arXiv:2303.00485v2 [math.NT] 7 Dec 2024

三次数域的算术：雅可比–佩龙、毕达哥拉斯与不可分解元

VÍT ˇEZSLAV KALA[1], ESTER SGALLOV ´A[1], MAGDAL ´ENA TINKOV ´A[1,2,3,*]

[1]查理大学，数学与物理学院，代数系，Sokolovsk ´a 83，18600 布拉格 8，捷克共和国

[2]布拉格捷克技术大学，信息技术学院，Th ´akurova 9，160 00 布拉格 6，捷克共和国

[3]格拉茨工业大学，分析与数论研究所，Kopernikusgasse 24/II，8010 格拉茨，奥地利

Abstract. 我们研究了多维连分数（例如雅可比–佩龙算法）与全实三次数域中的加法不可分解整数之间一种新的联系。首先，我们找出了 Ennola族中所有符号型的不可分解整数，并利用它们确定毕达哥拉斯数。其次，我们计算了若干周期 JPA 展开，其中也包括 Shanks族的最简三次域。最后，我们将这些展开与不可分解整数进行比较，并据此得出结论。

Contents

1. 引言 1 2. 数域预备知识 5 3. Ennola三次域中的不可分解整数 7 4. Ennola三次域中的毕达哥拉斯数 11 5. 雅可比–佩龙算法预备知识 19 6. 最简单三次域中的Jacobi-Perron 算法 21 7. Ennola三次域中的Jacobi-Perron 算法 24 8.（半）收敛子的不可分解性 27 9. 半收敛分数不可分解性的实验 29 10. 更一般的半收敛分数 31 11. 其他多维连分数算法 36 致谢 38 声明 38 参考文献 38 A5. 雅可比–佩龙算法预备知识 40 A6. 最简单三次域中的Jacobi-Perron 算法 40 A7. Ennola三次域中的Jacobi-Perron 算法 45 A8.（半）收敛子的不可分解性 56 A9. 半收敛分数不可分解性的实验 58

1. Introduction

受……启发　拉格朗日1770年关于 q 的经典连分数周期性的结果
ua-二次无理数　埃尔米特于1849年提出，是否存在一种表示三次代数数的方法　th

E-mail address: vitezslav.kala@matfyz.cuni.cz, ester.sgallova@centrum.cz, tinkova.magdalena@gmail.com.

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11R16, 11R80, 11E25, 11J70. *Key words and phrases.* 雅可比–佩龙算法、多维连分数、全实数域、三次数域、不可分解整数、毕达哥拉斯数。

* 通讯作者。

周期表达式。在解决这一问题的众多方法中，最具影响力、最为突出的当属雅可比–佩龙算法（JPA，开发于1868年至1907年）。尽管JPA似乎通常无法给出周期展开，但Karpenkov最近 [Kar] 通过对其进行改进，在全实数域情形下解决了埃尔米特问题。

本文旨在提出并探讨一种新的联系：JPA 等多维连分数与全实（三次）数域中的加法不可分解整数之间的联系。尽管这些不可分解元是自然的研究对象，Siegel 早在 1945 年就已认识并加以运用 [Si]，但直到最近，随着数域中二次型算术研究（例如毕达哥拉斯数）的开展，它们才受到更多关注。下面我们将进一步介绍相关背景。

近期研究不可分解元的动机，源于对数域上万有二次型的研究。这一课题历史悠久且精彩纷呈，始于拉格朗日四平方定理：每个正整数都能表示为四个整数平方之和。换言之，二次型 $x^2+y^2+z^2+w^2$ 在 $\mathbb{Z}$上是万有的，即它表示 $\mathbb{N}(=\mathbb{Z}_{>0})$ 中的所有元素。随后，人们开始研究其他（正定）二次型，这一研究后来又推广到了全实数域。在这种情形下，二次型的系数属于该域 K 的代数整数环 $\mathcal{O}_K$。如果某个二次型表示 $\mathcal{O}_K^+$ 中的所有元素，我们就称它为万有二次型； $\mathcal{O}_K^+$ 是全正代数整数的集合，也就是所有共轭元均为正的元素所组成的集合。

每个全实数域都存在一个万能二次型，这可由 [HKK]，的主定理推出，因此引出了一个问题：这些万能型必须有多少个变量？Blomer 和 Kala [BK、Ka] 证明了，对于每个 $M\in\mathbb{N}$，都可以找到无穷多个不允许存在变量少于 M 个的万能二次型的实二次数域。随后，这一结果被推广到三次域[Ya]，、多二次域 [KS]，以及次数可被 2 整除的域3 [Ka3]。在所有这些论文中，不可分解整数都发挥着关键作用。

我们称 $\alpha\in\mathcal{O}_K^+$为不可分解的，如果不能将其表示为 $\alpha=\beta+\gamma$，其中 β，$\gamma\in\mathcal{O}_K^+$。不可分解整数最早的应用之一出现在 1945 年，当时 Siegel [Si] 证明，平方和只有在 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$上才可能是万能型——他在证明中使用了不可分解整数（他称之为极端元素）。正如我们已经提到的，这种联系对于前述近期关于更一般的万能型的论文也至关重要（更多详情请参见综述 [Ka4]）。

在实二次数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$中，不可分解整数与 $\sqrt{D}$ （或者当 $D\equiv 1$ 模 4 时与 $\frac{\sqrt{D}-1}{2}$）的连分数密切相关 [Pe2,DS]。此外，我们了解若干三次域参数族中的不可分解整数的结构[KT,Ti2,GMT]，，而实双二次域的一些部分结果可见 [CL+,KTZ,Ma]。除此之外，对于次数更高的域中不可分解整数的结构，我们尚无类似结果。不过，Brunotte[Br] 证明了它们的范数有界，且可以取域的判别式作为上界 [KY2，定理 5]。然而，这个上界未必是最优的。因此，后续一系列论文进一步改进了二次数域的上界 [DS, JK, Ka2, TV]，也改进了若干三次域参数族的上界[Ti2, GMT]。

在继续讨论之前，我们先说明上一段中提及参数族的用意。一般而言，当我们按判别式等指标对数域排序时，研究所有给定次数的数域的性质并非易事。尤其是，它们的类数或单位的大小往往表现得极为不规则。然而，在某些参数族中，情况要清晰得多，例如 Chowla族的实二次数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{4a^2+1})$ [CF]，、由多项式 $x^3-ax^2-(a+3)x-1$ 的 rupture 域构成的最简三次域 Shanks 族 [Sh]，以及与 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ [相对应的三次域 Ennola族1]En a。在这类参数族中，可以用参数 a 显式表示（基本）单位，并控制这些域的算术性质，包括其中的不可分解整数。因此，我们有机会证明适用于无穷多个数域的结果，而非仅针对单个数域；同时，这种情形又比处理所有给定次数的域更简单。不过，还存在一个额外的难点：最简洁的结果可能只对由定义多项式的一个根 ρ 生成的整环 $\mathbb{Z}[\rho]$ 成立，而不适用于整个整数环 $\mathcal{O}_K$。尽管如此，对于无穷多个参数值 a （至少包括某个判别式的平方自由取值）， $\mathbb{Z}[\rho]$ 通常等于极大阶 $\mathcal{O}_K$。因此，在此意义下，本文主要研究整环 $\mathbb{Z}[\rho]$。

除了全正不可分解元，研究其他符号型中的不可分解元也很重要 $\mathfrak{s}$ （本文称为 $\mathfrak{s}$-不可分解元），即那些不能写成

两个具有相同符号型的元素之和 $\mathfrak{s}$。（更多详情及精确定义请见第 2 节。）虽然这些元素与万能型没有直接应用关系，但它们对于确定毕达哥拉斯数（见下文）以及研究雅可比–佩龙算法都至关重要。

在二次数域中，$\mathfrak{s}$-不可分解元也可以通过通常的连分数构造。最简三次域（本文也研究了这类域）具有所有符号型的单位，因此，其$\mathfrak{s}$-不可分解元可以通过乘以单位，从全正不可分解元得到。然而，这显然并不适用于所有全实数域，因此，其他符号型的 $\mathfrak{s}$-不可分解元代表元必须单独处理。本文确定了 Ennola 三次域族中的这类代表元。除实二次数域这一简单情形外，这是关于一般 $\mathfrak{s}$-不可分解元的首个结果。

定理 1.1. 令 ρ 为多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根，其中 $a \geq 3$。那么 1，

$$\begin{gathered} 1+s\rho+\rho^2 \quad \textit{where } 1 \leq s \leq a-1, \\ -v-(a(v-1)+w)\rho+(a(v-1)+w+1)\rho^2 \quad \textit{where } 1 \leq v \leq a-1 \textit{ and } \max\{1, v-1\} \leq w \leq a-1, \\ -1-u\rho+(u+2)\rho^2 \quad \textit{where } 0 \leq u \leq a-2 \end{gathered}$$

是，可通过 乘以全正单位，$\mathbb{Z}[\rho]$ 中所有 $\mathfrak{s}$-不可分解整数。

我们已经指出，$\mathfrak{s}$-不可分解整数与毕达哥拉斯数有关。由于平方和几乎从不在 $\mathcal{O}_K$ 上具有普遍性，我们可以转而只关注那些确实能写成平方和的代数整数。更准确地说，设 $\mathcal{O}$ 为交换环，并令 $\sum\mathcal{O}^2$ 为 $\mathcal{O}$ 中所有能写成 $\mathcal{O}$ 中元素的平方和的元素所组成的集合。此外，令 $\sum^m\mathcal{O}^2 \subseteq \sum\mathcal{O}^2$ 包含 $\mathcal{O}$ 中所有能表示为至多 m 个平方之和的元素。那么

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}) = \inf\left\{m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid \sum\mathcal{O}^2 = \sum^m\mathcal{O}^2\right\}$$

称为环 $\mathcal{O}$ 的毕达哥拉斯数。

关于域的毕达哥拉斯数，已有许多研究成果 [CEP, CDLR, Ho, Pf, Pr], 。本文则聚焦于相关结果知之甚少的整环 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_K$。在这种情况下，$\mathcal{P}(\mathcal{O}) < \infty$，但 Scharlau [Sch] 利用多二次域中的一个巧妙构造证明，$\mathcal{P}(\mathcal{O})$ 可以取得任意大的值。不过，Kala 和 Yatsyna [KY] 找到了一个上界：他们证明存在一个仅取决于该域次数 d 的函数 f，使得 $\mathcal{P}(\mathcal{O}) \leq f(d)$。此外，对于 $2 \leq d \leq 5$，我们有 $\mathcal{P}(\mathcal{O}) \leq d+3$。

实二次数域中所有整环的毕达哥拉斯数由 Peters 确定[Pet]。特别是，$\mathcal{P}(\mathcal{O}) = 5$除少数特定情形外，均已确定。然而，只有在二次情形下，我们才有这样的完整刻画。Kr´asensk´y、Ra˘ska 和 Sgallov´a [KRS] 对实双二次域中的整环取得了一些部分结果，主要涉及极大阶 $\mathcal{O}_K$。关于毕达哥拉斯数的一些近期结果也可见于[Kr、HH、GMT]。

我们沿用 Tinkov´a[Ti1] 的结果来确定 Ennola三次域的毕达哥拉斯数；她证明了 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}[\rho])$，其中 $= 6$ 生成一个最简三次域，即 ρ 是多项式 ρ 的一个根 $x^3-ax^2-(a+3)x-1$，其中 $a \geq 3$。她的证明很大程度上依赖于对（全正）不可分解整数的了解。具体而言，利用她的方法和定理1.1，我们证明如下：

定理 1.2。 设 ρ 是多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根，其中 $a \geq 4$。那么 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}[\rho]) =$ 6.

本文第一部分的结构如下。在第 2 节中，我们回顾关于全实数域的一些（大多是标准的）事实，$\mathfrak{s}$-不可分解元、寻找它们的方法，以及有关本文所研究的最简三次域和 Ennola三次域的信息。第 3 节给出定理 1.1 的证明，并介绍关于 Ennola三次域中 $\mathfrak{s}$-不可分解元的若干新结果。在第 4 节中，我们继续证明定理 1.2。

在第二部分中，我们将注意力转向雅可比–佩龙算法及其与$\mathfrak{s}$-不可分解元的联系。正如我们之前提到的，对于实二次数域 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$，可以利用连分数得到所有$\mathfrak{s}$-不可分解元。下面详细描述这一关系。为简单起见，

令 $D \equiv 2$ 为模 3 (mod 4) 的无平方因子正整数（模 $D \equiv 1$ (mod 4) 的情形类似），并令 $\sqrt{D} = [u_0, \overline{u_1, u_2, \ldots, u_{s-1}u_s}]$ 为 $\sqrt{D}$ 的周期连分数。此外，设

$$\frac{p_i}{q_i} = [u_0, \ldots, u_i]$$

其中，对于每个 $i \in \mathbb{N}_0$（$= \mathbb{Z}_{\geq 0}$），p_i 和 q_i 是互素正整数；此外，令 $p_{-1} = 1$ 和 $q_{-1} = 0$。那么，代数整数 $\alpha_i = p_i + q_i\sqrt{D}$ 称为收敛分数（注意，α_{s-1} 是基本单位）。此外，我们可以定义元素 $\alpha_{i,r} = \alpha_i + r\alpha_{i+1}$，其中 $0 \leq r < u_{i+2}$；我们称它们为半收敛分数。经过乘以 -1 及共轭，这些半收敛分数涵盖了 $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ [Pe2、DS] 中所有的 $\mathfrak{s}$-不可分解元。对于奇数 i，我们得到全正不可分解元；偶数 i 的情形则产生符号型为（+，−）的 $\mathfrak{s}$-不可分解元。

若要在更高次数的域中得到类似结果，我们就不能依赖经典连分数，因为它只有在二次无理数的情况下才呈周期性。正是这一动机——寻找一种算法，使所有次数大于 2 的无理数都能得到周期展开，这也是埃尔米特提出的设想——引发了人们对多维连分数的兴趣。然而，对于大多数此类连分数，其周期性问题仍悬而未决。我们只知道，Karpenkov 最近提出的算法 [Kar]，在全实三次域中总能给出所需的周期展开。这种情况部分是因为，要证明某个展开不具有周期性极其困难。人们也在尝试为代数整数定义通常的连分数——例如参见 [MVV]。

本文研究这些算法中或许最为知名的一种，即雅可比–佩龙算法 (JPA；第 5 节将详细介绍）。该算法最早出现在雅可比的研究中 [Ja],；他试图寻找一种能够解决埃尔米特问题的算法。他只考虑了维数为 2 的情形；后来，佩龙将他的结果推广到了任意维数 [Pe1]。我们选择这种算法的动机之一（除了 JPA 对我们的研究目的而言似乎最为实用这一务实原因外）是，它能给出相应域中的一个单位，即所谓的哈塞–伯恩斯坦单位 [BeH]。然而，与经典连分数不同，这个单位不一定是基本单位 [Vo], ，但在某些情况下确实是 [Ad，TB]。

自 JPA 首次出现以来，许多研究探讨了不同类型的周期展开。例如，Bernstein [Be1、Be2、Be3] 深入研究了满足某些特定条件的向量 $(\alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1})$ 的 JPA 展开，其中 $\alpha = \sqrt[n]{D}$ 和 D。此外，我们知道，在每个次数为 d 的实数域 K 中，都可以找到一个由 K 中元素构成的 $(d-1)$ 元组，其雅可比–佩龙展开 [DPLR] 是周期的。这种展开甚至可以达到任意的周期长度 [LR,Vo]。更多信息请参阅 [Be4、Schw]。

本文研究最简单的[Sh] 以及 Ennola 的三次域 [En1，En2]。在第 6 节和第 7节中，我们证明这些展开是周期的。例如，我们在其中证明了以下定理：

定理 1.3。当且仅当满足以下条件时，向量 $(1, |\tau|, \tau^2)$ 的雅可比–佩龙展开是周期的
(1) τ 是多项式 $x^3 + (a-1)x^2 - ax - 1$ 的根，其中 $a \geq 3$；或者 (2) τ 是多项式 $x^3 - (a-1)x^2 - ax - 1$ 的根，其中 $a \geq 5$。

因此，在第 8 节中，我们提出了渐近分数和半收敛的定义，它们分别对应于源自经典连分数的同类元素。我们讨论这些元素是否 $\mathfrak{s}$-不可分解；在某些情况下，它们确实不可分解，但并非总是如此。例如，我们将在定理8.2中给出以下结果。

定理 1.4. 设 ρ，ρ'，ρ''，ψ，ψ' 和 ψ'' 如小节 7.1 和 7.2中所述。则
(1) 向量 $(1, -\rho', \rho'^2)$、$(1, -\psi', \psi'^2)$ 和 $(1, -\psi'', \psi''^2)$ 的 JPA 展开的所有半收敛分数在其符号型中均为 $\mathfrak{s}$-不可分解；(2) 向量 $(1, \rho, \rho^2)$、$(1, -\rho'', \rho''^2)$ 和 $(1, \psi, \psi^2)$ 的 JPA 展开的某个半收敛分数在其符号型中是$\mathfrak{s}$-可分解的。

为帮助消除这一歧义，我们在第9节为不属于上述族的三次域具体实例提供了类似数据。在第10节，我们推广了定义，并研究渐近分数的其他线性组合。

总之，雅可比–佩龙算法似乎有时能在$\mathfrak{s}$-不可分解元方面给出不错的结果。然而，到目前为止，我们还没有发现像经典连分数那样密切的联系。这也是我们开始研究其他多维连分数算法的原因

；我们在第11节讨论了其中一些实验。我们还可以提及 ˇRada、Starosta 和 Kala 在论文 [RSK]中提出的这些一般算法的另一种方法。

最后请注意，第 6–9 节中的许多论证主要是冗长而直接的计算。在这种情况下，我们通常只在正文中说明方法并给出一个示例，而将大部分实际计算留给附录 A6–A9 [KST]。我们使用的计算机程序可在网上获取，网址为 https://sites.google.com/view/tinkovamagdalena/codes。本文部分基于以下学位论文 [Sg、Ti3]。

