arXiv:2303.00475v1 [math.AG] 1 Mar 2023

抛物联络与抛物 Higgs 丛的拉回和直接像

David Alfaya 和 Indranil Biswas

Abstract. 我们通过黎曼曲面之间的映射，给出了抛物丛、抛物 Higgs 丛和抛物联络的拉回与直接像的显式代数构造。我们证明这些构造保持半稳定性和多稳定性，并证明它们与非阿贝尔霍奇对应相容。

Contents

1. 引言 12. 抛物 Higgs 丛与抛物联络 42.1. 抛物 Higgs 丛 42.2. 抛物联络 63. 抛物丛的拉回 74. 抛物丛的直接像 85. 抛物 Higgs 丛与抛物联络的拉回 115.1. 抛物 Higgs 丛的拉回 115.2. 抛物联络的拉回 146. 抛物 Higgs 丛与联络的直接像 176.1. 抛物 Higgs 丛的直接像 176.2. 抛物联络的直接像 197. 与非阿贝尔霍奇理论的相容性 19致谢 27参考文献 27

1. Introduction

设 X 是一个紧连通黎曼曲面，且 $D = \{x_1, \ldots, x_l\}$ 是 X 的有限子集。(X, D) 上的抛物丛是指 X 上的向量丛 E，并配有

2020 数学主题分类。14H30、14H60、14E20。

对每个 $i = 1$，在纤维 E_{x_i} 上给定一个加权旗，即由 E_{x_i}的子空间构成的递减滤过

$$E_{x_i} = E_i^1 \supsetneq E_i^2 \supsetneq \cdots \supsetneq E_i^{n_i} \supsetneq 0$$

以及一组相应的抛物权重

$$0 \leq \alpha_i^1 < \alpha_i^2 < \cdots < \alpha_i^{n_i}.$$

抛物丛由 Mehta 和 Seshadri 引入 [MS] 针对曲线，而 Maruyama 和 Yokogawa 后来将其推广到了高维簇[MY]。

令 K_X 表示 X的典范丛。给定（X, D）上的抛物向量丛 E_*，在 E_* 上的抛物 Higgs 场是一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射

$$\theta : E \longrightarrow E \otimes K_X(D)$$

它保持抛物点处的抛物滤过。这样的二元组（E_*, θ）称为（X, D）上的抛物 Higgs 丛。类似地， E_* 上的抛物联络是 E 上的对数连接，其极点位于 D 上，并保持滤过；也就是说，它是一个 $\mathbb{C}$-线性映射

$$\nabla : E \longrightarrow E \otimes K_X(D)$$

满足莱布尼茨法则，即

$$\nabla(fs) = f\nabla(s) + s \otimes \partial f$$

对于所有局部全纯函数 f 和 s 的所有局部全纯截面，其中 E 在每个抛物点处的留数

$$\mathrm{Res}(\nabla, x_i) : E_{x_i} \longrightarrow E_{x_i}$$

保持抛物滤过（更多详情请参见第 2 节）。这些滤过的对数型 Higgs 丛和联络的类似物由 Simpson [Si] 提出，作为将 Higgs 丛、连接与基本群的 GL($r, \mathbb{C}$)-表示之间的经典非阿贝尔霍奇对应 $\pi_1(X)$ 从黎曼曲面 X 推广到非紧情形时自然产生的对象。特别是，强抛物 Higgs 丛，即在抛物点处具有幂零留数的抛物丛，是与 $\pi_1(X \setminus D)$ 在 GL($r, \mathbb{C}$) 中的表示相对应的自然对象。

设有如前所述的带标记光滑射影曲线 (X, D)，以及其上的抛物丛 E_*、抛物 Higgs 丛 (E_*, θ) 或抛物联络 (E_*, ∇)，定义在 (X, D) 上。设 $f : Y \longrightarrow X$ 和 $\phi : X \longrightarrow Z$ 是紧黎曼曲面之间的非恒定全纯映射。本文研究这些映射作用下，(X, D) 上这类抛物对象的拉回到 Y，以及直接像到 Z。

抛物对象的拉回和直接像此前已在不同语境下的文献中得到研究。利用曲线上抛物丛与相应根栈上的轨形丛之间的等价性 [Bi2], Dhillon 和 Joyner [DJ] 研究了曲线之间抛物丛的拉回，并深入研究了到 $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$覆盖 [KM] 定义了拉回和直接像

基于相同的对应关系研究了正特征情形。在 [BM], 中，给出了映射曲线之间抛物丛或抛物联络的直接像的明确描述；而在 [FL] 中，研究了通过曲线之间的二次映射对抛物 Higgs 丛进行拉回。

本文通过光滑射影曲线之间任意非恒定（可能分歧的）映射，对抛物向量丛、抛物 Higgs 丛和抛物联络的拉回与直接像给出了明确的代数描述，并研究了它们的稳定性。本文的主要结果可概括为以下定理：

定理 1.1（引理 3.1、命题 4.3、引理 5.4、定理 5.6、命题 5.7、命题 6.2 和命题 6.4）。设 E_* 是 (X, D) 上的一个抛物丛，且 (E_*, θ) 是一个抛物 Higgs 丛。设 (E_*, ∇) 是 (X, D) 上的一个抛物联络。设 $f : Y \longrightarrow X$ 和 $\phi: X \longrightarrow Z$ 是连通光滑复射影曲线之间的两个非恒定映射。则以下陈述成立：

(1) f^*E_*、$f^*(E_*, \theta)$ 和 $f^*(E_*, \nabla)$ 半稳定，当且仅当 E_*、(E_*, θ) 和 (E_*, ∇) 分别半稳定。(2) ϕ_*E_*、$\phi_*(E_*, \theta)$ 和 $\phi_*(E_*, \nabla)$ 半稳定，当且仅当 E_*、(E_*, θ) 和 (E_*, ∇) 分别半稳定。(3) f^*E_* 多稳定，当且仅当 E_* 多稳定。(4) 如果 E_* 多稳定，那么 ϕ_*E_* 多稳定。

关于拉回和直接像与非阿贝尔霍奇对应之间的相容性，Donagi、Pantev 和 Simpson [DPS] 给出了高阶直接像的描述，并证明了在考虑从曲面到曲线的映射时，它们与非阿贝尔霍奇对应相容。[DPS] 中的技术也可以扩展到更广泛的框架；论文还提到，一般而言，拉回和推前运算对于调和丛和局部系统都是良定义的，并且它们与非阿贝尔霍奇对应相交换。然而，代数曲线之间的分歧映射情形在文献中尚未得到明确处理。我们明确证明，本文所给出的拉回和直接像的代数构造，与从非紧曲线的非阿贝尔霍奇理论中所涉及的温和调和丛的可接受度量出发、以度量方式得到的构造是一致的 [Si]。我们证明如下结果，说明对抛物 Higgs 丛和抛物联络取拉回或直接像，与非阿贝尔霍奇对应相交换。

定理 1.2 (定理 7.1和定理 7.3)。设 (E_*, θ) 是一个抛物 Higgs 丛，并设 (E_*, ∇) 是定义在 (X, D) 上的一个抛物联络，二者由非阿贝尔霍奇对应关联。设 $f : Y \longrightarrow X$ 和 $\phi : X \longrightarrow Z$ 是连通光滑复射影曲线之间的两个非恒定映射。则以下结论成立：

(1) $f^*(E_*, \theta)$ 是一个抛物 Higgs 丛，而 $f^*(E_*, \nabla)$ 是一个抛物联络，定义在 $(Y, f^{-1}(D)_{red})$ 上；二者通过非阿贝尔霍奇对应相关联。

(2) $\phi_*(E_*, \theta)$ 是一个抛物 Higgs 丛，而 $\phi_*(E_*, \nabla)$ 是定义在 (Z, Δ) 上的抛物联络；二者通过非阿贝尔霍奇对应相关联，其中 Δ 是 D 与 ϕ 的分歧轨迹之并集的像。

所得抛物对象的预期抛物权重和特征值也已计算得出（见表 1 和表 2）。

本文的组织如下。第 2 节介绍关于抛物丛、抛物 Higgs 丛和抛物联络的主要定义和记号。第 3 节和第 4 节将介绍抛物丛的拉回和直接像及其一些主要性质。第 5 节致力于构造抛物 Higgs 丛和抛物联络的拉回，并研究其主要性质，包括本文的主要多稳定性保持结果（定理 5.6和命题 5.7）。类似地，第 6 节致力于研究抛物 Higgs 丛和抛物联络的直接像。最后，第 7节讨论前述构造与非阿贝尔霍奇理论之间的相容性。

2. Parabolic Higgs bundles and parabolic connections

2.1. 抛物 Higgs 丛。设 X 是一条紧连通黎曼曲面。X 的全纯余切丛记为 K_X。设

$$D := \{x_1, \cdots, x_\ell\} \subset X$$

是一个有限子集。除子 $\sum_{i=1}^{\ell} x_i$ 也记为 D。对于 X 上的全纯向量丛 V，向量丛 $V \otimes \mathcal{O}_X(D)$ 记为 $V(D)$。

取 X 上的全纯向量丛 E。E 上的拟抛物结构是子空间的严格递减滤过

$$E_{x_i} = E_i^1 \supsetneq E_i^2 \supsetneq \cdots \supsetneq E_i^{n_i} \supsetneq E_i^{n_i+1} = 0 \tag{2.1}$$

对每个 $1 \leq i \leq \ell$ 都成立；这里，E_{x_i} 表示 E 在点 $x_i \in D$ 上的纤维。E 上的抛物结构是在上述拟抛物结构的基础上，再配以 ℓ 组递增的实数序列

$$0 \leq \alpha_i^1 < \alpha_i^2 < \cdots < \alpha_i^{n_i} < 1\,, \quad 1 \leq i \leq \ell\,; \tag{2.2}$$

实数 α_i^j 称为拟抛物滤过中（2.1）中子空间 E_i^j 的抛物权重。为明确起见，j 在 α_i^j 中是一个指标而不是指数。抛物权重 α_i^j 在 x_i 处的重数定义为复向量空间E_i^j/E_i^{j+1} 的维数。抛物向量丛是带有抛物结构的全纯向量丛。

抛物向量丛 $E_* := \left(E, \{E_i^j\}, \{\alpha_i^j\}\right)$ 的抛物次数定义为

$$\text{par-deg}(E_*) = \text{degree}(E) + \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_i^j \cdot \dim\left(E_i^j/E_i^{j+1}\right)$$

[MS，第 214 页，定义 1。11], [MY，第 78]。实数

$$\mu(E_*) := \frac{\text{par-deg}(E_*)}{\text{rank}(E_*)}$$

称为 E_*的斜率。

取任意全纯子丛 $F \subset E$。对于每个 $x_i \in D$，纤维 F_{x_i} 通过将拟抛物滤过与子空间 $F_{x_i} \subset E_{x_i}$相交，得到一个子空间滤过。子空间 $B \subset F_{x_i}$ 在 E_{x_i} 的这一子空间滤过中出现时，其抛物权重是下列数中的最大值

$$\{\alpha_i^j \mid B \subset E_i^j \cap F_{x_i}\}.$$

这样， E 上的抛物结构就在子丛F上产生了一个抛物结构。所得的抛物丛记为 F_*。

一个抛物向量丛

$$E_* = \left(E, \{E_i^j\}, \{\alpha_i^j\}\right)$$

称为稳定（分别称为半稳定），如果对所有正秩全纯子丛 $F \subsetneq E$，以下不等式均成立：

$$\mu(F_*) < \mu(E_*) \quad (\text{respectively}, \quad \mu(F_*) \leq \mu(E_*)).$$

