arXiv:2303.00484v1 [math.NT] 1 Mar 2023

关于某些六次数域的指数因子

ANUJ JAKHAR 和 RAVI KALWANIYA

ABSTRACT. 设 K =**Q**(θ) 是一个代数数域，其中 θ 为不可约四项式 $f(x)$ $= x^6 + ax^m + bx + c \in \mathbf{Z}[x]$ 且 $m \in \{2,3,4,5\}$。在本文中，我们给出仅涉及 a、 b、 c 和 m的某些显式条件，使得 K 是非单生成的。在每种情况下，我们给出一个有理素数 p 的最高次幂，该幂整除域的指数 K。特别地，我们为这些数域中的 Narkiewicz 的问题 22 [12] 提供了部分答案。最后，我们通过实例说明我们的结果。

1. INTRODUCTION AND STATEMENTS OF RESULTS

设 $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ 是有理数域 Q 上的一个次数为 n 的首一不可约多项式。设 $K = \mathbf{Q}(\theta)$ 是一个代数数域，其中 θ 是 $f(x)$ 的一个根，并且O_K 是其代数整数环。我们将子群 $\mathbf{Z}[\gamma]$ 在 O_K 中的指数记为 ind γ。如果对于某个 $\alpha \in O_K$有 ind $\alpha = 1$，即 $O_K = \mathbf{Z}[\alpha]$，则称一个代数数域是单生成的。在这种情况下， $\{1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}\}$ 是 K的整基；这样的 K 的整基称为 K的幂整基。如果不存在任何使得 ind $\alpha = 1$的 $\alpha \in O_K$，则 K 是非单生成的。代数数论中的一个基本问题是确定代数数域的单生成性。数域的单生成性检验和幂整基构造已得到广泛研究（参见 [1], [2], [5], [6], [11], [15]）。1984 年，Funakura [5]给出了关于那些整数 m的充分必要条件，使得数域 $\mathbf{Q}(m^{1/4})$ 是单生成的。2017 年，Ga´al 和 Remete [6] 研究了形如 $\mathbf{Q}(m^{1/n})$ 的代数数域的单生成性，其中 $3 \leq n \leq 9$ 且 m 无平方因子。在 [7]，Ga´al 研究了由某些六次不可约三项式定义的数域的单生成性。对于一个有理素数 p，若已知理想 pO_K 的素理想分解，则 Engstorm [4]确定了次数小于或等于 7 的域 K 的指数 $i(K)$ 被 p 整除时 p 的最高次幂。

本文中，设 p 为有理素数， $K = \mathbf{Q}(\theta)$ 为代数数域， θ 是不可约四项式 $f(x)$ $= x^6 + ax^m + bx + c \in \mathbf{Z}[x]$ with$m \in \{2,3,4,5\}$ 的一个根。我们给出一些仅涉及 a、 b、 c 和 m 的充分条件，使得 K 为非单生成。此外，我们还给出整除域的指数的 p 的最高次幂

2010年数学主题分类. 11R04, 11R21. 关键词与短语. 单生成性，Ore 定理，素理想分解。 1

的最高次幂。作为本文结果的应用，我们给出了一族非单生成的代数数域。

下文中，对于任意整数 r 和有理素数 p，$v_p(r)$ 表示整除 r 的 p 的最高次幂。此外，$i(K)$ 表示由下式定义的数域 K 的域的指标

$$i(K) = \gcd\{\operatorname{ind}\alpha \mid K = \mathbf{Q}(\alpha) \text{ and } \alpha \in O_K\}.$$

注意，若对某个素数 p，$v_p(i(K)) \geq 1$，则数域 K 是非单生成的。具体而言，我们证明以下结果。

定理 1.1. 设 $K = \mathbb{Q}(\theta)$ 是一个代数数域，其中 θ 是不可约四项式 $f(x) = x^6 + ax^m + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ 的一个根，且满足 $m \in \{2, 3, 4, 5\}$。若 a、b 和 $c+1$ 均被 8 或 9 整除，则 K 是非单生成的，且 $v_2(i(K)) = 2$ 和 $v_3(i(K)) = 1$.

