathcal{L}_Y$ 是一个 $\mathbb{Z}[\Gamma]$-同态。若 Γ 是阿贝尔群，我们定义

$$Z_{Y/X} = \det_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathcal{L}_Y \mid \mathrm{Div}(Y)) \in \mathbb{Z}[\Gamma].$$

根据 Pic(Y) 的定义和 Fitting 理想的定义，我们有

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathrm{Pic}(Y)) = (Z_{Y/X}) \tag{2.3}$$

当 Γ 是阿贝尔群时。在 §5.3 中，我们将看到 $Z_{Y/X}$ 与 Ihara ζ 函数之间的关系。

3. Reduction to an algebraic problem

本节将通过一个显式模的移位 Fitting 理想，描述定理 1.1 中涉及的 Fitting 理想。

我们先给出一个初等引理。设 Γ 是一个有限群，并记

$$R = \mathbb{Z}[\Gamma], \qquad \overline{R} = R/(N_\Gamma),$$

其中我们设 $N_\Gamma = \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma \in \mathbb{Z}[\Gamma]$。

引理 3.1. 我们有

$$\mathrm{Tor}_1^R(\overline{R}, \mathbb{Z}) = 0, \quad \overline{R} \otimes_R \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z}.$$

证明。我们有一个 R-模的正合列

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota} R \to \overline{R} \to 0,$$

其中 ι 将 1 映到 N_Γ。于是，相应的 $\mathrm{Tor}_*^R(-,\mathbb{Z})$ 长正合列为

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^R(\overline{R}, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \otimes_R \mathbb{Z} \xrightarrow{\iota_*} R \otimes_R \mathbb{Z} \to \overline{R} \otimes_R \mathbb{Z} \to 0.$$

我们有自然同构

$$\mathbb{Z} \otimes_R \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}, \quad R \otimes_R \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z},$$

通过这些同构，ι_* 被识别为 $\mathbb{Z}$ 上乘以 #Γ 的乘法。因此，我们得到该引理。□

在本节余下部分，设 Y/X 是连通图之间的一个伽罗瓦覆盖。我们用 Γ 表示其伽罗瓦群，并沿用上文的记号 R 和 $\overline{R}$。

以下是证明定理 1.1 的关键要素。

命题 3.2。我们有一个有限 $\overline{R}$-模的正合列

$$0 \to \overline{R} \otimes_R \mathrm{Jac}(Y) \to \overline{R} \otimes_R \mathrm{Pic}(Y) \to \mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z} \to 0.$$

证明。考虑将 X 换成 Y 后的正合列 (2.2)。对 $\overline{R}$ 和 $-$ 取 Tor_*^R，得到一个正合列

$$\mathrm{Tor}_1^R(\overline{R}, \mathbb{Z}) \to \overline{R} \otimes_R \mathrm{Jac}(Y) \to \overline{R} \otimes_R \mathrm{Pic}(Y) \to \overline{R} \otimes_R \mathbb{Z} \to 0.$$

应用引理 3.1，即得该命题。 □

研究 $\overline{R} \otimes_R \mathrm{Pic}(Y)$。

引理 3.3。我们有一个短正合列

$$0 \to \overline{R} \otimes_R \mathrm{Div}(Y) \xrightarrow{\overline{\mathcal{L}_Y}} \overline{R} \otimes_R \mathrm{Div}(Y) \to \overline{R} \otimes_R \mathrm{Pic}(Y) \to 0,$$

其中 $\overline{\mathcal{L}_Y}$ 表示由 $\mathcal{L}_Y$ 诱导的同态。

证明。根据 Pic(Y) 的定义， $\overline{\mathcal{L}_Y}$ 的余核与 $\overline{R}\otimes_R \mathrm{Pic}(Y)$ 同构，而后者由定理 2.5 和命题 3.2 可知是有限的。由于 $\overline{\mathcal{L}_Y}$ 是有限秩自由 $\mathbb{Z}$-模上的自同态，因此它是单射。□

我们用 $\overline{Z_{Y/X}} \in \overline{R}$ 表示 $Z_{Y/X} \in R$ 的像。应用移位理论（见 §A.2），得到如下结果。

定理 3.4. 假设 Y/X 是阿贝尔覆盖。那么我们有 e

$$\mathrm{Fitt}_{\overline{R}}(\overline{R}\otimes_R \mathrm{Jac}(Y)) = \overline{Z_{Y/X}}\,\mathrm{Fitt}^{[1]}_{R}(\mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z})$$

作为 $\overline{R}$ 的理想。

证明. 如 §A.2 所述，设 $\mathcal{P}_{\overline{R}}$ 为有限 $\overline{R}$-模构成的范畴，其中这些模的投射维数为 ≤ 1。由引理 3.3 可知， $\overline{R}\otimes_R \mathrm{Pic}(Y)$ 属于 $\mathcal{P}_{\overline{R}}$。此外，(2.3) 蕴含

$$\mathrm{Fitt}_{\overline{R}}(\overline{R}\otimes_R \mathrm{Pic}(Y)) = (\overline{Z_{Y/X}}).$$

因此， 该定理由 $\mathrm{Fitt}^{[1]}_{R}$ (–) 的定义和命题 3.2 得出。 □

我们将在第 4 节确定 $\mathrm{Fitt}^{[1]}_{R}$ $(\mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z})$，从而完成定理 1.1 的证明。

在结束本节之前，我们证明一个对 $\overline{R}\otimes_R$Jac(Y) 给出解释的命题。在证明过程中，我们重现命题 3.2 中的正合列。

命题 3.5。存在一个自然同构

$$\mathrm{Jac}(X) \simeq N_\Gamma \mathrm{Jac}(Y),$$

so

$$\overline{R}\otimes_R \mathrm{Jac}(Y) \simeq \mathrm{Jac}(Y)/\mathrm{Jac}(X).$$

证明。对于 X and Y，我们都使用引理 2.6。考虑涉及这些复形的如下图表。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\iota_X} & \mathrm{Div}(X) & \xrightarrow{\mathcal{L}_X} & \mathrm{Div}(X) & \xrightarrow{\deg_X} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times(\#\Gamma)} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow[\iota_Y]{} & \mathrm{Div}(Y) & \xrightarrow[\mathcal{L}_Y]{} & \mathrm{Div}(Y) & \xrightarrow[\deg_Y]{} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & \longrightarrow & \overline{R}\otimes_R \mathrm{Div}(Y) & \xrightarrow[\overline{\mathcal{L}_Y}]{} & \overline{R}\otimes_R \mathrm{Div}(Y) & \longrightarrow & \mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

这里，单同态 Div(X) $\hookrightarrow$ Div(Y) 定义为将 $[v]$ to$\sum_{w\in\pi^{-1}(v)}[w]$ 发送到，其中 $\pi\colon Y \to X$ 是覆盖映射。然后，该同态的像为 N_ΓDiv(Y)。竖直序列均为正合列，底部的水平序列是诱导复形。

我们将这个较大的图视为复形的短正合列。回顾一下， $\overline{\mathcal{L}_Y}$ 的核和余核已在引理 3.3 中确定。然后，取同调群可得一个正合列

$$0 \to \mathrm{Jac}(X) \to \mathrm{Jac}(Y) \to \overline{R}\otimes_R \mathrm{Pic}(Y) \to \mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z} \to 0.$$

将 Jac(X) 嵌入 Jac(Y) 的构造表明，其像与 N_ΓJac(Y) 一致，正如所声称的那样。此外，这重现了命题 3.2 中的正合列。□

4. Algebraic result

设 Γ 为任意有限阿贝尔群。令 $R = \mathbb{Z}[\Gamma]$ 和 $\overline{R} = \mathbb{Z}[\Gamma]/(N_\Gamma)$。本节的目标是确定定理 3.4 中出现的因子 $\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\overline{R}}(\mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z})$。

4.1. 陈述。首先陈述结果。与 §1.1 中一样，我们固定一个分解 $\Gamma = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_s$ 为若干循环群的直积。对于每个 $1 \le l \le s$，我们选取 σ_l 作为 Δ_l 的生成元，并按相同的公式定义$n_l = \#\Delta_l$ 以及元素 τ_l、ν_l、$D_l \in \mathbb{Z}[\Delta_l]$。显然有 $\tau_l\nu_l = 0$。D_l 的一个关键性质是

$$\tau_l D_l = n_l - \nu_l, \tag{4.1}$$

这一性质可通过直接计算证明。该性质在欧拉系统理论中也很重要。

结果如下。

定理 4.1。我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\overline{R}}(\mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z}) = &\sum_{l=1}^{s}\left(\nu_1\cdots\nu_{l-1}\cdot\frac{D_l}{n_l}\cdot\nu_{l+1}\cdots\nu_s\right)\\ &+\left(\nu_1^{e_1}\cdots\nu_s^{e_s}\tau_1^{f_1}\cdots\tau_s^{f_s}\,\middle|\,\begin{array}{c}0\le e_l\le 1, f_l\ge 0,\\ e_1+\cdots+e_s+f_1+\cdots+f_s = s-2\end{array}\right).\end{aligned}$$

显然，定理 1.1 可由定理 3.4 和 4.1 推出。本节其余部分将用于证明定理 4.1。

首先，我们利用一个（未移位的）Fitting 理想来描述 $\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\overline{R}}(\mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z})$。令

$$I = \mathrm{Ker}(\mathbb{Z}[\Gamma] \to \mathbb{Z}) \subset R$$

为增广理想，我们可以将其视为一个 $\overline{R}$-模。

引理 4.2。我们有

$$\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\overline{R}}(\mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z}) = (\#\Gamma)^{-1}\,\mathrm{Fitt}_{\overline{R}}(I/R(\#\Gamma - N_\Gamma)).$$

证明。由典范正合列 $0 \to I \to R \to \mathbb{Z} \to 0$，我们得到正合列$0 \to I \to \overline{R} \to \mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z} \to 0$。由于 $\#\Gamma - N_\Gamma$ 属于 I，且其在 $\overline{R}$ 中的像为 $\#\Gamma$，因此我们得到正合列

$$0 \to I/R(\#\Gamma - N_\Gamma) \to \overline{R}/(\#\Gamma)\overline{R} \to \mathbb{Z}/(\#\Gamma)\mathbb{Z} \to 0.$$

根据 $\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\overline{R}}(-)$ 的定义，这就证明了该引理。 □

根据引理 4.2，定理 4.1 的证明可归结为以下内容。

命题 4.3。我们有

$$\begin{aligned}&\mathrm{Fitt}_R(I/R(\#\Gamma - N_\Gamma))\\ &\quad = (N_\Gamma) + (\#\Gamma)\cdot\sum_{l=1}^{s}\left(\nu_1\cdots\nu_{l-1}\cdot\frac{D_l}{n_l}\cdot\nu_{l+1}\cdots\nu_s\right)\\ &\qquad + (\#\Gamma)\cdot\left(\nu_1^{e_1}\cdots\nu_s^{e_s}\tau_1^{f_1}\cdots\tau_s^{f_s}\,\middle|\,\begin{array}{c}0\le e_l\le 1, f_l\ge 0,\\ e_1+\cdots+e_s+f_1+\cdots+f_s = s-2\end{array}\right).\end{aligned}$$

这个命题的证明将在 §4.3 中给出。在此之前，我们先在 §4.2 中确立一个关键的技术命题。

4.2. 关键命题。设 $s\ge 0$ 是一个整数， $R_s=\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_s]$ 是具有 s 个不定元的多项式环。我们利用复形的张量积，构造一个 $\mathbb{Z}$ 在 R_s 上的自由分解。这个构造，或者说下文 §4.3 中更复杂的构造，受 [7] 启发，也用于 [11], [1], 等。

对于每个 $1\le l\le s$，我们都有一个正合列

$$0\to\mathbb{Z}[T_l]x_l\xrightarrow{T_l}\mathbb{Z}[T_l]\to\mathbb{Z}\to 0.$$

这里， x_l 表示一个不定元，因此 $\mathbb{Z}[T_l]x_l$ 是一个秩为一的自由 $\mathbb{Z}[T_l]$-模，标记为 T_l 的映射将 x_l 映到 T_l。映射 $\mathbb{Z}[T_l]\to\mathbb{Z}$ 将 T_l 映到 0。