如果一个抛物向量丛是若干具有相同抛物斜率的稳定抛物向量丛的直和，则称其为多稳定。

取一个抛物丛 $E_* := \left(E, \{E_i^j\}, \{\alpha_i^j\}\right)$。令

$$\text{End}_P(E_*) \subset \text{End}(E) = E \otimes E^* \tag{2.3}$$

为满足以下条件的凝聚解析子层：全纯截面 $s \in H^0(U, \text{End}(E)\big|_U)$（其中 $U \subset X$ 是任意开子集）是 $\text{End}_P(E_*)\big|_U$ 的截面，当且仅当对所有 $x_i \in U$ 和所有 $1 \leq j \leq n_i$， $s(E_i^j) \subset E_i^j$。令

$$\text{End}_n(E_*) \subset \text{End}_P(E_*) \tag{2.4}$$

为满足以下条件的凝聚解析子层：全纯截面 $s \in H^0(U, \text{End}_P(E_*)\big|_U)$（其中 $U \subset X$ 是任意开子集）是 $\text{End}_n(E_*)\big|_U$ 的截面，当且仅当对所有 $x_i \in U$ 和所有 $1 \leq j \leq n_i$， $s(E_i^j) \subset E_i^{j+1}$。

E_* 上的 Higgs 场是一个全纯截面

$$\theta \in H^0(X, \text{End}_P(E_*) \otimes K_X(D))$$

（见（2.3））。若 Higgs 场 θ是 End 的截面$_n$（E_*）$\otimes K_X$（D）（见（2.4）），则称其为强抛物Higgs场。抛物 Higgs 丛是配备了 Higgs 场的抛物丛。强抛物 Higgs 丛是指 Higgs 场为强抛物的抛物 Higgs 丛。

若对所有满足条件 $\theta(F) \subset F \otimes K_X(D)$ 的正秩全纯子丛 $F \subsetneq E$，以下不等式均成立，则称抛物 Higgs 丛 $(E_*, \theta) = \left(\left(E, \{E_i^j\}, \{\alpha_i^j\}\right), \theta\right)$ 为稳定（分别地，半稳定）：

$$\mu(F_*) < \mu(E_*) \quad (\text{respectively}, \quad \mu(F_*) \leq \mu(E_*)).$$

若一个抛物 Higgs 丛是若干具有相同抛物斜率的稳定抛物 Higgs 丛的直和，则称其为多稳定。

若强抛物 Higgs 丛作为抛物 Higgs 丛是半稳定、稳定或多稳定的，则称其为半稳定、稳定或多稳定。

2.2. 抛物联络。 取 X 和 D 如第 2.1 节所述。设 V 是定义在 X上的全纯向量丛。一个对数连接 定义在 V 上，奇点位于 D ，是一个满足以下条件的全纯微分算子

$$\nabla : V \longrightarrow V \otimes K_X(D)$$

满足 Leibniz 恒等式，即

$$\nabla(fs) = f\nabla(s) + s \otimes df \tag{2.5}$$

对于任意局部定义在 f 上的全纯函数 X 以及任意局部定义的全纯截面 s属于 V（参见 [De], [At]）。

任意 $K_X(D)$ 处的纤维 $y \in D$ 通过 Poincar $\mathbb{C}$ e 对偶公式 ´GH，第 146] 页，可与 [等同。为解释这一同构

$$K_X(D)_y \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}\,, \tag{2.6}$$

设 z 是定义在 y 的解析开邻域上的全纯坐标函数 X，使得 $z(y) = 0$。那么我们有一个同构 $\mathbb{C} \longrightarrow K_X(D)_y$，它将任意的$c \in \mathbb{C}$映射为 $c\cdot\frac{dz}{z}(y) \in K_X(D)_y$。容易验证，此映射 $\mathbb{C} \longrightarrow K_X(D)_y$ 实际上与全纯坐标函数 z 的选取无关。

设 ∇_V： $V \longrightarrow V \otimes K_X(D)$ 是定义在 V 上的对数连接。由（2.5）可知，同态的复合

$$V \xrightarrow{\nabla_V} V \otimes K_X(D) \longrightarrow (V \otimes K_X(D))_y \xrightarrow{\sim} V_y$$

是 $\mathcal{O}_X$–线性的；上述同构 $(V\otimes K_X(D))_y \xrightarrow{\sim} V_y$由（2.6）中的同构给出。因此，此同态的复合产生一个 $\mathbb{C}$–线性同态

$$\mathrm{Res}(\nabla_V, y) : V_y \longrightarrow V_y\,,$$

称为 留数，其取值于 ∇_V，位于 y；参见 [De]。

取一个抛物向量丛 $E_* = \big(E, \{E_i^j\}, \{\alpha_i^j\}\big)$。

定义 2.1. 一个连接定义在 E_* 上，是定义在 ∇ 上的一个对数连接 E，其在D上有奇点，并且满足 Res$(D, x_i)(E_i^j) \subset E_i^j$，对所有 $1 \le j \le n_i$, $1 \le i \le \ell$ 均成立（见（2.1））。

文献中，有时还要求 E_i^j/E_i^{j+1} 由 Res(D, x_i) 诱导的自同态等于乘以抛物权重 α_i^j 对所有$1 \le j \le n_i$, $1 \le i \le \ell$(参见 [BL，第 2 节。2])。满足这一附加限制的抛物联络通过非阿贝尔霍奇对应对应于强抛物 Higgs 丛。本文中，我们不假设满足这一条件，但稍后将证明，满足这一附加“剩余”条件的联络的拉回和直接像也满足相应的“剩余”条件。详情见注7.2和注7.4。

3. Pullback of parabolic bundles

取前面所述的 (X, D)。令

$$f : Y \longrightarrow X \tag{3.1}$$

是从紧连通黎曼曲面出发的非恒定全纯映射。对于每个$x_i \in D$，令

$$f^{-1}(x_i)_{\rm red} = \{y_{i,1}, \cdots, y_{i,b_i}\} \subset Y \tag{3.2}$$

表示集合论意义下的原像。除子$\sum_{j=1}^{b_i} y_{i,\ j}$ 在 Y 上也记作$f^{-1}(x_i)_{\rm red}$。定义子集

$$B := \bigcup_{i=1}^{\ell} f^{-1}(x_i)_{\rm red} = f^{-1}(D)_{\rm red} \subset Y. \tag{3.3}$$

除子$\sum_{i=1}^{\ell} f^{-1}(x_i)_{\rm red}$ 也记作 B。

取一个抛物向量丛 E_* : $= \big(E,\ \{E_i^j\},\ \{\alpha_i^j\}\big)$ 在 X 上，其抛物结构定义在 D上。我们将构造一个拉回的抛物向量丛 f^*E_* 在 Y 上，其抛物结构定义在除子 B 中（3.3）。

我们首先考虑秩$(E) = 1$的特殊情形。因此，对每个 $x_i \in D$， E_* 的抛物权重为 $\alpha_{i,\ 1} =: \alpha_i \geq 0$。对任意 $1 \leq i \leq \ell$和 $1 \leq j \leq b_i$，令 $m_{i,\ j} \geq 1$ 表示 f 在点 $y_{i,j}$处的重数（见（3.2））。对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$，令 $\lfloor\lambda\rfloor$ 为 λ的整数部分，因此有 $0 \leq \lambda - \lfloor\lambda\rfloor < 1$。

Y 上的全纯线丛（即抛物线丛 f^*E_* 的底层）为

$$F := (f^*E) \otimes \mathcal{O}_Y\Big(\sum_{i=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{b_i} \lfloor m_{i,j}\alpha_i\rfloor \cdot y_{i,j}\Big)\,, \tag{3.4}$$

且$F_{y_{i,j}}$ 的抛物权重为$m_{i,j}\alpha_i - \lfloor m_{i,j}\alpha_i\rfloor$。根据这个定义可立即得出

$$\text{par-deg}(f^*E_*) = \text{degree}(f) \cdot \text{par-deg}(E_*)\,. \tag{3.5}$$

请注意，在上述 f^*E_* 的构造中，我们并未用到 X 是紧的这一条件。更确切地说，若 $X = \overline{X} \setminus S$，上述构造仍然成立，其中 $\overline{X}$ 是一个紧连通黎曼曲面，$S \subset \overline{X}$ 是一个有限子集。

现在设 E_* 是 X 上的一个秩为 $r \geq 2$的抛物向量丛。任意抛物向量丛 E_* 在局部都可以表示为抛物线丛的直和。换言之， X 可以被扎里斯基开子集 U_1、 $\cdots$、 U_m 覆盖，使得对于所有 $1 \leq j \leq m$， $E_*\big|_{U_j}$ 都是 U_j 上的抛物线丛的直和。令

$$E_*\big|_{U_j} = \bigoplus_{k=1}^{r} L(j,k)_* \tag{3.6}$$

be t将 $E_*\big|_{U_j}$ 分解为抛物线丛的直和。设

$$f_j := f\big|_{f^{-1}(U_j)} : f^{-1}(U_j) \longrightarrow U_j$$

为 f在 $f^{-1}(U_j)$上的限制。现在定义

$$f_j^*(E_*|_{U_j}) = f_j^*\left(\bigoplus_{k=1}^{r} L(j,k)_*\right) := \bigoplus_{k=1}^{r} f_j^* L(j,k)_* \tag{3.7}$$

为抛物线丛的拉回的直和（见（3.6））。因此，我们得到一个抛物向量丛 $f_j^*(E_*|_{U_j})$，定义在 $f^{-1}(U_j$上，其抛物结构定义在$B \bigcap f^{-1}(U_j$上（见（3.3））。

$1 \leq j, j' \leq m$，两个抛物向量丛 $f_j^*(E_*|_{U_j})$ 和 $f_{j'}^*(E_*|_{U_{j'}})$ 在 $f^{-1}(U_j \bigcap U_{j'})$ 上有典范的同一识别。该识别由 $(f^*E)|_{U_j \cap U_{j'}}$ 的恒等映射得到。因此，这些抛物向量丛 $f_j^*(E_*|_{U_j})$、$1 \leq j \leq m$ 彼此相容地粘合，从而定义一个抛物向量丛 f^*E_*，它定义在 Y 上，并且抛物结构定义在 B 上。

引理 3.1. 设 Z 是一个紧连通黎曼曲面，且 $\psi : Z \longrightarrow Y$ 是一个满射全纯映射。那么对于 X上的任意抛物向量丛 E_*，

$$(f \circ \psi)^* E_* = \psi^*(f^* E_*)_* .$$

证明. 这直接由抛物丛拉回的构造得出。□

引理 3.2.

(1) 等式 par-deg(f^*E_*) =degree(f) ·par-deg(E_*) 成立。(2) 抛物丛 E_* 是抛物半稳定的，当且仅当 f^*E_* 是抛物半稳定的。

证明. 断言 (1) 由 f^*E_* 的构造以及（3.5）立即得出。

为证明 (2)，首先注意，若 E_* 不是抛物半稳定的，则 f^*E_* 不是抛物半稳定的。事实上，若 $F_* \subset E_*$ 违背了 E_*的半稳定性条件，那么根据断言 (1)，可知 f^*F_*违背了 f^*E_*的半稳定性条件。

为证明逆命题，根据引理3.1 及陈述 (1)，只需考虑 f 是一个（分歧）伽罗瓦覆盖的情形。在这种情况下，若 f^*E_* 不是半稳定的，那么 f^*E_* 的 Harder-Narasimhan 滤过的第一个非零项（也称为 f^*E_*的极大半稳定子丛）在伽罗瓦群 Gal(f^*E_*) 对f的作用下保持不变，因此它具有 f的形式 f^*F_*，其中 F_*是一个子丛$F \subset E$，配备由 E_*诱导的抛物结构。由陈述 (1) 可知， F_* 与 E_*的半稳定条件矛盾。□

4. Direct image of parabolic bundles

设 Z 是一个紧连通黎曼曲面，并且

$$\phi : X \longrightarrow Z \tag{4.1}$$

一个非常值全纯映射。设

$$R \subset X \tag{4.2}$$

ϕ的分歧轨迹。需要说明的是，我们不假设 R 和 D 不相交。对于任意点 $x \in X$，设 $m_x \geq 1$ 为 ϕ 在 x处的重数，则当且仅当$x \in R$时， $m_x \geq 2$ 。定义有限子集

$$\Delta = \phi(R \cup D) \subset Z. \tag{4.3}$$

设有一个抛物向量丛 E_* : $= \left(E, \ \{E_i^j\}, \ \{\alpha_i^j\}\right)$ 定义在 X 上，并在 D上带有抛物结构。我们将构造直接像 $\phi_* E$ 上的抛物结构，其抛物除子为 Δ（见4.3）。