以下推论可由上述定理直接得出。

推论 1.2. 设 $K = \mathbb{Q}(\theta)$ 是一个代数数域，其中 θ 是不可约三项式 $f(x) = x^6 + ax^m + b \in \mathbb{Z}[x]$ 的根，且满足 $m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$。若 a 和 $b+1$ 都能被 8 或 9 整除，则 K 是非单生成的。

定理 1.3. 设 $K = \mathbb{Q}(\theta)$，其中 θ 是不可约多项式 $f(x) = x^6 + ax^m + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ 的根，且 $m \in \{2, 3, 4\}$.。假设 $a + (-1)^m$、b 和 c 都能被 8 整除。令 $mv_2(b) < (m-1)v_2(c)$，则有以下结论：

(i) 若 $m = 2$ 且 $v_2(a + 1 - b + c) > 3$，则 $v_2(i(K)) = 4$(ii) 若 $m = 2$ 且 $v_2(a + 1 - b + c) = 3$，则 $v_2(i(K)) = 1$(iii) 若 $m = 3$ 且 $\gcd(v_2(b), 2) = 1$，则 $v_2(i(K)) = 1$(iv) 若 $m = 4$ 且 $\gcd(v_2(b), 3) = 1$，则 $v_2(i(K)) = 2$

特别地，域 K 是非单生成的。

定理 1.4. 设 $K = \mathbb{Q}(\theta)$，其中 θ 是不可约多项式 $f(x) = x^6 + ax^m + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ 的一个根，其中 $m \in \{2, 3, 4\}$.。设 $a + (-1)^m$、b 和 c 均被 9 整除，且 $mv_3(b) < (m-1)v_3(c)$。则有以下结论：

(i) 若 $m = 2$，则 $v_3(i(K)) = 1$(ii) 若 $m = 3$ 且 $\gcd(v_3(b), 2) = 1$，则 $v_3(i(K)) = 1$(iii) 若 $m = 4$ 且 $\gcd(v_3(b), 3) = 1$，则 $v_3(i(K)) = 1$

特别地，域 K 是非单生成的。

推论 1.5. 设 $K = \mathbb{Q}(\theta)$，其中 θ 是不可约多项式 $f(x) = x^6 + ax^m + bx + c \in$ 整数环$[x]$ 的一个根，其中 $m \in \{3, 4\}$. 假设 $a + (-1)^m$、b和 c均可被 8 或 9 整除。设 $p \in \{2, 3\}$ 满足 $mv_p(b) < (m-1)v_p(c)$，且 $\gcd(v_p(b), 6) = 1$，则根据定理 1.3 和 1.4，数域 K 是非单生成的，且

$$v_2(i(K)) = \begin{cases} 1 & \text{if } m = 3 \\ 2 & \text{if } m = 4 \end{cases} \text{ and } v_3(i(K)) = 1.$$

现在我们给出一些非单生成数域的例子。

例 1.6. 设 $K = \mathbb{Q}(\theta)$，其中 θ 是不可约多项式 $f(x) = x^6 + ax^3 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$. 的一个根。假设 $a-1$、b 和 c 均可被 8 和 9 整除。若对于 $p \in \{2,3\}$， $3v_p(b) < 2v_p(c)$ 且 $v_p(b)$ 为奇数，则利用定理 1.3 和 1.4， $v_p(i(K)) = 1$.