注意， R_s 是当 $1\le l\le s$时， $\mathbb{Z}[T_l]$ 在 $\mathbb{Z}$ 上的张量积。于是，对 $1\le l\le s$中的复形 $[\mathbb{Z}[T_l]x_l\xrightarrow{T_l}\mathbb{Z}[T_l]]$ 取关于 $\mathbb{Z}$ 的张量积，我们得到一个正合列

$$\bigoplus_{1\le l<l'\le s}R_sx_lx_{l'}\xrightarrow{d_2}\bigoplus_{1\le l\le s}R_sx_l\xrightarrow{d_1}R_s\xrightarrow{d_0}\mathbb{Z}\to 0,$$

其中 d_0 将任意 T_l 送至 0，而 l、 d_1 由下式确定：

$$d_1(x_l)=T_l$$

对于 $1\le l\le s$，而 d_2 由下式确定：

$$d_2(x_lx_{l'})=-T_{l'}x_l+T_lx_{l'}$$

对于 $1\le l<l'\le s$ （符号还有其他选择，但这并不重要）。

我们用 $N_s(T_1,\dots,T_s)$ 表示 d_2 关于基 $\{x_lx_{l'}\mid 1\le l<l'\le s\}$ 和 $x_1,\dots,x_s$ 的表示矩阵。注意，我们不确定各行的顺序，因为这完全无关紧要。事实上，在下文中，我们有时会选择不同的基顺序，以便于计算。

例 4.4。当 $s=0$ （分别为 $s=1$）时，根据定义， d_2 的源是零模，因此 $d_2=0$ 和 $N_0()$ （分别为 $N_1(T_1)$）是空矩阵。当 $s=2$ 时，我们有

$$N_2(T_1,T_2)=\begin{pmatrix}-T_2 & T_1\end{pmatrix}.$$

当 $s=3$ 时，我们有

$$N_3(T_1,T_2,T_3)=\begin{pmatrix}&-T_3&T_2\\-T_3&&T_1\\-T_2&T_1&\end{pmatrix}.$$

这里，我们采用基的顺序 x_2x_3, x_1x_3, x_1x_2。当 $s=4$ 时，我们有

$$N_4(T_1,T_2,T_3,T_4)=\begin{pmatrix} -T_2 & T_1 & & \\ -T_3 & & T_1 & \\ -T_4 & & & T_1 \\ & -T_3 & T_2 & \\ & -T_4 & & T_2 \\ & & -T_4 & T_3 \end{pmatrix}.$$

这里，我们对基采用次序 $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_3, x_2x_4, x_3x_4$。

对于矩阵 H，将其视为自由模之间的同态，我们按照定义 A.1 定义关联理想 Fitt(H)。

以下公式在命题 4.3 的证明中起着关键作用。这是本文中技术性最强的结果。

命题4.5。我们有

$$\mathrm{Fitt}(\begin{pmatrix} N_s(T_1,\dots,T_s) \\ B_1 \quad \cdots \quad B_s \end{pmatrix}) = \begin{cases} (1) & (s=0) \\ (B_1) & (s=1) \\ (\sum_{l=1}^{s} B_l T_l)\,(T_1,\dots,T_s)^{s-2} & (s\geq 2). \end{cases}$$

这里，$B_1, \dots, B_s$ 是与 $T_1, \dots, T_s$ 无关的不定元，即我们在多项式环 $\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_s,B_1,\dots,B_s]$ 上进行讨论。

本小节余下部分将用于证明这一命题。$s=0$、$s=1$ 的情形显然。设 $s\geq 2$。

回忆一下，N_s（T_1，…，T_s）的行以 $x_lx_{l'}$（$1\leq l<l'\leq s$）为标签。我们还给最后一行 $\begin{pmatrix} B_1 & \cdots & B_s \end{pmatrix}$附加一个标签 y。对于任意子集

$$\mathcal{A}\subset \{x_lx_{l'} \mid 1\leq l<l'\leq s\} \amalg \{y\}$$

满足#$\mathcal{A}=s$，令 $N_{\mathcal{A}}$ 为通过选取标签属于 $\mathcal{A}$的行所构造的 $s\times s$ 子矩阵。那么，命题 4.5中的左端由所有此类 $\mathcal{A}$的行列式 det($N_{\mathcal{A}}$) 生成。

对于这样的 $\mathcal{A}$，我们构造一个无向简单图 $G_{\mathcal{A}}$，它有 s 个顶点 x_1，…，x_s，使得当且仅当 x_l 和 $x_{l'}$ 相邻时，$x_lx_{l'}\in\mathcal{A}$。那么，$G_{\mathcal{A}}$ 的边数为 $s-1$ 或 s；事实上，当且仅当 $y\in\mathcal{A}$时，它为 $s-1$。这一构造在集合之间建立了一一对应

$$\{\mathcal{A}\subset \{x_lx_{l'} \mid 1\leq l<l'\leq s\} \amalg \{y\} \mid \#\mathcal{A}=s\}$$

以及集合

{集合 $\{x_1,\dots,x_s\}$ 上具有 $s-1$ 条或 s 条边的简单图结构 }.

We s我们将利用相关图 $G_{\mathcal{A}}$的信息来描述 det($N_{\mathcal{A}}$) .

命题 4.6. 除非 $G_{\mathcal{A}}$ 是一棵树，否则 det($N_{\mathcal{A}}$) $=0$。

证明。假设 $G_{\mathcal{A}}$ 不是一棵树。由于 $G_{\mathcal{A}}$ 的边数至少为 $s-1$，这一假设等价于 $G_{\mathcal{A}}$ 含有一个环。换言之，通过对

指标进行排列，我们可假设对于某个 $3 \le r \le s$，有 $\{x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{r-1}x_r, x_rx_1\} \subset \mathcal{A}$。在这种情况下，矩阵 $N_{\mathcal{A}}$ 具有如下形式

$$\begin{pmatrix} -T_2 & T_1 & & & & \\ & -T_3 & T_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & 0 \\ & & & -T_r & T_{r-1} & \\ -T_r & & & & T_1 & \\ & & * & & & * \end{pmatrix}$$

如果我们采用顶点的顺序

$$x_1, x_2, \ldots, x_r, *, \ldots, *$$

以及行的顺序

$$x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{r-1}x_r, x_rx_1, *, \ldots, *$$

在 $\mathcal{A}$ 中（$*$ 表示未指定的事物）。容易看出，左上角的 $r \times r$ 矩阵的行列式为 0。因此，命题得证。□

根据命题 4.6，我们只需处理 $G_{\mathcal{A}}$ 是一棵树的情形。注意，此时 $G_{\mathcal{A}}$ 的边数为 $s-1$，即 $y \in \mathcal{A}$。对于每个 $1 \le l \le s$，令 $\deg_{\mathcal{A}}(x_l) \ge 1$ 表示图 $G_{\mathcal{A}}$ 中 x_l 的度。根据定义，$\deg_{\mathcal{A}}(x_l)$ 是在 $G_{\mathcal{A}}$ 中与 x_l 相邻的顶点数。

断言 4.7. 如果 $G_{\mathcal{A}}$ 是一棵树，那么有

$$\det(N_{\mathcal{A}}) = \pm \left(\sum_{l=1}^{s} B_l T_l \right) \cdot T_1^{\deg_{\mathcal{A}}(x_1)-1} \cdots T_s^{\deg_{\mathcal{A}}(x_s)-1}.$$

证明。我们简记 $\deg(-)$，而不写作 $\deg_{\mathcal{A}}(-)$。首先，我们证明该命题可由以下较弱的命题推出：存在符号 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s \in \{\pm 1\}$，使得

$$\det(N_{\mathcal{A}}) = \left(\sum_{l=1}^{s} \epsilon_l B_l T_l \right) \cdot T_1^{\deg(x_1)-1} \cdots T_s^{\deg(x_s)-1}.$$

假设存在这样一个族 $\{\epsilon_l\}_l$。根据命题 4.6，对于任意 $l \ne l'$，令 $B_l = T_{l'}$、$B_{l'} = -T_l$ 及其他 B 均为零时，我们知道 $\det(N_{\mathcal{A}})$ 为零。因此，$\epsilon_l T_{l'} T_l + \epsilon_{l'}(-T_l)T_{l'} = 0$，这表明 $\epsilon_l = \epsilon_{l'}$。于是我们得到 $\epsilon_1 = \cdots = \epsilon_s$，从而完整的命题得证。

我们来证明这个较弱的命题。将 $\det(N_{\mathcal{A}})$ 按最后一行（标记为 y）作余子式展开，得到

$$\det(N_{\mathcal{A}}) = \sum_{l=1}^{s} B_l \delta_l,$$

其中 δ_l 表示 B_l 的余子式（即删除最后一行 y 和第 l列后所得子矩阵的行列式）。这里及下文中，我们忽略δ_l的符号，因为这不影响较弱的结论。因此，只需证明对于任意固定的l，余子式 δ_l与 $T_l \cdot T_{\deg(x_1)-1} \cdots T^{\deg(x_s))_s}$ $^{-1}$相差一个符号。

固定 l。现在我们按如下方式重新排列顶点 x_1、…、x_s。我们将 x_l 视为树$G_{\mathcal{A}}$的根。回顾一下，每个顶点 x_k的深度（记作 $\mathrm{depth}(x_k)$）定义为

从根 x_l 到 x_k的唯一路径的长度。（我们令 $\mathsf{depth}(x_l) = 0$。）现在我们将有根图 $G_{\mathcal{A}}$ 的顶点重新排列为

$$x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(s)},$$

其中 σ 是集合 $\{1, 2, \ldots, s\}$ 的一个排列，使得

$$\mathrm{depth}(x_{\sigma(k)}) \leq \mathrm{depth}(x_{\sigma(k+1)})$$

对每个 $1 \leq k \leq s-1$都成立。我们必然有 $\sigma(1) = l$，但一般来说，这个 σ 并不唯一。

对于每个 $2 \leq k \leq s$，令 $1 \leq \underline{k} \leq s$ 为满足 $x_{\sigma(\underline{k})}$ 是 $x_{\sigma(k)}$的父节点的指标。它是唯一一个与 $x_{\sigma(k)}$ 相邻且深度小于$x_{\sigma(k)}$的顶点。注意，我们有 $1 \leq \underline{k} < k$。

现在，为了计算余子式 δ_l，我们采用顶点的排列

$$x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, \ldots, x_{\sigma(s)}$$

以及排列

$$x_{\sigma(\underline{2})}x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(\underline{3})}x_{\sigma(3)}, \ldots, x_{\sigma(\underline{s})}x_{\sigma(s)}$$

这些边。因此，得益于 $\underline{k} < k$，行列式为 δ_l 的矩阵是下三角矩阵，由此得到

$$\delta_l = \pm T_{\sigma(\underline{2})} T_{\sigma(\underline{3})} \cdots T_{\sigma(\underline{s})}.$$

由于 $x_{\sigma(\underline{k})}$ 是 $x_{\sigma(k)}$ 的父节点，对于每个 $1 \leq l' \leq s$，不定元 $T_{l'}$ 在此乘积中的指数等于顶点 $x_{l'}$ 的子节点数。如果顶点 $x_{l'}$ 是根，即如果 $l' = l$，那么子节点数等于 $\mathsf{deg}(x_l)$。否则，即如果 $l' \neq l$，子节点数等于 $\mathsf{deg}(x_{l'}) - 1$。至此，命题得证。□

例4.8。我们通过一个例子说明上述证明。设 $s = 5$，并考虑 $\mathcal{A} = \{x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_5, y\}$，于是

$$N_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -T_2 & T_1 & & & \\ -T_3 & & T_1 & & \\ -T_4 & & & T_1 & \\ & -T_5 & & & T_2 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{pmatrix}.$$

在这种情况下，我们有 $\mathsf{deg}_{\mathcal{A}}(x_1) = 3$，$\mathsf{deg}_{\mathcal{A}}(x_2) = 2$，以及 $\mathsf{deg}_{\mathcal{A}}(x_3) = \mathsf{deg}_{\mathcal{A}}(x_4) = \mathsf{deg}_{\mathcal{A}}(x_5) = 1$。

为考察 δ_1 的余子式，我们将 x_1 视为根。于是，$\mathsf{depth}(x_2) = \mathsf{depth}(x_3) = \mathsf{depth}(x_4) = 1$，且 $\mathsf{depth}(x_5) = 2$，因此我们对顶点采用顺序 x_2, x_3, x_4, x_5。我们有$\underline{2} = 1$, $\underline{3} = 1$, $\underline{4} = 1$, $\underline{5} = 2$，因此对边采用顺序 $x_1x_2, x_1x_3, x_1x_4, x_2x_5$。于是得到

$$\delta_1 = \pm \det \begin{pmatrix} T_1 & & & \\ & T_1 & & \\ & & T_1 & \\ T_5 & & & T_2 \end{pmatrix} = \pm T_1^3 T_2.$$