2. Preliminaries on number fields

设 K 是次数为 d 的全实数域，并用 $\mathcal{O}_K$ 表示其代数整数环。对于元素 $\alpha \in K$，我们将 α 的迹和 α 的范数定义为

$$\mathrm{Tr}(\alpha) = \sum_{i=1}^{d} \sigma_i(\alpha) \qquad \text{and} \qquad N(\alpha) = \prod_{i=1}^{d} \sigma_i(\alpha)$$

其中 σ_i 是 K 到 $\mathbb{R}$的所有嵌入。 $\alpha \in K$ 的符号型是由以下形式的符号组成的 d 元组

$$\mathfrak{s}(\alpha) = (\mathrm{sgn}(\sigma_1(\alpha)), \mathrm{sgn}(\sigma_2(\alpha)), \ldots, \mathrm{sgn}(\sigma_d(\alpha)))$$

其中 sgn 是符号函数。在本文中，我们将用符号+ 和 $-$替代 ± 1 在 $\mathfrak{s}(\alpha)$ 中的记号。此外，我们会稍微滥用这一记号，也用符号 $\mathfrak{s}$ 表示给定符号的一个 d-元组。

设 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_K$ 是数域 K中的一个整环。则 $\mathcal{O}^\times$ 表示其单位群。我们用符号 $\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}$ 表示 $\mathcal{O}$ 中符号型为 $\mathfrak{s}$的元素所成的子集。若元素$\alpha \in \mathcal{O}^{\mathfrak{s}}$ 不能写成 $\alpha = \beta + \gamma$ （其中 $\beta, \gamma \in \mathcal{O}^{\mathfrak{s}}$），则称其在 $\mathcal{O}$ 中是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。否则，称 α 在 $\mathcal{O}$中是 $\mathfrak{s}$-可分解的。过去，人们对全正不可分解整数这一特殊情形进行了深入研究，即 $\mathfrak{s} = (+, +, \ldots, +)$ 的情形。此外，若存在一个单位 $\varepsilon \in \mathcal{O}^\times$ 使得 $\alpha = \varepsilon\beta$，则称元素$\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ 相伴。同样，我们也用符号 $X^{\mathfrak{s}}$ 表示 X 中所有符号型为 $\mathfrak{s}$ 的元素所成的集合，其中 X 是 K 的任意子集。

对于 $\mathcal{O}$，我们将 $\mathcal{O}$ 的余不同理想定义为

$$\mathcal{O}^\vee = \{\delta \in K; \mathrm{Tr}(\alpha\delta) \in \mathbb{Z} \text{ for all } \alpha \in \mathcal{O}\}.$$

此外，若对于某个 $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\eta]$，存在 $\eta \in \mathcal{O}$，其最小多项式为 f，则我们知道

$$\mathcal{O}^\vee = \frac{1}{f'(\eta)}\mathbb{Z}[\eta]$$

其中， f' 是 f [Na 的导数。命题 4.17]。容易看出，若对于 $\alpha \in \mathcal{O}^{\mathfrak{s}}$，存在$\delta \in \mathcal{O}^\vee, {}^{\mathfrak{s}}$ 使得 $\mathrm{Tr}(\alpha\delta) = 1$, 则 α 是 $\mathcal{O}$ 中的 $\mathfrak{s}$-不可分解元。然而，反向推论一般并不成立。

2.1. 确定 $\mathfrak{s}$-不可分解元的方法。 现在我们将介绍一种方法，用于确定全正不可分解元的候选元；该方法由我们在 [KT，第 4], 节中提出，并说明如何对其进行修改，以得到 $\mathfrak{s}$适用于其他某些符号型的 -不可分解元 $\mathfrak{s}$。

令 $\sigma\colon K \to \mathbb{R}^d$ 为由 $\sigma(\alpha) = (\sigma_1(\alpha)\ \sigma_2(\alpha) \ldots, \sigma_d(\alpha))$ 定义的对角嵌入。此外，我们用 $\mathbb{R}^{d,\,+} = \{(v_1, \ldots, v_d) \in \mathbb{R}^d, v_i > 0$ 表示 $\mathbb{R}^d$ 的全正八分体，其中 $i\}$ 取遍所有元素。在此八分体中，我们可以找到 K 中所有全正元素的像。

当我们考虑 K 中全正单位的乘法作用所对应的基本域时，根据 Shintani单位定理 [Ne，定理 (9.3)], 我们知道这个基本域可以选为一个多面体锥 $\mathcal{Q}$。回忆一下，多面体锥是有限个单纯形锥的不交并。这意味着，对于每个元素 $\alpha \in \mathcal{O}^+$，都存在一个全正单位 $\varepsilon \in \mathcal{O}^{\times,\,+}$，使得其像 $\sigma(\alpha\varepsilon)$ 属于这些单纯形锥之一。我们将用符号 $\mathcal{C}(\alpha_1, \ldots, \alpha_e) = \mathbb{R}^+\alpha_1 + \cdots + \mathbb{R}^+\alpha_e$表示这些锥，用 $\overline{\mathcal{C}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_e)$ 表示它们的闭包，即 $\overline{\mathcal{C}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_e) = \mathbb{R}_0^+\alpha_1 + \cdots + \mathbb{R}_0^+\alpha_e$。

对于全实三次域的情形，Thomas 和 Vasquez 在 [ThV，定理 1]中描述了这些单纯形锥的一种可能选取方式。设 ε_1， $\varepsilon_2 \in \mathcal{O}^{\times,\,+}$ 是满足某些附加性质的两个单位（特别是，它们是 *proper* （定义见 [ThV]）。那么

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} &= \mathcal{C}(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \sqcup \mathcal{C}(1, \varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}) \sqcup \mathcal{C}(1, \varepsilon_1) \sqcup \mathcal{C}(1, \varepsilon_2) \sqcup \mathcal{C}(1, \varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}) \sqcup \mathcal{C}(1) \\ &\subset \overline{\mathcal{C}}(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \cup \overline{\mathcal{C}}(1, \varepsilon_1, \varepsilon_1\varepsilon_2^{-1}),\end{aligned}$$

其中 $\sqcup$是不交并。此外，为了得到全正不可分解元，我们可以将范围限制在这两个集合的某些有界子集中。更具体地说，设 $\mathcal{D}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = [0,1]\alpha_1 + [0,1]\alpha_2 + [0,1]\alpha_3$；我们将这样的集合称为平行六面体。那么，若 $\alpha \in \mathcal{O}^+$，则存在一个全正单位 $\varepsilon \in \mathcal{O}^{\times,+}$使得 $\alpha\varepsilon$ 属于 $\overline{\mathcal{C}}(1,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 或 $\overline{\mathcal{C}}(1,\varepsilon_1,\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1})$。若 $\alpha\varepsilon \in \overline{\mathcal{C}}(1,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，则可将其表示为$\alpha\varepsilon = t_1 + t_2\varepsilon_1 + t_3\varepsilon_2$，其中 $t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}_0^+$。然而，若 $t_1 > 1$，则 $\alpha\varepsilon$ 全大于 1，这意味着它是可分解的。对于系数 t_2 和 t_3，也可以得出类似结论；对于属于 $\overline{\mathcal{C}}(1,\varepsilon_1,\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1})$ 的 $\alpha\varepsilon$，结论同样成立。因此，所有不可分解整数的候选者都包含在 $\mathcal{D}(1,\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 或 $\mathcal{D}(1,\varepsilon_1,\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1})$ 中。由此，要在 $\mathcal{O}$ 中求出全部全正不可分解元（相差全正单位的情形视为相同），只需确定 $\mathcal{O}$ 中属于这两个集合的所有元素，并判定其中哪些确实不可分解。

这样，我们就能得到 $\mathcal{O}$ 中所有的全正不可分解元。此外，如果对于给定的符号型 $\mathfrak{s}$，集合 $\mathcal{O}^{\times,\mathfrak{s}}$ 非空，那么所有 $\mathfrak{s}$-不可分解元都可以表示为 $\alpha\varepsilon$，其中 $\varepsilon \in \mathcal{O}^{\times,\mathfrak{s}}$，且 α 是一个全正不可分解元。然而，在我们的数域中，可能出现对于某个 $\mathfrak{s}$，$\mathcal{O}^{\times,\mathfrak{s}} = \emptyset$ 的情况。在这种情况下，$\mathfrak{s}$-不可分解元并不与全正不可分解元相伴。对于这些元，我们必须对方法略作修改。取某个元素 $\gamma \in \mathcal{O}^{\mathfrak{s}}$，并令 ε_1 和 ε_2 如上所述。于是，$\overline{\mathcal{C}}(\gamma,\gamma\varepsilon_1,\gamma\varepsilon_2) \cup \overline{\mathcal{C}}(\gamma,\gamma\varepsilon_1,\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1})$ 包含 $\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}$ 关于 $\mathcal{O}^{\times,+}$ 乘法的一个基本域；也就是说，对于每个元素 $\alpha \in \mathcal{O}^{\mathfrak{s}}$，存在（不一定唯一的）$\varepsilon \in \mathcal{O}^{\times,+}$，使得 $\alpha\varepsilon \in \overline{\mathcal{C}}(\gamma,\gamma\varepsilon_1,\gamma\varepsilon_2) \cup \overline{\mathcal{C}}(\gamma,\gamma\varepsilon_1,\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1})$。如前所述，如果 $\alpha\varepsilon$ 不属于 $\mathcal{D}(\gamma,\gamma\varepsilon_1,\gamma\varepsilon_2) \cup \mathcal{D}(\gamma,\gamma\varepsilon_1,\gamma\varepsilon_1\varepsilon_2^{-1})$，那么 α 是 $\mathfrak{s}$-可分解的。对于以这种方式从 $\mathcal{O}^{\mathfrak{s}}$ 中得到的有限个元素，我们可以像之前一样（例如利用 $\mathcal{O}$ 的余不同理想）判定其中哪些是 $\mathfrak{s}$-不可分解元。

2.2. 最简单三次域。 本文将详细研究两类全实三次数域。其中一类是所谓的最简单三次域 $\mathbb{Q}(\rho)$，它们由多项式 ρ 的根 $f(x) = x^3 - ax^2 - (a+3)x - 1$ 生成，其中 $a \geq -1$ [Sh]。本文将多项式 f 的根记为 $a+1 < \rho$，$-2 < \rho' < -1$和 $-1 < \rho'' < 0$。此外，若 $a \geq 7$，则

$$a+1 < \rho < a+1+\frac{2}{a},\quad -1-\frac{1}{a+1} < \rho' < -1-\frac{1}{a+2},\ \text{and}\ -\frac{1}{a+2} < \rho'' < -\frac{1}{a+3}. \tag{2.1}$$

这些界大多来自 [LP], ，只有关于 ρ' 的原始估计略有改进（例如参见[Ti1]）。

我们知道 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\rho]$ 在无穷多个 a的情形下成立，例如当 a^2+3a+9的判别式的平方根 K 是平方自由数时。此外，这些域 $\mathbb{Q}(\rho)$是伽罗瓦的。在 $\mathbb{Z}[\rho]$ 中，一组基本单位由共轭元 ρ 和 ρ' [Th]构成。由此可知，在这些域中，存在具有所有符号型的单位；此外，每个全正单位都是一个平方。

应用第 2.1小节所述的方法，我们确定了全正不可分解元的结构如下：

定理 2.1 （ [KT，定理 1.2]）。 设 K 是参数为 $a \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$的最简三次域。元素 1、 $1+\rho+\rho^2$以及 $-v-w\rho+(v+1)\rho^2$ 其中 $0 \leq v \leq a$ 且 $v(a+2)+1 \leq w \leq (v+1)(a+1)$在相差一个全正单位的意义下，构成了$\mathbb{Z}[\rho]$中所有全正不可分解元。

请注意， [KT] 中的定理 1.2 还包含假设 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\rho]$。然而，在证明中并未使用这一假设，因此上述定理 2.1 按照所述形式成立。此外，该定理还给出了每种符号型 $\mathfrak{s}$下的所有 β -不可分解元 $\mathfrak{s}$。由于 $\mathbb{Q}(\rho)$ 含有具有所有符号型的单位，每个这样的 β 都可以表示为 $\beta = \alpha\varepsilon$，其中 α 是定理 2.1中的一个元素，而 ε 是符号型为 $\mathfrak{s}$的单位。

此外，本文采用以下记号：

$$\theta_{v,W} = -v - (v(a+2)+1+W)\rho + (v+1)\rho^2$$

其中 $0 \leq v \leq a$ 和 $0 \leq W \leq a-v$。

2.3. Ennola三次域。 第二族是 Ennola三次域 [En1,En2]。它们由多项式的一个根 $\rho > 1$ 生成，该多项式为 $x^3 + (a-1)x^2 - ax - 1$ 其中 $a \geq 3$。在此情形下，我们将 ρ的共轭元记为

$$1+\frac{1}{a+3} < \rho < 1+\frac{1}{a+2},\quad -\frac{1}{a} < \rho' < -\frac{1}{a+1},\ \text{and}\ -a+\frac{1}{a^2+a} < \rho'' < -a+\frac{1}{a^2}. \tag{2.2}$$

在 Ennola 三次域中， $\mathbb{Z}[\rho]$ 的一组基本单位由 ρ 和 $\rho-1$ [Th]构成。请注意，在某些情况下，这些单位也构成极大阶 $\mathcal{O}_K$ [En2]中的一组基本单位。

它们的符号型为（+，−，−）。因此，整环 $\mathbb{Z}[\rho]$ 只包含符号型为（+，−，−）、（−，+，+）、（+，+，+）和（−，−，−）的单位。这也意味着，在 $\mathbb{Z}[\rho]$ 中，我们有两组不同的 $\mathfrak{s}$-不可分解元，它们无法通过乘以单位（无论其符号型如何）相互相伴。

The 全正不可分解元的集合在 [KT] 中按如下方式确定 :

命题 2.2 ([KT，命题 8。1])。令 ρ 为多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$的一个根，其中 $a\geq 3$。那么 1 和 $1+s\rho+\rho^2$ 其中 $1\leq s\leq a-1$ 在乘以全正单位的意义下，是 $\mathbb{Z}[\rho]$中的全部全正不可分解元。

与最简单三次域的情形类似，命题 2.2 涵盖了所有具有符号型 $\mathfrak{s}=(+,+,+)$、$(-,-,-)$、$(+,-,-)$、$(-,+,+)$ 的 $\mathfrak{s}$-不可分解元。在 $\mathbb{Z}[\rho]$ 中的其余 $\mathfrak{s}$-不可分解元将在第 3 节中推导。此外，本文将采用以下记号：

(1) $\kappa_s=1+s\rho+\rho^2$ 其中 $1\leq s\leq a-1$，(2) $\lambda_{v,\ w}=-v-(a(v-1)\ +w)\rho+(a(v-1)\ +w+1)\rho^2$ 其中 $1\leq v\leq a-1$ 且 $\max\{1,v-1\}\leq w\leq a-1$，(3) $\mu_u=-1-u\rho+(u+2)\rho^2$ 其中 $0\leq u\leq a-2$。

请注意，这些元素是定理 $\mathfrak{s}$中引入的所有 1.1 .

3. Indecomposable integers in Ennola's cubic fields

按照小节 2.1 中所述的方法，我们将找出 Ennola三次域中 $\mathfrak{s}=(+,-,+)$ 的所有 $\mathfrak{s}$-不可分解元。我们选择这个具体的符号型，是因为在余不同理想的整环 $\mathbb{Z}[\rho]$ 中起作用的元素 $f'^{(1)}(\rho)$ 具有这种符号型。请注意，~~具有~~这种符号型的 $\mathfrak{s}$-不可分解元与具有以下符号型的 $\mathfrak{s}$-不可分解元相伴：$\mathfrak{s}=(-,+,-)$、$(-,-,+)$、$(+,+,-)$。

注意，在 [KT], 中，我们使用全正单位 1、ρ^2 和 $\rho(\rho-1)$ 来确定 $\mathbb{Z}[\rho]$中的全正不可分解元的结构。此外，正如我们将在下文第3.5小节中讨论的那样，$-1+\rho^2$ 这一符号型为 (+，−，+) 的元素具有最小范数 $2a-3$（按绝对值计），且该范数无法由与有理整数相伴的元素取得。注意，很容易验证$-1+\rho^2$ 的最小多项式为 $x^3-(a^2-2)x^2-(a-1)^2x+2a-3$。

现在，我们将采用第 $\mathfrak{s}$2.1小节末尾所述的求出所有 $\gamma=-1+\rho^2$-不可分解元的方法；取 $\varepsilon_1=\rho^2$ 和 $\varepsilon_2=-1+\rho^2$ 来定义相应的两个平行六面体。

3.1. 第一个平行六面体。第一个平行六面体由三元组 $-1+\rho^2$、$(-1+\rho^2)\rho^2=-a+1-(a^2-a-1)\rho+(a^2-a)\rho^2$ 和 $(-1+\rho^2)\rho(\rho-1)\ =-a-(a^2-2)\rho+(a^2-1)\rho^2$ 生成。第一个平行六面体包含如下形式的元素

$$\begin{aligned}&-1-w-w(a+1)\rho+(1+w(a+1))\rho^2 \text{ where } 1\leq w\leq a-2,\\&-2-w-w(a+1)\rho+(2+w(a+1))\rho^2 \text{ where } a-1\leq w\leq 2a-4.\end{aligned}$$

然而，第二行中的元素可以改写为

$$\begin{aligned}-2-w-w(a+1)\rho+(2+w(a+1))\rho^2=&(-1-w_1-w_1(a+1)\rho+(1+w_1(a+1))\rho^2)\\&+(-1-w_2-w_2(a+1)\rho+(1+w_2(a+1))\rho^2)\end{aligned}$$

其中 $w_1=a-2$ 和 $w_2=w-(a-2)$。显然，$w-(a-2)\ \geq 1$ 和 $w-(a-2)\ \leq a-2$。因此，这些元素是 $\mathfrak{s}$-可分解的，只需考虑第一行中的整数。