与第3节一样，我们首先假设秩$(E) = 1$。对于每个 $x_i \in D$， E_* 的抛物权重为 $\alpha_{i,\ 1} =: \alpha_{x_i}$。我们将扩展 E_* 的抛物点，使其不改变 E_*。对于任意 $x \in R \setminus (R \cap D)$，我们赋予 E_x 平凡抛物结构，即 E_x 赋予抛物权重 $\alpha_x = 0$。这不会改变 E_* 的抛物结构，但有助于描述 $\phi_* E$ 的抛物结构。

现在回顾直接像的一般性质。取一个定义在 X 上的全纯向量丛F，并考虑其直接像 $\phi_* F$。对于任意一点 $y \in Z$，$\phi_* F$ 在 y 上方的纤维 $(\phi_* F)_y$有一个典范分解

$$(\phi_* F)_y = \bigoplus_{x \in \phi^{-1}(y)} V_x \,. \tag{4.4}$$

我们将描述 $(\phi_* F)_y$的子空间 V_x 。取 x 的一个解析单连通开邻域 $x \in U \subset X$ ，使得

- $U \bigcap \phi^{-1}(y) = \{x\}$,
- $U \bigcap R \subset \{x\}$，并且
- $\#\phi^{-1}(y') \bigcap U = m_x$（回忆一下， ϕ在 x处的重数为 $m_x \geq 1$），对所有$y' \in \phi(U) \setminus \{y\}$均成立。

Let

$$\psi := \phi\big|_U : U \longrightarrow \phi(U) \tag{4.5}$$

是 ϕ在 U上的限制。纤维（$\psi_*(F\big|_U)$ $_y$显然是（$\phi_* F$）$_y$的一个子空间。此子空间记为 V_x。现在我们得到（4.4）中的分解。

考虑如下分解

$$(\phi_* E)_y = \bigoplus_{x \in \phi^{-1}(y)} V_x \tag{4.6}$$

（4.4）中的向量丛 E。（$\phi_* E$）$_y$ 上的抛物结构将通过分别在每个 V_x 上给出抛物结构，再取它们的直和来描述。

要在 V_x 上给出抛物结构，首先注意到，对于任意 $j \geq 0$，都存在一个自然的相干解析层单同态

$$\psi_*(E \otimes \mathcal{O}_U(-jx)) \hookrightarrow \psi_* E \,,$$

其中 ψ 是（4.5）中的映射。通过此同态，ψ_*（$E \otimes \mathcal{O}_U$（$-jx$））$_y$ 在（$\phi_* E$）$_y$ 中的像记为（ψ_*（$E \otimes \mathcal{O}_U$（$-jx$））$'_y$。我们有一个由以下子空间构成的滤过V_x:

$$V_x := (\psi_* E)_y \supset (\psi_*(E \otimes \mathcal{O}_U(-x)))'_y \supset (\psi_*(E \otimes \mathcal{O}_U(-2x)))'_y \tag{4.7}$$

$$\supset \cdots \supset (\psi_*(E \otimes \mathcal{O}_U(-(m_x-1)x)))'_y \supset (\psi_*(E \otimes \mathcal{O}_U(-m_x x)))'_y = 0,$$

其中 $m_x \geq 1$ 是 x处 ϕ 的重数；注意，$\psi_*(E \otimes \mathcal{O}_U(-m_x x)) = (\psi_* E) \otimes \mathcal{O}_{\psi(U)}(-y)$（投影公式），因此 $(\psi_*(E \otimes \mathcal{O}_U(-m_x x)))'_y = 0$。上述子空间的抛物权重

$$(\psi_*(E \otimes \mathcal{O}_U(-kx)))'_y \subset V_x$$

在（4.7）中为 $\frac{k+\alpha_x}{m_x}$。

因此，我们在向量空间 V_x上得到一个抛物结构。现在取这些抛物结构的直和，利用（ E_y 4.6），即可在 ψ_*（$E \otimes \mathcal{O}_U$（$-kx$））$'_y$上得到一个抛物结构。注意，即使 $\alpha_x = 0$,
(

接下来，设 E_* 是 X 上的一个秩为 $r \geq 2$ 的抛物向量丛。与第 3 节一样，我们可以将 E_* 分解为 X的适当开子集上的抛物线丛的直和，从而将问题化归为线丛的情形。

取连通开子集 $\mathbb{U}_j \subset X, 1 \leq j \leq m$，使得

(1) $\bigcup_{j=1}^m \mathbb{U}_j = X$，(2) $\phi^{-1}(\phi(\mathbb{U}_j)) = \mathbb{U}_j$ 对每个 $1 \leq j \leq m$ 都成立，并且 (3) 给定了 $E_*\big|_{\mathbb{U}_j}$ 的一个分解，使其成为抛物线丛的直和

$$E_*\big|_{\mathbb{U}_j} = \bigoplus_{k=1}^r L(j,k)_* \,. \tag{4.8}$$

$\mathbb{U}_j$ 上由 $L(j,k)_*$ 诱导的全纯线丛记为 $L(j,k)$。

Let

$$\phi^j := \phi\big|_{\mathbb{U}_j} : \mathbb{U}_j \longrightarrow \phi(\mathbb{U}_j)$$

是 ϕ 在 $\mathbb{U}_j$上的限制。利用（4.8），可得

$$(\phi_* E)\big|_{\phi(\mathbb{U}_j)} = \bigoplus_{k=1}^r \phi^j_* L(j,k) \tag{4.9}$$

对每个 $1 \leq j \leq m$均成立。

我们已经利用 $L(j,k)_*$的抛物结构，在 $\phi^j_* L(j,k)$上构造了抛物结构。因此，利用（4.9），我们在$(\phi_* E)\big|_{\phi(\mathbb{U}_j)}$上得到一个抛物结构。对于每个$1 \leq j, j' \leq m$，$(\phi_* E)\big|_{\phi(\mathbb{U}_j)}$ 和$(\phi_* E)\big|_{\phi(\mathbb{U}_{j'})}$上的抛物结构在$\phi(\mathbb{U}_j \bigcap \mathbb{U}_{j'})$上重合。因此，我们在 $\phi_* E$上得到一个抛物结构。

引理4.1。赋予上述抛物结构的 $\phi_* E$ 的抛物次数与 E_*的抛物次数一致。

证明。当 E_* 为秩一时，这直接由在 $\phi_* E$ 上构造抛物结构的方式得出。

高秩的一般情形将归结为秩一的情形。对于一个秩为 V_* 的抛物向量丛 r，令 $\det V_* = \bigwedge^r V_*$ 表示抛物楔积；关于抛物张量积，参见[Yo], [Bi1] 。我们有 $\text{par-deg}(E_*) = \text{par-deg}(\det E_*)$。因此

我们有 par-deg(E_*) $=$par-deg(ϕ_* det E_*)。另一方面，par-deg(ϕ_* det E_*) $=$ par-deg(det ϕ_*E_*)。□

命题 4.2。

(1) 对任意紧黎曼曲面 M 以及任意非常值全纯映射 $\varphi : Z \longrightarrow M$,

$$(\varphi \circ \phi)_* E_* \;=\; \varphi_*(\phi_* E_*)_* \,.$$

(2) 若 ϕ 是一个（分歧）伽罗瓦态射，则抛物向量丛 $\phi^*(\phi_*E_*)_*$同构于以下直和

$$\bigoplus_{\gamma \in \mathrm{Gal}(\phi)} \gamma^* E_*$$

抛物丛。

证明。两个结论都很容易证明。只需证明第二个结论对抛物线丛成立即可。□

命题 4.3. 抛物向量丛 E_* 在 X 上半稳定，当且仅当抛物向量丛 ϕ_*E_* 在 Z 上半稳定。

证明。取一个紧连通黎曼曲面 M 以及一个非常数全纯映射 $\rho\colon M \longrightarrow X$，使得复合映射 $\phi \circ \rho$ 是（分歧）伽罗瓦映射。

首先假设 E_* 是半稳定的。因此，由引理 3.2(2)，我们知道 ρ^*E_* 是半稳定的。由命题 4.2(2)，我们有

$$(\phi \circ \rho)^*(\phi \circ \rho)_* \rho^* E_* \;=\; \bigoplus_{\gamma \in \mathrm{Gal}(\phi \circ \rho)} \rho^* E_* \,.$$

因此， ρ^*E_* 的半稳定性意味着 $(\phi \circ \rho)^*(\phi \circ \rho)_*\rho^*E_*$ 是半稳定的。

注意，$(\phi \circ \rho)^*\phi_*E_*$ 是$(\phi \circ \rho)^*(\phi \circ \rho)_*\rho^*E_*$的抛物子丛。此外，它们具有相同的抛物斜率；这由引理 4.1 和引理 3.2(1) 得出。由于$(\phi \circ \rho)^*(\phi \circ \rho)_*\rho^*E_*$ 是半稳定的，这意味着$(\phi \circ \rho)^*\phi_*E_*$ 是半稳定的。现在由引理 3.2(2) 可得 ϕ_*E_* 是半稳定的。

为证明逆命题，假设抛物丛 ϕ_*E_* 是半稳定的。若 E_* 不是半稳定的，令 $F_* \subset E_*$ 为 E_* (其 Harder-Narasimhan 滤过的第一个非零项 E_*)的极大半稳定子丛。由于 $\mu(F_*) > \mu(E_*)$，利用引理 4.1 可得 $\mu(\phi_*F_*) > \mu(\phi_*E_*)$，因此 ϕ_*E_* 不是半稳定的。鉴于这一矛盾，我们得出结论： E_* 是半稳定的。□

5. Pullback of parabolic Higgs bundles and parabolic connections

5.1. 抛物 Higgs 丛的拉回。 如（3.1）所示，设 Y为一个紧连通黎曼曲面，并且

$$f \,:\, Y \longrightarrow X$$

一个非常值全纯映射。如（3.3）所示，令 $B = f^{-1}(D)_{\rm redo}$ 取一个抛物向量丛 E_* : $= \left(E, \{E_i^j\}, \{\alpha_i^j\}\right)$ 于（X, D）上。选取一个 Higgs 场

$$\theta \in H^0(X, \mathrm{End}_P(E_*) \otimes K_X(D))$$

在其上。因此，$(f^*\theta)\big|_{Y\setminus B}$是全纯向量丛$(f^*E)\big|_{Y\setminus B}$上的一个 Higgs场。

命题 5.1。 Higgs场 $(f^*\theta)\big|_{Y\setminus B}$在 $(f^*E)\big|_{Y\setminus B}$上可延拓为抛物向量丛上的一个 Higgs场 f^*E_* ，该丛构造于第 3节。

证明。首先考虑秩$(E) = 1$的特殊情形。在这种情况下，$\mathrm{End}_P(E_*) = \mathcal{O}_X$，因此

$$\theta \in H^0(X, K_X(D)) .$$

So

$$f^*\theta \in H^0(Y, K_Y \otimes \mathcal{O}_Y(B)) ,$$

因为 $f^*K_X(D) = K_Y(B)$。因此， $f^*\theta$是抛物线丛f^*E_*上的一个 Higgs场。

接下来考虑 E_* 是两个抛物线丛的直和的情形。换言之，

$$E_* = L_* \oplus M_* ,$$

其中， L_* 和 M_* 是带有 D上的抛物结构的抛物线丛。 L_* （分别为 M_*）的底层全纯线丛记为 L（分别为M）。取一个抛物点 $x \in D$。设 L_*（分别为 M_*）在 x处的抛物权重为 α （分别为 β）。取一点 $y \in f^{-1}$（x），并设f 在 y处的重数为 $m \geq 1$ 。

若 $\beta = \alpha$，则容易看出， $f^*\theta$ 可跨过点 y延拓为 y附近抛物丛 f^*E_* 上的Higgs场。

假设

$$\beta > \alpha. \tag{5.1}$$

首先考虑 $\lfloor m\alpha \rfloor = \lfloor m\beta \rfloor$的情形。于是由（5.1）可得

$$m\beta - \lfloor m\beta \rfloor > m\alpha - \lfloor m\alpha \rfloor . \tag{5.2}$$