此处及以下示例中，由于可以忽略符号，我们省略在不定元前写出 $\pm$。

类似地，为考察 δ_2，我们对顶点使用 x_1、x_5、x_3、x_4，对边使用 x_1x_2、x_2x_5、x_1x_3、x_1x_4，并得到

$$\delta_2 = \pm \det \begin{pmatrix} T_2 & & & \\ & T_2 & & \\ T_3 & & T_1 & \\ T_4 & & & T_1 \end{pmatrix} = \pm T_1^2 T_2^2.$$

为考察 δ_3，我们采用阶 x_1、x_2、x_4、x_5 和 x_1x_3、x_1x_2、x_1x_4、x_2x_5，并得到

$$\delta_3 = \pm \det \begin{pmatrix} T_3 & & & \\ T_2 & T_1 & & \\ T_4 & & T_1 & \\ & T_5 & & T_2 \end{pmatrix} = \pm T_1^2 T_2 T_3.$$

现在我们回到一般情形。根据断言4.6和4.7，命题4.5中待计算的 Fitting 理想由以下元素生成

$$\left(\sum_{l=1}^{s} B_l T_l \right) \cdot T_1^{\deg_{\mathcal{A}}(x_1)-1} \cdots T_s^{\deg_{\mathcal{A}}(x_s)-1},$$

其中 $G_{\mathcal{A}}$ 遍历 顶点集 $\{x_1, \ldots, x_s\}$上的所有树结构。注意，我们有

$$\sum_{l=1}^{s} (\deg_{\mathcal{A}}(x_l) - 1) = \sum_{l=1}^{s} \deg_{\mathcal{A}}(x_l) - s = 2(s-1) - s = s - 2.$$

只需证明反过来，元组$(\deg_{\mathcal{A}}(x_1) - 1, \ldots, \deg_{\mathcal{A}}(x_s) - 1)$可以是任意一个和为 $s-2$的元组。以下命题可推出这一断言。

断言4.9。设 $s \geq 2$，且 f_1，…，f_s为整数，使得 $f_l \geq 0$且 $f_1 + \cdots + f_s = s-2$。那么，在顶点集合 x_1，…，x_s上存在一种树结构，使得对于所有 $1 \leq l \leq s$，x_l的度等于 $f_l + 1$。

证明。我们对 s进行归纳。当 $s = 2$时，必有 $f_1 = f_2 = 0$，且唯一的树结构满足该性质。假设 $s \geq 3$。由 $f_1 + \cdots + f_s = s - 2$，可得 $f_l = 0$ 且 $f_{l'} \geq 1$，其中某个 l 和 l'满足条件，因此不妨设 $f_s = 0$ 且 $f_1 \geq 1$。根据归纳假设，在 x_1，…，x_{s-1}上存在一种树结构，使得对于 $2 \leq l \leq s-1$，x_1的度为 f_1，而 x_l 的度为 $f_l + 1$。然后，只需连接 x_1 和 x_s，即可得到所需的图。□

命题4.5的证明至此完成。

4.3. 命题 4.3 的证明。在本小节中，我们证明命题 4.3。

我们首先以类似于 §4.2 的方式，构造增广理想 $I \subset R = \mathbb{Z}[\Gamma]$ 在 R 上的一个自由分解。请注意，这一思路已用于先前的工作中，例如 [1]。

对于每个 $1 \leq l \leq s$，我们有一个正合列

$$\mathbb{Z}[\Delta_l] x_l^2 \xrightarrow{\nu_l} \mathbb{Z}[\Delta_l] x_l \xrightarrow{\tau_l} \mathbb{Z}[\Delta_l] \to \mathbb{Z} \to 0,$$

其中，x_l 表示一个不定元，映射 ν_l 将x_l^2 映射到 $\nu_l x_l$，τ_l 将 x_l 映射到 τ_l，而映射 $\mathbb{Z}[\Delta_l] \to \mathbb{Z}$ 是增广映射。

对复形 $[\mathbb{Z}[\Delta_l]x_l^2 \xrightarrow{\nu_l} \mathbb{Z}[\Delta_l]x_l \xrightarrow{\tau_l} \mathbb{Z}[\Delta_l]]$ 在 $\mathbb{Z}$上取张量积，我们得到一个正合列

$$\bigoplus_{l=1}^{s} Rx_l^2 \oplus \bigoplus_{1\le l<l'\le s} Rx_lx_{l'} \xrightarrow{d_2} \bigoplus_{l=1}^{s} Rx_l \xrightarrow{d_1} R \xrightarrow{d_0} \mathbb{Z} \to 0,$$

其中， d_0 是增广映射， d_1 由下式确定

$$d_1(x_l) = \tau_l \quad (1 \le l \le s),$$

并且 d_2 由下式确定

$$\begin{cases} d_2(x_l^2) = \nu_l x_l & (1 \le l \le s), \\ d_2(x_lx_{l'}) = -\tau_{l'}x_l + \tau_l x_{l'} & (1 \le l < l' \le s). \end{cases}$$

因此， d_2 的表示矩阵具有如下形式

$$M_s(\nu_1, \dots, \nu_s, \tau_1, \dots, \tau_s) = \begin{pmatrix} \nu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \nu_s \\ N_s(\tau_1, \dots, \tau_s) & & \end{pmatrix}.$$

这里， $N_s(\tau_1, \dots, \tau_s)$表示将 $T_l = \tau_l$代入§4.2中构造的矩阵 $N_s(T_1, \dots, T_s)$所得的矩阵。

我们已经构造了 $\mathbb{Z}[\Gamma]$-模 I =Ker(d_0 : $R \to \mathbb{Z}$)的一个表示 $M_s(\nu_1, \dots, \nu_s, \tau_1, \dots, \tau_s)$。接下来我们要构造 I/R(#$\Gamma - N_\Gamma$)的一个表示。为此，我们定义元素 b_1、 $\cdots$、 $b_s \in R$如下

$$b_l = \nu_1 \cdots \nu_{l-1} \cdot D_l \cdot n_{l+1} \cdots n_s$$

对于 $1 \le l \le s$。这正是 Kolyvagin 导子算子发挥作用的地方。

引理 4.10。我们有

$$\sum_{l=1}^{s} b_l\tau_l = \#\Gamma - N_\Gamma.$$

证明。利用恒等式 (4.1)，我们可以计算

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{s} b_l\tau_l &= \sum_{l=1}^{s} \nu_1 \cdots \nu_{l-1} \cdot (n_l - \nu_l) \cdot n_{l+1} \cdots n_s \\ &= n_1 \cdots n_s - \nu_1 \cdots \nu_s \\ &= \#\Gamma - N_\Gamma. \end{aligned}$$

由此得到该引理。 □

那么引理 4.10 表明

$$d_1\left(\sum_{l=1}^{s} b_l x_l\right) = \#\Gamma - N_\Gamma,$$

因此 $I/R(\#\Gamma - N_\Gamma)$ 具有一个表示矩阵

$$\begin{pmatrix} M_s(\nu_1,\dots,\nu_s,\tau_1,\dots,\tau_s) \\ b_1 \quad \cdots \quad b_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \nu_s \\ N_s(\tau_1,\dots,\tau_s) & & \\ b_1 \quad \cdots & & b_s \end{pmatrix}$$

在 R 上。

为了计算这个矩阵的 Fitting 理想，我们首先注意到

$$\begin{aligned} &\mathrm{Fitt}(\begin{pmatrix} M_s(\nu_1,\dots,\nu_s,\tau_1,\dots,\tau_s) \\ b_1 \quad \cdots \quad b_s \end{pmatrix}) \\ &\quad = \sum_{j=0}^{s} \sum_{\substack{\boldsymbol{a}\subset\{1,2,\dots,s\} \\ \#\boldsymbol{a}=j}} \nu_{a_1}\cdots\nu_{a_j}\,\mathrm{Fitt}(\begin{pmatrix} N_{s-j}(\tau_{a_{j+1}},\dots,\tau_{a_s}) \\ b_{a_{j+1}} \quad \cdots \quad b_{a_s} \end{pmatrix}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

这里，$\boldsymbol{a}$ 遍历 $\{1,2,\dots,s\}$ 中满足 $\#\boldsymbol{a}=j$ 的子集，并通过要求以下条件来定义 a_1、.....、a_s

$$\boldsymbol{a}=\{a_1,\dots,a_j\}, \qquad \{a_1,\dots,a_s\}=\{1,2,\dots,s\}, \qquad a_1<\cdots<a_j, \qquad a_{j+1}<\cdots<a_s.$$

我们可以直接利用恒等式 $\nu_l\tau_l=0$ 证明 (4.2)（参见 [1, 命题4.7]，其中采用了类似的推理）。

利用命题4.5计算 (4.2) 的右端。当 $j=s$ 时，我们有 $\boldsymbol{a}=\{1,2,\dots,s\}$，因此该项为

$$\nu_1\cdots\nu_s(1)=(N_\Gamma). \tag{4.3}$$

当 $j=s-$ 1 时，我们有 $\{1,2,\dots,s\}\setminus\boldsymbol{a}=\{l\}$，其中某个 $1\le l\le s$，于是该项为

$$\nu_1\cdots\nu_{l-1}\cdot\nu_{l+1}\cdots\nu_s\cdot(b_l)=(\#\Gamma)\cdot\left(\nu_1\cdots\nu_{l-1}\cdot\frac{D_l}{n_l}\cdot\nu_{l+1}\cdots\nu_s\right). \tag{4.4}$$

最后，我们考虑 $0\le j\le s-2$。对于每个满足 $\#\boldsymbol{a}=j$ 的 $\boldsymbol{a}$，该项可计算为

$$\begin{aligned} &\nu_{a_1}\cdots\nu_{a_j}\left(b_{a_{j+1}}\tau_{a_{j+1}}+\cdots+b_{a_s}\tau_{a_s}\right)(\tau_{a_{j+1}},\dots,\tau_{a_s})^{s-j-2} \\ &\quad=\nu_{a_1}\cdots\nu_{a_j}\left(b_{a_1}\tau_{a_1}+\cdots+b_{a_s}\tau_{a_s}\right)(\tau_{a_1},\dots,\tau_{a_s})^{s-j-2} \\ &\quad=\nu_{a_1}\cdots\nu_{a_j}(\#\Gamma-N_\Gamma)(\tau_1,\dots,\tau_s)^{s-j-2}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

其中，第一个等式由恒等式 $\tau_l\nu_l=0$ 得出；第二个等式由引理 4.10 得出。

容易看出，由 (4.3)、(4.4) 和 (4.5) 生成的理想与命题右侧一致（注意，由于 (4.3)，可以忽略 (4.5) 中的 N_Γ）。由此完成命题 4.3 的证明。

这也完成了定理 1.1 的证明。

5. 电压图与导出图

为了构建无限覆盖的框架，使用电压图及其导出图的概念会比较方便。

5.1. 电压图与导出图。更多详情请参见 [5, §2.3], [14, §4], 或 [17, §2.3]。

定义 5.1. 电压图 (X, Γ, α) 由一个图 X、一个群 Γ 和一个映射 $\alpha : \mathbb{E}_X \to \Gamma$ 组成，满足 $\alpha(\overline{e}) = \alpha(e)^{-1}$，对任意 $e \in \mathbb{E}_X$ 均成立。除非特别说明，我们不假设 Γ 是有限群或阿贝尔群。

设 (X, Γ, α) 是一个电压图。

定义 5.2. 假设 Γ 是有限的。我们构造一个图 $X(\Gamma)$（映射 α 是隐含的），称为 (X, Γ, α) 的导出图，定义如下：

$$V_{X(\Gamma)} = \Gamma \times V_X, \quad \mathbb{E}_{X(\Gamma)} = \Gamma \times \mathbb{E}_X,$$

and

$$\overline{(\gamma, e)} = (\gamma \cdot \alpha(e), \overline{e}), \quad s_{X(\Gamma)}((\gamma, e)) = (\gamma, s_X(e)), \quad t_{X(\Gamma)}((\gamma, e)) = (\gamma \cdot \alpha(e), t_X(e))$$

