arXiv:2303.00464v2 [math.FA] 2 Mar 2023

加权 $L^p_w(X)$ 空间上的最大遍历定理

Sri Sakti Swarup Anupindi 数学系 Birla Institute of Technology and Science-PILANI，Jawahar Nagar Hyderabad-500 078，Telangana，India。电子邮箱：p20180442@hyderabad.bits-pilani.ac.in

A.Michael Alphonse 数学系 Birla Institute of Technology and Science-PILANI，Jawahar Nagar Hyderabad-500 078，Telangana，India。电子邮箱：alphonse@hyderabad.bits-pilani.ac.in

2023年3月3日

摘要

本文采用迁移方法研究 $L^p_w(X,\mathcal{B},\mu)$ 空间上的极大遍历算子，其中 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 是一个配备可逆保测变换 U 的概率空间，且 w 是一个遍历 A_p 权函数。

1 引言

本文采用迁移方法，证明了在 $L^p_w(X,\mathcal{B},\mu)$ 空间上，极大遍历算子的强型和弱型不等式，$1 \le p < \infty$，其中 $(X,\mathcal{B},\mu)$ 是一个概率空间，配备了可逆的保测变换 U，且 w 是遍历权函数 A_p。

关于调和分析中各种极大算子有界性的标准结果，请参见 [7]。带权 L^p 空间上极大遍历算子的有界性可见 [3]。在 [3] 中，

2020 数学主题分类：主要分类 28D05；次要分类 37A46。Calderón-Zygmund 分解、极大遍历算子、转移原理、遍历矩形、遍历权。

给出了使得与概率空间上的可逆保测变换相关联的极大遍历算子在 $L^p($ $wd\mu)$上为有界算子的那些正函数 w 的刻画。他们在证明中使用了遍历版的 Calderón-Zygmund 分解以及遍历矩形的概念。本文利用 Calderón-Coifman-Weiss 转移原理 [4], [5], [8]证明了同样的结果。

2 记号

本文中， $\mathbb{Z}$ 表示所有整数的集合， $\mathbb{Z}_+$ 表示所有正整数的集合。给定 $\mathbb{Z}$ 中的一个区间 I （我们总是指整数的有限区间）， $|I|$始终表示 I的基数。对于每个正整数 N，考虑由基数为 2^N的互不相交区间组成的集合，

$$\{I_{N,j}\}_{j\in\mathbb{Z}} = \left\{[(j-1)2^N+1,\ldots,j2^N]\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$$

形如$I_{N,j}$ 的区间集合，其中 $N\in\mathbb{Z}_+$ 且 $j\in\mathbb{Z}$ ，称为二进区间。对于固定的 N， $I_{N,j}$ 互不相交。给定一个二进区间$I = \left\{[(j-1)2^N+1,\ldots,\right.$ $\left.j2^N]\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ 以及一个正整数 m，我们定义

$$\begin{aligned} 2mLI &= [(j-(2m-1))2^N+1,\ldots,j2^N] \\ 2mRI &= [(j-1)2^N+1,\ldots,(j+(2m-1))2^N] \\ (2m+1)I &= 2mLI\cup 2mRI. \end{aligned}$$

注意， $2mLI$和 $2mRI$ 都是长度为$(2m)2^N$的二进区间。然而，$(2m+1)I$和 $m\in\mathbb{Z}_+$ 不是二进区间。

3 定义

极大算子

设 $\{a(n)\colon\ n\in\mathbb{Z}\}$ 是一个序列。我们定义以下三种 Hardy-Littlewood 极大算子:

定义 3.1. 若 I_r是区间 $\{-r,-r+1,\ldots,0,1,2,\ldots,r-1,r\}$，则定义中心 Hardy-Littlewood极大算子

$$M'a(m) = \sup_{r>0}\frac{1}{(2r+1)}\sum_{n\in I_r}|a(m-n)|$$

对于任意正整数 J，定义截断的中心 Hardy-Littlewood 极大算子如下

$$(M'_Ja)(m) = \sup_{J>r>0}\frac{1}{(2r+1)}\sum_{n\in I_r}|a(m-n)|$$

定义 3.2。 我们将 Hardy-Littlewood 极大算子定义如下

$$Ma(m) = \sup_{m\in I} \frac{1}{|I|} \sum_{n\in I} |a(n)|$$

其中，上确界取遍所有包含 m 的区间。对于任意正整数 J，定义截断 Hardy-Littlewood 极大算子如下:

$$M_J a(m) = \sup_{J\geq m\in I} \frac{1}{|I|} \sum_{n\in I} |a(n)|$$

定义 3.3. 我们将二进 Hardy-Littlewood 极大算子定义如下:

$$M_d a(m) = \sup_{m\in I} \frac{1}{|I|} \sum_{k\in I} |a(k)|$$

其中，上确界取遍所有包含 m 的二进区间。

定义 3.4. 给定一个序列 $\{a(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 和一个区间 I，令 a_I 表示 $\{a(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 在 I 上的平均值。令 $a_I = \frac{1}{|I|} \sum_{m\in I} a(m)$。将尖锐极大算子 $M^\#$ 定义如下:

$$M^\# a(m) = \sup_{m\in I} \frac{1}{|I|} \sum_{n\in I} |a(n) - a_I|$$

其中，上确界取遍所有包含 m 的区间 I 。如果序列 $\{a(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 的序列 $M^\# a$ 有界，则称该序列具有有界平均振荡。具有此性质的序列空间记为 BMO($\mathbb{Z}$)。我们在 BMO($\mathbb{Z}$) 中定义一个范数 $\|a\|_\star = \left\|M^\# a\right\|_\infty$。BMO($\mathbb{Z}$) 空间在 [8] 中进行了研究。

权

定义 3.5. 对于固定的 p、 $1 < p < \infty$，若存在常数 C，使得对于 $\mathbb{Z}$ 中的所有区间 I，都有如下性质，则称非负序列 $\{w(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 属于类 A_p

$$\left(\frac{1}{|I|} \sum_{k\in I} w(k)\right)\left(\frac{1}{|I|} \sum_{k\in I} w(k)^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C$$

这个常数 C 称为 A_p 常数。若存在常数 C，使得对 $\mathbb{Z}$ 中的所有区间 I，都有 $\{w(m) : m \in \mathbb{Z}\}$ 属于类 A_1，则称

$$\frac{1}{|I|} \sum_{k\in I} w(k) \leq Cw(m)$$

对所有 $m \in I$ 都成立。这个常数 C 称为 A_1 常数。
设 $1 \leq p < \infty$ 和 $\{w(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in A_p(\mathbb{Z})$。我们称序列$\{a(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 属于 $\ell^p_w(\mathbb{Z})$，如果

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)|^p w(n) < \infty$$

我们将 $\ell^p_w(\mathbb{Z})$ 中的范数定义为

$$\|a\|_{\ell^p_w(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a(k)|^p w(k)\right)^{\frac{1}{p}}$$

对于给定的序列 $\{a(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^p_w(\mathbb{Z})$，非负权数列 $\{w(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 的加权弱(p,p)不等式如下:

$$w(\{m \in \mathbb{Z} : Ma(m) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a(m)|^p w(m) \tag{A4}$$

对于 $\mathbb{Z}$ 的子集 A， $w(A)$ 表示 $\sum_{k\in A} w(k)$。

以下定义引自 [3]

定义 3.6. 设 $(X, \mathbf{B}\ \mu)$ 为一个概率空间，且 U 是 X 上的一个可逆保测变换。假设 $1 < p < \infty$ 且 $w : X \to \mathbb{R}$ 是一个非负可积函数。称函数 w 满足遍历 A_p 条件，当且仅当

$$esssup_{x\in X} \sup_{N\geq 1} \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} w(U^k x)\right) \left(\frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} w(U^k x)^{\frac{-1}{p-1}}\right)^{p-1} \leq C$$

称函数 w 满足遍历 A_1 条件，当且仅当

$$esssup_{x\in X} \sup_{N\geq 1} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{N} w(U^k x) \leq C w(U^m x)$$