取一个Higgs场

$$\theta \in H^0(X, \mathrm{End}_P(E_*) \otimes K_X(D))$$

在 $E_* = L_* \oplus M_*$上。考虑同态

$$\theta(x) : L_x \oplus M_x \longrightarrow (L_x \oplus M_x) \otimes K_X(D)_x = L_x \oplus M_x ;$$

回顾（2.6）可知 $K_X(D)_x = \mathbb{C}$。由（5.1）可得，同态的复合

$$M_x \hookrightarrow L_x \oplus M_x \xrightarrow{\theta(x)} L_x \oplus M_x \longrightarrow L_x \tag{5.3}$$

是零同态（见（2.3））。

令 E 表示抛物向量丛f^*E_*所对应的全纯向量丛。根据 f^*E_*的构造，我们有

$$\widetilde{E}_y = (L_x \otimes \mathcal{O}_Y(\lfloor m\alpha \rfloor y)_y) \oplus (M_x \otimes \mathcal{O}_Y(\lfloor m\beta \rfloor y)_y) = (L_x \oplus M_x) \otimes \mathcal{O}_Y(\lfloor m\alpha \rfloor y)_y$$

(回忆一下 $\lfloor m\alpha\rfloor = \lfloor m\beta\rfloor$) 。由于（5.3）中的同态复合为零，因此现在可知， $f^*\theta$ 可跨过点 y延拓为抛物丛 f^*E_* 在 y附近的 Higgs 场。

接下来考虑如下情形:

$$\lfloor m\alpha\rfloor < \lfloor m\beta\rfloor .$$

现在我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{E}_y &= (L_x \otimes \mathcal{O}_Y(\lfloor m\alpha\rfloor y)_y) \oplus (M_x \otimes \mathcal{O}_Y(\lfloor m\beta\rfloor y)_y)\\ &= (L_x \oplus (M_x \otimes \mathcal{O}_Y((\lfloor m\beta\rfloor - \lfloor m\alpha\rfloor)y)_y)) \otimes \mathcal{O}_Y(\lfloor m\alpha\rfloor y)_y .\end{aligned}$$

若 $m\beta - \lfloor m\beta\rfloor > m\alpha - \lfloor m\alpha\rfloor$，则前一种情形的论证仍然适用。另一方面，若

$$m\beta - \lfloor m\beta\rfloor \leq m\alpha - \lfloor m\alpha\rfloor ,$$

则注意到自然同态

$$\mathcal{O}_Y \hookrightarrow \mathcal{O}_Y((\lfloor m\beta\rfloor - \lfloor m\alpha\rfloor)y)$$

使得 y 上纤维之间的同态

$$\mathcal{C} = (\mathcal{O}_Y)_y \longrightarrow (\mathcal{O}_Y((\lfloor m\beta\rfloor - \lfloor m\alpha\rfloor)y)_y$$

消失。由此可知， $f^*\theta$ 可跨越点 y 延拓为抛物丛 f^*E_* 在 y 附近的一个 Higgs 场。

因此，对于定义在 E_* 上的任意 Higgs 场 $\theta \in H^0(X, \mathrm{End}_P(E_*) \otimes K_X(D))$，拉回 $f^*\theta$ 会在 f^*E_* 上产生一个 Higgs 场。

对于高秩抛物丛的情形，上述论证可以直接推广。□

命题5.1 有如下直接推论:

推论5.2. 若 (E_*, θ) 是一个强抛物 Higgs 丛，则 $(f^*E_*, f^*\theta)$ 也是一个强抛物 Higgs 丛。

注5.3。 命题 5.1中所述的扩张显然是将 $f^*\theta$扩张为 f^*E_*上的抛物 Higgs 丛（Y, B）的唯一扩张。

引理 5.4。 X 上的抛物 Higgs 丛（E_*, θ）是半稳定的，当且仅当抛物 Higgs 丛（$f^*E_*, f^*\theta$）是半稳定的。

证明。 引理 3.2（2）的证明经过显然的相应修改后仍然成立。□

取任意一个（E_*, θ）秩为 r 的抛物 Higgs 丛，其定义在 X上。Hitchin 映射 $\mathcal{H}$ 将其映射到 $\bigoplus_{i=1}^r$迹$(\theta^i) \in H^0(X, K_X(D)^{\otimes i})$（见 [Hi]）。我们有自然拉回映射

$$f_i^* : H^0(X, K_X(D)^{\otimes i}) \longrightarrow H^0(Y, K_Y(B)^{\otimes i}) .$$

下面的引理是直接的。

引理 5.5。对于 X 上任意秩为 r 的抛物 Higgs 丛 (E_*, θ),

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{r} f_i^*\right) \circ \mathcal{H}(E_*, \theta) = \mathcal{H}(f^*E_*, f^*\theta)\,,$$

其中 $\mathcal{H}$ 表示 Hitchin 映射。

5.2. 抛物型联络的拉回。取 X 上的全纯向量丛 V，并令

$$\nabla : V \longrightarrow V \otimes K_X(D)$$

是定义在 V 上除 D外有奇点的对数连接。 $f^*\nabla$ 是一个对数连接f^*V，其奇点位于 $B = f^{-1}(D)_{\rm red}$，其中 f是如（3.1）中所述的全纯映射。对于 $x_i \in D$，若

$$\mathrm{Res}(\nabla, x_i) \in \mathrm{End}(V_{x_i})$$

是 ∇ 在 x_i 处的留数，则 $f^*\nabla$ 在任意 $y_{i,\,j} \in f^{-1}(x_i)$ 处的留数为

$$m_{i,j} \cdot \mathrm{Res}(\nabla, x_i) \in \mathrm{End}((f^*V)_{y_{i,j}}) = \mathrm{End}(V_{x_i})\,,$$

其中 $m_{i,\,j}$ 与之前一样，表示 f 在点 $y_{i,\,j}$ 处的重数。

W现在我们将介绍留数的另一项性质，这一性质在此处会很有用。 e.

取一个连通黎曼曲面 M，以及其上的一点 $x \in M$。设 V 是 M 上的一个全纯向量丛，并

$$\nabla : V \longrightarrow V \otimes K_M(x) = V \otimes K_M \otimes \mathcal{O}_M(x)$$

且设其上有一个在 x 处奇异的对数连接。取一个子空间

$$H \subset V_x$$

使得 $\mathrm{Res}(\nabla, x)(H) \subset H$。设 W 是 M 上由以下 M 上相干解析层的短正合序列定义的全纯向量丛:

$$0 \longrightarrow W \longrightarrow V \longrightarrow V_x/H \longrightarrow 0\,.$$

设 $\delta\colon\ W_x \longrightarrow V_x$ 是 x 上纤维之间对应的同态。同态的复合

$$W \longrightarrow W_x \xrightarrow{\delta} V_x$$

~ 记作 δ。我们还有 M 上相干解析层的短正合序列

$$0 \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_M(-x) \longrightarrow W \xrightarrow{\widetilde{\delta}} \widetilde{\delta}(W) \longrightarrow 0\,.$$

令 $\eta\colon\ (V \otimes \mathcal{O}_M(-x))_x \longrightarrow W_x$ 为 x 上相应的纤维同态。因此我们有一个正合列

$$0 \longrightarrow H \otimes (\mathcal{O}_M(-x))_x \longrightarrow (V \otimes \mathcal{O}_M(-x))_x \xrightarrow{\eta} W_x \xrightarrow{\delta} V_x \longrightarrow V_x/H \longrightarrow 0\,. \quad (5.4)$$

∇ 上的对数连接 V在 $V \otimes \mathcal{O}_M(-x)$上诱导出一个对数连接；这个定义在 $V \otimes \mathcal{O}_M(-x)$上的对数连接记作 ∇'。我们有

$$\mathrm{Res}(\nabla', x) = \mathrm{Res}(\nabla, x) + \mathrm{Id}_{V_x}\,;$$

注意，End($(V \otimes \mathcal{O}_M(-x))_x$) $=$ End(V_x)。因此子空间

$$H \otimes (\mathcal{O}_M(-x))_x \hookrightarrow (V \otimes \mathcal{O}_M(-x))_x$$

在 (5.4) 中的像由 Res(∇', x) 保持；回忆一下，Res(∇, x)(H) $\subset$ H。 ∇ 上的对数连接在 V 上诱导出一个对数连接；这个诱导的对数连接在 W上记作 ∇^W。留数 Res(∇^W, x) 保持 (5.4) 中 η 的像，而 Res(∇^W, x) 在 η 的像上的限制与 Res(∇', x) 所诱导的自同态一致（如上所述， $H \otimes (\mathcal{O}_M(-x))_x$ 由 Res(∇', x) 保持），因此 Res(∇', x) 在 η的像上诱导出一个自同态。此外，Res(∇^W, x) 在 (5.4) 中 δ 的像上的作用，与 Res(∇, x) 在 S上的作用一致。

设 ∇ 是定义在 X上的抛物向量丛 E_* 上的抛物联络。考虑在（f^*E）$\big|_{Y\setminus B}$上通过映射 ∇将连接 f 按（3.1）拉回而得到的全纯联络，其中 B 在（3.3）中定义。事实上，这个连接可以延拓为抛物向量丛 f^*E_*上的连接。这一点利用抛物向量丛 f^*E_* 的构造以及上述对数连接留数的性质即可直接验证。此外，这个延拓是唯一的（如备注5.3所述）。

现在我们可以证明以下结果：

定理 5.6。任取 $f : Y \longrightarrow X$ 如（3.1）所示。定义在 X 上的抛物向量丛 E_* 是多稳定的，当且仅当定义在 Y 上的抛物向量丛 f^*E_* 是多稳定的。

证明。抛物自同态丛 End$_P(E_*)$ 在 (2.3) 中具有由 E_* 的抛物结构诱导的抛物结构。事实上，抛物丛 End$_P(E_*)_*$ 是抛物张量积 $E_* \otimes E_*^*$，其中 E_*^*是 E_* 的抛物对偶。

可以证明，抛物向量丛 E_* 是多稳定的，当且仅当 End$_P(E_*)$ 是多稳定的。首先假设 E_* 是多稳定的。于是 E_* 具有唯一的酉射影平坦复联络 [Biq]（另见 [MS]）。由此联络在$E_* \otimes E_*^*$ 上诱导的连接 E_* 是酉平坦的。因此 $E_* \otimes E_*^* = \mathrm{End}_P(E_*)_*$是多稳定的。

接下来假设 End$_P(E_*)_*$ 是多稳定的。我们先证明 E_* 是半稳定的。若E_* 不是半稳定的，令 $F_* \subset E_*$ 为 E_* 的 Harder–Narasimhan滤过中的第一个非零项（因此 F_* 是 E_*的极大半稳定子层）。现在，抛物子丛

$$\mathrm{Hom}(E_*, F_*)_* = F_* \otimes E_*^* \subset E_* \otimes E_*^* = \mathrm{End}(E_*)_*$$

与 End 的半稳定性条件矛盾$_P(E_*)_*$。因此 E_* 是半稳定的。令 $V_* \subset E_*$ 为抛物半稳定丛的唯一极大抛物多稳定子丛，且具有相同的抛物斜率 E_* [HL，第24页，引理1.5。5], 因此 V_* 是 E_*的底层。假设 $V* \neq E_*$。由于 End$_P(E_*)_*$ 是多稳定的，其子丛

$$\mathrm{Hom}(E_*, V_*)_* = V_* \otimes E_*^* \subset E_* \otimes E_*^* = \mathrm{End}(E_*)_*$$

也为多稳定。取一个子丛 $W_* \subset \mathrm{End}(E_*)_*$，使得 $\mathrm{End}(E_*)_* = \mathrm{Hom}(E_*, V_*)_* \oplus W_*$。现在，$W_*(V_*)$ 是 E_* 的多稳定子丛，这与底层 V_* 的极大性矛盾。因此，我们得出结论：E_* 是多稳定的。