对任意 $(\gamma, e) \in \Gamma \times \mathbb{E}_X$ 均成立。

群 Γ 自然地从左侧作用于图 $X(\Gamma)$ 上。此外，$X(\Gamma)$ 是 X 的一个覆盖，覆盖映射为自然投影，并且 Γ 的作用保持这一覆盖结构。

如果 $X(\Gamma)$ 是连通的（因此 X 也是连通的），那么 $X(\Gamma)$ 实际上是 X 的一个伽罗瓦覆盖，其伽罗瓦群为 Γ。反过来，若给定一个连通图之间的伽罗瓦覆盖 Y/X，则存在一种电压图结构 (X, Γ, α)，其中 Γ 为伽罗瓦群，使得 $X(\Gamma)$ 与 Y 作为 X 的覆盖是同构的。简而言之，导出图的概念涵盖了连通图之间伽罗瓦覆盖的概念。

定义 5.3. 我们定义 $\mathbb{Z}[\Gamma]$-同态

$$A_{X,\Gamma}, \mathcal{L}_{X,\Gamma} : \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X) \to \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X)$$

by

$$A_{X,\Gamma}(1 \otimes [v]) = \sum_{e \in \mathbb{E}_{X,v}} \alpha(e) \otimes [t(e)]$$

对于任意 $v \in V_X$ 和

$$\mathcal{L}_{X,\Gamma} = \mathrm{id} \otimes D_X - A_{X,\Gamma},$$

其中 $D_X : \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Div}(X)$ 如定义 2.3 所述。注意，当 Γ 是平凡群时，这些映射 $A_{X,\Gamma}$ 和 $\mathcal{L}_{X,\Gamma}$ 可自然地视为与定义 2.3 中的映射 A_X 和 $\mathcal{L}_X$ 相同。

下面的引理很容易证明。

引理 5.4. Sup 假设 Γ 是有限的。那么我们有一个 $\mathbb{Z}[\Gamma]$-模的交换图 s

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X) & \xrightarrow{\mathcal{L}_{X,\Gamma}} & \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X) \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathrm{Div}(X(\Gamma)) & \xrightarrow[\mathcal{L}_{X(\Gamma)}]{} & \mathrm{Div}(X(\Gamma)), \end{array}$$

其中，垂直同构由将 $\gamma \otimes [v]$ 送到 $[(\gamma, v)]$ 来定义。特别地，$\mathrm{Pic}(X(\Gamma))$ 同构于同态 $\mathcal{L}_{X,\Gamma}$ 的余核。

定义 5.5. 假设 Γ 是阿贝尔的。我们定义

$$Z_{X,\Gamma} = \det_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathcal{L}_{X,\Gamma} \mid \mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X)) \in \mathbb{Z}[\Gamma].$$

假设 Γ 是有限阿贝尔群，且 $X(\Gamma)$ 是连通的。那么由定义 2.7 可得元素 $Z_{X(\Gamma)/X} \in \mathbb{Z}[\Gamma]$。它与元素 $Z_{X,\Gamma}$ 的关系仅为

$$Z_{X(\Gamma)/X} = Z_{X,\Gamma},$$

这归功于引理 5.4。

5.2. 概形覆盖。 本小节中，我们考虑电压图 (X, Γ, α)，其中 Γ 是概形。

对于 Γ 的每个开正规子群 U，我们都有电压图 $(X, \Gamma/U, \alpha_{/U})$，其中 $\alpha_{/U}$ 是 α 与自然投影 $\Gamma \to \Gamma/U$ 的复合映射。因此，我们有相应的导出图 $X(\Gamma/U)$， Γ/U 在其上作用。

尽管除非 Γ 有限，否则 $X(\Gamma)$ 未定义，但我们将 $X(\Gamma)$ 记作族 $\{X(\Gamma/U)\}_U$。那么，$X(\Gamma)$ 可视为 X 的无限覆盖。例如，假设 Γ 同构于作为拓扑群的 $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$。那么， Γ 的开子群（乘法记法）对每个 $n \geq 0$ 都是 Γ^{p^n}。因此，在这种情况下， $X_\infty = X(\Gamma)$ 是 $n \geq 0$ 属于此集合时所有 $X_n = X(\Gamma/\Gamma^{p^n})$ 组成的族。这个族示意如下，为一列覆盖

$$X = X_0 \leftarrow X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow \cdots.$$

我们将这样的 X_∞/X 称为 $\mathbb{Z}_p$覆盖。这被视为岩泽理论中数域 $\mathbb{Z}_p$扩张的类似物；关于这一主题的更多内容，参见§8。

为简 洁起见，在本小节的其余部分，我们始终作如下假设：

假设 5.6. 对于 Γ的任意开正规子群 U ，导出图 $X(\Gamma/U)$是连通的。

正如我们将在下面引理的证明中说明的那样，导出图连通有一个等价条件，而这对 Γ 的结构施加了如下限制。

引理 5.7. 如果假设 5.6 成立，则群 Γ 作为仿射有限群是有限生成的。事实上，它由$\#E_X - \#V_X + 1$ 个元素生成（回忆$\#E_X = \frac{1}{2} \cdot \#\mathbb{E}_X$）。

证明。令 $\pi_1(X, v_0)$ 表示 X 的基本群，并任意固定一个基点 $v_0 \in V_X$。已知 $\pi_1(X, v_0)$ 是一个具有 $\#E_X - \#V_X + 1$ 个生成元的自由群。此外，导出图 $X(\Gamma/U)$ 连通这一条件，等价于群同态 $\pi_1(X, v_0) \to \Gamma/U$ 由 $\alpha_{/U}$ 诱导的映射是满射（例如，参见 [17, 定理 2.11] ）。这意味着，假设 5.6 等价于群同态 $\pi_1(X, v_0) \to \Gamma$ 在 Γ 中的像是稠密的。因此，得到该引理。□

为保证逆极限的正合性，我们将系数环从 $\mathbb{Z}$改为紧的 $\mathbb{Z}$代数 Λ ，它在 $\mathbb{Z}$ 上是平坦的（即作为 $\mathbb{Z}$模是无挠的）。 Λ 的基本例子包括 p下的 $\mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}_p$ ，其中 $\mathbb{Z}$ （分别为 $\mathbb{Z}_p$）是 $\mathbb{Z}$的概形（分别为 pro-p）完备化。

定义 5.8。我们定义

$$\mathrm{Jac}_\Lambda(X(\Gamma)) = \varprojlim_U \left(\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Jac}(X(\Gamma/U))\right),$$

其中 U 遍历 Γ 的开正规子群。这是一个完备群环上的模

$$\Lambda[[\Gamma]] = \varprojlim_U \Lambda[\Gamma/U].$$

我们以相同的方式定义 $\mathrm{Pic}_\Lambda(X(\Gamma))$。

我们来考察关于这些雅可比群和皮卡群的若干命题。

命题 5.9. 我们有一个 $\Lambda[[\Gamma]]$-模的正合列

$$0 \to \mathrm{Jac}_\Lambda(X(\Gamma)) \to \mathrm{Pic}_\Lambda(X(\Gamma)) \to \Lambda \to 0.$$

证明。对于 Γ 的每个开正规子群 U，我们有关于 $X(\Gamma/U)$ 的正合列 (2.2)。然后，由于 Λ 是紧的，通过取极限（从 $\mathbb{Z}$ 到 Λ 作基变换后），我们得到所述正合列。□

我们将 ${}_\Gamma\Lambda$ 定义为 Λ 的一个理想

$${}_\Gamma\Lambda = \bigcap_U [\Gamma : U]\Lambda,$$

其中 U 遍历 Γ的所有开正规子群。我们通常有 ${}_\Gamma\Lambda = 0$ （见注 5.13）。

回顾一下，我们有作用于 $\mathbb{Z}[\Gamma] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X)$ 上的自同态 $\mathcal{L}_{X,\,\Gamma}$ （定义 5.3）。用同一符号表示其到 $\Lambda[[\Gamma]]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{Div}(X)$ 的基变换。另请回顾，$Z_{X,\,\Gamma} \in \mathbb{Z}[\Gamma] \subset \Lambda[[\Gamma]]$在定义 5.5 中定义。

命题 5.10。我们有一个 $\Lambda[[\Gamma]]$-模的正合列

$$0 \to {}_\Gamma\Lambda \to \Lambda[[\Gamma]] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X) \xrightarrow{\mathcal{L}_{X,\Gamma}} \Lambda[[\Gamma]] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}_\Lambda(X(\Gamma)) \to 0.$$

特别地，当 Γ 是阿贝尔群时，我们有

$$\mathrm{Fitt}_{\Lambda[[\Gamma]]}(\mathrm{Pic}_\Lambda(X(\Gamma))) = (Z_{X,\Gamma}).$$

证明。对于 Γ 的每个开正规子群 U，我们可以对 $X(\Gamma/U)$ 应用引理 2.6 和 5.4。由于 Λ 在 $\mathbb{Z}$ 上平坦，我们得到一个正合序列

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{\iota_{X,\Gamma/U}} \Lambda[\Gamma/U] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X) \xrightarrow{\mathcal{L}_{X,\Gamma/U}} \Lambda[\Gamma/U] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X) \to \mathrm{Pic}_\Lambda(X(\Gamma/U)) \to 0,$$

其中 ${}_{\Gamma/U,}$ 表示将 1 映射到 $N_{\Gamma/U} \otimes \left(\sum_{v\in V_X}[v]\right)$ 的 Λ-同态，且 $N_{\Gamma/U}$为范数元。给定 Γ 的另一个开正规子群 V，满足 $V \subset U$ 时，这些正合序列满足以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \Lambda & \xrightarrow{\iota_{X,\Gamma/V}} & \Lambda[\Gamma/V] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X) & \xrightarrow{\mathcal{L}_{X,\Gamma/V}} & \Lambda[\Gamma/V] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}_\Lambda(X(\Gamma/V)) \longrightarrow 0 \\
 & & \times[U:V]\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \Lambda & \xrightarrow{\iota_{X,\Gamma/U}} & \Lambda[\Gamma/U] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X) & \xrightarrow{\mathcal{L}_{X,\Gamma/U}} & \Lambda[\Gamma/U] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Pic}_\Lambda(X(\Gamma/U)) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

由于 Λ 是紧的，取极限后即可得到所声称的正合列。□

推论 5.11. 设 Γ' 是 Γ 的一个闭正规子群，并考虑诱导电压图 $(X, \Gamma/\Gamma', \alpha_{/\Gamma'})$，其中 $\alpha_{/\Gamma'}$ 表示 α 与投影映射 $\Gamma \to \Gamma/\Gamma'$ 的复合。于是我们有一个 $\Lambda[[\Gamma/\Gamma']]$-模同构

$$\mathrm{Pic}_\Lambda(X(\Gamma))_{\Gamma'} \simeq \mathrm{Pic}_\Lambda(X(\Gamma/\Gamma')).$$

证明。将命题 5.10分别应用于电压图（X、Γ、α）和（X、Γ/Γ'、$\alpha_{/\Gamma'}$）所得的正合列进行比较，即可立即得到结论。□

回顾一下，交换环上的模称为挠模，如果任意元素都被某个非零因子湮灭。根据命题 5.10，并结合引理A.3，我们立即得到如下结论。

推论 5.12。以下各条件等价。

(i) 我们有 $_\Gamma\Lambda = 0$。(ii) $\Lambda[[\Gamma]] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{Div}(X)$上的自同态$\mathcal{L}_{X,\Gamma}$ 是单射。(iii) $\Lambda[[\Gamma]]$ 中的元素$Z_{X,\Gamma}$ 是非零因子。(iv) $\Lambda[[\Gamma]]$-模 $\mathrm{Pic}_\Lambda(X(\Gamma))$ 是挠模。

注 5.13。在§6中，我们基本上考虑˜推论 5.12中的等价条件成立的情形。例如，当 $\Lambda = \mathbb{Z}$ 时，$_\Gamma\Lambda = 0$ 当且仅当Γ 的阶可被任意正整数整除。这里，一般而言，对于仿射有限群 Γ，如果存在一个开正规子群 $U \subset \Gamma$使得 $n \mid [\Gamma : U]$，我们就说 Γ 的阶可被正整数 n 整除。类似地，当 $\Lambda = \mathbb{Z}_p$时，$_\Gamma\Lambda = 0$ 当且仅当 Γ 的阶可被任意 p-次幂整除（即，可被 p^∞整除）。

现在我们指出，可以运用迄今为止的观察，自然而然地重新证明 Kleine–M¨uller [13],如下所示的多重 $\mathbb{Z}_p$-覆盖的岩泽主猜想类比。