例 1.7. 设 $K = \mathbb{Q}(\theta)$，其中 θ 是多项式 $f(x) = x^6+ax^2+bx+c \in \mathbb{Z}[x]$. 的一个根。假设 $a \equiv -7$ 模 112、 $b \equiv 56$ 模 112 且 $c \equiv 0$ 模 896，则根据艾森斯坦判别法， $f(x)$ 是一个不可约多项式。因此由定理 1.3， K 是非单生成的，且 $v_2(i(K)) = 1$。

例 1.8. 设 $K =$ 有理数域(θ) 是一个 θ 以不可约多项式 $f(x)$ 的根为 $= x^6 + ax^3 + bx + c \in$ 整数环$[x]$. 假设 $a \equiv 1$ 模 8， $b \equiv 32$ 模 64，且 $c \equiv 0$ 模 256，那么，根据推论 1.5， $v_2(i(K)) = 1$ ，且 K 是非单生成的。

2. Preliminary Results

设 $K =$ 有理数域(θ) 是一个代数数域，其中 θ 是首一不可约多项式 $f(x)$ 的根，且该多项式属于整数环$[x]$。下文中， O_K 表示 K 的代数整数环。对于有理素数 p，令 $\mathbb{F}_p$ 为含有 p 个元素的有限域，并用 Z_p 表示 p-进整数环。将 $f(x)$ 中的每个系数都模 p 化后所得的多项式记为 $f(x)$。

定义 2.1。有理函数域 $\mathbb{Q}_p(x)$ 的高斯赋值是将 $\mathbb{Q}$ x 中的赋值 v_p 扩展到 $\mathbb{Q}_p$ 上，并定义为

$$v_{p,x}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_sx^s) = \min\{v_p(a_i), 1 \le i \le s\}, a_i \in \mathbf{Q}_p.$$

定义 2.2。设 p 为一个有理素数。设 $\phi(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ 是一个模 p 不可约的首一多项式，且 $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ 是一个不被$_n\phi(x)$整除的首一多项式。设 $\sum a_i(x)\phi(x)^i$， 其中 deg $a_i(x)$ $<$ deg $\phi(x)$， $a_n(x) \neq 0$ 是将其除以 $\phi(x)$ 的 successive powers 所得到的 $\phi(x)$- 展开式。对于每个非零项$a_i(x)\phi(x)^i$，我们关联点 $(n-i,v_{p,x}(a_i(x)))$，并构造集合

$$S = \{(i,\ v_{p,x}(a_{n-i}(x))) \mid 0 \le i \le n,\ a_{n-i}(x) \neq 0\}.$$

关于 p 的 ϕ-牛顿多边形是沿集合 S中各点的凸包的下边所形成的多边形路径。各边的斜率构成严格递增的序列；由于 $f(x)$ 是一个系数属于 $\mathbb{Z}_p$的首一多项式，这些斜率均为非负数。

定义 2.3. 设 $\phi(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ 是一个首一多项式，它模有理素数 p （~）不可约，且在有理数域 $\mathbb{Q}_p$ （$_p$）的代数闭包中有一个根 α 。设 $f(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ 是一个不能被 $\phi(x)$ 整除的首一多项式，其 $\phi(x)$-展开式为 $\phi(x)^n + a_{n-1}(x)\phi(x)^{n-1} +$

$\cdots + a_0(x)$，使得 $\overline{f}(x)$ 是 $\overline{\phi}(x)$ 的幂。假设 $f(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形只包含一条边，记为 S，其正斜率记为 $\frac{l}{e}$，其中 l、e 互素，即

$$\min\left\{\frac{v_{p,x}(a_{n-i}(x))}{i} \mid 1 \le i \le n\right\} = \frac{v_{p,x}(a_0(x))}{n} = \frac{l}{e}$$

使得 n 可被 e整除，设 $n = et$ 和 $v_{p,\,x}(a_{n-ej}(x)) \ge lj$ 对于 $1 \le j \le t$。因此，多项式 $b_j(x) := {}^{a_{n-ej}(x)\,p^{lj}}$~~的系数~~属于整数环 $\mathbb{Z}_p$，因而 $b_j(\alpha) \in \mathbb{Z}_p[\alpha]$ 对于 $1 \le j \le t$。$_t$不定元 Y 上的多项式 $T(Y)$ 由 $T(Y) = Y^t + \sum \overline{b_j}(\overline{\alpha})Y^{t-j}$ 定义，其系数属于 $\mathbb{F}_p[\overline{\alpha}] \cong \frac{\mathbb{F}_p[x]}{\langle \phi\ x \rangle}()$，称为 $f(x)$ 关于 (ϕ, S) 的剩余多项式。