对于 $m = -N$、$-N+1$、.....、N

定义 3.7. 设 $1 \leq p < \infty$。称可测函数 $f \in L^p_w(X)$，当且仅当

$$\int_{x\in X} |f(x)|^p w(x) d\mu(x) < \infty$$

我们在 $L^p_w(X)$ 中定义范数如下:

$$\|f\|_{L^p_w(X)} = \left(\int_{x\in X} |f(x)|^p w(x) d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}$$

4 极大算子之间的关系

在下面的引理中，我们给出了极大算子之间的关系。关于以下引理的证明，请参阅 [1]。在证明极大遍历算子的加权不等式时，我们将用到这些关系。

引理 4.1. 给定一个序列 $\{a(m):\ m\in\mathbb{Z}\}$，有如下关系成立 :

$$M'a(m)\le Ma(m)\le 3M'a(m)$$

引理 4.2. 若 $\boldsymbol{a}=\{a(k):\ k\in\mathbb{Z}\}$ 是一个非负序列，且 $\boldsymbol{a}\in\ell_1$，则

$$|\{m\in\mathbb{Z}:\ M'a(m)>4\lambda\}|\le 3|\{m\in\mathbb{Z}:\ M_d a(m)>\lambda\}|$$

在下面的引理中，我们将看到，在 BMO(ℤ) 空间的范数中，可以用一个常数 b 替换 $\{a(n)\}$ 的平均值 a_I。证明与连续版本 [7] 中的证明类似。第二个不等式由 $||a|-|b||\le|a|-|b|$ 得出。

引理 4.3。设非负序列 $\boldsymbol{a}=\{a(k):\ k\in\mathbb{Z}\}$。则以下结论成立。

1. $\frac{1}{2}\|a\|_\star\le\sup_{m\in I}\inf_{b\in\mathbb{Z}}\frac{1}{|I|}|a(m)-b|\le\|a\|_\star$
2. $M^{\#}(|a|)(i)\le M^{\#}a(i), i\in\mathbb{Z}$

5 极大算子的经典加权结果

本节中，对于给定的序列 $\{a(n):\ n\in\mathbb{Z}\}$ 属于 $\ell^p_w(\mathbb{Z})$，我们将证明关于权函数 $\{w(n):\ n\in\mathbb{Z}\}\in A_p$ 的加权弱型 (p,p) 不等式如下：

$$w(\{m\in\mathbb{Z}:Ma(m)>\lambda\})\le\frac{C}{\lambda^p}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|a(m)|^p w(m) \tag{A4}$$

不等式 $A4$ 将通过若干个定理予以证明，即定理 [5.1] 至定理 [5.3]。

定理 5.1 的证明使用了 Calderón-Zygmund 分解。关于连续版本中相应结果的证明，请参见[7]。定理 [5.1] 和定理 [5.3] 的证明与相应结果的连续版本的证明相同，除了这样一个事实：

由于$\mathbb{Z}$ [中的二进区间的性质，这里得到的常数与连续版本中得到的常数略有不同。见 [2]]。因此，为了完整起见，我们在此给出定理[5.1] 和定理 5.3 的证明。

定理 5.1. 若 $\{w(n)\colon\ n \in \mathbb{Z}\} \in A_p$ 、 $1 \leq p < \infty$ 和 $\{a(n) :\ n \in \mathbb{Z}\}$ 是 $\ell^p(\mathbb{Z})$ 中的一个序列，则对任意 $p > 1$，存在常数 C_p 使得

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} Ma(m)^p w(m) \leq C_p \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a(m)|^p Mw(m) \tag{5.1[A]}$$

此外，对任意 $p = 1$，存在常数 C_1 使得

$$\sum_{\{m\in\mathbb{Z}:Ma(m)>\lambda\}} w(m) \leq \frac{C_1}{\lambda} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a(m)| Mw(m) \tag{5.1[B]}$$