3.2. 第二个平行六面体。第二个平行六面体由三元组 $-1+\rho^2$、$(-1+\rho^2)\rho^2=-a+1-(a^2-a-1)\rho+(a^2-a)\rho^2$ 和 $(-1+\rho^2)\rho(\rho-1)^{-1}=\rho+\rho^2$ 生成。因此，我们得到以下内部元素：

$$m+n\rho+o\rho^2=-t_1-(a-1)t_2+(-(a^2-a-1)t_2+t_3)\rho+(t_1+(a^2-a)t_2+t_3)\rho^2$$

其中 $0\leq t_1,t_2,t_3<1$和 $m,n,o\in\mathbb{Z}$。由于 $-1+\rho^2$的范数为 $-(2a-3)$，且 $\rho(\rho-1)^{-1}=1+a\rho+\rho^2$，所以必有 $t_1=\frac{t_1'}{2a^2-3a}$，$t_2=\frac{t_2'}{2a^2-3a}$和 $t_3=\frac{t_3'}{2a^2-3a}$，其中 $0\leq t_1',t_2',t_3'<2a^2-3a$，$0<t_2'$和$t_1',t_2',t_3'\in\mathbb{Z}$。此外，我们很容易得到以下同余关系

$$\begin{aligned}t_1'&\equiv-(a-1)t_2' \pmod{2a^2-3a},\\t_3'&\equiv(a^2-a-1)t_2' \pmod{2a^2-3a}.\end{aligned}$$

令 $t = t'_2$。此外，令 $t'_1 = -(a-1)t + k(2a^2-3a)$，其中 $1 \le k \le a-1$ 满足 $(k-1)(2a-1) \le t \le k(2a-1) - 1$。类似地，令 $t'_3 = (a^2-a-1)t - l(2a^2-3a)$，其中某个 $l \in \mathbb{N}_0$。假设如此，我们有

$$(m, n, o) = (-k, -l, t+k-l).$$

此外，对于某个 $B \in \{1,2,3\}$，我们有 $l + B = t + k - l$，这是由以下事实得出的：

$$B = -l + t + k - l = n + o = -(a^2-a-1)t_2 + t_3 + t_1 + (a^2-a)t_2 + t_3 = t_1 + t_2 + 2t_3$$

其中 $0 \le t_1$、t_2、$t_3 < 1$，假设 B 是一个整数。

若 $t \equiv k \pmod 2$，则显然有 $B = 2$。否则，我们得到以下两种情况。若 $t \le (k-1)(2a-1) + 2(k-1)$，则 $B = 3$。若 $t \ge (k-1)(2a-1) + 2k$，则 $B = 1$。这里，重要的是要注意到 k 与 $(k-1)(2a-1)$ 的奇偶性不同，因此，对于形如 $(k-1)(2a-1) + 2s$ 的那些 t，会出现奇数系数 B。

现在我们将讨论上述元素在什么条件下是 $\mathfrak{s}$-可分解的。

引理 3.1. 若 $k \ge 2$ 且 $B = 2$，则元素 $-k - l\rho + (t+k-l)\rho^2$ 是 $\mathfrak{s}$-可分解的。

证明. 在这种情况下，我们的元素可以分解为

$$-k - l\rho + (t+k-l)\rho^2 = (-k_1 - l_1\rho + (s_1 + k_1 - l_1)\rho^2) + (-k_2 - l_2\rho + (s_2 + k_2 - l_2)\rho^2)$$

其中

$$k_1 = k-1, \qquad l_1 = (k-1)a - 1, \qquad s_1 = (k-1)(2a-1) - 1,$$
$$k_2 = 1, \qquad l_2 = \frac{t - k(2a-1) + 2a}{2}, \qquad s_2 = t - k(2a-1) + 2a.$$

注意，这两个元素都位于第二个平行六面体中，并且具有 $B = 1$。此外，重要的是要认识到 $1 \le s_2 \le 2a-2$，其中上界是由 k 和 $k(2a-1) - 1$ 的奇偶性不同这一事实得出的。□

注意，在前一个引理中，我们省略了 $k = 1$ 的情形，稍后将对此进行讨论；对于该情形，我们得到 $\mathfrak{s}$-不可分解元。

我们将继续讨论 $B = 3$。

引理 3.2. 若 $B = 3$，则元素 $-k - l\rho + (t+k-l)\rho^2$ 是 $\mathfrak{s}$-可分解的。

证明. 对于 $B = 3$，我们的元素可分解为

$$-k - l\rho + (t+k-l)\rho^2 = (-k_1 - l_1\rho + (s_1 + k_1 - l_1)\rho^2) + (-k_2 - l_2\rho + (s_2 + k_2 - l_2)\rho^2)$$

其中 $-k_1 - l_1\rho + (s_1 + k_1 - l_1)\rho^2$ 与引理 3.1 的证明中一样，并且

$$k_2 = 1, \qquad l_2 = \frac{t - k(2a-1) + 2a - 1}{2}, \qquad s_2 = t - k(2a-1) + 2a.$$

Note 第二个元素具有 $B = 2$。在这种情况下，我们得到 $1 \le s_2 \le 2a-3$，正如所希望的 d. □

因此，剩下的元素是满足 $B = 1$、可表示为

$$-v - (a(v-1) + w)\rho + (a(v-1) + w + 1)\rho^2$$

其中 $1 \le v \le a-1$ 和 $v \le w \le a-1$；以及满足 $B = 2$ 和 $k = 1$、可改写为

$$-1 - u\rho + (u+2)\rho^2$$

其中 $0 \le u \le a-2$。

3.3. 不可分解元的性质。显然，第一个平行六面体中剩余的元素可以与第二个平行六面体中满足 $B = 1$ 的元素合并，共同构成如下形式的元素集合：$-v - (a(v-1) + w)\rho + (a(v-1) + w + 1)\rho^2$ 其中$1 \le v \le a-1$ 且 $\max\{1, v-1\} \le w \le a-1$。注意，我们排除了满足 $w = 0$ 的元素，该元素为 $-1 + \rho^2$，且已用于确定 $\mathfrak{s}$-不可分解元，因为它乘以一个单位后已包含在此集合中。

现在我们将证明，迄今为止尚未排除的所有元素都是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。

命题 3.3。设 ρ 是多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根，其中 $a\geq 3$。那么

$$-v-(a(v-1)+w)\rho+(a(v-1)+w+1)\rho^2 \quad where\ 1\leq v\leq a-1\ and\ \max\{1,v-1\}\leq w\leq a-1,$$
$$-1-u\rho+(u+2)\rho^2 \quad where\ 0\leq u\leq a-2$$

在全正单位乘法意义下，恰为 $\mathbb{Z}[\rho]$ 中关于 $\mathfrak{s}=(+,-,+)$ 的所有 $\mathfrak{s}$-不可分解整数。

证明。为证明这一结论，我们将使用余不同理想中的元素 $\delta=\frac{1}{f'(\rho)}(\rho+a)\in\mathbb{Z}[\rho]^\vee,\mathfrak{s}$。简单计算可得，若 $\alpha=v_1+v_2\rho+v_3\rho^2\in\mathbb{Z}[\rho]$，则 $\mathrm{Tr}(\alpha\delta)=v_2+v_3$。因此，对于元素 $-v-(a(v-1)+w)\rho+(a(v-1)+w+1)\rho^2$，其迹为 1，这立即表明这些元素是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。

因此，尚需讨论元素 $\mu_u=-1-u\rho+(u+2)\rho^2$，对这些元素有 $\mathrm{Tr}(\mu_u\delta)=2$。注意，这些元素只能分解为两个元素 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Z}[\rho]^{\mathfrak{s}}$ 之和，并且满足 $\mathrm{Tr}(\alpha_i\delta)=1$，其中 $i=1$ 为 2。此外，回想一下，$\frac{1}{f'(\rho)}$ 与我们的元素具有相同的符号型。对于它，我们得到

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{1}{f'(\rho)}(v_1+v_2\rho+v_3\rho^2)\right)=v_3.$$

这意味着 如果 μ_u 是 $\mathfrak{s}$-可分解的，那么唯一可能的分解形式为

$$-1-u\rho+(u+2)\rho^2=\underbrace{v_1-v_2\rho+(v_2+1)\rho^2}_{\alpha_1}+\underbrace{w_1-w_2\rho+(w_2+1)\rho^2}_{\alpha_2}$$

其中 $0\leq v_2$、$w_2\leq u$。此外，我们可以看到

$$-v_2\rho'+(v_2+1)\rho'^2,-w_2\rho'+(w_2+1)\rho'^2>0$$

因为 v_2、$w_2\geq 0$ 且 $\rho'<0$。因此，元素 α_1 和 α_2 具有符号型 $(+,-,+)$，当且仅当 $v_1,w_1\leq -1$。然而，在此条件下，我们永远无法得到 $v_1+w_1=-1$。因此，我们的元素是 $\mathfrak{s}$-不可分解元。□

因此，我们得到了迹为 1 的 $\mathfrak{s}$-不可分解元集合（几乎呈三角形），以及剩余元素所在的直线；对于这些剩余元素，我们找到了一个余不同理想中的元素，其迹为 2。现在我们将证明这个迹是最小的。

命题 3.4. 令 $\mu_u=-1-u\rho+(u+2)\rho^2$，其中 $0\leq u\leq a-2$，且 $\mathfrak{s}=(+,-,+)$。则

$$\min_{\delta\in\mathbb{Z}[\rho]^\vee,\mathfrak{s}}\mathrm{Tr}(\mu_u\delta)=2.$$

证明。为证明这一陈述，我们将采用与 [Ti2、第5.2]小节中所用的类似方法。假设对于某个元素 $\delta=\frac{\delta_1}{f'(\rho)}\in\mathbb{Z}[\rho]^\vee,\mathfrak{s}$，有 $\mathrm{Tr}(\mu_u\delta)=1$。这意味着 $\delta_1\in\mathbb{Z}[\rho]$ 具有如下形式

$$\delta_1=((u+2)a-2)\frac{k}{2}-a\frac{l}{2}+\left(a+(u+2)\frac{k}{2}+(2a-1)\frac{l}{2}\right)\rho+(1+l)\rho^2$$

对于某些 $k,l\in\mathbb{Z}$。注意，由于我们的 $\mathfrak{s}$-不可分解元与 $f'(\rho)$具有相同的符号型，δ_1必须是全正的。现在我们将讨论几个迹；如果 δ_1 是全正的，则这些迹应为正。

首先，直接计算可得

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\delta_1}{f'(\rho)}(-1-\overline{u}\rho+(\overline{u}+2)\rho^2)\right)=(u-\overline{u})k+1.$$

若 $0\leq\overline{u}\leq a-2$，则我们知道 $-1-\overline{u}\rho+(\overline{u}+2)\rho^2$ 具有与 $f'(\rho)$相同的符号型 $(+,-,+)$。利用关于 ρ、ρ' 和 ρ''的估计，也不难验证对于 $\overline{u}=-1,a-1$，这一点同样成立；其中，我们只需按照第4节的思路，对 ρ' 使用更精确的下界。对于 $\overline{u}=u-1$和 $\overline{u}=u+1$这两种选择，我们得到迹 $k+1$ 和 $-k+1$。这两个迹必须都为正，而这只有在 $k=0$ 时才可能。

对于 $k=0$，元素 δ_1 仅当 $l=2l'$ 对某个 $l'\in\mathbb{Z}$ 成立时才属于 $\mathbb{Z}[\rho]$。如果考虑具有符号型 $(+,-,+)$ 的元素 $-1+\rho^2$，则得到

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\delta_1}{f'(\rho)}(-1+\rho^2)\right)=-l'.$$

因此， $l' < 0$。另一方面，如果考虑 $-1+\rho^2$ 与全正单位 $\rho(\rho-1)^{-1} = 1+a\rho+\rho^2$ 的乘积，则得到

$$\mathrm{Tr}\left(\frac{\delta_1}{f'(\rho)}(-1-\rho^2)(1+a\rho+\rho^2)\right) = 2l'+2,$$

这意味着 $l' > -1$。然而，这与 $l' < 0$ 矛盾。因此，不存在满足 $\mathbf{Tr}\left(\mu_{u\,f'}^{\delta_1}(\rho)\right) = 1$ 的全正 δ_1，这便给出了该命题的结论。□

3.4. 单位的大小。 每个单位都是 $\mathfrak{s}$-不可分解元，其符号型为 $\mathfrak{s}$。在本小节中，我们将推导 Ennola 三次域中单位的一些性质，并在第 4 节中利用这些性质求出 $\mathbb{Z}[\rho]$的毕达哥拉斯数，或在小节 3.5 中推导最小范数。

引理 3.5. 设 $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\rho]$ 是一个单位，满足 $|\varepsilon|$、$|\varepsilon'|$、$|\varepsilon''| < a$。那么 $\varepsilon \in \{\pm 1, \pm\rho\}$.

证明。回顾一下， $\mathbb{Z}[\rho]$ 中的一组基本单位由 ρ和 $\rho-1$生成。此外，我们可以估计 ρ的共轭元:

$$1+\frac{1}{a+3} < \rho < 1+\frac{1}{a+2},$$
$$-\frac{1}{a} < \rho' < -\frac{1}{a+1},$$
$$-a+\frac{1}{a^2+a} < \rho'' < -a+\frac{1}{a^2}.$$

设 $\varepsilon = \pm\rho^k(\rho-1)^l$ ，其中 k、$l \in \mathbb{Z}$。若 $k \geq 0$ 且 $l < 0$，则显然 $|\varepsilon| > a$。若 $k < 0$ 且 $l \geq 0$，则 $|\varepsilon'| > a$。类似地，若 $k \geq 0$ 且 $l > 0$，则 $|\varepsilon''| > a$。

若 $l = 0$ 且 $k \geq 2$，则得到 $|\varepsilon''| > a$。因此，剩下需要求解的是 $k < 0$ 且 $l < 0$的情形。若 $k < l$，不难看出 $|\varepsilon'| > a$。同样， $l < k$ 可推出 $|\varepsilon| > a$。因此，只需考虑 $k = l$。此外，只需证明最小多项式（$\rho(\rho-1)$）$^{-1}$ 有一个大于 a的根；在这种情况下，该元素的每个幂都有一个根 $> a$。容易验证， $\rho(\rho-1)$的最小多项式为 $x^3-(a^2+a)x^2+(2a+1)x-1$。此外，该多项式在区间 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$内有一个根，由此即可得到前述结论。因此， $k = 0$ 和 $l = 0$，以及 $k = 1$ 和$l = 0$ 是其共轭元的绝对值均小于 a 的仅有情形。□

此外，引理 3.5 表明，若 ε 是某个单位的平方，那么它的某个共轭元大于 a^2 ，除非 $\varepsilon = 1$， ρ^2; 我们将在确定 $\mathbb{Z}[\rho]$的毕达哥拉斯数时使用这一引理。

引理 3.6. 设 $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\rho]$ 是一个单位的平方，且满足 $\varepsilon' > a^2$。若 $\varepsilon \neq \rho^{-2}, \rho^{-2}(\rho-1)^2,$ ，则以下至少一项成立:

(1) $\varepsilon' > a^4$，或
(2) $\varepsilon > a^2$，或
(3) $\varepsilon'' > a^2$。

证明。设对某些 $k, l \in 2\mathbb{Z}$，有 $\varepsilon = \rho^k(\rho-1)^l$。若 $k \geq 0$ 且 $l > 0$，则得到

$$\varepsilon'' = \rho''^k(\rho''-1)^l > \left(a-\frac{1}{a^2}\right)^k\left(a+1-\frac{1}{a^2}\right)^l > a^2.$$

另一方面，若 $k \geq 0$ 且 $l < 0$，则

$$\varepsilon = \rho^k(\rho-1)^l > \left(1+\frac{1}{a+3}\right)^k(a+2)^{-l} > a^2.$$

在 $l = 0$ 和 $k \geq 0$的情况下，我们看到 $\varepsilon' < a^2$。因此，当 $k \geq 0$时，我们已经完全解决了这些情形。

如果 $k \leq -4$ 和 $k+2 < l$，我们可以得出

$$\varepsilon' = \rho'^k(\rho'-1)^l \geq \rho'^{-4} > a^4.$$

另一方面， $l-2 \leq k < 0$ 当 $l < 0$ 时可推出

$$\varepsilon = \rho^k(\rho-1)^l > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{a+2}\right)^{-k}}(a+2)^{-l} \geq \frac{(a+2)^2}{\left(1+\frac{1}{a+2}\right)^4} > a^2.$$

因此，还需讨论 $k=-2$ 且 $l\geq 0$的情形。若 $l\geq 4$，则显然有 $\varepsilon''>a^2$。所以，剩下的情形是 $k=-2$且 $l=0$，以及 $k=-2$ 且 $l=2$，而这些情形在引理的表述中已被排除。□

3.5. 最小范数。利用 $\mathfrak{s}$-不可分解元的性质，我们将求出 $\mathbb{Z}[\rho]$ 中不与有理整数相伴的元素的最小范数。请注意，Lemmermeyer 和 Peth¨o [LP], 曾针对最简单三次域给出类似结果，他们采用了不同的方法。

命题 3.7. 设 $\alpha\in\mathbb{Z}[\rho]$。则 $|N(\alpha)|\geq 2a-3$，或者 α 与某个有理整数相伴 r.