下面的定义给出了 $f(x)$ 更一般时剩余多项式的概念。

定义 2.4。设 $\phi(x)$ α 如定义 2.3 所述。设 $g(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ 为一个首一多项式，且不能被 $\phi(x)$ 整除，并且 $\overline{g}(x)$ 是 $\overline{\phi}(x)$ 的幂。设 $g(x)$ 的 ϕ- 牛顿多边形各边的斜率为 $\lambda_1 < \cdots < \lambda_k$，并设斜率为 λ_i 的边为 S_i。根据 Ore 证明的一个经典结果（参见 [3, 定理 1.5], [10, 定理 1.1]），可写成 $g(x) = g_1(x) \cdots g_k(x)$，其中 $g_i(x)$ 的 ϕ-牛顿多边形只有一条边，记为 S_i'，它是 S_i 的平移。令属于 $\mathbb{F}_p[\overline{\alpha}][Y]$ 的 $T_i(Y)$ 表示定义 2.3 中所述的 $g_i(x)$ 关于 (ϕ, S_i') 的剩余多项式。为方便起见，$g(x)$ 关于 (ϕ, S_i) 的剩余多项式称为剩余多项式 $T_i(Y)$。若多项式 $g(x)$ 关于 ϕ 是 p-正则的，则所有多项式 $T_i(Y)$ 在 $\mathbb{F}_p$, $1 \le i \le k$ 的代数闭包中均无重根。一般而言，若 $F(x)$ 属于 $\mathbb{Z}_p[x]$，且为首一多项式，并且$\overline{f}(x) = \overline{\phi}_1(x)^{e_1} \cdots \overline{\phi}_r(x)^{e_r}$ 是其模 p 因式分解所得的不可约多项式之积，其中每个 $\phi_i(x)$ 属于 $\mathbb{Z}_p[x]$，且为首一多项式 $e_i > 0$，那么根据亨泽尔引理，存在首一多项式 $f_1(x) \cdots$、$f_r(x)$，属于 $\mathbb{Z}_p[x]$，使得 $f(x) = f_1(x) \cdots f_r(x)$，并且对每个 i，都有 $\overline{f}_i(x) = \overline{\phi}_i(x)^{e_i}$。若每个 $f_i(x)$ 关于 ϕ_i 都是 p-正则的，则称多项式 $f(x)$ 为 p- 正则（关于 $\phi_1, \cdots, \phi_r$）。

为了确定位于有理素数 p 之上的 O_K 的不同素理想的数目，我们将使用下述定理，它是 [10] 中定理 1.2 的一个较弱版本。

定理 2.5. 设 $L = \mathbb{Q}(\xi)$ 是一个代数数域，其中 ξ 满足不可约多项式 $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$，且 p 是一个有理素数。设 $\overline{\phi}_1(x)^{e_1} \cdots \overline{\phi}_r(x)^{e_r}$ 是 $g(x)$ 模 p 的因式分解，它分解为 $\mathbb{F}_p$ 上不同不可约多项式的幂，其中每个 $\phi_i(x) \ne g(x)$ 属于 $\mathbb{Z}[x]$，且为首一多项式。假设 ϕ_i-牛顿多边形 $g(x)$ 有 k_i 条边，记为 S_{ij}，其斜率为 $\lambda_{ij} = \frac{l_{ij}}{e_{ij}}$，且对 $1 \le j \le k_i$，有 $\gcd(l_{ij}, e_{ij}) = 1$。$T_{ij}(Y) = \prod_{s=1} U_{ijs}(Y)$ 是剩余多项式 $T_{ij}(Y)$ 分解为不同的