定理5.14（Kleine–M¨uller [13, 定理5.2及注5.3]）。假设 $\Lambda = \mathbb{Z}_p$ 且 Γ 同构于某个 $d \geq 1$ 的 $\mathbb{Z}_p^d$。那么 $\mathrm{Jac}^{\mathbb{Z}_p}(X(\Gamma))$ 的特征理想可表示为

$$\mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathrm{Jac}_{\mathbb{Z}_p}(X(\Gamma))) = \begin{cases} (Z_{X,\Gamma}) & (d \geq 2) \\ I(\Gamma)^{-1}(Z_{X,\Gamma}) & (d = 1), \end{cases}$$

其中，$I(\Gamma)$ 表示 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 的增广理想。

证明。已知系数环 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 同构于由 d 个不定元 $\mathbb{Z}_p[[T_1, \ldots, T_d]]$ 构成的幂级数环。特别地，$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 是一个正则局部环，因此我们可以定义有限生成挠模 M 的特征理想 $\mathrm{char}^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(M)$。

由推论 5.12 结合注 5.13 可知，$\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-模 $\mathrm{Pic}^{\mathbb{Z}_p}(X(\Gamma))$ 是挠的。由于特征理想对正合列满足乘法性，命题 5.9 推出

$$\mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X(\Gamma))) = \mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathbb{Z}_p) \cdot \mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathrm{Jac}_{\mathbb{Z}_p}(X(\Gamma))).$$

我们有 $\mathrm{char}^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathbb{Z}_p) = (1)$，若 $d \geq 2$（因为 $\mathbb{Z}_p$ 是一个伪零模）；并且 $\mathrm{char}^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathbb{Z}_p) = I(\Gamma)$，若 $d = 1$。此外，命题 5.10 推出

$$\mathrm{char}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X(\Gamma))) = (Z_{X,\Gamma}).$$

由此我们得到该定理。□

注5.15. 在§6中，我们将计算 Fitting 理想，而非特征理想。与特征理想相比，Fitting 理想的概念大致有两项优势。其一，Fitting 理想在任意交换环上都有定义。其二，即使系数环是正则局部环，Fitting 理想仍比特征理想更精细；事实上，Fitting 理想决定了特征理想。因此，§6中的主要结果（表述为定理6.1和定理6.2）是对定理5.14的细化。

5.3. 与 Ihara ζ函数的关系。在本小节中，我们简要说明雅可比群的解析方面。例如，正如定理5.14所示，雅可比群的结构与元素 $Z_{X,\,\Gamma}$ 密切相关。本小节旨在说明 $Z_{X,\,\Gamma}$ 可以用（等变）Ihara ζ函数来解释。这一事实可视为数论中各种算术对象的代数方面与解析方面之间猜想性关系的类比（例如，岩泽主猜想、等变 Tamagawa 数猜想等）。本小节的结果不会用于本文的其他部分。可参阅 Terras [19]。

设 (X,Γ,α) 是一个电压图，且 Γ 是阿贝尔群。首先我们定义相应的 ζ 函数（见 [19, 第2章和 18]）。

定义5.16. 我们将（等变）Ihara ζ 函数定义为

$$\zeta_{X,\Gamma}(u)=\prod_{[P]}(1-\alpha(P)u^{\nu(P)})^{-1}\in\mathbb{Z}[\Gamma][[u]],$$

其中，P遍历 X中的本原路径，$[P]$ 表示 P的旋转类，$\nu(P)$表示 P的长度。当路径 P由边 e_1、……、e_n（$e_i\in\mathbb{E}_X$且 $n=\nu(P)$）组成时，我们定义 $\alpha(P)=\alpha(e_1)\cdots\alpha(e_n)$。

我们定义

$$Z_{X,\Gamma}(u)=\det_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(1-A_{X,\Gamma}u+(D_X-1)u^2\mid\mathbb{Z}[\Gamma]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathrm{Div}(X))\in\mathbb{Z}[\Gamma][u].$$

根据定义，我们有$Z_{X,\Gamma}(1)=Z_{X,\Gamma}$。结果如下。

定理5.17（三项行列式公式）。我们有

$$\zeta_{X,\Gamma}(u)^{-1}=(1-u^2)^{\#E_X-\#V_X}Z_{X,\Gamma}(u).$$

特别地，$\zeta_{X,\Gamma}(u)$是一个有理函数。

证明。当 Γ 为平凡时，该定理就是 [19, 定理 2.5]。更一般地，Artin–Ihara L-函数的三项行列式公式已在 [19, 定理 18.15]中得到证明。我们可以通过仿照这些证明来证明我们的定理。或者，也可以从 Artin–Ihara L-函数的公式推出我们的定理。事实上，一般情形可以归约到 Γ 为有限且 $X(\Gamma)$ 连通的情形。在该情形下，将所有 Γ的特征标对应的 Artin–Ihara L-函数公式结合起来，即可得到该结论。细节从略。□

6. Results for profinite coverings

设 (X,Γ,α) 是一个电压图，使得 Γ 是概形且为阿贝尔的。我们始终假设假设 5.6，因此引理 5.7 表明 Γ 是有限生成的。

设 Λ 是一个紧平坦的 $\mathbb{Z}$ 代数。本节旨在确定

$$\mathrm{Fitt}_{\Lambda[[\Gamma]]}(\mathrm{Jac}_\Lambda(X(\Gamma))),$$

假设推论 5.12 中的等价条件成立。

为简便起见，在下文中我们假设 $\Lambda = \mathbb{Z}_p$ 具有一个固定的素数 p。这是最值得关注的情形。接下来，$\Lambda = \mathbb{Z}$ 的情形也可类似完成，因为我们有 $\mathbb{Z} = \prod_p \mathbb{Z}_p$。回想一下，正如我们在注 5.13 中所观察到的，推论 5.12 中关于 $\Lambda = \mathbb{Z}_p$ 的等价条件表明，Γ 的阶可被 p^∞整除。

6.1. 陈述。首先，我们将问题归结为一个代数问题 .

Th定理 6.1. 假设 Γ 的阶可被 p^∞整除。那么我们有

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathrm{Jac}_{\mathbb{Z}_p}(X(\Gamma))) = Z_{X,\Gamma}\,\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathbb{Z}_p).$$

证明。根据假设，命题 5.10 蕴含 $\mathrm{Pic}^{\mathbb{Z}_p}(X(\Gamma))$ 属于 §A.2 中定义的范畴 $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}$，并且其 Fitting 理想为 $(Z_{X,\,\Gamma})$。由于 Γ 是有限生成的，通过构造一个显式分解（见下文 §6.2），不难证明 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-模 $\mathbb{Z}_p$ 是有限表示的。因此，$\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathbb{Z}_p)$ 是良定义的。此外，由命题 5.9 可知，$\mathrm{Jac}^{\mathbb{Z}_p}(X(\Gamma))$ 是有限生成的；同时，根据 $\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(-)$ 的定义，定理得证。□

现在我们需要计算 $\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathbb{Z}_p)$。本节余下部分的论证适用于任意有限生成的概形阿贝尔群 Γ，其阶可被 p^∞ 整除。

由于 Γ是有限生成的，我们可以将 Γ 分解为

$$\Gamma = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_s \times \Gamma_{s+1} \times \cdots \times \Gamma_{s+t+1},$$

其中 $\Delta_l\,(1 \le l \le s)$ 是一个阶不可被 p^∞ 整除的前循环群，而 $\Gamma_l\,(s+1 \leq l \leq s+t+1)$ 是一个阶可被 p^∞整除的前循环群。注意，此时整数$t+1$ 等于 $\mathbb{Z}_p$-秩的 pro-p 完备化 Γ，因此根据假设，我们有$t \ge 0$。一般而言，这种分解并不唯一。

对于 $1 \le l \le s$，取 Δ_l 的一个（拓扑）生成元 σ_l，并令 $\tau_l = \sigma_l - 1$。类似地，对于 $s+1 \le l \le s+t+1$，取 Γ_l的一个生成元 σ_l，并令 $T_l = \sigma_l - 1$。

令 $1 \le l \le s$。我们还固定一个开子群 $U_l \subset \Delta_l$，使得 U_l 的阶不被 p整除。置 $n_l = [\Delta_l : U_l]$。对于 U_l的每个开子群 U，置

$$\nu_{l,U} = \frac{1}{[U_l : U]} N_{\Delta_l/U} \in \mathbb{Z}_p[\Delta_l/U].$$

那么当我们改变 U时，$\nu_{l,\,U}$ 是相容的，因此该族定义了一个元素

$$\nu_l = (\nu_{l,U})_U \in \mathbb{Z}_p[[\Delta_l]].$$

该元素满足 $\nu_l^2 = n_l\nu_l$ 和 $\tau_l\nu_l = 0$，因为每个 $\nu_{l,\,U}$ 都满足这些性质。注意，尽管 n_l 和 ν_l 取决于 U_l的选择，但它们在 $\mathbb{Z}_p^\times$意义下是良定义的。

以下是主要结果。

定理 6.2。分式理想 $\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathbb{Z}_p)$ 等于

$$(T_{s+1}^{-1}\nu_1\cdots\nu_s)+\left(\nu_1^{e_1}\cdots\nu_s^{e_s}\tau_1^{f_1}\cdots\tau_s^{f_s}T_{s+1}^{f_{s+1}}\,\middle|\,\begin{array}{c}0\le e_l\le 1, f_l\ge 0,\\ e_1+\cdots+e_s+f_1+\cdots+f_{s+1}=s-1\end{array}\right)$$

若 $t=0$ 且

$$\left(\nu_1^{e_1}\cdots\nu_s^{e_s}\tau_1^{f_1}\cdots\tau_s^{f_s}T_{s+1}^{f_{s+1}}\cdots T_{s+t+1}^{f_{s+t+1}}\,\middle|\,\begin{array}{c}0\le e_l\le 1, f_l\ge 0,\\ e_1+\cdots+e_s+f_1+\cdots+f_{s+t+1}=s+t-1\end{array}\right)$$

若 $t\ge 1$。

6.2. 定理 6.2 的证明。首先回顾 Atsuta 与作者 [1] 的一项结果，该结果在证明中起着关键作用。

命题 6.3 ([1, 命题 4.8])。设 $s\ge 0$ 为一个整数。考虑 §4.2 中构造的矩阵 $N_s(T_1,\dots,T_s)$，其元素属于多项式环 $\mathbb{Z}[T_1,\dots,T_s]$。对于每个 $i\ge 0$，该矩阵的第 i 个 Fitt 理想可描述为

$$\mathrm{Fitt}_i(N_s(T_1,\dots,T_s))=\begin{cases}(1) & (i\ge s)\\ 0 & (s\ge 1, i=0)\\ (T_1,\dots,T_s)^{s-i} & (1\le i<s).\end{cases}$$

Put

$$\Gamma^0=\Delta_1\times\cdots\times\Delta_s\times\Gamma_{s+1}\times\cdots\times\Gamma_{s+t},$$

因此 $\Gamma=\Gamma^0\times\Gamma_{s+t+1}$。接下来，按照 §§4.2–4.3 中类似的方法，构造 $\mathbb{Z}_p$ 在 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma^0]]$ 上的自由分解。注意，我们有正合序列

$$\mathbb{Z}_p[[\Delta_l]]x_l^2\xrightarrow{\nu_l}\mathbb{Z}_p[[\Delta_l]]x_l\xrightarrow{\tau_l}\mathbb{Z}_p[[\Delta_l]]\to\mathbb{Z}_p\to 0$$

对于 $1\le l\le s$ 和

$$0\to\mathbb{Z}_p[[\Gamma_l]]x_l\xrightarrow{T_l}\mathbb{Z}_p[[\Gamma_l]]\to\mathbb{Z}_p\to 0$$

对于 $s+1\le l\le s+t$。然后，通过对复形取张量积，我们得到一个正合列

$$\bigoplus_{l=1}^{s}\mathbb{Z}_p[[\Gamma^0]]x_l^2\oplus\bigoplus_{1\le l<l'\le s+t}\mathbb{Z}_p[[\Gamma^0]]x_lx_{l'}\xrightarrow{d_2}\bigoplus_{l=1}^{s+t}\mathbb{Z}_p[[\Gamma^0]]x_l\xrightarrow{d_1}\mathbb{Z}_p[[\Gamma^0]]\xrightarrow{d_0}\mathbb{Z}_p\to 0,$$