证明。考虑具有相同符号型的两个元素之和 $\beta+\gamma$ $\mathfrak{s}$。则

$$|N(\beta+\gamma)|=\left|\prod_i\sigma_i(\beta+\gamma)\right|=\left|\prod_i\sigma_i(\beta)\right|+\text{ other positive summands}>|N(\beta)|,$$

这源于如下事实：如果我们将乘积 $\prod_i\sigma_i(\beta+\gamma)$ 分解为元素之和，那么这些加项具有相同的符号，因为 β 和 γ 具有相同的符号型。因此，$\prod_i\sigma_i(\beta+\gamma)$ 的绝对值等于这些加项绝对值之和。

因此，$\mathbb{Z}[\rho]$ 中的最小范数由一个非单位 $\mathfrak{s}$-不可分解整数取得，或者由两个符号型相同的单位之和取得。在后一种情况下，不失一般性，我们只需考虑符号型为（+，+，+）的单位，其中每个这样的和都与形如 $1+\varepsilon$的元素相伴，其中 $\varepsilon\neq 1$ 是一个全正单位。由于 $\varepsilon\neq\rho$ 当 ρ 不是全正时，ε 的某个共轭元大于 a，根据引理3.5，对 ε^{-1}也同样成立。因此，我们有

$$N(1+\varepsilon)=N(1)+N(\varepsilon)+\mathrm{Tr}(\varepsilon)+\mathrm{Tr}(\varepsilon^{-1})\geq 2a+2>2a-3.$$

由于我们知道元素 $-1+\rho^2$ 的范数的绝对值为 $2a-3$，因此可以不考虑单位之和。

在证明余下部分中，我们先考虑形如 $1+s\rho+\rho^2$ 的全正不可分解元，其中 $1\leq s\leq a-1$。这些元素的范数为

$$2a^2+2a+1+(a^2-3a-2)s-(2a-1)s^2+s^3,$$

见 [Ti2，第 4] 节。这些元素中，只有在某些 s 位于我们区间边界的位置，也就是说，对于 $s=1$ 或 $s=a-1$，最小范数才能取到；此时得到的范数 $3a^2+3a-1$ 和 $2a+3$显然都大于 $2a-3$，当 $a\geq 3$时。

现在我们来考察元素 $-1-u\rho+(u+2)\rho^2$。它们的范数的绝对值等于

$$2a^2+8a-17+(a^2+5a-14)u-7u^2-u^3.$$

与前一种情形一样，只有在边界点处才能取得最小范数。这里，当 $a\geq 3$ 时，我们得到的范数 $2a^2+8a-17$ 和 $4a^2-9$ 大于 $2a-3$。

因此，接下来只需讨论元素 $-v-(a(v-1)+w)\rho+(a(v-1)+w+1)\rho^2$ 的范数，其中$1\leq v\leq a-1$ 且 $\max\{1,v-1\}\leq w\leq a-1$。它们的范数的绝对值等于

$$-w^3-((a-1)v-2a+4)w^2+(av^2+(a^2-5a-1)v-(a^2-7a+3))w$$
$$+v^3-(a^2+a+1)v^2+(4a^2-2)v-3a^2+3a-1.$$

可以证明，对于 $v\geq 2$ 和 $w=v-3$，以及对于 $v=1$ 和 $w=-1$，该表达式为负。因此，对于固定的 v，它在 $w=v-1$ 或 $w=a-1$中取得最小值。此外，在这两种 w的情况下，v^3 前的系数为正，而且当 $v=a$时，该范数为负。因此，我们的最小值只能再次在边界点 $v=1$ 或 $v=a-1$处取得。我们得到范数 $2a-3$、a^2+3a-9 和 a^2-a-1，其中 $2a-3$ 最小。□

4. 恩诺拉三次域中的毕达哥拉斯数

现在我们将着重确定整环 $\mathbb{Z}[\rho]$ 的毕达哥拉斯数，其中 ρ 是多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根，且 $a\geq 3$。在此之前，先回顾毕达哥拉斯数的定义。设 $\mathcal{O}$ 为一个交换环，并令

$$\sum\mathcal{O}^2=\Big\{\sum_{i=1}^n\alpha_i^2;\ \alpha_i\in\mathcal{O},n\in\mathbb{N}\Big\}.$$

集合 $\sum\mathcal{O}^2$ 包含 $\mathcal{O}$ 中所有可表示为平方和的元素。类似地，令

$$\sum^m \mathcal{O}^2 = \Big\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i^2;\ \alpha_i \in \mathcal{O} \Big\},$$

也就是说，集合 $\sum^m \mathcal{O}^2$ 包含了 $\mathcal{O}$ 中的所有元素，这些元素都可以表示为至多 m 个 $\mathcal{O}$中元素的平方数之和。那么， $\mathcal{O}$ 的毕达哥拉斯数为

$$\mathcal{P}(\mathcal{O}) = \inf\Big\{ m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\};\ \sum \mathcal{O}^2 = \sum^m \mathcal{O}^2 \Big\}.$$

回顾一下，在 $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{O}_K$的情形下， $\mathcal{P}(\mathcal{O})$的值总是有限的。

根据 [KY，推论 3，3], 我们知道 $\mathcal{P}$（$\mathbb{Z}[\rho]$） ≤ 6。在本节中，我们证明 $\mathcal{P}$（$\mathbb{Z}[\rho]$） $= 6$对于 $a \geq 4$成立。为此，我们使用 [Ti1第 3], 节中介绍的方法，Tinkov´利用该方法确定了最简三次域中一个类似整环的毕达哥拉斯数。要应用这一方法，只需了解 $\mathfrak{s}$-不可分解元在 $\mathbb{Z}[\rho]$中的结构。回顾一下，该方法包括以下步骤：

(1) 适当选取一个元素 $\gamma \in \mathbb{Z}[\rho]$ ，使其可写成六个非零平方数之和。(2) 找出所有 $\mathfrak{s}$-不可分解元 α 的代表元，使得 $N(\alpha)^2 \leq N(\gamma)$。不过，这一步并非必需，有些部分我们会略过。(3) 对于步骤 (2) 中所有的 $\mathfrak{s}$-不可分解元 $\alpha \in \mathbb{Z}[\rho]$ ，找出所有满足 $\gamma \succeq (\varepsilon\alpha)^2$ 的单位 $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\rho]$ 。(4) 根据步骤 (3) 得到的 $\mathfrak{s}$-不可分解元，构造所有满足 $\gamma \succeq \omega^2$ 的 $\mathfrak{s}$-可分解元 $\omega \in \mathbb{Z}[\rho]$。注意， γ 的任意平方和分解都只能由这些平方数组成。(5) 讨论由步骤 (4) 中得到的元素的平方和构成 γ 的所有可能分解。

然而，在最简单三次域中，具有所有符号型的单位存在，因此所有 $\mathfrak{s}$-不可分解元都与全正不可分解元相伴。Ennola三次域并不具备这一有用性质。因此，为了应用这一方法，我们可以利用第 $\mathfrak{s}$ 3 节中已确定的 3-不可分解元。此外，我们有时会用到这样一个事实：若 $\gamma \succeq \omega^2$，则 $\mathrm{Tr}(\gamma) \geq \mathrm{Tr}(\omega^2)$，且 $N(\gamma - \omega^2) \geq 0$。

为了求出 $\mathbb{Z}[\rho]$ 的毕达哥拉斯数下界，我们将使用元素 nt

$$\gamma = a^2 - 3a + 11 - (a^2 - 5a + 1)\rho - (a-5)\rho^2 = 1 + 1 + 1 + 4 + (1+\rho)^2 + (a - 2 - (a-1)\rho - \rho^2)^2.$$

利用 ρ 的共轭元估计，我们可知，对于 $a \geq 6$，有

$$\gamma < 20 + \frac{a^2 - 4a - 13}{(a+3)^2} < 21 < a^2,$$

$$\gamma' < a^2 - 2a + 6 + \frac{7a+1}{a(a+1)^2} < a^2,$$

$$\gamma'' < a^2 - 2a + 13 - \frac{a^5 + 5a^4 + 11a^3 + a^2 - 4a - 5}{a^4(a+1)} < a^2.$$

这立即意味着，若 $\gamma \succeq \omega^2$ ，其中 $\omega \in \mathbb{Z}$，则 $\omega^2 = 1$、4、9、16。

首先，我们将找出所有全序小于 γ 的单位平方数。

引理 4.1. 设 $a \geq 6$。若 $\gamma \succeq \varepsilon^2$ ，其中 $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\rho]$ 是一个单位，则 $\varepsilon^2 = 1$。

证明。 由于 γ， γ'， $\gamma'' < a^2$ 对于 $a \geq 6$，引理 3.5 意味着 ε^2 上唯一可能的候选是 1 和 ρ^2。然而，可以验证

$$\gamma'' < a^2 - 2a + 13 - \frac{a^5 + 5a^4 + 11a^3 + a^2 - 4a - 5}{a^4(a+1)} < \left(a - \frac{1}{a^2}\right)^2 < \rho''^2.$$

因此，我们只剩下 $\varepsilon^2 = 1$。 □

在以下引理中，我们将找出所有满足其平方全序小于 $\mathfrak{s}$的不可分解元。γ为此，我们将使用定理1.1中给出的 $\mathfrak{s}$不可分解元的代表元集合。我们首先考察命题2.2中与全正不可分解元相伴的那些不可分解元。

引理 4.2. 设 $a \geq 6$。若 $\gamma \succeq (\varepsilon\alpha)^2$ 对某个单位 $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\rho]$ 和非单位全正不可分解整数 α 成立，则

$$(\varepsilon\alpha)^2 = a^2 - 3a + 5 - (a^2 - 5a - 1)\rho - (a-5)\rho^2.$$

证明. 设 $\kappa_s = 1 + s\rho + \rho^2$，其中 $1 \le s \le a-1$。利用 ρ 的共轭元估计，我们得到

$$\begin{aligned}(1+s\rho+\rho^2)^2 &> (2+s)^2,\\ (1+s\rho'+\rho'^2)^2 &> \left(1-\frac{s}{a}\right)^2,\\ (1+s\rho''+\rho''^2)^2 &> \left(1-sa+a^2+\frac{s}{a^2+a}-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^4}\right)^2 > a^2 > \gamma''.\end{aligned}$$

因此，我们可以立即排除 $\varepsilon^2 = 1$。现在设 $\varepsilon^2 = \rho^k(\rho-1)^l$，其中 $k, l \in 2\mathbb{Z}$。由引理 3.5 可知，除两种情况外，ε^2 的某个共轭元大于 a^2。若 $\varepsilon^2 > a^2$，则 $(\kappa_s\varepsilon)^2 > \gamma$；若 $\varepsilon''^2 > a^2$，则 $(\kappa_s''\varepsilon'')^2 > \gamma''$。因此，唯一可能的情况是 $\varepsilon'^2 > a^2$。由引理 3.6 可知，若 $\varepsilon^2 \ne \rho^{-2}, \rho^{-2}(\rho-1)^2,$，则 $\varepsilon'^2 > a^4$、$\varepsilon^2 > a^2$或 $\varepsilon''^2 > a^2$。然而，后两种情况可由前面的部分排除。至于第一种情况，我们可以看到

$$\varepsilon'^2(1+s\rho'+\rho'^2)^2 > a^4\left(1-\frac{a-1}{a}\right)^2 = a^2 > \gamma',$$

这又是不可能的。

因此，只剩下以下情形：$\varepsilon^2 = \rho^2, \rho^{-2}, \rho^{-2}(\rho-1)^2$。然而，对于 $\varepsilon^2 = \rho^2, \rho^{-2}(\rho-1)^2,$，我们有 $\varepsilon''^2 > 1$，这意味着 $\varepsilon''^2(1+s\rho''+\rho''^2)^2 > a^2 > \gamma''$。

接下来讨论 $\varepsilon^2 = \rho^{-2}$ 的情形。首先，假设 $s \ge 4$。在这种情况下，

$$\rho^{-2}(1+s\rho+\rho^2)^2 > \frac{1}{\left(1+\frac{1}{a+2}\right)^2}(2+s)^2 \ge \frac{64}{81}36 > 28 > 21 > \gamma.$$

如果 $s = 3$ 且 $a \ge 9$，同理可得

$$\rho^{-2}(1+3\rho+\rho^2)^2 > \left(\frac{11}{12}\right)^2 25 > 21 > \gamma.$$

利用 ρ 的近似值，我们可以很容易验证，对于 $s = 3$ 和 $6 \le a \le 8$，结论同样成立。对于 $s = 1$，我们可以计算得

$$N(\gamma - \rho^{-2}(1+\rho+\rho^2)^2) = -198a + 773 < 0$$

当 $a \ge 6$ 时。然而，对于 $s = 2$，我们得到一个全序小于 γ 的元素，即

$$\rho^{-2}(1+2\rho+\rho^2)^2 = a^2 - 3a + 5 - (a^2-5a-1)\rho - (a-5)\rho^2. \qquad \square$$

现在我们将注意力转向具有 $\mathfrak{s} = (+,-,+)$ 的 $\mathfrak{s}$-不可分解元，并从形如 $-1-u\rho+(u+2)\rho^2$ 的元素所在的直线开始。

引理 4.3. 设 $a \ge 6$。那么对于每个单位 $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\rho]$ 和 $0 \le u \le a-2$，$(\varepsilon(-1-u\rho+(u+2)\rho^2))^2 \not\asymp \gamma$。证明。对于 $\mu_u = -1-u\rho+(u+2)\rho^2$，我们可以推出以下下界：

$$\begin{aligned}(-1-u\rho+(u+2)\rho^2)^2 &> \left(-1-u\left(1+\frac{1}{a+2}\right)+(u+2)\right)^2 = \left(1-\frac{u}{a+2}\right)^2\\ &\ge \left(1-\frac{a-2}{a+2}\right)^2 = \frac{16}{(a+2)^2},\\ (-1-u\rho'+(u+2)\rho'^2)^2 &> \left(-1+\frac{u}{a}+\frac{u+2}{a^2}\right)^2 \ge \left(-1+\frac{a-2}{a}+\frac{a}{a^2}\right)^2 = \frac{1}{a^2},\\ (-1-u\rho''+(u+2)\rho''^2)^2 &> (-1+u(a-1)+(u+2)(a-1)^2)^2 \ge (-1+2(a-1)^2)^2\\ &= 4a^4-16a^3+20a^2-8a+1 > a^2 > \gamma''\end{aligned}$$

对于 $a \ge 6$。因此，我们可以立即排除 $\varepsilon^2 = 1$。如果 $\varepsilon^2 \ne 1$，ρ^2，那么 ε^2 有一个共轭元大于 a^2，根据引理 3.5。然而，如果 $\varepsilon''^2 > a^2$，那么 $(\varepsilon''\mu_u'')^2 > \gamma''$。此外，如果 $\varepsilon^2 > a^4$，那么

$$(\varepsilon\mu_u)^2 > a^4\frac{16}{(a+2)^2} > 21 > \gamma$$

对于 $a \ge 6$。类似地，若 $\varepsilon'^2 > a^4$，则

$$(\varepsilon'\mu_u')^2 > \frac{a^4}{a^2} = a^2 > \gamma'.$$

因此，我们必须有 ε^2、$\varepsilon'^2 < a^4$ 和 $\varepsilon''^2 < 1$。注意，$\varepsilon^2 = \rho^2$ 不满足 $\varepsilon''^2 < 1$，所以我们可以直接排除这个单位。设 $\varepsilon^2 = \rho^k(\rho-1)^l$，其中 k、$l \in 2\mathbb{Z}$。若 $k \geq 0$ 和 $l \geq 0$，则显然$\varepsilon''^2 \geq 1$。若 $l \leq -4$ 和 $k \geq 0$，则 $\varepsilon^2 > a^4$；若 $k \leq -4$ 和 $l \geq 0$，则 $\varepsilon'^2 > a^4$。此外，若$l = -2$ 和 $k \geq 0$，则

$$(\varepsilon''\mu_u'')^2 > \frac{1}{(a+1)^2}(4a^4 - 16a^3 + 20a^2 - 8a + 1) > a^2 > \gamma'',$$

如果 $k = -2$ 和 $l \geq 0$，同样的结论也成立。因此，我们必有 k、$l < 0$。

在 $k \leq -4$ 和 $k + 2 < l < 0$的情形下，我们看到

$$(\varepsilon'\mu_u')^2 > a^4 \frac{a^{-k-4}}{\left(1+\frac{1}{a}\right)^{-l}} \frac{1}{a^2} \geq a^4 \frac{1}{a^2} = a^2 > \gamma'.$$

同样地，如果 $l \leq -4$ 和 $l - 2 \leq k < 0$，那么

$$(\varepsilon\mu_u)^2 > \frac{(a+2)^4}{(1+\frac{1}{a+2})^6} \frac{16}{(a+2)^2} > 21 > \gamma$$

对于 $a \geq 6$。因此，只剩下两个单位，即 $\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}$ 和 $\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}$。对于$\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}$，我们可以计算得到

$$\mathrm{Tr}(\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}\mu_u^2) = 2a^2 + 10a + 21 + 3u^2 + 14u \geq 2a^2 + 10a + 21 > 2a^2 - 4a + 37 = \mathrm{Tr}(\gamma)$$

for $a \geq 6$. For $\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}$, we get

$$\mathrm{Tr}(\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}\mu_u^2) = a^4 + 2a^3 - 8a^2 + 8a + 19 - (2a^3 + 4a^2 - 14a - 4)u + (a^2 + 2a - 2)u^2.$$

此外，该迹在区间 $[0, a-2]$ 内关于 u 递减，这意味着

$$\mathrm{Tr}(\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}\mu_u^2) > \mathrm{Tr}(\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}(-1-(a-2)\rho+a\rho^2)^2) = 8a^2 + 3 > 2a^2 - 4a + 37 = \mathrm{Tr}(\gamma)$$

对于 $a \geq 6$。由此，证明完成。 □

现在我们将利用 γ 的范数来限定剩余的 $\mathfrak{s}$-不可分解整数集合，这些整数的平方数可以全序小于 γ。可以推导出

$$N(\gamma) = 20a^4 - 82a^3 + 440a^2 - 778a + 1559.$$

此外，回想一下

$$|N(-v-(a(v-1)+w)\rho+(a(v-1)+w+1)\rho^2)| = -w^3 - ((a-1)v - 2a + 4)w^2 + (av^2 + (a^2 - 5a - 1)v - (a^2 - 7a + 3))w + v^3 - (a^2 + a + 1)v^2 + (4a^2 - 2)v - 3a^2 + 3a - 1.$$

引理 4.4。设 $a \geq 12$。设 $\lambda_{v,w} = -v-(a(v-1)+w)\rho+(a(v-1)+w+1)\rho^2$，其中某个 $1 \leq v \leq a-1$，且 $\max\{1, v-1\} \leq w \leq a-1$，并设 $N(\gamma) \geq N(\lambda_{v,w}^2)$。那么 v 和 w 满足以下条件之一：