关于 $(\phi_i,\ S_{ij})$ 的 $1 \le j \le k_i$ 上不可约因子，那么

$$pO_L = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{k_i}\prod_{s=1}^{s_{ij}} \mathfrak{p}_{ijs}^{e_{ij}},$$

其中 $\mathfrak{p}_{ijs}$ 是 O_L 中剩余次数分别为 $\deg \phi_i(x)$ × 和 $\deg\ U_{ijs}(Y)$ 的不同素理想。

Engstrom [4]计算了整除k任意次数为 6 的数域 K 的指数的有理素数 2 和 3 的最高幂。若 $\prod \mathfrak{p}_i^{e_i}$是 $pO_K{}_{i=1}$的素理想分解，且 $N(\mathfrak{p}_i) = f_i$，则下表给出了这些计算的结果。

序号	f_1, f_2, f_3, f_4, f_5	e_1, e_2, e_3, e_4, e_5	$v_2(i(K))$	$v_3(i(K))$
1	2, 2, 1, 1	1, 1, 1, 1	2	–
2	1, 1, 1, 1	2, 2, 1, 1	2	1
3	1, 1, 1, 1, 1	2, 1, 1, 1, 1	4	–
4	2, 1, 1, 1	1, 2, 1, 1	1	–
5	1, 1, 1, 1	3, 1, 1, 1	2	1
6	2, 1, 1, 1, 1	1, 1, 1, 1, 1	2	1

TABLE 1. 六次数域指数的素数幂分解。

3. PROOF OF THEOREMS 1.1, 1.3 AND 1.4

定理 1.1 的证明。这里 $f(x) \equiv (x+1)^3(x^2+x+1)^3$ 模 2。令 $\phi_1(x) = x^2+x+1$且 $\phi_2(x) = x+1$. 对于每个 $m \in \{2,3,4,5\}$, $f(x)$ 的 $\phi_1(x)$ 展开式为

$$\begin{aligned}
m=2 &: f(x) = \phi_1^3(x) - 3x\phi_1^2(x) + (2x+a-2)\phi_1(x) + d_2\\
m=3 &: f(x) = \phi_1^3(x) - 3x\phi_1^2(x) + ((a+2)x-a-2)\phi_1(x) + d_3\\
m=4 &: f(x) = \phi_1^3(x) - (3x+a)\phi_1^2(x) + ((2-2a)x-(a+2))\phi_1(x) + d_4\\
m=5 &: f(x) = \phi_1^3(x) + ((a+1)x-2a)\phi_1^2(x) + ((a+2)x+3a-2)\phi_1(x) + d_5,
\end{aligned}$$

其中

$$d_m = \begin{cases} (b-a)x+1+c-a & \text{if } m=2\\ bx+1+c+a & \text{if } m=3\\ (b+a)x+1+c & \text{if } m=4\\ (b+a)x+1+c & \text{if } m=5 \end{cases}.$$

由于 8 整除 a、b 和 $c+1$，因此对于每个 $m \in \{2,3,4,5\}$，我们有 $v_2(d_m) \ge 3$.。ϕ_1- $f(x)$ 的牛顿多边形是点 (0, 0)、(1, 0)、(2, 1)、(3, $v_2(d_m)$) 的下凸包。 ϕ-牛顿多边形只有两条正斜率的边。第一条边

是连接点 (1, 0) 和 (2, 1) 的线段。第二条边连接 (2, 1) 与 (3, $v_2(d_m)$)。与每条边相关联的剩余多项式都是一次的。接下来， $f(x)$ 的 ϕ_2-展开式为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{6}\left((-1)^i\binom{6}{i}+a(-1)^{m-i}\binom{m}{i}\right)\phi_2^i(x)+(a(-1)^m-b+1+c). \tag{3.1}$$