其中 d_0 是增广映射，d_1 由下式确定

$$d_1(x_l)=\begin{cases}\tau_l & (1\le l\le s)\\ T_l & (s+1\le l\le s+t),\end{cases}$$

且 d_2 由以下确定

$$d_2(x_l^2)=\nu_lx_l\quad(1\le l\le s)$$

and

$$d_2(x_lx_{l'})=\begin{cases}-\tau_{l'}x_l+\tau_lx_{l'} & (1\le l<l'\le s)\\ -T_{l'}x_l+\tau_lx_{l'} & (1\le l\le s<s+1\le l'\le s+t)\\ -T_{l'}x_l+T_lx_{l'} & (s+1\le l<l'\le s+t).\end{cases}$$

因此， d_2 的表示矩阵形式如下

$$M_{s,t}(\nu_1,\dots,\nu_s,\tau_1,\dots,\tau_s,T_{s+1},\dots,T_{s+t})=\begin{pmatrix}\nu_1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & & \nu_s & \\ N_{s+t}(\tau_1,\dots,\tau_s,T_{s+1},\dots,T_{s+t}) & & & \end{pmatrix}.$$

现在注意到 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma^0]]$ 属于 $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}$，且 $\mathrm{Fitt}^{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma^0]]}=(T_{s+t+1})$。由于我们有一个正合列

$$0\to \mathrm{Cok}(d_2)\xrightarrow{d_1}\mathbb{Z}_p[[\Gamma^0]]\xrightarrow{d_0}\mathbb{Z}_p\to 0,$$

我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{Fitt}^{[1]}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathbb{Z}_p)&=T_{s+t+1}^{-1}\,\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(\mathrm{Cok}(d_2))\\ &=T_{s+t+1}^{-1}\,\mathrm{Fitt}\left(\begin{pmatrix}M_{s,t}(\nu_1,\dots,\nu_s,\tau_1,\dots,\tau_s,T_{s+1},\dots,T_{s+t}) & & \\ & T_{s+t+1} & \\ & & \ddots \\ & & & T_{s+t+1}\end{pmatrix}\right)\\ &=\sum_{i=0}^{s+t}T_{s+t+1}^{i-1}\,\mathrm{Fitt}_i(M_{s,t}(\nu_1,\dots,\nu_s,\tau_1,\dots,\tau_s,T_{s+1},\dots,T_{s+t})).\end{aligned}$$

对于每个 $0\le i\le s+t$，通过类似于 (4.2) 的考虑，我们有

$$\begin{aligned}(6.1)\quad &\mathrm{Fitt}_i(M_{s,t}(\nu_1,\dots,\nu_s,\tau_1,\dots,\tau_s,T_{s+1},\dots,T_{s+t}))\\ &=\sum_{j=0}^{\min\{s,s+t-i\}}\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\subset\{1,2,\dots,s\}\\ \#\boldsymbol{a}=j}}\nu_{a_1}\cdots\nu_{a_j}\,\mathrm{Fitt}_i(N_{s+t-j}(\tau_{a_{j+1}},\dots,\tau_{a_s},T_{s+1},\dots,T_{s+t})).\end{aligned}$$

这里，我们使用与 (4.2) 相同的记号。利用命题 6.3 计算 (6.1) 右边。

首先考虑 $i=0$。然后根据命题 6.3，只有 $j=s+t$ 对总和有贡献，而这只有在 $t=0$ 时才可能。因此，除非 $t=0$，否则 (6.1) 的右边为零。如果 $t=0$，则右边等于 $(\nu_1\cdots\nu_s)$（对应 $j=s$ 和 $\boldsymbol{a}=\{1,2,\dots,s\}$ 的项）。

假设 $1\le i\le s+t$。那么，命题 6.3 告诉我们，(6.1) 的右端等于

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{\min\{s,s+t-i\}}\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\subset\{1,2,\dots,s\}\\ \#\boldsymbol{a}=j}}\nu_{a_1}\cdots\nu_{a_j}(\tau_{a_{j+1}},\dots,\tau_{a_s},T_{s+1},\dots,T_{s+t})^{s+t-i-j}\\ &=\sum_{j=0}^{\min\{s,s+t-i\}}\sum_{\substack{\boldsymbol{a}\subset\{1,2,\dots,s\}\\ \#\boldsymbol{a}=j}}\nu_{a_1}\cdots\nu_{a_j}(\tau_1,\dots,\tau_s,T_{s+1},\dots,T_{s+t})^{s+t-i-j}\\ &=\left(\nu_1^{e_1}\cdots\nu_s^{e_s}\tau_1^{f_1}\cdots\tau_s^{f_s}T_{s+1}^{f_{s+1}}\cdots T_{s+t}^{f_{s+t}}\,\middle|\,\begin{matrix}0\le e_l\le 1,f_l\ge 0,\\ e_1+\cdots+e_s+f_1+\cdots f_{s+t}=s+t-i\end{matrix}\right).\end{aligned}$$

因此，对 $1 \le i \le s+t$ 求和可得

$$\sum_{i=1}^{s+t} T_{s+t+1}^{i-1} \operatorname{Fitt}_i(M_{s,t}(\nu_1, \dots, \nu_s, \tau_1, \dots, \tau_s, T_{s+1}, \dots, T_{s+t})) = \left(\nu_1^{e_1} \cdots \nu_s^{e_s} \tau_1^{f_1} \cdots \tau_s^{f_s} T_{s+1}^{f_{s+1}} \cdots T_{s+t+1}^{f_{s+t+1}} \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \le e_l \le 1, f_l \ge 0, \\ e_1 + \cdots + e_s + f_1 + \cdots f_{s+t+1} = s+t-1 \end{array} \right).$$

结合这些公式，我们得到定理 6.2。

6.3. 本质有限情形。设 (X, Γ, α) 是一个电压图，使得 Γ 是概形阿贝尔群，并且假设假设 5.6。固定一个素数 p

到目前为止，在本节中我们研究了 Γ 的阶可被 p^∞ 整除的情形。若 Γ 的阶不能被 p^∞ 整除（但可能是无限的），则可以得到以下结果，它们是 §§3–4 中结果的概形推广。我们不提供证明，因为证明与 §§3–4 中的基本相同。

构造一个分解

$$\Gamma = \Delta_1 \times \cdots \times \Delta_s,$$

其中 Δ_l 是一个前循环群（其阶必然不能被 p^∞ 整除）。我们固定一个开子群 $U_l \subset \Delta_l$，使得 U_l 的阶不能被 p 整除。然后，我们按照 §6.1 中的相同方式引入 $\tau_l \in \mathbb{Z}_p[\Delta_l]$、一个正整数 n_l 和 $\nu_l \in \mathbb{Z}_p[[\Delta_l]]$。接着定义 $\nu_\Gamma = \nu_1 \cdots \nu_l \in \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$。

于是，作为定理 3.4 的一个类似结果，我们有

$$\operatorname{Fitt}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]/(\nu_\Gamma)}(\operatorname{Jac}_{\mathbb{Z}_p}(X(\Gamma))/\nu_\Gamma \operatorname{Jac}_{\mathbb{Z}_p}(X(\Gamma))) = \overline{Z_{X,\Gamma}} \operatorname{Fitt}^{[1]}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]/(\nu_\Gamma)}(\mathbb{Z}_p/(n_1 \cdots n_s)\mathbb{Z}_p).$$

此外，作为定理 4.1 的一个类似结果，我们有

$$\begin{aligned} &\operatorname{Fitt}^{[1]}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]/(\nu_\Gamma)}(\mathbb{Z}_p/(n_1 \cdots n_s)\mathbb{Z}_p) \\ &= \sum_{l=1}^{s} \left(\nu_1 \cdots \nu_{l-1} \cdot \frac{D_l}{n_l} \cdot \nu_{l+1} \cdots \nu_s \right) \\ &\quad + \left(\nu_1^{e_1} \cdots \nu_s^{e_s} \tau_1^{f_1} \cdots \tau_s^{f_s} \,\middle|\, \begin{array}{c} 0 \le e_l \le 1, f_l \ge 0, \\ e_1 + \cdots + e_s + f_1 + \cdots + f_s = s-2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

这里，$D_l \in \mathbb{Z}_p[[\Delta_l]]$ 是满足（4.1）的任意元素。

7. Self-duality of Jacobian groups

本节的预备知识见 §2。本节中，我们考察雅可比群的自对偶性质。这与数论中的对应情形形成对比，详见下文注 7.3。

首先，我们约定对偶的定义。对于有限 $\mathbb{Z}$-模 M，我们将其 Pontryagin 对偶定义为 $M^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$。注意，我们还有另一种描述$M^\vee = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$。对于有限生成的 $\mathbb{Z}$-模 M，我们还将其 $\mathbb{Z}$-线性对偶定义为$M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$。$(-)^\vee$ 和 $(-)^*$ 都是反变函子。

如果群 Γ 在这样的 M上有左（分别为右）作用，我们通过以下方式在 $M^\vee$ 或 M^* 上引入 Γ 的右（分别为左）作用：

$$(\phi\gamma)(x) = \phi(\gamma x) \quad (\text{resp. } (\gamma\phi)(x) = \phi(x\gamma))$$

对于 $\gamma \in \Gamma$、$\phi \in M^\vee$或 $\phi \in M^*$，以及 $x \in M$。设 ι为定义在 Γ上的对合，满足 $\iota(\gamma) = \gamma^{-1}$。若 M是左（分别为右） Γ-模，则我们定义一个右（分别为左） Γ-模 M^ι：其加法模结构由 $M^\iota = M$ 给出，群作用定义为：当$\gamma \in \Gamma$ 且 $x \in M$时，由 $x\gamma = \gamma^{-1}x$ （分别由 $\gamma x = x\gamma^{-1}$）给出。

现在设 Y 是一个带有群 Γ左作用的连通图。由于顶点集 $\{[w]\}_{w\in V_Y}$ 是 $\mathrm{Div}(Y)$ 的一个 $\mathbb{Z}$-基，我们可以构造 $\mathrm{Div}(Y)^*$ 的对偶基 $\{\phi_w\}_{w\in V_Y}$。具体而言， ϕ_w 是由以下条件刻画的同态：对任意 $w' \neq w$， $\phi_w([w]) = 1$ 且 $\phi_w([w']) = 0$。容易验证，对任意 $w \in V_Y$和 $\gamma \in \Gamma$，均有 $\phi_{\gamma w} = \phi_w\gamma^{-1}$。因此，我们有一个左 $\mathbb{Z}[\Gamma]$-模之间的 $\mathbb{Z}$-同构

$$\mathrm{Div}(Y) \simeq \mathrm{Div}(Y)^{*,\iota} \tag{7.1}$$

通过将 $[w]$发送到 ϕ_w。

现在考虑以下交换图

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\iota_Y} & \mathrm{Div}(Y) & \xrightarrow{\mathcal{L}_Y} & \mathrm{Div}(Y) & \xrightarrow{\deg_Y} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^{*,\iota} & \xrightarrow[\deg_Y^*]{} & \mathrm{Div}(Y)^{*,\iota} & \xrightarrow[\mathcal{L}_Y^*]{} & \mathrm{Div}(Y)^{*,\iota} & \xrightarrow[\iota_Y^*]{} & \mathbb{Z}^{*,\iota} & \longrightarrow & 0.
\end{array} \tag{7.2}$$

这里，上方的序列是引理 2.6 中构造的复形，下方的序列是上方复形的 $\mathbb{Z}$-线性对偶。中间的两个垂直同构为 (7.1)。左右两侧的垂直同构是自然的。容易证明此图是交换的。

引理 7.1。(7.2) 中的下方复形除最右侧的 $\mathrm{Div}(Y)^{*,\iota}$ 外均为无挠，其同调群同构于 $\mathrm{Jac}(Y)^{\vee,\iota}$。

证明。根据引理 2.6，上方复形拟同构于有限模 $\mathrm{Jac}(Y)$（位于适当的度）。因此，其 $\mathbb{Z}$-线性对偶拟同构于 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Jac}(Y)\ \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{Jac}(Y)^\vee$。这就证明了断言。更初等地，也可以将上方复形分解为三个短正合列，再取它们的 $\mathbb{Z}$-线性对偶来推导该断言（细节略）。□