为证明该定理，首先假设 E_* 是多稳定的。如上所示，这意味着 $\mathrm{End}_P(E_*)_*$ 带有酉平坦全纯联络。另一方面，我们有

$$f^*\mathrm{End}_P(E_*)_* \,=\, \mathrm{End}_P(f^*E_*)\,,$$

因为拉回运算与抛物丛上的张量积、直和及对偶运算相容。因此，$\mathrm{End}_P(E_*)_*$ 上的酉平坦全纯联络拉回为 $\mathrm{End}_P(f^*E_*)_*$ 上的酉平坦全纯联络。这意味着 $\mathrm{End}_P(f^*E_*)_*$ 是多稳定的。因此 f^*E_* 是多稳定的。

为证明逆命题，假设 f^*E_* 是多稳定的。如果 f 不是（分歧）伽罗瓦映射，则选取另一个非恒定全纯满射 $g\colon M \longrightarrow Y$，使得 $f\circ g$ 是（分歧）伽罗瓦映射。由于 f^*E_* 是多稳定的，我们知道 $g^*f^*E_* = (f\circ g)^*E_*$ 是多稳定的。令 ∇ 表示 $(f\circ g)^*E_*$ 上唯一的酉射影平坦复联络。注意，∇ 在伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(f\circ g)$ 对 $(f\circ g)^*E_*$ 的自然作用下保持不变。

由于 $(f\circ g)^*E_*$ 是半稳定的，根据引理 3.2（2），我们知道 E_* 是半稳定的。令

$$F_* \subset E_*$$

表示底层，即具有相同抛物斜率的唯一极大多稳定子丛；参见 [HL，第 23 页，引理 1.5。5]。考虑抛物子丛

$$(f\circ g)^*F_* \subset (f\circ g)^*E_*\,;$$

由于 F_* 是多稳定的，所以它也是多稳定的。令 $G_* \subset (f\circ g)^*E_*$ 表示相对于 $(f\circ g)^*F_*$ 的厄米结构在 $(f\circ g)^*E_*$ 上的正交补（与之对应的是唯一的酉射影平坦复联络）。

由于 $(f\circ g)^*F_*$ 和 ∇ 都在伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(f\circ g)$对 $(f\circ g)^*E_*$的自然作用下保持不变，我们得出 $G_* \subset (f\circ g)^*E_*$ 在伽罗瓦群 $\mathrm{Gal}(f\circ g)$对 $(f\circ g)^*E_*$的自然作用下也保持不变。因此，存在一个抛物子丛 $G'_* \subset E_*$，使得 $(f\circ g)^*E_*$的两个抛物子丛 G_* 和 $(f\circ g)^*G'_*$ 重合。现在我们有

$$E_* \,=\, F_* \oplus G'_* \tag{5.5}$$

因为 $(f\circ g)^*E_* = (f\circ g)^*F_* \oplus G_*$。但是（5.5）与以下事实矛盾：$F_*$ 是 E_* 中具有相同抛物斜率的唯一极大多稳定子丛。这是因为 F_* 与 G'_* 的底层（如果 G'_* 非零）的直和也是多稳定的。因此，我们得出结论：E_* 是多稳定的。□

下面的命题利用定理 5.6 得证。

命题 5.7。取 ϕ 如（4.1）中所述。对于 E_* 上的任意多稳定抛物丛 X，抛物丛 ϕ_*E_* 上的 Z 是多稳定的。

证明。证明与命题 4.3 中的证明完全相同，只需将半稳定性替换为多稳定性。□

6. Direct image of parabolic Higgs bundles and connections

6.1. 抛物 Higgs 丛的直接像。取一个非常值全纯映射ϕ： $X \longrightarrow Z$ 在紧致连通黎曼曲面之间（如（4.1）中）。如（4.2）中所述，$R \subset X$ 是 ϕ的分歧轨迹。令

$$\widehat{R} = \phi(R)$$

为其在 Z 中的像。令 $\phi^{-1}(\widehat{R})_{\rm red}$ 为 R 的约化逆像，因此有 $R \subset \phi^{-1}(\widehat{R})_{\rm red}$。

可以证明存在一个相干解析层之间的自然单同态

$$\Phi : \phi_* K_X \longrightarrow K_Z \otimes \mathcal{O}_Z(\widehat{R}) \otimes \phi_* \mathcal{O}_X \tag{6.1}$$

其中 i $\widehat{}$在补集 $Z \setminus R$ 上是一个同构。首先注意到

$$\phi^*(K_Z \otimes \mathcal{O}_Z(\widehat{R})) = K_X \otimes \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(\widehat{R})_{\rm red})\,.$$

因此，投影公式（见 [Ha，第 124 页，例 5.1(d)]）表明

$$\phi_*(K_X \otimes \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(\widehat{R})_{\rm red})) = K_Z \otimes \mathcal{O}_Z(\widehat{R}) \otimes \phi_* \mathcal{O}_X\,. \tag{6.2}$$

但 $\phi_* K_X \subset \phi_*(K_X \otimes \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(\widehat{R})_{\rm red}))$ 由于 $K_X \subset K_X \otimes \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(\widehat{R})_{\rm red})$，因此由式 (6.2) 得到一个同态 Φ，如式 (6.1) 所示。由于

$$(\phi_* K_X)\big|_{Z \setminus \widehat{R}} = (\phi_*(K_X \otimes \mathcal{O}_X(\phi^{-1}(\widehat{R})_{\rm red})))\big|_{Z \setminus \widehat{R}},$$

$\widehat{}$同态 Φ 在 $Z \setminus R$ 上是一个同构。

设 E_* 是 X 上的一个抛物向量丛，其抛物结构定义在 D 上。取一个抛物 Higgs 场

$$\theta : E \longrightarrow E \otimes K_X(D)$$

在 E_*上。它的直接像是一个全纯同态

$$\phi_*\theta : \phi_* E \longrightarrow \phi_*(E \otimes K_X(D)). \tag{6.3}$$

显然，我们有 $D \subset \phi^{-1}(\Delta)_{\rm red}$，其中 $\Delta \subset Z$ 是（4.3）中的除子。因此 $K_X(D) \subset K_X(\phi^{-1}(\Delta)_{\rm red})$，从而可得

$$E \otimes K_X(D) \subset E \otimes K_X(\phi^{-1}(\Delta)_{\rm red}) = E \otimes \phi^* K_Z(\Delta)\,. \tag{6.4}$$

因此，由投影公式可得

$$\phi_*(E \otimes K_X(D)) \subset (\phi_* E) \otimes K_Z(\Delta)\,. \tag{6.5}$$

因此，$\phi_*\theta$ 在（6.3）中给出了一个全纯同态

$$\phi_*\theta : \phi_* E \longrightarrow (\phi_* E) \otimes K_Z(\Delta)\,. \tag{6.6}$$

不难验证 $\phi_*\theta$ 在（6.6）中是抛物向量丛 $\phi_* E_*$上的抛物 Higgs 场。

引理 6.1. 若 ϕ 是一个（分歧）伽罗瓦态射，则对于 X 上的任意抛物 Higgs 丛（E_*, θ），拉回的强抛物 Higgs 丛（$\phi^*(\phi_* E_*)_*$, $\phi^*\phi_*\theta$）同构于以下直和

$$\bigoplus_{\gamma\in \mathrm{Gal}(\phi)} (\gamma^* E_*,\, \gamma^*\theta)$$

抛物 Higgs 丛。

证明。 由命题 4.2(2) 可知

$$\phi^*(\phi_* E_*)_* \;=\; \bigoplus_{\gamma\in \mathrm{Gal}(\phi)} \gamma^* E_*.$$

在 $X \setminus \phi^{-1}(\Delta)_{\mathrm{red}}$ (见 (4.3))，有

$$(\phi^*\phi_*\theta)\big|_{X\setminus\phi^{-1}(\Delta)_{\mathrm{red}}} \;=\; \bigoplus_{\gamma\in \mathrm{Gal}(\phi)} (\gamma^*\theta)\big|_{X\setminus\phi^{-1}(\Delta)_{\mathrm{red}}}.$$

因此，$(\phi^*(\phi_* E_*)_*,\, \phi^*\phi_*\theta)$ 与 $\bigoplus_{\gamma\in \mathrm{Gal}(\phi)}(\gamma^* E_*,\, \gamma^*\theta)$ 同构。 □

命题 6.2. X 上的抛物 Higgs 丛 $(E_*,\, \theta)$ 是半稳定的，当且仅当 $(\phi_* E_*,\, \phi_*\theta)$ 是半稳定的。

证明。 鉴于引理 5.4 和引理 6.1，命题 4.3 的证明经过显然的修改后即可给出证明。 □

存在一个自然同态

$$P \,:\, \phi_*\mathcal{O}_X \;\longrightarrow\; \mathcal{O}_Z$$

它只是将 $\phi^{-1}(U)$ 上的任意全纯函数 β （其中 $U \subset Z$ 是开子集）映射为 U 上的函数，该函数在任意 $u \in U$ 处的值为 $\sum_{x\in\phi^{-1}(u)} \beta(x) \in \mathbb{C}$；这里，$\phi^{-1}(u)$ 表示带重数的原像。因此，对于 Z 上的任意全纯向量丛 V，我们有一个自然同态

$$\phi_*\phi^*V \;=\; V\otimes \phi_*\mathcal{O}_X \xrightarrow{P} V\otimes \mathcal{O}_Z \;=\; V\,. \tag{6.7}$$

考虑 Δ在（4.3）中的情形。回忆

$$K_X(D) \,\subset\, \phi^* K_Z(\Delta)$$

（见（6.4））。因此 $K_X(D)^{\otimes i} \subset \phi^* K_Z(\Delta)^{\otimes i}$ 对所有 $i \geq 1$均成立。因此，由（6.7）我们得到一个同态

$$\phi_*(K_X(D)^{\otimes i}) \,\subset\, \phi_*(\phi^* K_Z(\Delta)^{\otimes i}) \;\longrightarrow\; K_Z(\Delta)^{\otimes i}\,.$$

Let

$$\Psi_i \;:\; \phi_*(K_X(D)^{\otimes i}) \;\longrightarrow\; K_Z(\Delta)^{\otimes i}$$

是此同态。

引理 6.3. 对于 X 上任意秩为 r 的抛物 Higgs 丛 (E_*, θ),

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{r} \Psi_i\right) \circ \mathcal{H}(E_*, \theta) = \mathcal{H}(f_*E_*, f_*\theta),$$

其中 $\mathcal{H}$ 是引理中的 Hitchin 映射5.5。

证明。由上述 Ψ_i 的构造以及 Hitchin 映射的定义可立即得到。□

6.2. 抛物联络的直接像。设

$$\nabla : E \longrightarrow E \otimes K_X(D)$$

是 E_*上的一个联络。映射 ϕ 下 ∇ 的直接像给出一个全纯微分算子

$$\phi_*\nabla : \phi_*E \longrightarrow \phi_*(E \otimes K_X(D)). \tag{6.8}$$

现在使用（6.5 ），（6.8）中的微分算子给出了一个全纯微分算子 r

$$\phi_*\nabla : \phi_*E \longrightarrow (\phi_*E) \otimes K_Z(\Delta). \tag{6.9}$$

容易验证，$\phi_*\nabla$ （6.9）中的微分算子在第 ϕ_*E 节构造的抛物向量丛上定义了一个连接 4。

命题 6.4. X 上的抛物联络（E_*, ∇）是半稳定的，当且仅当（$\phi_*E_*, \phi_*\nabla$）是半稳定的。

证明。证明与命题 4.3 和命题 6.类似。 2. □

7. Compatibility with nonabelian Hodge theory

首先回顾 Simpson 在非紧非阿贝尔霍奇对应中使用的抛物丛左连续滤过形式 [Si]。给定一个抛物丛 $(E, \{E_i^j\}, \{\alpha_i^j\})$，我们可以定义一组向量丛 E_i^α对每个i 以及 $\alpha \in \mathbb{R}$，定义如下:

- 若 $\alpha = \alpha_i^j$，则 $E_i^{\alpha_i^j}$ 是 E 的子层，且满足短正合序列

$$0 \longrightarrow E_i^{\alpha_i^j} \longrightarrow E \longrightarrow E_x/E_i^j \longrightarrow 0.$$

- 若 $\alpha_i^j \le \alpha < \alpha_i^{j+1}$ 或 $\alpha_i^n \le \alpha < \alpha_i^1 + 1$。则 $E_i^\alpha = E_i^{\alpha_i^j}$。
- $E_i^{\alpha+1} = E_i^\alpha(-x_i)$。

最后一个等式也可用于将 E_i^α 的定义推广至 $\alpha < 0$。若

$$j_i : U_i = X\backslash\{x_i\} \hookrightarrow X$$

是将抛物点补集包含到 X 中的映射 X，那么显然，向量丛 E_i^α 为拟射影层提供了左连续递减滤过

$$\bigcup_{\alpha\in\mathbb{R}} E_i^\alpha = (j_i)_*E|_{U_i} =: E(\infty \cdot x_i).$$

在此 f 下　形式体系中，抛物 Higgs 丛可以描述为一个 $\mathcal{O}_X$-线性映射

$$\theta : E \longrightarrow E \otimes K_X(D)$$

使得

$$\theta(E_i^\alpha) \subseteq E_i^\alpha \otimes K_X(D) \quad \forall \ \alpha \in \mathbb{R}$$

并且抛物联络可以描述为一个映射

$$\nabla : E \longrightarrow E \otimes K_X(D)$$

满足莱布尼茨法则（2.5），并满足条件

$$\nabla(E_i^\alpha) \subseteq E_i^\alpha \otimes K_X(D) \quad \forall \ \alpha \in \mathbb{R}.$$

另一方面，给定一个全纯向量丛 E 在 X 上以及一个抛物点$x_i \in D$，假设 $E|_{X\setminus D}$ 赋予了一个可接受度量 K [Si], ，其度量联络的曲率 R_K 满足以下界限（在 K 附近 x_i）：

$$|R_K| \leq f + \frac{C}{r^2(\log r)^2},$$

其中 r 是从 x_i 到 f 的某个 L^p 函数。于是，根据 [Si，命题 3.1], 度量 K 诱导出 $E($ $\infty \cdot x_i$的子层滤过，如下所示：E_i^α 是这样的子层：它在 E 上与 $U_i = X\setminus\{x_i\}$一致，但其在 x_i处的茎由以下截面 e 构成： E 这些截面定义在 x_i 周围的穿孔圆盘上，并满足增长条件

$$|e|_K \leq Cr^{\alpha-\varepsilon} \quad \forall \ \varepsilon > 0.$$

当度量 K 是温和调和丛的度量时，这些层 E_i^α与相应抛物 Higgs 丛或抛物联络的抛物滤过一致。以下遵循 [Si], 回顾，调和丛是由以下对象组成的四元组（$\mathcal{E}$， $\mathcal{D}_\theta$, $\mathcal{D}_\nabla$， K）：

- 一个 $\mathcal{C}^\infty$-向量丛 $\mathcal{E}$ 在 $U = X\setminus D$上,
- 微分算子 $\mathcal{D}_\theta, \mathcal{D}_\nabla$： $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega_U^{1,1}$, ，以及
- 一个厄米度量 K 在 $\mathcal{E}$上

满足以下条件:

(1) $\mathcal{D}_\theta$ 分解为 (0, 1) 部分和 (1, 0) 部分，即 $\mathcal{D}_\theta = \overline{\partial}_\theta + \theta$，其中 $\overline{\partial}_\theta$ 是 $\mathcal{E}$ 上的全纯结构， θ 是 $(\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)$ 上的全纯希格斯场。(2) $\mathcal{D}_\nabla$ 分解为 (0, 1) 部分和 (1, 0) 部分，即 $\mathcal{D}_\nabla = \overline{\partial}_\nabla + \nabla$，其中 $\overline{\partial}_\nabla$ 是 $\mathcal{E}$ 上的全纯结构， ∇ 是 $(\mathcal{E}, \overline{\partial}_\nabla)$ 上的全纯联络。(3) 此外， $\overline{\partial}_\nabla = \overline{\partial}_\theta + \overline{\theta}$ 和 $\nabla = \partial_\theta + \overline{\theta}$，其中

$$(\partial_\theta u, v)_K + (u, \overline{\partial}_\theta v)_K = \partial(u, v)_K$$

$$(u, \theta v) = (\overline{\theta} u, v)$$

对于 $\mathcal{E}$的每一对局部截面 u 和 v 。

（4）度量的曲率和伪曲率为零：$\mathcal{D}_\theta^2 = \mathcal{D}_\nabla^2 = 0$。

等价地， [Si，§ 1]，调和丛的数据等价于给出基本群的一个表示 $\pi_1(U) \longrightarrow \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})$，以及一个等变的~调和映射 $U \longrightarrow \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})/\mathrm{U}(r)$，其中 U 是 $U = X\backslash D$ 的万有覆盖，且r 是丛的秩。

如果Higgs场（或等价地，连接）的奇点至多为对数型，则称调和丛是温和的。在这种情况下，度量 K 是可接受的 [Si，定理 4]。

给定一个温和调和丛（$\mathcal{E}, \mathcal{D}_\theta, \mathcal{D}_\nabla, K$），令 $E^\alpha_{\theta,\, i}$ 对于 $\alpha \in \mathbb{R}$ 是一族以 $\mathbb{R}$ 为指标的层，它们由将前述构造应用于全纯丛（$\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta$）以及点 x_i 附近的度量 K 得到。类似地，令 $E^\alpha_{\nabla,\, i}$ 为将前述构造应用于全纯丛（$\mathcal{E}, \overline{\partial}_\nabla$）以及 x_i 附近的度量 K 所得到的层。然后，分别将对所有抛物点的向量丛 $E^0_{\theta,\, i}$ 和 $E^0_{\nabla,\, i}$ 粘合起来，定义由此得到的全纯向量丛 E_θ 和 E_∇。

根据 Simpson 的对应[Si，第755页，主定理]，，温和调和丛范畴、稳定抛物 Higgs 丛直和范畴与稳定抛物联络直和范畴之间存在等价。特别地，对于每个代数稳定抛物 Higgs 丛（E，E_*，θ），若 $E = (\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)$，则存在一个调和度量 K 以及定义在E'，E'_*，∇）上的稳定抛物联络 $E' = (\mathcal{E}, \overline{\partial}_\nabla)$，使得（$\mathcal{E}|_U$，$\overline{\partial}_\theta + \theta$，$\overline{\partial}_\nabla + \nabla$，$K$）是一个温和调和丛。类似地，任意抛物联络都可扩张为一个相容的温和调和丛。

我们来证明，这些构造与前文所述的拉回和直接像相容。

定理 7.1. 设（X, D）是一个标记曲线。设 $f\colon Y \longrightarrow X$ 是黎曼曲面之间的一个非常值全纯映射，且 $B = f^{-1}(D)_{\mathrm{red}} \subset Y$。设（$E, E_*, \theta$）是一个抛物 Higgs 丛，而（$E'$，$E'_*, \nabla$）是定义在（$X, D$）上的抛物联络，二者由同一个温和调和丛（$\mathcal{E}, \mathcal{D}_\theta, \mathcal{D}_\nabla, K$）诱导。则拉回（$f^*\mathcal{E}, f^*\mathcal{D}_\theta, f^*\mathcal{D}_\nabla, f^*K$）是定义在（$Y, B$）上的温和调和丛，并给出第5节中定义的拉回$f^*$（$E, E_*, \theta$）与 f^*（E', E'_*, ∇）之间的对应。

证明。记 $U = X\backslash D$ 和 $V = Y\backslash B$。令

$$\rho : \pi_1(U) \longrightarrow \mathrm{GL}(r,\mathbb{C}) \quad \text{and} \quad \widetilde{K} : \widetilde{U} \longrightarrow \mathrm{GL}(r,\mathbb{C})/\mathrm{U}(r)$$

它们分别为与 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}_\theta, \mathcal{D}_\nabla, K)$ 相关联的基本群表示和到对称空间的调和映射。映射 f 诱导出一个同态~ ~ ~$\pi_1(f)\colon \pi_1(V) \longrightarrow \pi_1(U)$，以及一个全纯映射 $f\colon V \longrightarrow U$。于是复合映射$\rho \circ \pi_1(f)\colon \pi_1(V) \longrightarrow \mathrm{GL}(r,\mathbb{R})$ 是 $\pi_1(V)$ 的一个表示；又由于~ ~ ~调和映射与全纯映射的复合仍为调和映射，映射 $K \circ f\colon V \longrightarrow$~ ~ $\mathrm{GL}(r,\mathbb{C})/\mathrm{U}(r)$ 是调和的。由构造显然可知，数对 $(\rho\circ\pi_1(f)\ \ K\circ f)$ 对应于拉回 $(f^*\mathcal{E}, f^*\mathcal{D}_\theta, f^*\mathcal{D}_\nabla, f^*K)$，因此它是一个调和丛。

若 $\mathcal{D}_\theta = \overline{\partial}_\theta + \theta$ 和 $\mathcal{D}_\nabla = \overline{\partial}_\nabla + \nabla$ 分别是原调和丛算子的 (0, 1) 部分和 (1, 0) 部分的分解，则显然

$$f^*\mathcal{D}_\theta = f^*\overline{\partial}_\theta + f^*\theta\,, \qquad f^*\mathcal{D}_\nabla = f^*\overline{\partial}_\nabla + f^*\nabla\,,$$

SO

$$(f^*\mathcal{E},\, f^*\overline{\partial}_\theta) \,=\, f^*(\mathcal{E},\, \overline{\partial}_\theta)\,, \qquad (f^*\mathcal{E},\, f^*\overline{\partial}_\nabla) \,=\, f^*(\mathcal{E},\, \overline{\partial}_\nabla)\,.$$

此外，根据 [Si，定理 2], 度量 f^*K 对 $\overline{\partial}_\theta$是可接受的，因此我们可以分析度量 K 在向量丛 $f^*(\mathcal{E},\, \overline{\partial}_\theta)$ 上诱导的滤过（它对$\overline{\partial}_\nabla$ 也可接受，且关于连接的计算类似）在重数为 $m_{i,\,j}$的点 $y_{i,\,j} \in f^{-1}(x_i) \subset B$ 处的情形。设 x 是 x_i附近的一个局部坐标， y 是 $y_{i,\,j}$ 附近的一个局部坐标，使得映射 f 在 $y_{i,\,j}$附近局部表示为$x \,=\, y^{m_{i,\,j}}$。于是， $f^*(\mathcal{E},\, \overline{\partial}_\theta)$ 在 $y_{i,\,j}$ 附近的穿孔圆盘上的任意局部截面 e' 都可以表示为

$$e' \,=\, \sum_{k=-\infty}^{\infty} y^k \cdot f^* e_k\,,$$

其中， e_k 是定义在 x_i的去心邻域上的$(\mathcal{E},\, \overline{\partial}_\theta)$的局部截面。令 r_Y表示y_i周围的半径，$_j$ 并令 r_X 表示 x_i周围的半径。于是

$$|e'|_{f^*K} \,\leq\, \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_Y^k |e_k|_K\,.$$

特别地，截面 e' 满足

$$|e'|_{f^*K} \,\leq\, Cr_Y^{\alpha-\varepsilon} \,=\, Cr_X^{\frac{\alpha-\varepsilon}{m_{i,j}}} \,=\, Cr_X^{\frac{\alpha}{m_{i,j}}-\varepsilon'}$$

对应于形如$e' \,=\, \sum_k y^k \cdot f^* e_k$的截面，使得对每个 k都有 $r_Y^k |e_k|_K \,\leq\, Cr_X^{\frac{\alpha}{m}-\varepsilon'}$。我们有

$$\left\{ r_Y^k |e_k|_K \,\leq\, Cr_X^{\frac{\alpha}{m_{i,j}}-\varepsilon'} \;\; \forall\; \varepsilon' \,>\, 0 \right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ |e_k|_K \,\leq\, Cr_X^{\frac{\alpha-k}{m_{i,j}}-\varepsilon'} \;\; \forall \varepsilon' \,>\, 0 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{ e_k \,\in\, (\mathcal{E},\, \overline{\partial}_\theta)_i^{\frac{\alpha-k}{m_{i,j}}} \right\}.$$