ϕ_2- $f(x)$ 的牛顿多边形有两条正斜率边。第一条边是连接点 (4, 0) 和 (5, 1) 的线段。第二条边连接点 (5, 1) 与 (6, $v_2(a(-1)^m-b+1+c)$)。每条边对应的剩余多项式都是线性的。因此，定理 2.5 表明， ϕ_1 给出两个剩余次数各为 2 的素理想，分别记为 $\mathfrak{p}_1$ 和 $\mathfrak{p}_2$；而 $\phi_2(x)$ 给出两个剩余次数各为 1 的素理想，分别记为 $\mathfrak{p}_3$ 和 $\mathfrak{p}_4$。因此， $2O_K=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4.$ 。由此利用表 1，可得 $v_2(i(K))=2.$

当 9 整除 a、 b 和 $c+1$ 时， $f(x)\equiv(x+1)^3(x-1)^3$ 模 3。取 $\phi_3(x)=x-1.$， $\phi_3(x)$-展开式为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{6}\left(\binom{6}{i}+a\binom{m}{i}\right)\phi_3^i(x)+(a+b+c+1). \tag{3.2}$$

Let

$$d_j=\begin{cases}a(-1)^m-b+c+1 & \text{if } j=2\\ a+b+c+1 & \text{if } j=3\end{cases}.$$

接着，记住式 (3.1) 中给出的 $\phi_2(x)$-展开，以及 $f(x)$ 的 $\phi_3(x)$-展开，我们注意到，对于每个 $j=2$， 3， $f(x)$ 的 ϕ_j-牛顿多边形是点 (0, 0)、(1, 1)、(2, 1)、(3, 0)、(4, 1)、(5, 1) 和 (6, $v_3(d_j)$) 的下凸包，并且有两条正斜率边。与每条边对应的剩余多项式都是线性的。因此，由定理 2.5， $3O_K=\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2^2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$，其中 $\mathfrak{p}_i$ 对于 $i=1$， 2、3、4 的剩余次数为 1。因此，由表 1， $v_3(i(K))=1.$ 因此，域 K 是非单生成的。证毕。□

定理的证明 ***1.3***。 这里

$$f(x)\equiv\begin{cases}x^2(x+1)^4 \mod 2 & \text{if } m=2\\ x^3(x+1)(x^2+x+1) \mod 2 & \text{if } m=3\\ x^4(x+1)^2 \mod 2 & \text{if } m=4\end{cases}$$

x- $f(x)$ 的牛顿多边形是点 (0, 0)、$(6-m, 0)$、(5, $v_2(b)$) 和 (6, $v_2(c)$) 的下凸包。由于 $mv_2(b)<(m-1)v_2(c)$，因此对每个 $m\in\{2,3,4\}$，它都有两条正斜率边。第一条边是连接点 $(6-m, 0)$ 和 (5, $v_2(b)$) 的线段，第二条边连接 (5, $v_2(b)$) 和 (6, $v_2(c)$)。注意到假设（$\gcd(v_2(b), 2)=1$ for $m=3$; $\gcd(v_2(b), 3)=1$ for $m=4$），我们观察到与每条边对应的剩余多项式都是线性的。利用 (3.1) 中给出的 $x+1$展开，若 $m=2$，则可知 $x+1$- $f(x)$ 的牛顿多边形

有两条或三条边（取决于 $v_2(a+1-b+c)$），且斜率为正；若$m=3$，则它有两条正斜率边。与每条边对应的剩余多项式都是线性的。若 $g(x) \in \{x+1, x^2+x+1\}$，则对 $m=3$， $g(x)$-牛顿多边形只有一条正斜率边，且与这条边对应的剩余多项式是线性的。因此，根据定理 2.5和表 1，可得

Case	$2O_K$	f_1, f_2, f_3, f_4, f_5	$v_2(i(K))$
$m=2$	$\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4\mathfrak{p}_5$, or	1, 1, 1, 1, 1	4
	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$,	2, 1, 1, 1	1
$m=3$	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$	2, 1, 1, 1	1
$m=4$	$\mathfrak{p}_1^3\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$	1, 1, 1, 1	2