现在我们得到如下结论。

命题 7.2. 存在一个自然同构

$$\mathrm{Jac}(Y) \simeq \mathrm{Jac}(Y)^{\vee,\iota}$$

作为左 $\mathbb{Z}[\Gamma]$-模。

证明。由引理 7.1 可立即得到。 □

注 7.3. 命题 7.2 意味着

$$\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathrm{Jac}(Y)^\vee) = \iota\left(\mathrm{Fitt}_{\mathbb{Z}[\Gamma]}(\mathrm{Jac}(Y))\right)$$

只要 Γ 是交换的。这一现象与数论中的情形形成对比。正如 [1]（见注 1.3）所揭示的，$\mathrm{Cl}^{T}{}_{,L}{}^{-}$ 的 Fitting 理想比 $\mathrm{Cl}_{L}^{T-\vee}{}_{,}$的 Fitting 理想复杂得多。

8. Iwasawa theory for graphs from a module-theoretic viewpoint

本节的预备知识为§§2和5。

本节讨论图的岩泽理论。在§8.1（分别为§8.2）中，我们简要证明图的岩泽类数公式（分别为木田公式）的一个类比。这些结果并非新成果，事实上早已由他人得出；图的岩泽类数公式由Gonet [5] 以及McGown–Valli`ères [14], 分别独立证明，而木田公式由Ray–Valli`ères [17]证明。不过，本文中的证明在一定程度上不同于此前的证明。我们注意到，这些结果可以直接由相当一般的模论命题推出。例如，这样做的一个优点是，我们可以避免像以往研究那样，单独讨论基图的欧拉示性数为零的情形。作者认为这种方法更加简洁，因此值得发表。

8.1. 图的岩泽类数公式。我们简要回顾由岩泽 [10, 定理 11]证明的原始岩泽类数公式。设 K_∞/K 是数域的一个 $\mathbb{Z}_p$-扩张。这意味着 K_∞/K 是一个伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群Γ同构于 $\mathbb{Z}_p$。对于每个 $n \geq 0$，令 K_n 为对应于$\Gamma^{p^n} \subset \Gamma$的中间域。于是， K_n/K 是一个伽罗瓦扩张，其伽罗瓦群为 $\Gamma/\Gamma^{p^n} \simeq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ ，从而得到一个数域塔

$$K = K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots .$$

岩泽类数公式表明，存在整数 $\lambda \geq 0$、 $\mu \geq 0$和 ν，使得

$$\mathrm{ord}_p(\#\,\mathrm{Cl}(K_n)) = \lambda n + \mu p^n + \nu$$

对于 $n \gg 0$。这里，Cl(K_n)表示 K_n 的理想类群，而 ord$_p$ 表示加性的p-进赋值，其归一化满足 ord$_p$(p) = 1。

该公式的证明见 Washington [20, §13.3]。一般而言，对于一个有限生成挠 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-模 M，存在整数 $\lambda(M) \geq 0$、 $\mu(M) \geq 0$，它们分别称为 M 的 λ-、 μ-不变量。岩泽类数公式中的整数 λ、 μ 恰好是相关岩泽模的 λ-、 μ-不变量。

不变量 $\lambda(M)$、 $\mu(M)$ 是利用关于 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 上模的结构定理定义的。本文不回顾其细节（例如，关于结构定理见 [20, §13.2] 或 [15, (5.1.10)]，关于 λ-、 μ-不变量的定义见 [15, (5.3.9)]）。我们仅回顾：当且仅当 M 在 $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成时， $\mu(M) = 0$；在此情形下，$\lambda(M)$ 等于 M 的 $\mathbb{Z}_p$-秩。

现在我们来考虑图的对应情形。设 (X, Γ, α) 是一个电压图，满足 Γ 与 $\mathbb{Z}_p$ 同构。我们假设假设 5.6。于是，如第 5.2 节所述，我们有一个 X 的 $\mathbb{Z}_p$-覆盖 $X_\infty = X(\Gamma)$。对于每个 $n \geq 0$，令 $X_n = X(\Gamma/\Gamma^{p^n})$，称其为 X_∞/X 的第 n 层。

定理 8.1（Gonet [5, 定理 1.1], McGown–Valli`eres [14, 定理 6.1]）。存在整数

$$\lambda = \lambda(X_\infty/X) \geq 0, \quad \mu = \mu(X_\infty/X) \geq 0, \quad \nu = \nu(X_\infty/X)$$

使得我们有

$$\mathrm{ord}_p(\#\,\mathrm{Jac}(X_n)) = \lambda n + \mu p^n + \nu$$

对于 $n \gg 0$。此外，我们有

$$\lambda(X_\infty/X) = \lambda(\mathrm{Jac}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)) = \lambda(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)) - 1$$

and

$$\mu(X_\infty/X) = \mu(\mathrm{Jac}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)) = \mu(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)).$$

为了证明此定理，我们应用以下代数命题。

命题 8.2. 设 Γ 是一个与 $\mathbb{Z}_p$ 同构的仿射有限群。设 M 是一个有限生成的挠 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-模。那么存在整数 $\lambda \geq 0$、$\mu \geq 0$ 和 ν，使得

$$\mathrm{ord}_p(\#(M_{\Gamma^{p^n}}[p^\infty])) = \lambda n + \mu p^n + \nu$$

对于 $n \gg 0$。这里，$M_{\Gamma^{p^n}}$ 表示余不变模，而 $(-)[p^\infty]$ 表示 p 次幂挠子模。事实上，整数 λ 和 μ 由下式确定

$$\lambda = \lambda(M) - \max_{n\geq 0} \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(M_{\Gamma^{p^n}}), \qquad \mu = \mu(M).$$

证明。参见 Greenberg [6, 第 79] 页第 (4) 项。一个关键要素是 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 上模的结构定理。□

定理 8.1 的证明。我们先观察以下事实：

- 对于任意 $n \geq 0$，我们有 $\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_n)) = 1$ 且 $\mathrm{Jac}_{\mathbb{Z}_p}(X_n) = \mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_n)[p^\infty]$，由 (2.2) 和定理 2.5 得出。
- 对于任意 $n \geq 0$，我们有 $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_n) \simeq \mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)_{\Gamma^{p^n}}$，由推论 5.11 得出。
- $\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)$ 是有限生成的挠 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-模，由推论 5.12 得出。

然后，将命题 8.2 应用于 $M = \mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)$，我们可得整数 $\lambda \geq 0$、$\mu \geq 0$ 和 ν，使得对于 $n \gg 0$，$\mathrm{ord}_p(\#\,\mathrm{Jac}(X_n)) = \lambda n + \mu p^n + \nu$。此外，我们有

$$\lambda = \lambda(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)) - \max_{n\geq 0} \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)_{\Gamma^{p^n}})$$

以及 $\mu = \mu(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty))$。由于我们有

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)_{\Gamma^{p^n}}) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_n)) = 1$$

对于任意 $n \geq 0$，我们得到 $\lambda = \lambda(\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)) - 1$。然后，命题 5.9 表明，这些整数 λ、μ 分别与 $\mathrm{Jac}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)$ 的 λ-、μ-不变量一致。证明完毕。□

注记 8.3. 根据命题 5.10，$\mathrm{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)$ 的特征理想等于 $(Z_{X,\,\Gamma})$。因此，定理 8.1 中的不变量 λ 和 μ 由 $Z_{X,\,\Gamma}$确定。请注意，正如我们在 §5.3 中所观察到的，三项行列式公式为元素 $Z_{X,\,\Gamma}$提供了一种解析解释。

8.2. 图的木田公式。接下来我们讨论图的木田公式。我们不再回顾木田证明的理想类群的原始木田公式 [12], ，而是参考 [17] 中的相关文献。

设 Γ 是一个分解为如下形式的概形：

$$\widetilde{\Gamma} = G \times \Gamma,$$

其中 G 是一个有限 p群（不一定是阿贝尔群），且 Γ 同构于 $\mathbb{Z}_p$。令 (X, Γ, α) 为一个电压图。我们假设 (X, Γ, α) 满足假设 5.6。

现在，诱导出一个电压图 $(X, \Gamma, \alpha_{/G})$，其中 $\alpha_{/G}$ 是 α与自然投影 $\Gamma \to \Gamma$的复合映射。因此，我们得到一个 $\mathbb{Z}_p$覆盖 $X_\infty = X(\Gamma)$，其覆盖对象为 X，并可如定理 8.1 中那样考虑其 λ、 μ不变量 $\lambda(X_\infty/X)$、 $\mu(X_\infty/X)$。

另一方面，如 [17, §3], 中所讨论的，我们还得到一个 $\mathbb{Z}_p$覆盖 $X_\infty = X(\Gamma)$，其覆盖对象为 $X = X(G)$。因此，我们也有 λ、 μ不变量 $\lambda(X_\infty/X)$、 $\mu(X_\infty/X)$。

这种情形大致应视为 G-覆盖的 $\mathbb{Z}_p$-覆盖。事实上，图 X 是 G对 X的覆盖；更一般地， X_∞/X 的第 n 层是 G对 X_∞/X的第 n 层的覆盖。反过来，按照这种意义，连通图的任意 G-覆盖的 $\mathbb{Z}_p$-覆盖都可以用这种方式构造（更精确的讨论见 [17, §3] ）。

现在我们陈述木田公式的类比结果。

定理 8.4（Ray–Valli`eres [17, 定理 4.1]）。我们有 $\mu(X_\infty/X) = 0$ 当且仅当$\mu(X_\infty/X) = 0$。若这些等价条件成立，则有

$$\lambda(\widetilde{X}_\infty/\widetilde{X}) + 1 = \#G \cdot (\lambda(X_\infty/X) + 1).$$

为证明此定理，我们使用以下关键代数命题。

命题 8.5。设 G 是一个有限 p-群。以下结论成立。

(1) 一个 $\mathbb{Z}_p[G]$-模 M 在 $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成，当且仅当其余不变模 M_G也如此。

(2) 设 $\Gamma = G \times \Gamma$ 满足 Γ 与 $\mathbb{Z}_p$同构。设 M 是一个有限生成的挠 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-模，其在 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ 上的投射维数为 ≤ 1。此外，假设 (1) 中的等价条件成立。则有

$$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(M) = \#G \cdot \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}_p}(M_G).$$

证明。(1)“仅当”部分显然。“若”部分由中山引理得出，因为$\mathbb{Z}_p[G]$ 是一个局部环。

(2) 我们来证明，这些假设意味着 M 是一个有限秩自由 $\mathbb{Z}_p[G]$-模。这样，结论便立即得出。

众所周知，$\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]}(M) \leq 1$ 等价于 M 没有非零有限 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-子模（例如， [15, (5.3.19)]）。于是，在 $\mathbb{Z}_p$ 上有限生成意味着 M 是一个有限秩自由 $\mathbb{Z}_p$-模。另一方面，$\mathrm{pd}_{\mathbb{Z}_p[[\Gamma]][G]}(M)$的有限性意味着$M$ 是 G-上同调平凡的。这些观察表明， M 是一个有限秩自由 $\mathbb{Z}_p[G]$-模（例如， [15, (5.2.21)]），证毕。□

定理 8.4 的证明。回顾一下，命题 5.10 和推论 5.12 表明，$\mathrm{Pic}^{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)$ 是一个有限生成的挠 $\mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$-模，其投射维数为 ≤ 1。此外，我们还有

$\widetilde{\text{Pic}}^{\mathbb{Z}_p}(X_\infty) \simeq \text{Pic}^{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)_G$，由推论 5.11。因此，我们可以将命题 8.5(1)(2)$\widetilde{\text{}}$应用于 $\text{Pic}^{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)$。由此，我们得到 $\mu(\text{Pic}^{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)) = 0$ 当且仅当 $\mu(\text{Pic}^{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)) = 0$，并且，如果这些等价条件成立，则有

$$\lambda(\text{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(\widetilde{X}_\infty)) = \#G \cdot \lambda(\text{Pic}_{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)).$$

由于 $\lambda(X_\infty/X) = \lambda(\text{Pic}^{\mathbb{Z}_p}(X_\infty)) - 1$ 和 $\mu(X_\infty/X) = \mu(\text{Pic}^{\mathbb{Z}_p}(X_\infty))$，并且对 X_∞/X 也有类似结论$\widetilde{\text{}}$ $\widetilde{\text{}}$，这就证明了定理 8.4。□