证明. 我们将证明 $\|Ma\|_{\ell^\infty_w(\mathbb{Z})} \leq \|a\|_{\ell^\infty_{Mw}(\mathbb{Z})}$，并且弱型 (1,1) 不等式成立；强型 (p,p) 不等式随后由 Marcinkiewicz 插值定理推出。

取 $C > \|a\|_{\ell^\infty_{Mw}(\mathbb{Z})}$。则

$$\sum_{\{n\in\mathbb{Z}:|a(n)|>C\}} Mw(n) = 0$$

这表明

$$\{n \in \mathbb{Z} : |a(n)| > C\} = \emptyset$$

因此 $|a(n)| \leq C, \forall n \in \mathbb{Z}$ 这意味着 $|Ma(n)| \leq C, \forall n \in \mathbb{Z}$ 因此

$$\{n \in \mathbb{Z} : |Ma(n)| > C\} = \emptyset$$

So,

$$\sum_{\{n\in\mathbb{Z}:|Ma(n)|>C\}} w(n) = 0$$

由此得到 $w(\{n \in \mathbb{Z} :\ |Ma(n)| > C\}) = 0$。因此 $\|Ma\|_{\ell^\infty_w(\mathbb{Z})} \leq C$。对 $\left\{C \text{ 取下确界: } \|a\|_{\ell^\infty_{Mw}(\mathbb{Z})} < C\right\}$，得到

$$\|Ma\|_{\ell^\infty_w(\mathbb{Z})} \leq \|a\|_{\ell^\infty_{Mw}(\mathbb{Z})}$$

为证明弱型 (1,1) 不等式，我们可以假设 $\{a(n) :\ n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^1(\mathbb{Z})$。对序列 $\{a(n) :\ n \in \mathbb{Z}\}$进行高度为 $\frac{\lambda}{4} > 0$的 Calderón-Zygmund 分解。于是得到一个由 $\mathbb{Z}$ 中的二进区间构成的序列 $\{I_j\}$，使得

$$\frac{1}{|I_j|} \sum_{k\in I_j} |a(k)| > \frac{\lambda}{4}$$

进一步，正如我们在引理 [4.2](*See* [1])的证明中所示,

$$\{m \in \mathbb{Z} : M'a(m) > \lambda\} \subset \cup_j 3I_j$$

由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{\{m:M'a(m)>\lambda\}} w(m) &\leq \sum_j \sum_{m\in 3I_j} w(m)\\ &= \sum_j 3|I_j| \frac{1}{|3I_j|} \sum_{m\in 3I_j} w(m)\\ &\leq \frac{12}{\lambda} \sum_j \left(\left(\sum_{n\in I_j} |a(n)| \right) \left(\frac{1}{|3I_j|} \sum_{m\in 3I_j} w(m) \right) \right)\\ &\leq \frac{12C}{\lambda} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)| Mw(n)\end{aligned}$$

由于根据引理[4.1], $\{m : Ma(m) > \lambda\} \subseteq \{m : M'a(m) > \frac{\lambda}{3}\}$, 由此可得

$$\sum_{\{m:Ma(m)>\lambda\}} w(m) \leq \sum_{\{m:M'a(m)>\frac{\lambda}{3}\}} w(m) \leq \frac{36C}{\lambda} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a(n)| Mw(n)$$

□

下面定理的证明类似于连续版本 [7] 中相应结果的证明。此处不加证明地陈述。

定理 5.2。令 $\{a(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 为一个非负序列，且令 $\{w(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in A_p$, $1 \leq p < \infty$ 为一个非负权数列。令 I 为一个区间，使得 $a(m) > 0$ 对于某个 $m \in I$成立。则,

1.

$$w(I)\left(\frac{a(I)}{|I|}\right)^p \leq C \sum_{m\in I} |a(m)|^p w(m) \tag{5.2[A]}$$