因此，我们得到:

$$\left(f^*(\mathcal{E},\, \overline{\partial}_\theta)\right)^{\alpha}_{y_{i,j}} \,=\, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{O}_Y(-ky_{i,j}) \otimes f^*(\mathcal{E},\, \overline{\partial}_\theta)_i^{\frac{\alpha-k}{m_{i,j}}}\,.$$

特别地，滤过的跳跃恰好发生在满足 α 的点处

$$\frac{\alpha-k}{m_{i,j}} - \alpha_i^t \in \mathbb{Z} \;\text{ for some } k \in \mathbb{Z}\,.$$

简化后，这些点的形式为 α

$$\alpha = m_{i,j}\alpha_i^t + k, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

特别地，0 和 1 之间滤过的跳跃集合为

$$\left\{ m_{i,j}\alpha_i^t - \lfloor m_{i,j}\alpha_i^t \rfloor \right\}$$

以及向量丛 $f^*(\mathcal{E},\, \overline{\partial}_\theta)$ 到 $y_{i,\,j}$ 的局部邻域上的延拓，由 K 诱导，因而同构于

$$\left(f^*(\mathcal{E},\, \overline{\partial}_\theta)\right)^{0}_{y_{i,j}} \,=\, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{O}_Y(-ky_{i,j}) \otimes f^* \left((\mathcal{E},\, \overline{\partial}_\theta)_{x_i}^{-\frac{k}{m_{i,j}}} \right)$$

$$= \sum_{t=1}^{n_i} \mathcal{O}_Y(\lfloor m_{i,j}\alpha_i^t \rfloor y_{i,j}) \otimes f^*\left((\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)_{x_i}^{\alpha_i^t}\right),$$

这是由于以下恒等式，它们是 1-周期性和滤过左连续性的推论：

$$\mathcal{O}_Y(-(k+m_{i,j})y_{i,j}) \otimes f^*\left((\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)_{x_i}^{-\frac{k+m_{i,j}}{m_{i,j}}}\right) = \mathcal{O}_Y(-(k+m_{i,j})y_{i,j}) \otimes f^*\left((\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)_{x_i}^{-\frac{k}{m_{i,j}}-1}\right)$$

$$= \mathcal{O}_Y(-(k+m_{i,j})y_{i,j}) \otimes f^*\left((\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)_{x_i}^{-\frac{k}{m_{i,j}}}(x_i)\right)$$

$$= \mathcal{O}_Y(-(k+m_{i,j})y_{i,j}) \otimes f^*\left((\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)_{x_i}^{-\frac{k}{m_{i,j}}}\right) \otimes \mathcal{O}_Y(m_{i,j}y_{i,j})$$

$$= \mathcal{O}_Y(-ky_{i,j}) \otimes f^*\left((\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)_{x_i}^{-\frac{k}{m_{i,j}}}\right)$$

并且，如果 $\frac{k}{m_{i,j}} \le \alpha_i^a < \ldots < \alpha_i^b < \frac{k+1}{m_{i,j}}$，那么

$$\mathcal{O}_Y(-ky_{i,j}) \otimes (\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)_{x_i}^{\frac{k}{m_{i,j}}} = \mathcal{O}_Y(-ky_{i,j}) \otimes (\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)_{x_i}^{\alpha_i^a}$$

$$= \mathcal{O}_Y(-ky_{i,j}) \otimes \sum_{t=a}^{b} (\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)_{x_i}^{\alpha_i^t} = \sum_{t=a}^{b} \mathcal{O}_Y(-ky_{i,j}) \otimes (\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)_{x_i}^{\alpha_i^t}.$$

将滤过丛分解为抛物线丛之和后，很容易验证该丛与在 y_i,$_j$ 的某个邻域上拉回的抛物丛 $f^*(E, E_*)$（定义见 (3.4) 和 (3.7)）一致。综合以上结果，我们得到如下结论：由 K 在 (Y, B) 上诱导的抛物丛，作为 $f^*(\mathcal{E}, \overline{\partial}_\theta)$ 的扩张，恰好是第3节中描述的拉回抛物丛 f^*E_*。与连接相关的全纯丛的结果类似：我们得到，由 K 诱导的 $f^*(\mathcal{E}, \overline{\partial}_\nabla)$ 在 (Y, K) 上扩张为抛物丛后，恰好是 $f^*(E', E'_*)$。

根据命题 5.1，全纯Higgs丛 $(f^*\mathcal{E}, f^*\overline{\partial}_\theta, f^*\theta)$ 可延拓为 Y 上抛物向量丛 f^*E_* 上的 Higgs场。由于根据注5.3，这种延拓是唯一的，因此由 $f^*(\mathcal{E}, \mathcal{D}_\theta, \mathcal{D}_\nabla, K)$ 诱导的滤过 Higgs 束必定是第 5 节所述的拉回 $f^*(E, E_*, \theta)$。此外，由于 $f^*\theta$ 具有正则奇点，调和丛 $(f^*\mathcal{E}, f^*\overline{\partial}_\theta, f^*\theta)$ 是温和的。

类似地，第 $f^*\nabla$ 5.2 节所述的抛物联络 f^*E_* 是全纯联络 $(f^*\mathcal{E}, f^*\overline{\partial}_\nabla, f^*\nabla)$ 在□上的唯一延拓。

我们可以验证，第 5.2 节中的构造所规定的留数图，通过 [Si，定理 7] 对应于与 $f^*(E, E_*, \theta)$ 相关联的留数图。

令 $y_{i,j} \in f^{-1}(x_i)$ 是 Y中重数为 $m_{i,j}$ 的一个抛物点。固定 Y 在 y_i附近的局部全纯坐标 $y_{,j}$，以及 X在 x_i附近的局部全纯坐标函数 x，使得 $x = y^{m_{i,j}}$。假设在 x附近的局部区域内，Higgs场 θ 可写为 $\theta = \frac{A}{x}dx$，其中 A为某个矩阵，而 ∇ 可写为 $\nabla = \frac{A'}{x}dx + d$，其中 A'为某个矩阵。计算 θ 或 ∇ 的留数映射，等同于计算 $x\frac{\partial}{\partial x}$的作用；显然，这给出 $\mathrm{Res}(\theta, x_i) = A$以及 $\mathrm{Res}(\nabla, x_i) = A'$。

观察 注意，对于每个形如 $y^k(f^*e)(y) = y^k e(y^{m_{i,j}})$ 的局部截面，我们有

$$y\frac{\partial}{\partial y}f^*e = y\frac{\partial}{\partial y}e(y^{m_{i,j}}) = m_{i,j}y^{m_{i,j}}\frac{\partial}{\partial x}e(x) = m_{i,j}x\frac{\partial}{\partial x}e(x). \tag{7.1}$$

计算 $f^*\theta$和 $f^*\nabla$的留数，进而可化为计算 $y\frac{\partial}{\partial y}$对形如 $y^{-k}(f^*e_k)(y) = y^{-k}e_k(y^{m_{i,j}})$ 的局部截面的作用。对于 $\mathcal{O}_Y$-线性算子 θ，这又等价于计算 $mx\frac{\partial}{\partial x}$ 对相应局部截面e_k 在 X上的作用。因此，

$$\mathrm{Res}(f^*\theta, y_{i,j}) = m_{i,j}\mathrm{Res}(\theta, x_i) = m_{i,j}A.$$

对于抛物联络 $f^*\nabla$ ，我们有

$$\nabla_{y\frac{\partial}{\partial y}}(y^{-k}f^*e_k) = y^{-k}\nabla_{y\frac{\partial}{\partial y}}(f^*e_k) - ky^k f^*e_k.$$

因此，对于每个 $e \in E_i^{\alpha_i^l}$，我们有

$$\mathrm{Res}(f^*\nabla, y_{i,j})(y^{-\lfloor m_{i,j}\alpha_i^l\rfloor}f^*e|_{y_{i,j}}) = \left(m_{i,j}A' - \lfloor m_{i,j}\alpha_i^l\rfloor I\right)(y^{-\lfloor m_{i,j}\alpha_i^l\rfloor}f^*e|_{y_{i,j}}).$$

我们知道，特征值 A和 A' 之间的关系由非阿贝尔霍奇对应 [Si], 给出，因此可以列出表 1 ，总结拉回抛物 Higgs 丛和抛物联络时，跳跃和特征值的变化。

	(E, E_*, θ)	(E', E'_*, ∇)	$f^*(E, E_*, \theta)$	$f^*(E', E'_*, \nabla)$
跳跃	α	$\alpha - 2b$	$m_{i,j}\alpha$	$m_{i,j}(\alpha - 2b)$
特征值	$b + ci$	$\alpha + 2ci$	$m_{i,j}b + m_{i,j}ci$	$m_{i,j}\alpha + 2m_{i,j}ci$

TABLE 1. 非阿贝尔霍奇理论和拉回下，相应抛物 Higgs 丛与联络的跳跃和特征值之间的关系。

与抛物 Higgs 丛和联络的 1-周期条件一致，表格按照权重 α （模 $\mathbb{Z}$）给出。如果在连接的跳跃处将 α 替换为 $\alpha + k$ ，则相应特征值也从 $b' + c'i$ 替换为$b' + k + c'i$。

备注7.2。 观察此表可知，拉回会将强抛物 Higgs 丛（$b = c = 0$）映为强抛物 Higgs 丛。在联络方面，这对应于拉回将留数的特征值与权重相同的联络映为具有相同性质的联络。由于这种对应还保留了留数作用在相对于滤过的分次向量空间上的幂零部分，这意味着拉回保留了定义 2.1 之后所述的“留数”条件。

定理 7.3。设 (X, D) 为一条标记曲线。设 $\phi : X \longrightarrow Z$ 为紧黎曼曲面之间的非常值全纯映射，且 $\Delta \subset Z$ 表示分歧点与抛物点并集的像（见 (4.3)）。取由同一个温和调和丛 $(\mathcal{E}, \mathcal{D}_\theta, \mathcal{D}_\nabla, K)$ 所诱导的、定义在 (X, D) 上的一个抛物 Higgs 丛 (E, E_*, θ) 和一个抛物联络 (E', E'_*, ∇)。则直接像的限制

$(\phi_*\mathcal{E}|_{Z\setminus\Delta}, \phi_*\mathcal{D}_\theta|_{Z\setminus\Delta}, \phi_*\mathcal{D}_\nabla|_{Z\setminus\Delta}, \phi_*K|_{Z\setminus\Delta})$ 是定义在 (Z, Δ) 上的一个温和调和丛，从而给出第 6节中定义的直接像 $\phi_*(E, E_*, \theta)$ 与 $\phi_*(E', E'_*, \nabla)$ 之间的对应。

证明。固定 $\phi^{-1}(Z\setminus\Delta) = U_1 \cup \ldots \cup U_d$ 的一个开子集的不交并分解 X。为简化记号，记 $\mathcal{F} := \mathcal{E}|_{\phi^{-1}(Z\setminus\Delta)}$。在 $Z\setminus\Delta$ 上的局部范围内，直接像 $(\phi_*\mathcal{F}, \phi_*\mathcal{D}_\theta, \phi_*\mathcal{D}_\nabla, \phi_*K)$ 只是调和丛 $(\mathcal{F}, \mathcal{D}_\theta, \mathcal{D}_\nabla, K)$ 在各个 U_i, $i = 1, \ldots, d$ 上的限制的直和。由于调和丛定义中的条件 (1)–(4) 是局部的，直接像在 $Z\setminus\Delta$ 上的限制必为调和丛，且度量 $\phi_*K|_{Z\setminus\Delta}$ 是可接受的 [Si，定理 2]。