(1) $v = 1$ 和 $1 \leq w \leq a-2$，(2) $v = 2$ 和 $w = 2, 3, a-2$，(3) $w = v-1$ 和 $v = 2, 3, a-4, a-3, a-2, a-1$，(4) $1 \leq v \leq a-1$ 和 $w = a-1$，(5) $(v, w) \in \{(a-4, a-2), (a-3, a-3), (a-3, a-2), (a-2, a-2)\}$。

证明。 我们将采用与命题 3.7 的证明类似的方法。首先，我们关注由 $3 \leq v \leq a-5$ 和 $v \leq w \leq a-2$所给出的子集。如前所述，可以看出最小范数在某个边界点处取得。我们可以计算得

$$\begin{aligned}
N(\lambda_{3,3}^2) &= 36a^4 - 114a^3 - 372a^2 + 1032a + 1849 > N(\gamma),\\
N(\lambda_{3,a-2}^2) &= 36a^4 - 312a^3 + 1000a^2 - 1404a + 729 > N(\gamma),\\
N(\lambda_{a-5,a-5}^2) &= 64a^4 - 32a^3 - 4012a^2 + 1004a + 63001 > N(\gamma),\\
N(\lambda_{a-5,a-2}^2) &= 25a^4 + 70a^3 - 1681a^2 - 2422a + 29929 > N(\gamma)
\end{aligned}$$

对于 $a \geq 12$。此外，对于 $a-4 \leq v \leq a-2$ 和 $v \leq w \leq a-2$，我们可以计算得

$$N(\lambda_{a-4,a-4}^2), N(\lambda_{a-4,a-3}^2) > N(\gamma);$$

其余元素列于情形（5）中。

因此，我们还剩下以下情形：

- $v = 1$，即情形 (1)，其中情形 $w = a - 1$ 由 (4) 涵盖。
- $v = 2$，满足 $N(\lambda_{2,\ 4}^2)\ N(\lambda_{2,\ a-3}^2) > N(\gamma)$；因此，只需讨论 $w = 2$、3、$a - 2$，这给出 (2)，
- $w = v - 1$，满足 $N(\lambda_{4,\ 3}^2)\ N(\lambda_{a-5,\ a-6}^2) > N(\gamma)$；因此，只需讨论 $v = 2$、3、a –4、$a - 3$、$a - 2$、$a - 1$，这给出 (3)，
- $w = a - 1$，即情形 (4)。 □

然而，引理 4.4 中的大多数整数都不会产生任何合适的元素。

引理 4.5。设 $a \geq 12$。不存在单位 $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\rho]$ 使得 $(\varepsilon\lambda_{v,w})^2 \preceq \gamma$，其中 v 和 w 分别如引理 4.4中的 (2)、(3) 和 (5) 式所示。

证明。我们从 $\lambda_{2,2}$ 开始。我们可以推出

$$(-2-(a+2)\rho+(a+3)\rho^2)^2 > \frac{1}{(a+3)^2},$$
$$(-2-(a+2)\rho'+(a+3)\rho'^2)^2 > \frac{(a^2-3a-3)^2}{a^4},$$
$$(-2-(a+2)\rho''+(a+3)\rho''^2)^2 > a^6+4a^5-4a^4-18a^3+12a^2+8a+1 > a^2 > \gamma''$$

对于 $a \geq 12$。因此，我们可以立即排除 $\varepsilon^2 = 1, \rho^2$，因为 $(\varepsilon''\lambda_{2,2}'')^2 > a^2 > \gamma''$。由于 $a^4\lambda_{2,2}^2 > \gamma$ 且 $a^4\lambda_{2,2}'^2 > \gamma'$，我们必须有 $\varepsilon^2, \varepsilon'^2 < a^4$ 和 $\varepsilon''^2 < 1$。我们可以仿照引理 4.3 的证明，得出 $\varepsilon^2 = \rho^{-2}(\rho-1)^{-2}, \rho^{-4}(\rho-1)^{-2}$。对于这些单位，我们看到

$$\mathrm{Tr}(\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}\lambda_{2,2}^2) = 2a^2+2a+14 > \mathrm{Tr}(\gamma),$$
$$\mathrm{Tr}(\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}\lambda_{2,2}^2) = a^4-2a^3-13a^2+30a+9 > \mathrm{Tr}(\gamma)$$

对于 $a \geq 12$。

接下来讨论 $\lambda_{2,\ 3}$。这里我们有

$$(-2-(a+3)\rho+(a+4)\rho^2)^2 > \frac{(2a^2+10a+11)^2}{(a+2)^2(a+3)^4},$$
$$(-2-(a+3)\rho'+(a+4)\rho'^2)^2 > \frac{(a^2-4a-4)^2}{a^4},$$
$$(-2-(a+3)\rho''+(a+4)\rho''^2)^2 > a^6+6a^5-a^4-32a^3+19a^2+10a+1 > a^2 > \gamma''$$

对于 $a \geq 12$。与前一种情况类似，我们剩下单位 $\varepsilon^2 = \rho^{-2}(\rho-1)^{-2}, \rho^{-4}(\rho-1)^{-2}$，由此得到

$$\mathrm{Tr}(\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}\lambda_{2,3}^2) = 2a^2+2a+33 > \mathrm{Tr}(\gamma),$$
$$\mathrm{Tr}(\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}\lambda_{2,3}^2) = a^4-4a^3-12a^2+52a+1 > \mathrm{Tr}(\gamma)$$

对于 $a \geq 12$。

对于 $v = 2$，还需要讨论满足 $w = a - 2$ 的元素。对于该元素，我们看到

$$(-2-(2a-2)\rho+(2a-1)\rho^2)^2 > \frac{(a^3+2a^2-10a-14)^2}{(a+2)^2(a+3)^4},$$
$$(-2-(2a-2)\rho'+(2a-1)\rho'^2)^2 > \frac{1}{a^4},$$
$$(-2-(2a-2)\rho''+(2a-1)\rho''^2)^2 > 4a^6-12a^5+9a^4-4a^3+6a^2+1 > a^2 > \gamma''.$$

在这种情况下，必有 $\varepsilon^2 < a^2$, $a^2 < \varepsilon'^2 < a^6$ 和 $\varepsilon''^2 < 1$。这（连同 $\lambda_{2,\ a-2}^2$ 的下界）给出单位 ρ^{-2}, ρ^{-4} 和 $\rho^{-4}(\rho-1)^2$。对于它们，我们计算得

$$\mathrm{Tr}(\rho^{-2}\lambda_{2,a-2}^2) = 4a^4+4a^3-7a^2-20a+13 > \mathrm{Tr}(\gamma),$$
$$\mathrm{Tr}(\rho^{-4}\lambda_{2,a-2}^2) = 8a^2+8a-29 > \mathrm{Tr}(\gamma),$$
$$\mathrm{Tr}(\rho^{-4}(\rho-1)^2\lambda_{2,a-2}^2) = 4a^4+12a^3+9a^2-18a-50 > \mathrm{Tr}(\gamma)$$

对于 $a \geq 12$。因此，我们完成了对（2）的证明。

现在，我们将把注意力转向（3），即 $w = v - 1$ 和 $v = 2$、3、$a-4$、$a-3$、$a-2$、$a-1$。在这里，我们必须对 ρ和 ρ'使用更精确的估计，即 $1 + \frac{1}{a+2+\frac{1}{a^2}} < \rho$和 $-\frac{1}{a+1-\frac{2}{a}+\frac{2}{a^2}} < \rho'$对于$a \geq 7$（可以利用 ρ的最小多项式加以验证）。利用这些估计，我们可以得出

$$\lambda_{v-1,v}^2 > \frac{(a^6+7a^5+10a^4+10a^3+18a^2+a+6)^2}{(a+2)^2(a^3+2a^2+1)^4},$$
$$\lambda_{v-1,v}'^2 > \frac{(a^5+2a^4+6a^3-12a^2+12a-4)^2}{(a^3+a^2-2a+2)^4},$$
$$\lambda_{v-1,v}''^2 > a^6+2a^5-5a^4-8a^3+7a^2+6a+1.$$

同样，我们必须有 ε^2，$\varepsilon'^2 < a^4$ 并且 $\varepsilon''^2 < 1$ 使用与引理 4.3 证明中相同的步骤，可得 $\varepsilon^2 = \rho^{-2}(\rho-1)^{-2}$，$\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}$。对于这些单位，我们有

$$\mathrm{Tr}(\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}\lambda_{v-1,v}^2) = (a^2+2a+2)v^2-(2a^2+4a+6)v+2a^2+2a+5 \geq 2a^2+2a+1 > \mathrm{Tr}(\gamma),$$
$$\mathrm{Tr}(\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}\lambda_{v-1,v}^2) = (a^2+4a+1)v^2-(2a^3+8a^2-4)v+a^4+4a^3-4a+1 \geq 2a^2+2a-1 > \mathrm{Tr}(\gamma).$$

我们将继续讨论（5），即讨论 $(v,w) \in \{(a-4,a-2)、(a-3,a-3)、(a-3,a-2)、(a-2,a-2)\}$。在这种情况下，与之前类似，我们可以推得

$$\lambda_{v,w}^2 > \frac{(2a^6+13a^5+20a^4+18a^3+26a^2+3a+8)^2}{(a+2)^2(a^3+2a^2+1)^4},$$
$$\lambda_{v,w}'^2 > \frac{(a^5+3a^4+8a^3-20a^2+20a-8)^2}{(a^3+a^2-2a+2)^4},$$
$$\lambda_{v,w}''^2 > a^8-10a^7+31a^6-32a^5+29a^4-56a^3+31a^2-10a+25.$$

因此，我们必须有 ε^2、$\varepsilon'^2 < a^4$和 $\varepsilon''^2 < 1$。这又导出单位 $\varepsilon^2 = \rho^{-2}(\rho-1)^{-2}$、$\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}$。然而，$\rho''^{-2}(\rho''-1)^{-2}\lambda_{v,w}''^2 > a^2$，并且

$$\mathrm{Tr}(\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}\lambda_{v,w}^2) \geq 2a^2+2a+9 > \mathrm{Tr}(\gamma)$$

对于 $a \geq 12$。由此，证明完成。 □

现在，我们将讨论引理 4.4中找到的其余元素。

引理 4.6。 设 $a \geq 12$，并令 v 和 w 如引理 4.4 的 (1) 或 (4) 中所述。此外，设 $(\varepsilon\lambda_{v,w})^2 \preceq \gamma$，其中 $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\rho]$ 是某个单位。则 $(\varepsilon\lambda_{v,w})^2$ 是以下元素之一：

- $\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}(-1-\rho+2\rho^2)^2 = a^2-3a+3-(a^2-5a+3)\rho-(a-4)\rho^2$,
- $\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}(-1-2\rho+3\rho^2)^2 = a^2-5a+8-(a^2-7a+5)\rho-(a-6)\rho^2$,
- $\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}(-(a-1)-(a(a-2)+a-1)\rho+(a(a-2)+a)\rho^2)^2 = 1+2\rho+\rho^2$,
- $\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}(-(a-2)-(a(a-3)+a-1)\rho+(a(a-3)+a)\rho^2)^2 = 4+4\rho+\rho^2$,
- $\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}(-(a-3)-(a(a-4)+a-1)\rho+(a(a-4)+a)\rho^2)^2 = 9+6\rho+\rho^2$.

证明。我们先考虑 (1)，即形如 $\lambda_{v,w} = -1-w\rho+(w+1)\rho^2$ 的元素，其中$1 \leq w \leq a-2$，对此我们有

$$(-1-w\rho+(w+1)\rho^2)^2 > \frac{(3a^2+16a+19)^2}{(a+2)^2(a+3)^4},$$
$$(-1-w\rho'+(w+1)\rho'^2)^2 > \frac{(a+1)^2}{a^4},$$
$$(-1-w\rho''+(w+1)\rho''^2)^2 > 4a^4-12a^3+9a^2.$$

与前面的某些情况一样，我们的单位必须满足 $\varepsilon^2, \varepsilon'^2 < a^4$ 和 $\varepsilon''^2 < 1$，由此得到单位$\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}$ 和 $\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}$。此外，如果 $w \geq 4$，那么 $a^2\lambda_{v,w}^2 > 21$ 对于 $a \geq 12$成立，而这两个单位都不满足 $\varepsilon^2 < a^2$。因此，剩下的是 $w = 1$、2、3 和 $\varepsilon^2 = \rho^{-2}(\rho-1)^{-2}, \rho^{-4}(\rho-1)^{-2}$。对于 $\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}$，我们得到

$$\mathrm{Tr}(\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}(-1-w\rho+(w+1)\rho^2)^2) \geq a^4-4a^3-10a^2+48a-6 > \mathrm{Tr}(\gamma).$$

对于 $w = 3$ 和 $\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}$，我们得到

$$N(\gamma - \rho^{-2}(\rho-1)^{-2}(-1-3\rho+4\rho^2)^2) = -20a^3+72a^2-10a-79 < 0$$

对于 $a \geq 12$。另一方面，对于 $w = 1$、2，我们确实得到全序小于 γ 的元素，称为

$$\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}(-1-\rho+2\rho^2)^2 = a^2-3a+3-(a^2-5a+3)\rho-(a-4)\rho^2,$$
$$\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}(-1-2\rho+3\rho^2)^2 = a^2-5a+8-(a^2-7a+5)\rho-(a-6)\rho^2.$$

我们将继续讨论式 (4) 中的元素，即 $\lambda_{v,\ a-1} = -v-(a(v-1)+a-1)\rho+(a(v-1)+a)\rho^2$，其中 $1 \leq v \leq a-1$。对于这些元素，我们得到以下下界：

$$\lambda_{v,a-1}^2 > \frac{(2a^6+12a^5+16a^4+10a^3+18a^2+a+5)^2}{(a+2)^2(a^3+2a^2+1)^4},$$
$$\lambda_{v,a-1}'^2 > \frac{4(4a^3-7a^2+6a-2)^2}{(a^3+a^2-2a+2)^4},$$
$$\lambda_{v,a-1}''^2 > a^6-2a^5-a^4+2a^3+a^2.$$

由此可知，我们的单位 ε 必须满足 $\varepsilon^2 < a^4$、$\varepsilon'^2 < a^8$ 和 $\varepsilon''^2 < 1$。按照之前类似的步骤，剩下的单位为 $\rho^{-6}(\rho-1)^2$、ρ^{-6}、$\rho^{-6}(\rho-1)^{-2}$、ρ^{-4}、$\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}$ 和 $\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}$。此外，若 $1 \leq v \leq a-4$，则上述下界会更大；利用这些更好的界，或者像之前那样利用 $\mathrm{Tr}(\varepsilon^2\lambda_{v,\ a-1}^2)$，即可排除上述所有单位。因此，剩下需要讨论的是 $v = a-3$、$a-2$、$a-1$ 的情形。

对于 $\rho^{-6}(\rho-1)^2$、ρ^{-6}、ρ^{-4} 和 $\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}$，我们可以推导出以下结论：

$$\mathrm{Tr}(\rho^{-6}(\rho-1)^2\lambda_{v,a-1}^2) \geq \mathrm{Tr}(\rho^{-6}(\rho-1)^2\lambda_{a-3,a-1}^2) = a^4-2a^3+48a+75 > \mathrm{Tr}(\gamma),$$
$$\mathrm{Tr}(\rho^{-6}\lambda_{v,a-1}^2) \geq \mathrm{Tr}(\rho^{-6}\lambda_{a-1,a-1}^2) = 2a^2+2a-7 > \mathrm{Tr}(\gamma),$$
$$\mathrm{Tr}(\rho^{-4}\lambda_{v,a-1}^2) \geq \mathrm{Tr}(\rho^{-4}\lambda_{a-3,a-1}^2) = a^4-4a^3-2a^2+8a+34 > \mathrm{Tr}(\gamma),$$
$$\mathrm{Tr}(\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}\lambda_{v,a-1}^2) \geq \mathrm{Tr}(\rho^{-2}(\rho-1)^{-2}\lambda_{a-3,a-1}^2) = a^4-6a^3+9a^2-4a+38 > \mathrm{Tr}(\gamma)$$

对于 $a \geq 12$。现在让我们聚焦于 $\rho^{-6}(\rho-1)^{-2}$。对于这个单位，我们得到

$$\mathrm{Tr}(\rho^{-6}(\rho-1)^{-2}\lambda_{a-3,a-1}^2) = 9a^2+12a-15 > \mathrm{Tr}(\gamma),$$
$$\mathrm{Tr}(\rho^{-6}(\rho-1)^{-2}\lambda_{a-2,a-1}^2) = 4a^2+4a-5 > \mathrm{Tr}(\gamma),$$
$$N(\gamma - \rho^{-6}(\rho-1)^{-2}\lambda_{a-1,a-1}^2) = -32a^3+204a^2-580a+1523 < 0$$

对于 $a \geq 12$。因此，我们可以排除这个单位。另一方面，考虑单位 $\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}$，我们得到三个全序小于 γ 的平方数，即

$$\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}\lambda_{a-3,a-1}^2 = 9+6\rho+\rho^2,$$
$$\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}\lambda_{a-2,a-1}^2 = 4+4\rho+\rho^2,$$
$$\rho^{-4}(\rho-1)^{-2}\lambda_{a-1,a-1}^2 = 1+2\rho+\rho^2.$$ □

现在我们将聚焦于全序小于 $\mathfrak{s}$ 的-可分解元的平方数 γ。我们将使用 $\mathfrak{s}$-不可分解元来构造它们；这些不可分解元是在前面的引理中推导出的，其符号型见表 1。回顾一下，ρ 和 $\rho-1$ 的符号型均为（+，−，−）。

更具体地说，我们将使用以下事实。如果 $\omega \in \mathbb{Z}[\rho]$ 是一个 $\mathfrak{s}$-可分解整数，则它可以写成 $\omega = \sum_{i=1}^n \beta_i$，其中元素 $\beta_i \in \mathbb{Z}[\rho]$ 是 $\mathfrak{s}$-不可分解元。那么，如果 $\gamma \succeq \omega^2$，我们有

$$\gamma \succeq \omega^2 = \Big(\sum_{i=1}^n \beta_i\Big)^2 \succeq (\beta_i+\beta_j)^2$$

对所有 $1 \leq i,\ j \leq n$均成立。因此，若我们固定符号型 $\mathfrak{s}$，并证明对于所有序对 $\beta_i+\beta_j)^2 \succ \gamma$（$\beta_i$，$\beta_j$，使得 β_i 和 β_j 具有符号型 $\mathfrak{s}$，且它们的平方数已在引理 4.1、4.2、4.3 和4.6中求得），则不存在一个 $\mathfrak{s}$-可分解的整数 $\omega \in \mathbb{Z}[\rho]$ 使得 $\gamma \succeq \omega^2$。正如我们将看到的，对于几乎所有符号型 $\mathfrak{s}$，情况都是如此。

引理 4.7。令 $a \geq 12$ 和 $\gamma \succeq \omega^2$，其中 $\mathfrak{s}$-可分解的整数为 $\omega \in \mathbb{Z}[\rho]$。则 $\omega^2 \in \{4, 9, 16$ $\}$.