2. 给定一个有限集 $S \subset I$,

$$w(I)\left(\frac{|S|}{|I|}\right)^p \leq C w(S) \tag{5.2[B]}$$

$5.2[A]$ 由霍尔德不等式和 A_p 条件得出。 $5.2[B]$ 通过在 $5.2[A]$ 中取 $a = \chi_S$ 得出。

定理 5.3. 假设 $\{w(n)\colon\ n \in \mathbb{Z}\} \in A_p$。给定一个非负序列 $\{a(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^p_w(\mathbb{Z})$，对于 $1 \leq p < \infty$，加权弱型 ***(p,p)*** 不等式成立：

$$w(\{m \in \mathbb{Z} : Ma(m) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda^p} \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a(m)|^p w(m)$$

证明。设 $\{a(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell^p_w(\mathbb{Z})$。对 $\{a(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ 在高度 $\frac{\lambda}{12}$ 处进行 Calderon-Zygmund 分解，得到一组互不相交的区间 $\{I_j\}$，满足 $a(I_j) > \frac{\lambda}{12}|I_j|$。由 [1] 中引理[4.2]的证明及引理[4.1]，可得

$$\{m \in \mathbb{Z} : Ma(m) > \lambda\} \subseteq \left\{m \in \mathbb{Z} : M'a(m) > \frac{\lambda}{3}\right\} \subseteq \cup_j 3I_j$$

因此，利用定理[5.2]，可得

$$\begin{aligned} w(\{m \in \mathbb{Z} : Ma(m) > \lambda\}) &\leq \sum_j w(3I_j) \leq C3^p \sum_j w(I_j) \\ &\leq C3^p \sum_j \left(\frac{|I_j|}{a(I_j)}\right)^p \sum_{m\in I_j} |a(m)|^p w(m) \\ &\leq C3^p \left(\frac{12}{\lambda}\right)^p \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a(m)|^p w(m) \end{aligned}$$

□

定理 5.4。若 $w \in A_p, 1 < p < \infty$，则 M 在 $\ell^p_w(\mathbb{Z})$上有界。

证明可由定理[5.3] 和 Marcinkiewicz 插值定理推出。

6 极大遍历算子

设 $(X, \mathbf{B}\ \mu)$ 为一概率空间，且 U为 X 上的一个可逆保测变换。我们将极大遍历算子定义为

$$\tilde{M}f(x) = \sup_{J\geq 1} \frac{1}{2J+1} \sum_{k=-J}^{J} |f(U^{-k}x)|$$

对于任意正整数 J，我们还将截断遍历极大算子定义为

$$\tilde{M}_J f(x) = \sup_{1\leq n\leq J} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |f(U^{-k}x)|$$

在下面的定理中，我们利用转移原理证明，极大遍历算子在 $L_w^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ $1 < p < \infty$ 上有界，其中 w 是遍历 A_p 权函数，并且极大遍历算子在 $L_w^1(X, \mathrm{B}\ \mu)$ 空间上满足弱型 (1,1) 不等式。

定理 6.1. 设 $(X, \ \mathcal{B}\ \mu)$ 是一个概率空间，且 U 是其上的可逆保测变换。满足

1. 若 w 是遍历 A_p 权函数，$1 < p < \infty$ 且 $f \in L_w^p(X, \ \mathcal{B}, \ \mu)$，则极大遍历算子

$$\left\| \tilde{M} f(x) \right\|_{L_w^p(X)} \leq C_p \left\| f \right\|_{L_w^p(X)} \quad if \quad 1 < p < \infty$$

2. 若 w 是遍历 A_1 权函数，且 $f \in L_w^1(X, \ \mathcal{B}, \ \mu)$，则

$$\int_{\left\{x \in X : |\tilde{M} f(x)| > \lambda\right\}} w(x) d\mu(x) \leq \frac{C}{\lambda} \int_X |f(x)| w(x) d\mu(x)$$

证明. 取 $p, 1 \leq p < \infty$。固定 $J > 0$，并取函数 $f \in L_w^p(X)$。

$$\tilde{M}_J f(x) = \sup_{1 \leq n \leq J} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |f(U^{-k} x)|$$