我们分解

$$\phi_*\mathcal{D}_\theta = \phi_*\overline{\partial}_\theta + \phi_*\theta \quad \text{and} \quad \phi_*\mathcal{D}_\nabla = \phi_*\overline{\partial}_\nabla + \phi_*\nabla\,.$$

我们将分析由 $\phi_*K|_{Z\setminus\Delta}$ 在点 $z \in \Delta$附近诱导的$(\phi_*\mathcal{F}, \phi_*\overline{\partial}_\theta)$的滤过。设 V是 x 周围的一个小圆盘，使得 $\phi^{-1}(V) = V'_1 \cup \ldots \cup V'_{b_z}$ 是单连通开子集的不交并，且对某个点 $y_i \in X$ 有 $\phi^{-1}(x) \cap V_i = \{y_i\}$，并且对任意其他 $x' \neq x$有$\#\phi^{-1}(x') \bigcap V_i = m_i$。直接像在 x 周围的穿孔圆盘上的每个局部全纯截面均具有形式$(e_1, \ldots, e_{b_z})$，其中 e_i 是 V_i 中 y_i 的一个穿孔邻域上的局部截面。若 r_Z 是到 x 的径向距离函数，而r_{V_i} 是到每个 y_i 的径向距离函数，则

$$\left\{|(e_1, \ldots, e_{b_z})|_{\phi_*K} \leq Cr_Z^{\alpha-\varepsilon} \ \forall\varepsilon > 0\right\} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left\{|e_i|_K \leq Cr_Z^{\alpha-\varepsilon} = Cr_{V_i}^{m_i(\alpha-\varepsilon)} = Cr_{V_i}^{m_i\alpha-\varepsilon'} \ \forall\varepsilon' > 0 \ \forall i\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{e_i \in (\mathcal{F}, \overline{\partial}_\theta)^{m_i\alpha}_{y_i} \ \forall i\right\}.$$

Thus,

$$(\phi_*\mathcal{F}, \phi_*\overline{\partial}_\theta)^\alpha_x = \bigoplus_{i=1}^{b_z} (\mathcal{F}, \overline{\partial}_\theta)^{m_i\alpha}_{y_i}\,.$$

每个分量$(\mathcal{F}, \overline{\partial}_\theta)^{m_i\alpha}_{y_i}$的滤过恰好在以下情况下发生跳跃

$$m_i\alpha - \alpha_i^j = k \in \mathbb{Z}\,,$$

因此，它恰好在形如以下形式的点处发生跳跃

$$\alpha = \frac{\alpha_i^j + k}{m_i}$$

其中 $i = 1$、…、b_z 和 $k \in \mathbb{Z}$。由于 $0 \leq \alpha_i^j < 1$，0 和 1 之间这些跳跃的集合对应于对每个 i 取 $k = 0$、…、$m - 1$。此外，注意到

$$(\mathcal{F}, \overline{\partial}_\theta)^{m_i\left(\alpha+\frac{1}{m_i}\right)}_{y_i} = (\mathcal{F}, \overline{\partial}_\theta)^{m_i\alpha}_{y_i}(-x) \supset \ldots \supset (\mathcal{F}, \overline{\partial}_\theta)^{m_i\left(\alpha+\frac{k}{m_i}\right)}_{y_i} = (\mathcal{F}, \overline{\partial}_\theta)^{m_i\alpha}_{y_i}(-kx)$$
$$\supset \ldots \supset (\mathcal{F}, \overline{\partial}_\theta)^{m_i(\alpha+1)}_{y_i} = (\mathcal{F}, \overline{\partial}_\theta)^{m_i\alpha}_{y_i}(-m_ix)$$

对于每个 α 和 y_i。这正是式（4.7）中构造的直接像 $\phi_*(E, E_*)$ 的结构，因此我们得出，由（$\phi_*\mathcal{F}, \phi_*\overline{\partial}_\theta, \phi_*K$）在（$Z, \Delta$）上诱导的抛物丛恰为 $\phi_*(E, E_*)$。类似地，由（$\phi_*\mathcal{F}$, $\phi_*\overline{\partial}_\nabla, \phi_*K$）诱导的抛物丛为 $\phi_*(E', E'_*)$。

现在我们可以仿照定理 7.1 进行论证。将 $\phi_*\theta$ 从 $E|_{Z\setminus\Delta}$ 延拓为 Z上的 $\phi_*(E, E_*)$ 上的抛物 Higgs 丛，至多只有一种可能。由于第 6.1 节所述的直接像构造 $\phi_*(E, E_*, \theta)$ 提供了这样一种延拓，我们得出（$\phi_*\mathcal{F}$, $\phi_*\mathcal{D}_\theta$, $\phi_*\mathcal{D}_\nabla$, ϕ_*K）必为温和的，而温和调和丛在 Y 上诱导的滤过 Higgs 束为 $\phi_*(E, E_*, \theta)$。类似地，将（$\phi_*\mathcal{F}$, $\phi_*\overline{\partial}_\nabla$, $\phi_*\nabla$）延拓为 $\phi_*(E', E'_*)$ 上的抛物联络，至多只有一种可能。由于第 6.2 节中构造的直接像$\phi_*(E', E'_*, \nabla)$提供了这样一种延拓，它必定是由调和丛诱导的那个。□

最后，我们可以计算留数，从而得到与表1类似的表。取 $y \in \Delta$。分解

$$(\phi_*E)_y = \bigoplus_{x_i\in\phi^{-1}(y)} V_{x_i} \tag{7.2}$$

如（4.4）所示。显然， θ 和 ∇ 的留数相对于此分解均为对角形式，因此只需计算 θ 和 ∇ 在 V_{x_i} 上的留数，其中每个 x_i $\in\phi^{-1}$（y）。取 x 在 x_i附近的一个局部全纯坐标函数，并令 $m = m_{x_i}$ 为 ϕ 在 x_i处的重数。局部写出 θ 和 ∇ ，忽略 x^m阶的项:

$$\theta = \left(\frac{A_{-1}}{x} + A_0 + A_1x + \ldots + A_{m-1}x^{m-1}\right)\otimes dx$$

$$\nabla = \left(\frac{A'_{-1}}{x} + A'_0 + A'_1x + \ldots + A'_{m-1}x^{m-1}\right)\otimes dx + d\,.$$

令 $v = v_0 + xv_1 + \ldots + x^{m-1}v_{m-1}$为 E的一个局部截面，忽略 m阶的项。于是，

$$\theta_{x\frac{\partial}{\partial x}}(v) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k} A_{j-1}v_{k-j}x^k + O(x^m)$$

$$\nabla_{x\frac{\partial}{\partial x}}(v) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k} A'_{j-1}v_{k-j}x^k + O(x^m)\,.$$

在局部将 1、 x、 ……、 x_{m-1} 各块中的基底分开，并结合（7.1），得到

$$\mathrm{Res}(\phi_*\theta, y)|_{V_{x_i}} = \frac{1}{m}\left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline A_0 & A_{-1} & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline A_{m-2} & A_{m-2} & \cdots & A_{-1} \end{array}\right),$$

$$\mathrm{Res}(\phi_*\theta, y)|_{V_{x_i}} = \frac{1}{m}\left(\begin{array}{c|c|c|c} A'_{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline A'_0 & A'_{-1}+I & \ddots & 0 \\ \hline \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \hline A'_{m-2} & A'_{m-2} & \cdots & A'_{-1}+(m-1)I \end{array}\right).$$

由此计算以及前面的讨论，可以推导出表 2 ，总结上述对象及其直接像的跳跃和特征值之间的关系。

	(E, E_*, θ)	(E', E'_*, ∇)	$\phi_*(E, E_*, \theta)$	$\phi_*(E', E'_*, \nabla)$
跳跃	α	$\alpha - 2b$	$\left\{\frac{\alpha_j}{m_j} + \frac{k}{m_j}\right\}$	$\left\{\frac{\alpha_j - 2b_j}{m_j} + \frac{k}{m_j}\right\}$
特征值	$b + ci$	$\alpha + 2ci$	$\left\{\frac{b_j}{m_j} + \frac{c_j}{m_j}i\right\}$	$\left\{\frac{\alpha_j}{m_j} + \frac{k}{m_j} + \frac{c_j}{m_j}i\right\}$

TABLE 2. 非阿贝尔霍奇理论与直接像下对应的抛物 Higgs 丛和联络的跳跃与特征值之间的关系。

与表 1一样，权重均按模 $\mathbb{Z}$考虑；在连接的跳跃处将 α 替换为 $\alpha + k$，会使所有相应的特征值 $b' + k + c'i$ 都替换为$b' + c'i$。

备注7.4。 与备注 7.2类似，从表中可以得出，直接像将强抛物 Higgs 丛映到强抛物 Higgs 丛，并将“剩余”连接映到“剩余”连接，正如定义 2.1 后的注释所述。

ACKNOWLEDGEMENTS

David Alfaya 谨向 Carlos Simpson 致谢，感谢他就非阿贝尔霍奇对应提供的有益讨论。他获得 MICINN 项目 PID2019-108936GB-C21 的资助，第二作者则获得 J. C. Bose Fellowship 的部分资助。

REFERENCES

[At] M. F. Atiyah, 《纤维丛上的复解析连接》, Trans. Amer. Math. Soc. 85（1957）, 181–207。[Biq] O. Biquard, 《稳定抛物丛与平坦奇异联络》, Bull. Soc. Math. Fr. 119（1991）, 231–257。[Bi1] I. Biswas, 《抛物丰丛》, Math. Ann. 307（1997）, 511–529。[Bi2] I. Biswas, 《作为轨形丛的抛物丛》, Duke Math. J. 88（1997）, 305–325。[BL] I. Biswas and M. Logares, 《曲线上抛物向量丛上的连接》, Inter. Jour. Math. 22（2011）, 593–602。[BM] I. Biswas and F.-X. Machu, 《关于抛物向量丛及抛物联络的直接像》, J. Geom. Phys. 135（2019）, 219–234。[De] P. Deligne, 《正则奇点处的微分方程》, Lecture Notes in Mathematics, 第163卷, Springer-Verlag, 柏林—纽约, 1970。[DJ] A. Dhillon and S. Joyner, 《抛物丛的拉回与 $\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$的覆盖》, Michigan Math. J. 61（2012）, 199–224。[DPS] R. Donagi, T. Pantev and C. Simpson, 《非阿贝尔霍奇理论中的直接像》, arXiv:1612.06388（2016）。[FL] T. Fassarella and F. Loray, 《分歧覆盖下的 Hitchin 纤维化》, arXiv:2208.10130（2022）。[GH] P. Griffiths and J. Harris, 《代数几何原理》, Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, 纽约, 1978。[Ha] R. Hartshorne, 《代数几何》, Graduate Texts in Mathematics, 第52号。Springer-Verlag, 纽约—海德堡, 1977。[Hi] N. J. Hitchin, 《稳定丛与可积系统》, Duke Math. Jour. 54（1987）, 91–114。[HL] D. Huybrechts and M. Lehn, 《层的模空间的几何》, 第二版, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2010。

[KM] M. Kumar and S. Majumder, 《正特征下的抛物丛》, J. Ramanujan. Math. 33（2018）, 1–36。[MY] M. Maruyama and K. Yokogawa, 《抛物稳定层的模空间》, Math. Ann. 293（1992）77–99。[MS] V. B. Mehta and C. S. Seshadri, 《具有抛物结构的曲线上向量丛的模空间》, Math. Ann. 248（1980）, 205–239。[Si] C. T. Simpson, 《非紧曲线上的调和丛》, J. Am. Math. Soc. 3（1990）, 713–770。[Yo] K. Yokogawa, 《抛物Higgs层的无穷小变形》, Inter. Jour. Math. 6（1995）, 125–148。

Department of Applied Mathematics and Institute for Research in Technology, ICAI School of Engineering, Comillas Pontifical University, C/Alberto Aguilera 25, 28015Madrid, Spain

电子邮箱：dalfaya@comillas.edu

School of Mathematics, Tata Institute of Fundamental Research, Homi Bhabha Road, Mumbai 400005, India

电子邮箱：indranil@math.tifr.res.in