证明。如前所述，我们将分别讨论每一种可能的符号型 :

$\mathfrak{s}$-不可分解元 β	β的符号型	$-\beta$的符号型
1	$(+,+,+)$	$(-,-,-)$
$\rho^{-1}(1+2\rho+\rho^2)$	$(+,-,-)$	$(-,+,+)$
$\rho^{-1}(\rho-1)^{-1}\lambda_{1,1}$	$(+,-,+)$	$(-,+,-)$
$\rho^{-1}(\rho-1)^{-1}\lambda_{1,2}$	$(+,-,+)$	$(-,+,-)$
$\rho^{-2}(\rho-1)^{-1}\lambda_{a-1,\ a-1}$	$(+,+,-)$	$(-,-,+)$
$\rho^{-2}(\rho-1)^{-1}\lambda_{a-2,\ a-1}$	$(+,+,-)$	$(-,-,+)$
$\rho^{-2}(\rho-1)^{-1}\lambda_{a-3,\ a-1}$	$(+,+,-)$	$(-,-,+)$

TABLE 1. $\mathfrak{s}$-不可分解元的符号型，其平方数全序小于 γ。

(1) 符号型 $(+,+,+)$（或 $(-,-,-)$）：在这种情况下，我们只有一个 $\mathfrak{s}$-不可分解整数 1，由此可以得到其他元素 4、9 和 16。

(2) 符号型 $(+,-,-)$（或 $(-,+,+)$）：在这一部分中，考虑一个 $\mathfrak{s}$-不可分解整数 $\rho^{-1}(1+2\rho+\rho^2)$，我们可以推得

$$(2\rho^{-1}(1+2\rho+\rho^2))^2 = 4(a^2-3a+5-(a^2-5a-1)\rho-(a-5)\rho^2) \\ > 4\left(11+\frac{5a^2+20a+27}{(a+2)^2}\right) > 21 > \gamma.$$

因此，我们得不到任何合适的 $\mathfrak{s}$-可分解元。

(3) 符号型 $(+,-,+)$（或 $(-,+,-)$）：对于此符号型，我们研究两个 $\mathfrak{s}$-不可分解元$\rho^{-1}(\rho-1)^{-1}\lambda_{1\,1}$和 $\rho^{-1}(\rho-1)^{-1}\lambda_{1\,2}$。由此可以得出

(a) $(2\rho^{-1}(\rho-1)^{-1}\lambda_{1,1})^2 > 21+\frac{3(5a^2+12a+12)}{(a+2)^2} > \gamma$,

(b) $(\rho^{-1}(\rho-1)^{-1}(\lambda_{1,1}+\lambda_{1,2}))^2 > 25+\frac{4(6a^2+17a+17)}{(a+2)^2} > \gamma$,

(c) $(2\rho^{-1}(\rho-1)^{-1}\lambda_{1,2})^2 > 36+\frac{4(7a^2+20a+20)}{(a+2)^2} > \gamma$.

(4) 符号型 $(+,+,-)$（或 $(-,-,+)$）：对于此符号型中的三个 $\mathfrak{s}$-不可分解元，我们可以推得以下结果：

(a) $(2\rho^{-2}(\rho-1)^{-1}\lambda_{a-1,a-1})''^2 > 4a^2-16a+8 > a^2 > \gamma''$,

(b) $(\rho^{-2}(\rho-1)^{-1}(\lambda_{a-1,a-1}+\lambda_{a-2,a-1}))^2 > 25+\frac{20}{a+3}+\frac{4}{(a+3)^2} > \gamma$,

(c) $(\rho^{-2}(\rho-1)^{-1}(\lambda_{a-1,a-1}+\lambda_{a-3,a-1}))^2 > 36+\frac{24}{a+3}+\frac{4}{(a+3)^2} > \gamma$,

(d) $(2\rho^{-2}(\rho-1)^{-1}\lambda_{a-2,a-1})^2 > 36+\frac{24}{a+3}+\frac{4}{(a+3)^2} > \gamma$,

(e) $(\rho^{-2}(\rho-1)^{-1}(\lambda_{a-2,a-1}+\lambda_{a-3,a-1}))^2 > 49+\frac{28}{a+3}+\frac{4}{(a+3)^2} > \gamma$,

(f) $(2\rho^{-2}(\rho-1)^{-1}\lambda_{a-3,a-1})^2 > 64+\frac{32}{a+3}+\frac{4}{(a+3)^2} > \gamma$

for $a \geq 12$.

因此，在此引理中，我们只得到平方数 4、9 和 16。 □

在前面的引理中，我们找出了所有全序小于 γ （对于 $a \geq 12$）的平方数。由于 γ 的每种分解都只能由这些平方数组成，我们现在可以证明，至少需要六个平方数才能表示 γ。

命题 4.8. 设 ρ 是多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根，其中 $a \geq 4$。那么 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}[\rho]) = 6$。

证明. 在前面的部分中，我们已经找出了所有全序小于给定元素 γ 的平方数。特别地，对于 $a \geq 12$，我们得到平方数

(1) 有理整数 1、4、9 和 16，(2)

$a^2-3a+5-(a^2-5a-1)\rho-(a-5)\rho^2$，(3)

$a^2-3a+3-(a^2-5a+3)\rho-(a-4)\rho^2$，(4)

$a^2-5a+8-(a^2-7a+5)\rho-(a-6)\rho^2$，(5)

$1+2\rho+\rho^2$，(6) $4+4\rho+\rho^2$，(7) $9+6\rho+\rho^2$。

此外，如 [Ti1], 所述，我们可以通过计算机程序（我们使用了 Mathematica）验证，同样的结论也适用于 $6 \le a \le 11$。我们使用的程序可在以下网址获取：https://sites.google.com/view/tin

回忆一下，$\gamma = a^2 - 3a + 11 - (a^2 - 5a + 1)\rho - (a-5)\rho^2$。$\rho$前的系数 $-(a^2 - 5a + 1)$显然为负。因此，γ 到平方和的每一种分解都至少必须包含元素 $a^2 - 3a + 5 - (a^2 - 5a - 1)\rho - (a-5)\rho^2$、$a^2 - 3a + 3 - (a^2 - 5a + 3)\rho - (a-4)\rho^2$ 和$a^2 - 5a + 8 - (a^2 - 7a + 5)\rho - (a-6)\rho^2$中的一个。然而，对于 $a^2 - 3a + 5 - (a^2 - 5a - 1)\rho - (a-5)\rho^2$ 和 $a^2 - 5a + 8 - (a^2 - 7a + 5)\rho - (a-6)\rho^2$，$\rho$前的系数大于 $-(a^2 - 5a + 1)$。因此，如果这两个元素中的一个是 γ分解中的加项，那么另一个加项就必须是这三个元素中的一个。在这种情况下，1（在基底 1、ρ 和 ρ^2中）前的系数对于 $a \ge 7$而言至少为 $2a^2 - 10a + 16 > a^2 - 3a + 11$。这是不可能的，因为全序小于 γ 的所有平方数的第一个系数都是正的。注意，对于 $a = 6$，几乎同样的结论也成立，因为 $-(a^2 - 7a + 5) = 1$ 和 $-(a^2 - 5a + 1) = -7$，因此，第一个系数至少为 $a^2 - 5a + 8 + a^2 - 3a + 3 = 35 > 29 = a^2 - 3a + 11$。

因此，我们必须有

$$\gamma = (a^2 - 3a + 3 - (a^2 - 5a + 3)\rho - (a-4)\rho^2) + (8 + 2\rho + \rho^2).$$

在将 $8 + 2\rho + \rho^2$ 分解为平方和的过程中，只能使用元素 1、4、$1 + 2\rho + \rho^2$ 和 $4 + 4\rho + \rho^2$。然而，$4 + 4\rho + \rho^2$ 不能出现在该分解中，因为它前面 ρ的系数过大。因此

$$8 + 2\rho + \rho^2 = (1 + 2\rho + \rho^2) + 7.$$

此外，我们可以看到，7 的任何分解都只能由元素 1 和 4 组成，而这至少需要 4 个平方数。因此，将 γ 分解为平方和至少需要 6 个平方数，这意味着 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}[\rho]) = 6$。

对于 $a = 5$，元素 γ等于 $21 - \rho$。利用计算机程序，我们可以得出，全序小于 γ的平方数为 1、4、9、16、$1 + 2\rho + \rho^2$、$4 + 4\rho + \rho^2$、$9 + 6\rho + \rho^2$、$8 + 5\rho + \rho^2$、$13 - 3\rho - \rho^2$、$15 + \rho$ 和 ρ^2。然而，我们很容易得出结论，γ 的任何分解都必须具有以下形式

$$21 - \rho = (13 - 3\rho - \rho^2) + (1 + 2\rho + \rho^2) + 7,$$

这意味着我们至少需要 6 个平方数。

同样，对于 $a = 4$ 和 $\gamma = 15 + 3\rho + \rho^2$，我们得到平方数 1、4、9、$1 + 2\rho + \rho^2$、$4 + 4\rho + \rho^2$、$9 + 6\rho + \rho^2$、$7 + \rho$、$\rho^2$、$4 + 7\rho + 2\rho^2$、$12 - 5\rho - 2\rho^2$ 和 $9 + 5\rho + \rho^2$。这导出了分解

$$15 + 3\rho + \rho^2 = (7 + \rho) + (1 + 2\rho + \rho^2) + 7.$$

因此，即使在这种情况下，也必须至少有 6 个平方数。 □

对于 $a = 3$，情况有所不同，元素 γ 可以写成 4 个平方数之和。在这种情况下，我们可以给出 $\mathcal{P}(\mathbb{Z}[\rho])$ 的下界 5；例如，元素 $9 - \rho$ 可以达到该下界。

5. Preliminaries on the Jacobi–Perron algorithm

本节将概述雅可比–佩龙算法的若干基本事实。下文主要采用 [Vo]中的记号。我们将讨论它的非齐次形式和齐次形式，并说明二者之间的关系。

5.1. 非齐次雅可比–佩龙算法。正如引言中所述，非齐次雅可比–佩龙算法（iJPA）是经典连分数算法向高维的推广。为了精确定义它，考虑一个向量 $\boldsymbol{\alpha}^{(0)} = \left(\alpha_1^{(0)}, \alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}$ for $n \ge 2$。对于 $\boldsymbol{\alpha}^{(0)}$，我们将其非齐次雅可比–佩龙算法展开定义为序列$\left\langle \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \right\rangle_{k \ge 0}$，其中

$$\boldsymbol{\alpha}^{(k+1)} = \left(\alpha_1^{(k+1)}, \ldots, \alpha_{n-2}^{(k+1)}, \alpha_{n-1}^{(k+1)}\right) = \left(\frac{\alpha_2^{(k)} - a_2^{(k)}}{\alpha_1^{(k)} - a_1^{(k)}}, \ldots, \frac{\alpha_{n-1}^{(k)} - a_{n-1}^{(k)}}{\alpha_1^{(k)} - a_1^{(k)}}, \frac{1}{\alpha_1^{(k)} - a_1^{(k)}}\right),$$

其中 $\alpha_1^{(k)} \ne a_1^{(k)}$和 $a_i^{(k)} = \lfloor \alpha_i^{(k)} \rfloor$。我们还将使用记号 $\boldsymbol{a}^{(k)} = \left(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_{n-1}^{(k)}\right)$。容易看出，对于 $n = 2$，此展开恰好是实数$\alpha_1^{(0)} = \alpha \in \mathbb{R}$的连分数展开。

$\boldsymbol{\alpha}^{(0)}$ 的 iJPA 展开称为周期的，如果存在两个整数 $l_0, l_1 \in \mathbb{Z}$，使得 $l_0 \geq 0, l_1 \geq 1$ 并且

$$\boldsymbol{\alpha}^{(k+l_1)} = \boldsymbol{\alpha}^{(k)}$$

对每个 $k \geq l_0$。若 l_0 和 l_1 是满足这些条件的最小整数，则向量$\boldsymbol{\alpha}^{(0)}, \boldsymbol{\alpha}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}^{(l_0-1)}$和 $\boldsymbol{\alpha}^{(l_0)}$ $\boldsymbol{\alpha}^{(l_0+1)} \ldots, \boldsymbol{\alpha}^{(l_0+l_1-1)}$称为 $\boldsymbol{\alpha}^{(0)}$的 iJPA 展开的前周期和周期，而 l_0 和 l_1 是它们的长度。若 $l_0 = 0$, 则称 $\boldsymbol{\alpha}^{(0)}$ 的 iJPA 展开为纯周期的。

此外，对于某个代数整数向量 $\boldsymbol{\alpha}^{(0)}$的周期 iJPA 展开，我们可以研究元素

$$\varepsilon = \prod_{k=l_0}^{l_0+l_1-1} \alpha_{n-1}^{(k)}.$$

已证明， [BeH] 满足 ε 是 $\mathbb{Q}\big(\alpha_1^{(0)}$ 的代数整数环 $\alpha_2^{(0)}, \ldots, \alpha_{n-1}^{(0)})$中的一个单位。这个单位称为哈塞–伯恩斯坦单位。

5.2. 齐次雅可比–佩龙算法。对我们来说，采用如下定义的齐次雅可比–佩龙算法（JPA）更为方便: 设我们考虑$\boldsymbol{\beta}^{(0)} = \left(\beta_1^{(0)}, \beta_2^{(0)}, \ldots, \beta_n^{(0)}\right) \in \mathbb{R}^n$，其中 $n \geq 2$。 $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 的雅可比–佩龙算法展开是由向量序列 $\langle \boldsymbol{\beta}^{(k)} \rangle_{k \geq 0}$ 定义的,

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \left(\beta_2^{(k)} - b_2^{(k)}\beta_1^{(k)}, \beta_3^{(k)} - b_3^{(k)}\beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_n^{(k)} - b_n^{(k)}\beta_1^{(k)}, \beta_1^{(k)}\right),$$

其中 $b_i^{(k)} = \left\lfloor \frac{\beta_i^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor$。我们还将使用记号 $\boldsymbol{b}^{(k)} = \big(b_2^{(k)}, \ldots\ldots, b_n^{(k)}\big)$。与 iJPA 展开相比，对于这种展开，如果起始元素是代数整数，那么展开中的元素始终是代数整数。我们称满足 $\beta_i^{(k)}$，其中 i、$k \in \mathbb{N}$ 的元素为该展开的收敛分数，或简称收敛分数。

此外，本文将 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 的 JPA 展开的半收敛分数定义为

$$\delta_{i,j}^{(k)} = \beta_i^{(k)} - j\beta_1^{(k)} \tag{5.1}$$

其中 $2 \leq i \leq n$、 $0 \leq j \leq \left\lfloor \frac{\beta_i^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor - 1$ 和 $k \in \mathbb{N}_0$。注意，对于 $j = 0$，我们得到 $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 的 JPA 展开的收敛分数。

下面的命题给出了相似向量的 iJPA 展开与 JPA 展开之间的关系。在接下来的几节中，我们将计算一些特定向量的 JPA 展开。不过，对于 iJPA 展开，我们可以轻易判断它们是否具有周期性。因此，我们将首先推导 iJPA 展开，然后利用以下众所周知的关系来确定 JPA 展开。证明（以及命题 5.2的证明）可见于本文 arXiv 版本的附录 A5[KST]。

命题 5.1. 设 $\langle \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \rangle$ 是向量 $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ 的 iJPA 展开。那么， $\boldsymbol{\beta}^{(0)} = (1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})$ 的 JPA 展开等于

$$\boldsymbol{\beta}^{(k)} = \left(\delta_k, \alpha_1^{(k)}\delta_k, \ldots, \alpha_{n-2}^{(k)}\delta_k, \alpha_{n-1}^{(k)}\delta_k\right),$$

其中 $\delta_k = \frac{1}{\alpha_{n-1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot \alpha_{n-1}^{(k)}}$，当 $k \geq 0$ 时，且 $\delta_0 = 1$。此外，对于每个 i, k，我们有

$$\left\lfloor \frac{\beta_{i+1}^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor = \lfloor \alpha_i^{(k)} \rfloor.$$

如果存在两个整数 l_0、l_1，满足 $l_0 \geq 0$ 和 $l_1 \geq 1$，以及一个单位 ε，使得.....那么称 $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 的 JPA展开为周期的

$$\beta_i^{(k+l_1)} = \beta_i^{(k)}\varepsilon$$

对所有 $1 \leq i \leq n$ 和 $k \geq l_0$。如果 l_0 和 l_1 是满足这些条件的最小整数，那么$\boldsymbol{\beta}^{(0)}$、 $\boldsymbol{\beta}^{(1)}$、.....、 $\boldsymbol{\beta}^{(l_0-1)}$ 和 $\boldsymbol{\beta}^{(l_0)}$ $\boldsymbol{\beta}^{(l_0+1)}$.....、 $\boldsymbol{\beta}^{(l_0+l_1-1)}$ 分别称为 $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$的 JPA 展开的前周期和周期，而 l_0 和 l_1 是它们的长度。如果 $l_0 = 0$，那么 $\boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 的 JPA 展开是纯周期的。此外，命题 5.1 蕴含以下陈述:

命题 5.2。如果 $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ 的 iJPA 展开具有前周期长度l_0和周期长度 l_1，那么 $(1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})$ 的 JPA 展开也具有周期性，且前周期和周期的长度相同；iJPA 展开的周期中的单位 ε 是哈塞–伯恩斯坦单位的逆元。