Appendix A. Notes on Fitting ideals

本节简要回顾 Fitting 理想的定义，以及文献 [11] 中引入的移位理论。

设 R 是一个交换环。注意，我们不假设 R 是诺特环。这是因为本文算术中出现的系数环通常不是诺特环（例如，$\mathbb{Z}[[\mathbb{Z}]]$）。在 [11], 中，作者仅在诺特环上发展了移位理论。本节将说明，通过对模施加适当的有限性条件，可以将这一论证推广到非诺特环上。

A.1. Fitting 理想。

我们回顾 Fitting 理想的定义。参见例如 Northcott [16, §3.1]。

定义 A.1。设 I 为有限集，J 为一个（不一定是有限的）集合。设

$$h : R^{\oplus J} \to R^{\oplus I}$$

是一个 R-同态，其中 $R^{\oplus I}, R^{\oplus J}$ 分别表示集合 I, J 上的自由模。

我们如下定义（初始）Fitting 理想 $\text{Fitt}(h) = \text{Fitt}_R(h)$。对于每个满足 $\#J' = \#I$ 的子集 $J' \subset J$，记

$$h_{J'} : R^{\oplus J'} \to R^{\oplus I}$$

为 h 的限制。令 $\det(h_{J'})$ 表示相对于任意一组基的 $h_{J'}$ 的行列式；这个行列式不可避免地只确定到 $R^\times$，但这并无妨。于是，$\text{Fitt}_R(h)$ 定义为由所有满足 $\#J' = \#I$ 的 $J' \subset J$ 所对应的 $\det(h_{J'})$ 生成的 R 的理想。注意，若 $\#J < \#I$，则有 $\text{Fitt}_R(h) = 0$，因为不存在这样的 J'。

更一般地，对于整数 $i \geq 0$，第 i 个 Fitting 理想 $\text{Fitt}_i(h) = \text{Fitt}_{i,R}(h)$ 定义如下。对于满足 $\#I' = \#J'$ 的子集 $I' \subset I$ 和 $J' \subset J$，我们记

$$h_{J',I'} : R^{\oplus J'} \to R^{\oplus I'}$$

为由 h 诱导的映射。若 $i \leq \#I$，我们将 $\text{Fitt}_{i,R}(h)$ 定义为由所有满足 $\#J' = \#I' = \#I - i$ 的 $J' \subset J$、$I' \subset I$ 的 $\det(h_{J',I'})$ 生成的 R 的理想。若 $i > \#I$，则令 $\text{Fitt}_{i,R}(h) = R$。

定义 A.2. 设 M 是一个有限生成的 R-模。我们分别将 $\text{Fitt}_R(M)$ 和 $\text{Fitt}_{i,\ R}(M)$ $(i \geq 0)$ 定义为 $\text{Fitt}_R(h)$ 和 $\text{Fitt}_{i,\ R}(h)$，其中 h 是定义 A.1 中的一个同态，且 h 的余核与 M 同构。众所周知，这一定义与 h 的选择无关。

A.2. Fitting 理想的移位。我们用 Frac(R) 表示 R 的全分式环。若 M 是一个 R-模，且其中任意元素都被 R 的某个非零因子湮灭，则称其为挠模；等价地，Frac(R) $\otimes_R M = 0$。

引理A.3. 设 F 是一个有限秩自由 R-模，且 $h:\ F \to F$ 是一个自同态。则以下各项等价。

(i) 映射 h 是单射。(ii) 行列式 det(h) $\in R$ 是非零因子。(iii) 余核 Cok(h) 是一个挠 R-模。

证明. 事实(i) $\Leftrightarrow$ (ii)见 [3, 第三章第8节命题3，第 524]页。由于 Cok(h) 被 det(h) 湮没，因此有(ii) $\Rightarrow$ (iii)。若(iii)成立，则从 R 到 Frac(R)的 h 基变换是满射的，因而是同构，这意味着(i)。□

我们将 $\mathcal{P}_R$ 定义为由满足 pd$_R$(P) ≤ 1的有限表示挠 R-模 P 构成的范畴，其中 pd$_R$ (–)表示投射维数。根据引理A.3，如果一个模 P 满足如下形式的正合列

$$0 \to F \to F \to P \to 0 \tag{A.1}$$

其中 F 是有限秩自由模，则 P 属于 $\mathcal{P}_R$。反之，若 R 是局部环，则 $\mathcal{P}_R$ 中的每个 P都满足形如 (A.1) 的正合列，因为此时任意投射模必然是自由模。

R 的分式理想 I 定义为 Frac(R) 的一个 R-子模，且存在某个非零因子 $u \in R$使得 $uI \subset R$ 。

引理 A.4. 以下结论成立。

(1) 对每个 $P \in \mathcal{P}_R$，Fitting 理想 Fitt$_R$(P) 是 R 的可逆分式理想。(2) 设 $0 \to M' \to M \to P \to 0$ 是有限生成挠R-模的一个正合列，且 $P \in \mathcal{P}_R$。则有

$$\mathrm{Fitt}_R(M) = \mathrm{Fitt}_R(P)\,\mathrm{Fitt}_R(M').$$

证明。我们简述证明（细节见 [11, 命题 2.7] ）。对于结论 (1) 和 (2)，只需证明它们在对 R 的所有素理想局部化后成立，因此不妨假设 R 是局部的。此时 P 满足形如 (A.1) 的正合列。结论 (1) 由引理A.3得出，结论 (2) 则可利用马蹄引理得出。□

现在，我们按照 [11, 定理 2.6]引入“n次移位”Fitt$_R^{[n]}$ (–)。首先考虑“一次移位”Fitt$_R^{[1]}$ (–)，这实际上已足以满足本文的需要。为完整起见，我们还将在定义 A.6 中引入一般的 n次移位。

定义 A.5. 对于有限表示的挠 R-模 M，我们如下定义分式理想 Fitt$_R^{[1]}$ (M)。取一个 R-模的正合列

$$0 \to N \to P \to M \to 0 \tag{A.2}$$

取 $P \in \mathcal{P}_R$。例如，若 M 由 n 个元素生成，并被非零因子 $f \in R$湮灭，我们可以取 $P = (R/fR)^n$。由于 M 是有限表示的， N 是有限生成的，因此其 Fitting 理想有定义。然后我们定义（使用引理 A.4(1)）

$$\mathrm{Fitt}_R^{[1]}(M) = \mathrm{Fitt}_R(P)^{-1}\,\mathrm{Fitt}_R(N).$$

这是良定义的，也就是说，与 (A.2) 的选取无关。

我们简述由 (A.2) 得出的独立性证明。设 $0 \to N' \to P' \to M \to 0$ 是另一个带有 $P' \in \mathcal{P}_R$ 的正合列。然后，通过使用映射 $P \to M$ 和 $P' \to M$ 的拉回 L，我们得到一个行和列均为正合的交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & N' & = & N' & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & L & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & P & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

由于 P、$P' \in \mathcal{P}_R$，由引理 A.4(2)，我们得到

$$\operatorname{Fitt}_R(L) = \operatorname{Fitt}_R(P') \operatorname{Fitt}_R(N), \quad \operatorname{Fitt}_R(L) = \operatorname{Fitt}_R(P) \operatorname{Fitt}_R(N').$$

这些公式意味着

$$\operatorname{Fitt}_R(P)^{-1} \operatorname{Fitt}_R(N) = \operatorname{Fitt}_R(P')^{-1} \operatorname{Fitt}_R(N'),$$

正如所要求的。

最后，让我们引入一般的 n 次平移。证明见 [11, 定理 2.6]；若要去除诺特假设，我们只需适当地处理有限性条件。

定义 A.6。设 $n \geq 0$ 是一个整数。设 M 是一个挠 R-模，使得存在一个正合列

$$R^{a_n} \to R^{a_{n-1}} \to \cdots \to R^{a_0} \to M \to 0$$

其中 $a_0, \ldots, a_n \geq 0$ 是一些整数。例如，当 $n = 0$（分别地，$n = 1$）时，这个条件意味着 M 是有限生成的（分别地，有限表示的）。对于这样的 M，我们定义分式理想 $\operatorname{Fitt}_R^{[n]}(M)$ 如下。取一个 R-模的正合列

$$0 \to N \to P_1 \to \cdots \to P_n \to M \to 0 \tag{A.3}$$

其中 $P_1, \ldots, P_n \in \mathcal{P}_R$。这样的正合列存在，是由对 M 的假设所保证的；此外，此时 N 是有限生成的。然后我们定义（使用引理 A.4(1)）

$$\operatorname{Fitt}_R^{[n]}(M) = \left(\prod_{i=1}^{n} \operatorname{Fitt}_R(P_i)^{(-1)^i} \right) \operatorname{Fitt}_R(N).$$

这是定义良好的，也就是说，与 (A.3) 的选取无关。

Acknowledgments

我感谢 Daniel Valli`eres 对本文早期版本提出意见。本研究由 JSPS KAKENHI 项目编号 22K13898 资助。

References

[1] M. Atsuta 和 T. Kataoka. CM 阿贝尔扩张类群的 Fitting 理想. 即将发表于《代数与数论》, arXiv:2104.14765, 2021.[2]M. Baker 和 S. Norine. 有限图上的黎曼-罗赫定理与阿贝尔-雅可比理论. Adv. Math., 215(2):766–788, 2007.[3] N. Bourbaki. 数学原本. 代数，第一部分：第 1–3 章. Hermann, 巴黎; Addison-Wesley 出版公司，马萨诸塞州雷丁，1974. 由法文译出.[4] S. Corry 和 D. Perkinson. 除子与沙堆：芯片点火导论. 美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2018.[5] S. R. Gonet. 图的雅可比簇的岩泽理论. Algebr. Comb., 5(5):827–848, 2022.[6] R. Greenberg. 椭圆曲线的岩泽理论. 载于《椭圆曲线算术理论》（切特拉罗，1997），《数学讲义》第 1716 卷，第 51–144 页. Springer，柏林，1999.[7] C. Greither 和 M. Kurihara. 岩泽模的 Tate 序列与 Fitting 理想. Algebra i Analiz, 27(6):117–149, 2015.[8] C. Greither、M. Kurihara 和 H. Tokio. 平凡 G模的第二重叠及一个等变主猜想. 载于《岩泽理论的发展——纪念 K. Iwasawa 诞辰百周年》，《纯粹数学高级研究》第 86 卷，第 317–349 页. 日本数学会，东京，2020.[9] K. Hammer、T. W. Mattman、J. W. Sands 和 D. Valli`eres. Artin-Ihara$L$函数的特殊值 $u = 1$. 预印本, arXiv:1907.04910, 2019.[10] K. Iwasawa. 关于代数数域的 Γ扩张. Bull. Amer. Math. Soc., 65:183–226, 1959.[11] T. Kataoka. 等变岩泽理论中的 Fitting 不变量. 载于《岩泽理论的发展——纪念 K. Iwasawa 诞辰百周年》，《纯粹数学高级研究》第 86 卷，第 413–465 页. 日本数学会，东京，2020.[12] Y. Kida. CM 域的 l扩张与分圆不变量. J. Number Theory, 12(4):519–528, 1980.[13] S. Kleine 和 K. M¨uller. 图的 $\mathbb{Z}_p^l$电压覆盖中雅可比簇的增长. 预印本，arXiv:2211.09763, 2022.[14]K. J. McGown 和 D. Valli`eres. 关于多重图的阿贝尔 $\ell$塔 III. 即将发表于《魁北克数学年刊》，arXiv:2107.07639, 2021.[15] J. Neukirch、A. Schmidt 和 K. Wingberg. 数域的上同调，《数学科学基础丛书》第 323 卷，《数学科学基本原理》. 施普林格出版社，柏林，第二版，2008.[16] D. G. Northcott. 有限自由分解. 剑桥大学出版社，剑桥-纽约-墨尔本，1976. 《剑桥数学专著》第 71 号.[17] A. Ray 和 D. Valli`eres. 图论中木田公式的一个类比. 预印本, arXiv:2209.04890, 2022.[18] J.-P. Serre. 树. 施普林格出版社，柏林-纽约，1980. John Stillwell 由法文译出.[19] A. Terras. 图的 ζ 函数：漫游数学花园，《剑桥高等数学研究丛书》第 128 卷. 剑桥大学出版社，剑桥，2011.[20]L. C. Washington. 分圆域导论，《研究生数学教材》第 83 卷. 施普林格出版社，纽约，第二版，1997.

Department of Mathematics, Faculty of Science Division II, Tokyo University of Science. 1-3 Kagurazaka, Shinjuku-ku, Tokyo 162-8601, Japan电子邮箱地址：tkataoka@rs.tus.ac.jp