˜只需证明 M_J 满足 (1) 和 (2)，且常数不依赖于 J。令 $\lambda > 0$，并设

$$E_\lambda = \left\{ x \in X : |\tilde{M}_J f(x)| > \lambda \right\}$$

对于不属于 μ 零测集的 x 以及正整数 L，定义序列 es

$$a_x(k) = \begin{cases} f(U^{-k} x) \quad if \quad |k| \leq L + J \\ 0 \quad otherwise \end{cases}$$

$$w_x(k) = \begin{cases} w(U^{-k} x) \quad if \quad |k| \leq L + J \\ 0 \quad otherwise \end{cases}$$

利用引理[4.1]，注意到对于满足 $|m| \leq L$ 的整数 m

$$\tilde{M}_J f(U^{-m} x) = M'_J a_x(m) \leq M a_x(m)$$

因此，

$$w(\left\{ x \in X : |\tilde{M}_J f(x)| > \lambda \right\}) = \int_{E_\lambda} w(x) d\mu(x) = \frac{1}{\lambda^p} \int_{E_\lambda} \lambda^p w(x) d\mu(x)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{\lambda^p}\int_{E_\lambda}|\tilde{M}_J f(x)|^p w(x)d\mu(x)\\
&\leq \frac{1}{\lambda^p}\int_{X}|\tilde{M}_J f(x)|^p w(x)d\mu(x)\\
&= \frac{1}{\lambda^p}\frac{1}{2L+1}\sum_{m=-L}^{L}\int_X|\tilde{M}_J f(U^{-m}x)|^p w(U^{-m}x)d\mu(x)\\
&\leq \frac{1}{\lambda^p}\frac{1}{2L+1}\sum_{m=-L}^{L}\int_X|Ma_x(m)|^p w_x(m)d\mu(x)\\
&= \frac{1}{\lambda^p}\frac{1}{2L+1}\int_X\sum_{m=-L}^{L}|Ma_x(m)|^p w_x(m)d\mu(x)\\
&\leq \frac{1}{\lambda^p}\frac{1}{2L+1}\int_X\sum_{m=-\infty}^{\infty}|Ma_x(m)|^p w_x(m)d\mu(x)\\
&\leq \frac{1}{\lambda^p}\frac{1}{2L+1}\int_X\sum_{m=-\infty}^{\infty}|a_x(m)|^p w_x(m)d\mu(x)\\
&= \frac{1}{\lambda^p}\frac{1}{2L+1}\int_X\sum_{m=-(L+J)}^{(L+J)}|a_x(m)|^p w_x(m)d\mu(x)\\
&= \frac{1}{\lambda^p}\frac{1}{2L+1}\int_X\sum_{m=-(L+J)}^{(L+J)}|f(U^{-m}x)|^p w(U^{-m}x)d\mu(x)\\
&\leq \frac{1}{\lambda^p}\frac{1}{2L+1}\sum_{m=-(L+J)}^{(L+J)}\int_X|f(U^{-m}x)|^p w(U^{-m}x)d\mu(x)\\
&\leq \frac{1}{\lambda^p}\frac{1}{2L+1}\sum_{m=-(L+J)}^{(L+J)}\int_X|f(U^{-m}x)|^p w(U^{-m}x)d\mu(x)\\
&= \frac{1}{\lambda^p}\frac{1}{2L+1}\sum_{m=-(L+J)}^{(L+J)}\int_X|f(x)|^p w(x)d\mu(x)\\
&\leq \frac{C}{\lambda^p}\frac{1}{2L+1}2(L+J)+1\,\|f\|^p_{L^p_w(X)}\\
&\leq \frac{C}{\lambda^p}(\frac{2L}{2L+1}+\frac{2J+1}{2L+1})\,\|f\|^p_{L^p_w(X)}\\
&\leq \frac{C}{\lambda^p}\,\|f\|^p_{L^p_w(X)}
\end{aligned}
$$