注意，根据 $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})$ 的非齐次 JPA 展开 $\langle \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \rangle$，几乎可以直接计算 $(1, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1})$ 的 JPA 展开 $\langle \boldsymbol{\beta}^{(k)} \rangle$。只需在 $i \neq n$ 时取 $\beta_i^{k+1} = \beta_{i+1}^{(k)} - a_i^{(k)} \beta_1^{(k)}$，并在 $i \neq 1$ 时取 $\beta_n^{(k+1)} = \beta_1^{(k)}$，其中 $a_i^{(k)} = \lfloor \alpha_i^{(k)} \rfloor$、$\beta_1^{(0)} = 1$ 和 $\beta_i^{(0)} = \alpha_{i-1}^{(0)}$。因此，在下文中，若已知上述形式向量的 iJPA 展开，我们通常会省略 JPA 展开的计算。

6. Jacobi–Perron algorithm in the simplest cubic fields

对于二次数域， 𝔰不可分解元可以通过某些具体数的连分数得到。这些数的展开是周期的，因此在相差单位倍数的意义下，只会产生有限多个元素。因此，要研究由雅可比–佩龙算法确定的元素，自然应只关注周期 JPA 展开。正如引言中所述，关于许多（不只是三次）域族中的周期展开，已有大量研究成果。然而，对于本文研究的特定域族，我们需要求出某些具体初始向量的 JPA 展开。为此，我们首先讨论非齐次 JPA 展开，因为其中一些计算较为简单。随后，我们利用命题 5.1将这些结果转化为齐次 JPA 展开的确定过程。由于大多数计算都很简单，我们只给出证明概要，或者相应地，仅陈述结论而不提供证明。

6.1. 最简三次域中的非齐次雅可比–佩龙展开。 我们将首先确定向量（$-\rho'$， ρ'^2）的非齐次 JPA 展开，其中 ρ' 是多项式 $x^3 - ax^2 - (a+3)\,x - 1$ 的根，且 $-2 < \rho' < -1$。我们将看到，对于所有 $a \geq -1$，这一展开都是周期的。对于 $-1 \leq a \leq 3$，这一 iJPA 展开形式不同，特别是其周期长度与 $-\rho'$， ρ'^2）在 $a \geq 4$时的展开不同。本文 arXiv版本的附录 A6 中给出了这一展开的精确形式 [KST]。

对于 $a \geq 4$，$(-\rho', \rho'^2)$ 的 iJPA 展开的前周期与周期长度相同。此外，当位于周期中间的系数 a 为奇数或偶数时，其形式仅有细微差异。

命题 6.1. 设 $a \geq 4$。则向量 $(-\rho', \rho'^2)$ 的雅可比–佩龙展开是周期的。特别地，设 $\lfloor \frac{a}{2} \rfloor = A_0$。则 $(-\rho', \rho'^2)$ 的 iJPA 展开的前周期为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^{(0)} &= (-\rho', \rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(0)} &= (1, 1), \\ \boldsymbol{\alpha}^{(1)} &= (1 - \rho', -2 - (a+1)\rho' + \rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(1)} &= (2, a+1). \end{aligned}$$

当 a 为偶数时，周期为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}^{(2)} &= (a + 4 + a\rho' - \rho'^2, -2 - (a+1)\rho' + \rho'^2), \\ \boldsymbol{\alpha}^{(3)} &= (-1 + \rho'^2, -\rho'), \\ \boldsymbol{\alpha}^{(4)} &= \left(\frac{2a + 2 + (a-1)\rho' - \rho'^2}{2a+3}, \frac{-3a - 4 - (a^2 + 3a + 1)\rho' + (a+2)\rho'^2}{2a+3} \right), \\ \boldsymbol{\alpha}^{(5)} &= \left(-(A_0 + 2) - (A_0 + 1)\,\rho' + \rho'^2, 1 - \rho' \right), \\ \boldsymbol{\alpha}^{(6)} &= \left(\frac{A_0^2 + 2A_0 - 1 + (A_0 - 2)\rho' - \rho'^2}{A_0^3 + 4A_0^2 + 3A_0 - 1}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{-2A_0^2 - 3A_0 + 1 - (2A_0^3 + 3A_0^2 + A_0 - 1)\rho' + (A_0^2 + A_0)\rho'^2}{A_0^3 + 4A_0^2 + 3A_0 - 1} \right), \\ \boldsymbol{\alpha}^{(7)} &= (-(A_0 + 4) - 2A_0\rho' + \rho'^2, A_0 + 2 - \rho'), \\ \boldsymbol{\alpha}^{(8)} &= (-\rho', -1 - (a+1)\rho' + \rho'^2), \end{aligned}$$

相应的整数部分向量为 $\boldsymbol{a}^{(2)} = (1, a+1)$、$\boldsymbol{a}^{(3)} = (0, 1)$、$\boldsymbol{a}^{(4)} = (0, A_0)$、$\boldsymbol{a}^{(5)} = (0, 2)$、$\boldsymbol{a}^{(6)} = (0, 1)$、$\boldsymbol{a}^{(7)} = (A_0 - 2, A_0 + 3)$ 和 $\boldsymbol{a}^{(8)} = (1, a+2)$。

当 a 为奇数时，周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(2)} &= (a+4+a\rho'-\rho'^2, -2-(a+1)\rho'+\rho'^2),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(3)} &= (-1+\rho'^2, -\rho'),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(4)} &= \left(\frac{2a+2+(a-1)\rho'-\rho'^2}{2a+3}, \frac{-3a-4-(a^2+3a+1)\rho'+(a+2)\rho'^2}{2a+3}\right),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(5)} &= \left(-(A_0+2)-(A_0+2)\rho'+\rho'^2, 1-\rho'\right),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(6)} &= \left(\frac{A_0^2+3A_0-2+(A_0-2)\rho'-\rho'^2}{A_0^3+6A_0^2+7A_0-5},\right.\\
&\qquad \left.\frac{-2A_0^2-5A_0+3-(2A_0^3+6A_0^2+2A_0-3)\rho'+(A_0^2+2A_0-1)\rho'^2}{A_0^3+6A_0^2+7A_0-5}\right),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(7)} &= (-(A_0+5)-(2A_0+1)\rho'+\rho'^2, A_0+3-\rho'),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(8)} &= (-\rho', -1-(a+1)\rho'+\rho'^2),
\end{aligned}$$

相应的整数部分向量为 $\boldsymbol{a}^{(2)}=(1, a+1)$、$\boldsymbol{a}^{(3)}=(0, 1)$、$\boldsymbol{a}^{(4)}=(0, A_0)$、$\boldsymbol{a}^{(5)}=(1,2)$、$\boldsymbol{a}^{(6)}=(0, 1)$、$\boldsymbol{a}^{(7)}=(A_0-2, A_0+4)$ 以及 $\boldsymbol{a}^{(8)}=(1, a+2)$。

证明。由于每次迭代中的计算都类似，我们只给出证明的概要。本证明中最具挑战性的部分是确定 $\boldsymbol{a}^{(k)}$ 的取值，即所涉及元素的整数部分。然而，最简三次域具有许多有用的性质，可以显著简化我们的计算。回顾一下，我们对 ρ 的共轭元有很好的估计；具体而言，对于 $a\geq 7$，我们有

$$-1-\frac{1}{a+1}<\rho'<-1-\frac{1}{a+2}. \tag{6.1}$$

在初始迭代中，我们有向量（$-\rho'$，ρ'^2）。我们知道 $\lfloor -\rho'\rfloor = 1$，即 $a_1^{(0)}=1$。利用（6.1），我们可得

$$1<\rho'^2<\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^2<1+\frac{2}{a+1}+\frac{1}{(a+1)^2}<2$$

对于 $a\geq 7$。这意味着在这些 a 的情况下，$a_2^{(0)}=1$。对于 $4\leq a\leq 6$ 也同样成立，这一点可通过计算机程序轻松验证（我们使用了 Mathematica）。于是我们有

$$\alpha_1^{(1)}=\frac{\rho'^2-1}{-\rho'-1}=1-\rho'.$$

事实上，

$$\alpha_2^{(1)}=\frac{1}{-\rho'-1}=-2-(a+1)\rho'+\rho'^2$$

可以利用 $\rho'^3-a\rho'^2-(a+3)\rho'-1=0$ 验证。

我们将对 $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$ 采用类似的方法。我们可以立即得出 $a_1^{(1)}=\lfloor 1-\rho'\rfloor=2$。另一方面，元素 $\alpha_2^{(1)}=-2-(a+1)\rho'+\rho'^2$ 是 ρ' 的一个共轭元，即 ρ，对此我们有$a_2^{(1)}=\lfloor\rho\rfloor=a+1$。

在第二次迭代中，我们有 $a_2^{(2)}=\lfloor\rho\rfloor=a+1$。对于 $a_1^{(2)}$，我们可以得出

$$\alpha_1^{(2)}=a+4+a\rho'-\rho'^2>a+4-a\left(1+\frac{1}{a+1}\right)-\left(1+\frac{1}{a+1}\right)^2=1+\frac{a^2+a-1}{(a+1)^2}>1$$

and

$$\alpha_1^{(2)}=a+4+a\rho'-\rho'^2<a+4-a\left(1+\frac{1}{a+2}\right)-\left(1+\frac{1}{a+2}\right)^2=2-\frac{1}{(a+2)^2}<2.$$

因此，$a_1^{(2)}=1$。对于其他迭代，我们也可以类似地进行。

我们只详细讨论第四次迭代，此时奇数系数和偶数系数的展开开始出现差异 a。具体而言，我们将重点讨论 $a_2^{(4)}$ 的确定。很容易验证，$\alpha_2^{(4)}$ 是多项式的一个根

$$h(x)=(2a+3)x^3-a^2x^2-(a^2+2a+3)x+1,$$

该多项式有两个正根和一个负根。特别地，$h(0) = 1 > 0$, $h(1) = 1 - 2a^2 < 0$, $8h\left(\frac{a}{2}\right) = -a^3 - 8a^2 - 12a + 8 < 0$ 以及 $8h\left(\frac{a+1}{2}\right) = a^3 + a^2 - 9a - 1 > 0$。元素 $\alpha_2^{(4)}$ 是这两个正根之一。此外，

$$-3a - 4 - (a^2 + 3a + 1)\rho' + (a + 2)\rho'^2 > -3a - 4 + (a^2 + 3a + 1) + (a + 2)$$
$$= a^2 + a - 1 > 2a + 3,$$

这意味着 $\alpha_2^{(4)} > 1$。由此可得 $\lfloor \alpha_2^{(4)} \rfloor = \lfloor \frac{a}{2} \rfloor = A_0$。 □

此外，我们可以陈述以下命题：

命题 6.2。向量 $(-\rho', \rho'^2)$ 的雅可比–佩龙展开是周期的。

证明。对 $-1 \le a \le 3$ 的验证是显然的。然而，在这几个情形中，$(-\rho', \rho'^2)$ 的 iJPA 展开不同于 $a \ge 4$的展开。对于 $a = -1$，其前周期长度为 1，周期长度为 2。对于 $a = 0$，这两个长度分别为 2 和 3；对于 $1 \le a \le 3$，则分别等于 2 和 5。关于$a \ge 4$ 的陈述由命题 6.1得出。 □

注意，对于向量 $(-\rho'', \rho'')$ 的 iJPA 展开，其中$-1 < \rho'' < 0$，也可以得到类似的结果。我们还研究了 (ρ, ρ^2) 的 iJPA 展开，但除 a 的少数几个取值外（例如 $a = -1$、0、2），它似乎并不具有周期性。

6.2. 最简三次域中的齐次雅可比–佩龙展开。现在，由 $(-\rho', \rho'^2)$ 的非齐次 JPA展开，我们得到向量 $(1, -\rho', \rho'^2)$ 的齐次 JPA展开。

定理 6.3. 设 $a \ge 4$。那么，向量 $(1, -\rho', \rho'^2)$ 的齐次雅可比–佩龙展开是周期的。其前周期等于

$$\boldsymbol{\beta}^{(0)} = (1, -\rho', \rho'^2),$$
$$\boldsymbol{\beta}^{(1)} = (-1 - \rho', -1 + \rho'^2, 1).$$

周期长度为 7。迭代 (2)–(4) 等于

$$\boldsymbol{\beta}^{(2)} = (1 + 2\rho' + \rho'^2, a + 2 + (a + 1)\rho', -1 - \rho'),$$
$$\boldsymbol{\beta}^{(3)} = (a + 1 + (a - 1)\rho' - \rho'^2, -(a + 2) - (2a + 3)\rho' - (a + 1)\rho'^2, 1 + 2\rho' + \rho'^2),$$
$$\boldsymbol{\beta}^{(4)} = (-(a + 2) - (2a + 3)\rho' - (a + 1)\rho'^2, -a - (a - 3)\rho' + 2\rho'^2, a + 1 + (a - 1)\rho' - \rho'^2).$$

如果 a 为偶数，则迭代 (5)-(7) 为

$$\boldsymbol{\beta}^{(5)} = (-a - (a - 3)\rho' + 2\rho'^2, 2A_0^2 + 4A_0 + 1 + (4A_0^2 + 5A_0 - 1)\rho' + (2A_0^2 + A_0 - 1)\rho'^2,$$
$$- (a + 2) - (2a + 3)\rho' - (a + 1)\rho'^2),$$
$$\boldsymbol{\beta}^{(6)} = (2A_0^2 + 4A_0 + 1 + (4A_0^2 + 5A_0 - 1)\rho' + (2A_0^2 + A_0 - 1)\rho'^2, a - 2 - 9\rho' - (a + 5)\rho'^2,$$
$$- a - (a - 3)\rho' + 2\rho'^2),$$
$$\boldsymbol{\beta}^{(7)} = (a - 2 - 9\rho' - (a + 5)\rho'^2, -2A_0^2 - 6A_0 - 1 - (4A_0^2 + 7A_0 - 4)\rho' - (2A_0^2 + A_0 - 3)\rho'^2,$$
$$2A_0^2 + 4A_0 + 1 + (4A_0^2 + 5A_0 - 1)\rho' + (2A_0^2 + A_0 - 1)\rho'^2).$$

如果 a 为奇数，则迭代 (5)-(7) 为

$$\boldsymbol{\beta}^{(5)} = (-a - (a - 3)\rho' + 2\rho'^2, 2A_0^2 + 5A_0 + 2 + (4A_0^2 + 7A_0)\rho' + (2A_0^2 + 2A_0 - 1)\rho'^2,$$
$$- (a + 2) - (2a + 3)\rho' - (a + 1)\rho'^2),$$
$$\boldsymbol{\beta}^{(6)} = (2A_0^2 + 7A_0 + 3 + (4A_0^2 + 9A_0 - 2)\rho' + (2A_0^2 + 2A_0 - 3)\rho'^2, a - 2 - 9\rho' - (a + 5)\rho'^2,$$
$$- a - (a - 3)\rho' + 2\rho'^2),$$
$$\boldsymbol{\beta}^{(7)} = (a - 2 - 9\rho' - (a + 5)\rho'^2, -2A_0^2 - 9A_0 - 4 - (4A_0^2 + 11A_0 - 4)\rho' - (2A_0^2 + 2A_0 - 5)\rho'^2,$$
$$2A_0^2 + 7A_0 + 3 + (4A_0^2 + 9A_0 - 2)\rho' + (2A_0^2 + 2A_0 - 3)\rho'^2).$$

最后，迭代（8）为

$$\boldsymbol{\beta}^{(8)} = (-a^2 - 5 - (a^2 - a + 14)\rho' - 7\rho'^2, 7 + (a^2 + 7a + 26)\rho' + (a^2 + 6a + 14)\rho'^2,$$
$$a - 2 - 9\rho' - (a + 5)\rho'^2).$$

证明。 要证明此定理，只需结合命题 6.1、5.1 和5.2。正如第 5 节末尾所述，在每次迭代中，只需计算若干元素的一个具体线性组合。因此，在第一次迭代中，我们得到

$$\begin{aligned}\beta_1^{(1)} &= \beta_2^{(0)} - a_1^{(0)}\beta_1^{(0)} = -\rho' - 1\cdot 1 = -1-\rho',\\ \beta_2^{(1)} &= \beta_3^{(0)} - a_2^{(0)}\beta_1^{(0)} = \rho'^2 - 1\cdot 1 = -1+\rho'^2,\\ \beta_3^{(1)} &= \beta_1^{(0)} = 1\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{a}^{(0)} = (a_1^{(0)},\ a_2^{(0)})$ 是命题 6.1 中的整数部分向量。

类似地，在下一步中，我们得到

$$\begin{aligned}\beta_1^{(2)} &= \beta_2^{(1)} - a_1^{(1)}\beta_1^{(1)} = -1+\rho'^2 - 2\cdot(-1-\rho') = 1+2\rho'+\rho'^2,\\ \beta_2^{(1)} &= \beta_3^{(1)} - a_2^{(1)}\beta_1^{(1)} = 1-(a+1)\cdot(-1-\rho') = a+2+(a+1)\rho',\\ \beta_3^{(2)} &= \beta_1^{(1)} = -1-\rho'.\end{aligned}$$

由于这些计算都很简单，我们省略其余步骤。 □

7. Jacobi–Perron algorithm in Ennola's cubic fields

回顾一下，Ennola三次域是由多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根 ρ 生成的域，其中 $a\in\mathbb{N}$、$a\geq 3$。这里，我们将 ρ 的共轭元记为

$$\begin{aligned}1+\frac{1}{a+3} < \rho < 1+\frac{1}{a+2},\\ -\frac{1}{a} < \rho' < -\frac{1}{a+1},\\ -a+\frac{1}{a^2+a} < \rho'' < -a+\frac{1}{a^2}.\end{aligned}$$

与最简三次域的情形类似，我们将考察形如 $(1,|\theta|,\theta^2)$、其中 $\theta\in\{\rho,\rho',\rho''\}$ 的向量的 JPA 展开，证明其周期性并确定其形式。

此外，在第 7.2 小节中，我们将讨论多项式 $x^3-(a-1)x^2-ax-1$（其中 $a\in\mathbb{N}$，$a\geq 5$）的根所对应的同一问题。请注意，这些多项式的根也生成 Ennola三次域。特别地，若 ρ 是 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根，那么 $a\rho+\rho^2$ 就是$x^3-(a+1)x^2-(a+2)x-1$ 的一个根。

7.1. 第一个生成多项式。

首先请注意，以下命题的证明较为技术性，且与最简三次域情形下的证明类似。因此我们不再赘述（部分证明可见 [Sg] ，或本文 arXiv版本附录A7 [KST]）。

我们将从多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-$ 的根 $1<\rho<2$ 开始 1.