其中 f_i 表示 $\mathfrak{p}_i$.的剩余次数 □

定理 ***1.4***的证明。 显然

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^2(x-1)(x+1)(x^2+1) \mod 3 & \text{if } m=2 \\ x^3(x+1)^3 \mod 3 & \text{if } m=3 \\ x^4(x-1)(x+1) \mod 3 & \text{if } m=4 \end{cases}$$

$f(x)$ 的 x-牛顿多边形是点 (0, 0)、$(6-m, 0)$、$(5, v_3(b))$ 和 $(6, v_3(c))$ 的下凸包。由于 $mv_3(b) < (m-1)v_3(c)$，因此 $f(x)$ 的 x-牛顿多边形有两条正斜率边。第一条边是连接点 $(6-m, 0)$ 和 $(5, v_3(b))$ 的线段，第二条边连接 $(5, v_3(b))$ 和 $(6, v_3(c))$。根据假设，我们看到与每条边对应的剩余多项式都是一次的。对于$m=3$， $f(x)$ 的 $x+1$-牛顿多边形有两条正斜率边，且每条边的剩余多项式都是一次的。若 $h(x) \neq x$ 是 $f(x)$ 模 3 下的一个不可约因子，则对于 $m \in \{2,4\}$， $h(x)$-牛顿多边形只有一条正斜率边，且与该边对应的剩余多项式是一次的。根据定理 2.5 和表 1，我们有

Case	$3O_K$	f_1, f_2, f_3, f_4, f_5	$v_3(i(K))$
$m=2$	$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4\mathfrak{p}_5$,	2, 1, 1, 1, 1	1
$m=3$	$\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$	1, 1, 1, 1	1
$m=4$	$\mathfrak{p}_1^3\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3\mathfrak{p}_4$	1, 1, 1, 1	1

因此，域 K 是非单生成的。 □

References

[1] S. Ahmad, T. Nakahara, A. Hameed，关于与 Hasse 问题相关的某些纯六次域，《国际代数与计算杂志》，26(3) (2016)，577-583.[2] S. Ahmad, T. Nakahara, S. M. Husnine，某些纯六次域的幂整基，《国际数论杂志》，10(8) (2014)，2257-2265.[3] S. D. Cohen, A. Movahhedi, A. Salinier，局部域上的因式分解与广义差分多项式的不可约性，《Mathematika》，47 (2000)，173-196.[4] H. T. Engstrom，关于代数域的公共指标除数，Trans.Amer. Math. Soc. 32(2) (1930)，223–237[5] T. Funakura，关于纯四次域的整基，Math. J. Okayama Univ, 26 (1984)，27-41.[6] I. Ga´al, L. Remete，纯域的幂整基与单生成性，《数论杂志》，173 (2017)，129-146.[7] I. Ga´al，关于一族三项式单生成性的实验，JP Journal of Algebra Number Theory Appl., 51(1) (2021)，97-111.[8] J. Gu´ardia, J. Montes, E. Nart，代数数论中的高阶牛顿多边形，Trans. Am. Math. Soc. 364 (1) (2012)，361–416.[9] A. Jakhar, S. Kaur, S. Kumar，由三项式定义的某些八次数域的非单生成性。《数学讨论》171(1):145–152。DOI: 10.4064/cm8799-3-2022[10] S. K. Khanduja, S. Kumar，利用牛顿多边形和多项式提升进行赋值延拓，《纯粹与应用代数杂志》，216 (2012)，2648-2656.[11]R. MacKenzie, J. Scheuneman，一个没有相对整基的数域，《美国数学月刊》，78 (1971)，882-823.[12] W. Narkiewicz，代数数的初等与解析理论（第三版），施普林格数学专著，施普林格出版社，柏林，2004.[13] J. Neukirch，代数数论，柏林-海德堡，施普林格出版社，1999.[14] H. Smith，根式扩张的单生成性，《算术学报》，198(3)，313-327.[15] A. Soullami, M. Sahmoudi，利用相对二次扩张研究六次整基，《巴拉那数学学会通报》，38(4) (2020)，175-180。

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology (IIT) Madras