通过适当地选取 L。现在利用 Marcinkiewicz 插值定理即可得到该定理的结论 (1)。 □

现在，我们证明定理[6.1] 关于 $p>1$ 的逆命题，并附加以下假设：(1) $(X,\mathcal{B},\mu)$是一个概率空间；(2) U是遍历的

保测变换。利用迁移方法，我们证明定理[6.1]的逆命题。 [3]中给出了直接证明。为此，我们需要引入遍历矩形的概念，下面将对此进行定义 [3]。

定义 6.2 (遍历矩形)。 设 E 是 X 的一个正测度子集，并设 $K \geq 1$满足：若 $i \neq j$且$-K \leq i$，则 $U^iE \cap U^jE = \phi\ j \leq K$。那么，集合 $R = \cup_{i=-K}^{K} U^iE$称为以 E为底、长度为 $2K+1$ 的遍历矩形。

以下引理的证明[6.3]，请参见[3]。

引理 6.3. 设 $(X,\ \boldsymbol{B}\ \mu)$ 是一个概率空间， U 是定义在 X 上的遍历可逆保测变换，且 K 是一个正整数。

1. 若 $F \subseteq X$ 是一个正测度集合，则存在一个正测度子集 $E \subseteq F$，使得 E 是长度为$2K+1$的遍历矩形的底。

2. 存在一个可数族 $\{E_j\}$ ，其成员均为长度为 $2K+1$ 的遍历矩形的底，并且 $X = \cup_j E_j$。

定理 6.4。 设 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 是一个概率空间，U 是 X 上的可逆遍历~保测变换。若 Mf 在 $L_w^p(X)$ 上有界，其中 $1 < p < \infty$，则 $w \in A_P(X)$。

证明。 对于给定的函数 w ，在 X 上，对几乎处处的 $x \in X$ ，定义序列$w_x(k) = w(U^{-k}x)$。我们将证明

$$esssup_{x\in X}\left(\frac{1}{|I|}\sum_{k\in I}|w_x(k)|\right)\left(\frac{1}{|I|}\sum_{k\in I}|w_x(k)|^{p'-1}\right)^{p-1} \leq C$$

这将证明 $w \in A_p(X)$。为证明这一点，我们将证明 Hardy-Littlewood 极大算子 M 在 $\ell_{w_x}^p(\mathbb{Z})$ 上有界，并且

$$\|Ma\|_{\ell_{w_x}^p(\mathbb{Z})} \leq C_p \|a\|_{\ell_{w_x}^p(\mathbb{Z})}$$

其中 C_p 与 x 无关。为证明上述不等式，取一个序列 $a = \{a(n) : n \in \mathbb{Z}\} \in \ell_{w_x}^p(\mathbb{Z})$。

设 $R = \cup_{k=-2J}^{2J} U^kE$ 是一个长度为 $4J+1$、底为 E 的遍历矩形。设 F 是 E 的任意可测子集。那么， F 也是一个长度为 $4J+1$ 的遍历矩形的底。设 $R' = \cup_{k=-2J}^{2J} U^kF$。定义函数 f 和 w 如下。

$$f(U^{-k}x) = \begin{cases} a(k) \quad if \quad x \in F \quad \text{and} -J \leq k \leq J \\ 0 \quad otherwise \end{cases}$$

那么，

$$\begin{aligned}
\|f\|^p_{L^p_w(X)} &= \int_X |f(x)|^p w(x) d\mu(x) = \int_{R'} |f(x)|^p w(x) d\mu(x) \\
&= \sum_{k=-J}^{J} \int_{U^k F} |f(x)|^p w(x) d\mu(x) \\
&= \sum_{k=-J}^{J} \int_F |f(U^{-k}x)|^p w(U^{-k}x) d\mu(x) \\
&= \sum_{k=-J}^{J} \int_F |a(k)|^p w_x(k) d\mu(x) \\
&= \int_F \left(\sum_{k=-J}^{J} |a(k)|^p w_x(k) \right) d\mu(x) \\
&\leq \|a\|_{\ell^p_{w_x}(\mathbb{Z})} \, \mu(F)
\end{aligned}$$

利用引理[4.1]，容易观察到，对于 $-J \leq m \leq J$ 和 $x \in F$

$$\tilde{M}_J f(U^{-m}x) = M'_J a(m) \geq \frac{1}{3} M_J a(m)$$

Now,

$$\begin{aligned}
C \|f\|^p_{L^p_w(X)} &\geq \int_X |\tilde{M}_J f(x)|^p w(x) d\mu(x) \\
&= \int_{R'} |\tilde{M}_J f(x)|^p w(x) d\mu(x) \\
&= \sum_{k=-J}^{J} \int_{U^k F} |\tilde{M}_J f(x)|^p w(x) d\mu(x) \\
&= \sum_{k=-J}^{J} \int_F |\tilde{M}_J f(U^{-k}x)|^p w(U^{-k}x) d\mu(x) \\
&= \sum_{k=-J}^{J} \int_F |M'_J a(k)|^p w_x(k) d\mu(x) \\
&= \int_F \sum_{k=-J}^{J} |M'_J a(k)|^p w_x(k) d\mu(x) \\
&\geq \frac{1}{3} \int_F \sum_{k=-J}^{J} |M_J a(k)|^p w_x(k) d\mu(x)
\end{aligned}$$

因此，根据上述估计

$$\frac{1}{\mu(F)} \int_F \sum_{k=-J}^{J} |M_J a(k)|^p w_x(k) d\mu(x) \leq C \|a\|_{\ell^p_{w_x}(\mathbb{Z})}$$

由于 F 是 E 的任意子集，我们得到

$$\sum_{k=-J}^{J} |M_J a(k)|^p w_x(k) \leq C \|a\|_{\ell^p_{w_x}(\mathbb{Z})}$$

几乎处处 $x \in E$。由于 U 是遍历的， X 可以表示为长度为 $4J+1$ 的遍历矩形基的可数并。因此，对于几乎处处的 $x \in X$,

$$\sum_{k=-J}^{J} |M_J a(k)|^p w_x(k) \leq C \|a\|_{\ell^p_{w_x}(\mathbb{Z})}$$

由于 C 与 J 相互独立，几乎处处 $x \in X$,

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |Ma(k)|^p w_x(k) \leq C \|a\|_{\ell^p_{w_x}(\mathbb{Z})}$$

由此可知，序列 $\{w_x(n)\colon\ n \in \mathbb{Z}\}$ （定义如 $w_x(k) = w(U^k x)$ 所示）几乎处处属于 $A_p(\mathbb{Z})$ $x \in X$ ，且 A_p 权函数常数对于 w_x 与 x 无关，因此 $w \in A_p(X)$。 □

7 结论

对 $L^p_w(X, \mathcal{B}, \mu)$ 空间上的极大遍历算子的研究，为研究该算子在变指数 $L^{p(\cdot)}(X, \mathcal{B}, \mu)$ 空间上的性质铺平了道路。借助 Rubio de Francia 外推法 [6] 和适当的变指数 Hölder 不等式，我们希望能够得到这一结果。

参考文献

[1] Anupindi Sri Sakti Swarup 和 A. Michael Alphonse，调和分析中离散极大算子之间的关系https://arxiv.org/abs/2210.07438[2] Anupindi Sri Sakti Swarup 和 A. Michael Alphonse，利用 *Calderón-Zygmund* 分解证明分数阶 *Hardy-Littlewood* 极大算子在变指数 *lp(Z)* 空间上的有界性https://arxiv.org/abs/2204.04331[3] E. Attencia 和 A. De La Torre，一个针对L_p 带权空间的支配遍历估计，《数学研究》，74（1982）35-47[4] A.P.Calderon。遍历理论与平移不变算子，Proc. Nat. Acad.Sci. U.S.A. 59（1968）349-353。

[5] R.R.Coifman 和 G.Weiss。分析中的转移方法，CBMS 区域会议数学丛书第31卷，美国数学学会，1977。[6] D.Cruz-Uribe、J.M.Martell 和 C.Peres。权函数、外推与 *Rubio de Francia* 理论，Birkhäuser，巴塞尔，2011。[7] Javier Duoandikoetxea，傅里叶分析，《数学研究生丛书》第29卷，美国数学学会。[8] A.Michael Alphonse 和 Shobha Madan，遍历 *Hilbert* 变换的交换子，《当代数学》，第189卷，1995。