命题 7.1。设 $a\geq 3$。则向量 $(1,\rho,\rho^2)$ 的雅可比–佩龙展开是周期的。向量 $(1,\rho,\rho^2)$ 的 JPA展开的前周期为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{(0)} &= \left(1,\rho,\rho^2\right), & \boldsymbol{b}^{(0)} &= (1,1),\\ \boldsymbol{\beta}^{(1)} &= \left(-1+\rho,-1+\rho^2,1\right), & \boldsymbol{b}^{(1)} &= (2,a+2),\end{aligned}$$

周期为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{(2)} &= \left(1-2\rho+\rho^2,a+3-(a+2)\rho,-1+\rho\right), & \boldsymbol{b}^{(2)} &= (0,a+2),\\ \boldsymbol{\beta}^{(3)} &= \left(a+3-(a+2)\rho,-(a+3)+(2a+5)\rho-(a+2)\rho^2,1-2\rho+\rho^2\right), & \boldsymbol{b}^{(3)} &= (0,a+3).\end{aligned}$$

我们将继续讨论根 $-1<\rho'<0$。

命题 7.2. 设 $a\geq 3$。则向量 $\left(1,-\rho',\rho'^2\right)$ 的雅可比–佩龙展开是周期的。 $\left(1,-\rho',\rho'^2\right)$ 的 JPA展开的前周期为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{(0)} &= \left(1,-\rho',\rho'^2\right), & \boldsymbol{b}^{(0)} &= (0,0),\\ \boldsymbol{\beta}^{(1)} &= \left(-\rho',\rho'^2,1\right), & \boldsymbol{b}^{(1)} &= (0,a),\\ \boldsymbol{\beta}^{(2)} &= \left(\rho'^2,1+a\rho',-\rho'\right), & \boldsymbol{b}^{(2)} &= (a-2,a).\end{aligned}$$

且周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(3)} &= \left(1 + a\rho' - (a-2)\rho'^2, -\rho' - a\rho'^2, \rho'^2\right), && \boldsymbol{b}^{(3)} = (0,1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(4)} &= \left(-\rho' - a\rho'^2, -1 - a\rho' + (a-1)\rho'^2, 1 + a\rho' - (a-2)\rho'^2\right), && \boldsymbol{b}^{(4)} = (0,1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(5)} &= \left(-1 - a\rho' + (a-1)\rho'^2, 1 + (a+1)\rho' + 2\rho'^2, -\rho' - a\rho'^2\right), && \boldsymbol{b}^{(5)} = (0,a-2),\\
\boldsymbol{\beta}^{(6)} &= \big(1 + (a+1)\rho' + 2\rho'^2, a - 2 + (a^2-2a-1)\rho' - (a^2-2a+2)\rho'^2,\\
&\qquad -1 - a\rho' + (a-1)\rho'^2\big), && \boldsymbol{b}^{(6)} = (0,1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(7)} &= \big(a - 2 + (a^2-2a-1)\rho' - (a^2-2a+2)\rho'^2,\\
&\qquad -2 - (2a+1)\rho' + (a-3)\rho'^2, 1 + (a+1)\rho' + 2\rho'^2\big), && \boldsymbol{b}^{(7)} = (0,1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(8)} &= \big(-2 - (2a+1)\rho' + (a-3)\rho'^2, -a + 3 - (a^2-3a-2)\rho'\\
&\quad + (a^2-2a+4)\rho'^2, a - 2 + (a^2-2a-1)\rho' - (a^2-2a+2)\rho'^2\big), && \boldsymbol{b}^{(8)} = (0,a),\\
\boldsymbol{\beta}^{(9)} &= \big(-a + 3 - (a^2-3a-2)\rho' + (a^2-2a+4)\rho'^2,\\
&\qquad 3a - 2 + (3a^2-a-1)\rho' - (2a^2-5a+2)\rho'^2,\\
&\qquad -2 - (2a+1)\rho' + (a-3)\rho'^2\big), && \boldsymbol{b}^{(9)} = (a-3,a).
\end{aligned}$$

最后，我们讨论根 $-a < \rho'' < -a+1$，其对应的 JPA 展开与前面的情形一样，也是周期的。

命题 7.3. 设 $a \geq 3$。则向量 $\left(1, -\rho'', \rho''^2\right)$ 的雅可比–佩龙展开是周期的。向量 $\left(1, -\rho'', \rho''^2\right)$ 的 JPA 展开的前周期为

$$\boldsymbol{\beta}^{(0)} = \left(1, -\rho'', \rho''^2\right), \qquad \boldsymbol{b}^{(0)} = (a-1, a^2-1),$$

周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(1)} &= \left(-a + 1 - \rho'', -a^2 + 1 + \rho''^2, 1\right), && \boldsymbol{b}^{(1)} = (0,1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(2)} &= \left(-a^2 + 1 + \rho''^2, a + \rho, -a + 1 - \rho''\right), && \boldsymbol{b}^{(2)} = (0,1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(3)} &= \left(a + \rho'', a^2 - a - \rho'' - \rho''^2, -a^2 + 1 + \rho''^2\right), && \boldsymbol{b}^{(3)} = (2a-2, a^2-a-1).
\end{aligned}$$

7.2. 第二生成多项式。本小节将重点讨论多项式 $x^3 - (a-1)x^2 - ax - 1$ 的根，其中 $a \geq 5$。注意，这些元素也生成 Ennola 三次域。设多项式 $x^3 - (a-1)x^2 - ax - 1$ 的根为 ψ、ψ' 和 ψ''，其中

$$a < a + \frac{a-1}{a^3} < \psi < a + \frac{a^2-1}{a^4} < a + \frac{1}{a^2},$$

$$-1 < -\frac{a-1}{a} < \psi' < -\frac{a-2}{a-1} < 0,$$

$$-1 < -\frac{1}{a-2} < \psi'' < -\frac{1}{a-1} < 0.$$

注意，我们有 $\rho = -(a-1) - (a-1)\psi + \psi^2$，其中 $1 < \rho$ 是多项式 $x^3 + (a-3)x^2 - (a-2)x - 1$的一个根。

首先，我们将推导 $(1, \psi, \psi^2)$ 的 JPA展开。

命题 7.4。设 $a \geq 5$。则向量 $\left(1, \psi, \psi^2\right)$ 的雅可比–佩龙展开是周期的。$\left(1, \psi, \psi^2\right)$ 的 JPA展开的前周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(0)} &= \left(1, \psi, \psi^2\right), && \boldsymbol{b}^{(0)} = (a, a^2),\\
\boldsymbol{\beta}^{(1)} &= \left(-a + \psi, -a^2 + \psi^2, 1\right), && \boldsymbol{b}^{(1)} = (2a, a^2 + a),
\end{aligned}$$

周期为

$$\boldsymbol{\beta}^{(2)} = \left(a^2 - 2a\psi + \psi^2, a^3 + a^2 + 1 - (a^2+a)\psi, -a + \psi\right), \quad \boldsymbol{b}^{(2)} = (2a+1, a^2+a).$$

下一步是确定 $\left(1, -\psi', \psi'^2\right)$ 的 JPA展开。

命题 7.5. 设 $a \geq 5$。向量 $(1, -\psi', \psi'^2)$ 的雅可比–佩龙展开是周期的。$(1, -\psi', \psi'^2)$ 的 JPA展开的前周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(0)} &= (1, -\psi', \psi'^2), & \boldsymbol{b}^{(0)} &= (0, 0),\\
\boldsymbol{\beta}^{(1)} &= (-\psi', \psi'^2, 1), & \boldsymbol{b}^{(1)} &= (0, 1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(2)} &= (\psi'^2, 1 + \psi', -\psi'), & \boldsymbol{b}^{(2)} &= (0, 1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(3)} &= (1 + \psi', -\psi' - \psi'^2, \psi'^2), & \boldsymbol{b}^{(3)} &= (0, a - 3).
\end{aligned}$$

周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(4)} &= (-\psi' - \psi'^2, -a + 3 - (a-3)\psi' + \psi'^2, 1 + \psi'), & \boldsymbol{b}^{(4)} &= (0, 1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(5)} &= (-a + 3 - (a-3)\psi' + \psi'^2, 1 + 2\psi' + \psi'^2, -\psi' - \psi'^2), & \boldsymbol{b}^{(5)} &= (0, 1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(6)} &= (1 + 2\psi' + \psi'^2, a - 3 + (a-4)\psi' - 2\psi'^2, -a + 3 - (a-3)\psi' + \psi'^2), & \boldsymbol{b}^{(6)} &= (0, a - 2),\\
\boldsymbol{\beta}^{(7)} &= (a - 3 + (a-4)\psi' - 2\psi'^2, -2a + 5 - (3a-7)\psi' - (a-3)\psi'^2,\\
&\qquad 1 + 2\psi' + \psi'^2), & \boldsymbol{b}^{(7)} &= (a - 5, a - 2),\\
\boldsymbol{\beta}^{(8)} &= (-a^2 + 6a - 10 - (a^2 - 6a + 13)\psi' + (a-7)\psi'^2,\\
&\qquad -a^2 + 5a - 5 - (a^2 - 6a + 6)\psi' + (2a-3)\psi'^2,\\
&\qquad a - 3 + (a-4)\psi' - 2\psi'^2), & \boldsymbol{b}^{(8)} &= (0, 1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(9)} &= (-a^2 + 5a - 5 - (a^2 - 6a + 6)\psi' + (2a-3)\psi'^2,\\
&\qquad a^2 - 5a + 7 + (a^2 - 5a + 9)\psi' - (a-5)\psi'^2,\\
&\qquad -a^2 + 6a - 10 - (a^2 - 6a + 13)\psi' + (a-7)\psi'^2), & \boldsymbol{b}^{(9)} &= (0, 1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(10)} &= (a^2 - 5a + 7 + (a^2 - 5a + 9)\psi' - (a-5)\psi'^2,\\
&\qquad a - 5 - 7\psi' - (a+4)\psi'^2,\\
&\qquad -a^2 + 5a - 5 - (a^2 - 6a + 6)\psi' + (2a-3)\psi'^2), & \boldsymbol{b}^{(10)} &= (0, a - 4).
\end{aligned}$$

最后，我们将关注最后一个根 ψ''。

命题 7.6。设 $a \geq 5$。向量 $(1, -\psi'', \psi''^2)$ 的雅可比–佩龙展开是周期性的。向量 $(1, -\psi'', \psi''^2)$ 的 JPA 展开的前周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(0)} &= (1, -\psi'', \psi''^2), & \boldsymbol{b}^{(0)} &= (0, 0),\\
\boldsymbol{\beta}^{(1)} &= (-\psi'', \psi''^2, 1), & \boldsymbol{b}^{(1)} &= (0, a - 2),\\
\boldsymbol{\beta}^{(2)} &= (\psi''^2, 1 + (a-2)\psi'', -\psi''), & \boldsymbol{b}^{(2)} &= (a - 2, a - 2),
\end{aligned}$$

周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(3)} &= (1 + (a-2)\psi'' - (a-2)\psi''^2, -\psi'' - (a-2)\psi''^2, \psi''^2), & \boldsymbol{b}^{(3)} &= (1, 1),\\
\boldsymbol{\beta}^{(4)} &= (-1 - (a-1)\psi'', -1 - (a-2)\psi'' + (a-1)\psi''^2,\\
&\qquad 1 + (a-2)\psi'' - (a-2)\psi''^2), & \boldsymbol{b}^{(4)} &= (1, a - 4),\\
\boldsymbol{\beta}^{(5)} &= (\psi'' + (a-1)\psi''^2, a - 3 + (a^2 - 4a + 2)\psi'' - (a-2)\psi''^2,\\
&\qquad -1 - (a-1)\psi''), & \boldsymbol{b}^{(5)} &= (a - 3, a - 2).
\end{aligned}$$

总结前述命题的结果，我们可以得出以下结论，即1.3 引言中的定理。

定理 7.7. 我们有

(1) 若 τ 是多项式 $x^3 + (a-1)x^2 - ax - 1$ 的根，其中 $a \geq 3$，则向量 $(1, |\tau|, \tau^2)$ 的雅可比–佩龙展开是周期的；(2) 若 τ 是多项式 $x^3 - (a-1)x^2 - ax - 1$ 的根，其中 $a \geq 5$，则向量 $(1, |\tau|, \tau^2)$ 的雅可比 – 佩龙展开是周期的。

证明。 第一条结论由命题 7.1、7.2 和 7.3得出，第二条结论则由命题 7.4、7.5 和7.6得出。 □

8. Indecomposability of (semi)convergents

在本节中，我们将讨论形如 (5.1) 的元素，并将它们与相应域中的 $\mathfrak{s}$-不可分解元进行比较。稍后我们将看到，在某些情况下，通过这种方式只能得到 $\mathfrak{s}$-不可分解元。然而，某些周期 JPA 展开可以产生 $\mathfrak{s}$-可分解元，既作为收敛分数，也作为半收敛（例如，见例 1）。

回顾一下，在本文中，我们将向量 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 的雅可比–佩龙展开的半收敛定义为如下形式的元素

$$\delta_{ij}^{(k)} = \beta_i^{(k)} - j\beta_1^{(k)} \tag{8.1}$$

其中 $2 \le i \le n$、$0 \le j \le \left\lfloor \frac{\beta_i^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor - 1$ 和 $k \in \mathbb{N}_0$。此外，满足 $j = 0$ 的元素称为收敛分数。

8.1. 最简三次域。回顾一下，在由多项式 $x^3 - ax^2 - (a+3)x - 1$ 的根 ρ 生成的最简三次域中，所有 $\mathfrak{s}$-不可分解元都可以表示为元素 1、$1 + \rho + \rho^2$ 以及如下形式元素的单位倍

$$\theta_{v,W} = -v - (v(a+2) + 1 + W)\rho + (v+1)\rho^2$$

其中 $0 \le v \le a$ 和 $0 \le W \le a - v$ 构成一个三角形。在下面的命题中，我们证明，只有 θ_v 的单位倍 W 会出现在向量 $(1, -\rho', \rho'^2)$ 的 JPA展开中，该向量由定理 6.3导出。回顾一下，$-2 < \rho' < -1$ 是多项式 $x^3 - ax^2 - (a+2)x - 1$ 的一个根，其中$a \ge -1$。

定理 8.1。 向量 $(1, -\rho', \rho'^2)$ 的 JPA展开中的半收敛分数，在其符号型中全部都是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。

证明。通过简单比较和基本计算，我们可以立即确定，向量 $(1, -\rho', \rho'^2)$ 的所有半收敛分数都是定理 2.1 中某个元素的单位倍。对$-1 \le a \le 3$ 的验证是平凡的，可在本文 arXiv版本的附录 A8 中找到 [KST]。关于 $a \ge 4$ 的结果见表 2 （a 为偶数）和表 3 （a 为奇数）。这些表格分别包含以下信息：每个半收敛分数的范数 $\delta_i^{(k)}$，$_j$，以及定理 2.1 中的（全正）不可分解整数 α 和一个单位 $\varepsilon \in \mathbb{Z}[\rho]$（使用基本单位 ρ 和 ρ'表示），使得 $\delta_i^{(k)}{}_{,\,j} = \alpha\varepsilon$。

此外，我们知道 JPA 展开是周期的，因此如果 $k \ge 5$，那么对于某个单位 ε，$\delta_i^{(k+5)}{}_{,\,j} = \varepsilon\delta_{ij}^{(k)}$。因此，只需进行迭代 $k \le 8$。□

前一个定理可能会让人希望一般情况下也如此理想。遗憾的是，事实并非如此。在接下来的两个例子中，我们将展示，即使在最简单的三次域中，JPA 展开的周期性也不能保证收敛分数（或半收敛分数）是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。

例1。 考虑 $(1, \rho, \rho^2)$ 的 JPA 展开，其中 $3 < \rho < 4$ 是多项式 $x^3 - 2x^2 - 5x - 1$ 的最大根，即 $a = 2$。容易计算得出，它是周期的，前周期为 $\boldsymbol{\beta}^{(0)} = (1, \rho, \rho^2)$ 和 $\boldsymbol{\beta}^{(1)} = (-3 + \rho, -12 + \rho^2, 1)$，周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(2)} &= (-12 + \rho^2, 4 - \rho, -3 + \rho^2),\\
\boldsymbol{\beta}^{(3)} &= (16 - \rho - \rho^2, 9 + \rho - \rho^2, -12 + \rho^2),\\
\boldsymbol{\beta}^{(4)} &= (-7 + 2\rho, -28 + \rho + 2\rho^2, 16 - \rho - \rho^2),\\
\boldsymbol{\beta}^{(5)} &= (21 - 13\rho + 2\rho^2, 107 - 27\rho - \rho^2, -7 + 2\rho).
\end{aligned}$$

然而，收敛分数 $\beta_1^{(2)} = -12 + \rho^2$ 是 $\mathfrak{s}$-可分解的。这是因为其范数为 37，而 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\rho]$ 中 $\mathfrak{s}$-不可分解元的范数的绝对值只有 1、7、11 和 19。对于范数为 49 且还是全正的收敛分数 $\beta_1^{(3)} = 16 - \rho - \rho^2$，情况也同样如此。

在第二个例子中，我们将说明，即使渐近分数具有 $\mathfrak{s}$-不可分解性，也不意味着所有半收敛分数同样都是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。考虑向量 $(1, \rho, \rho^2)$ 的 JPA展开，其中 $1 < \rho < 2$ 是多项式 $x^3 + x^2 - 2x - 1$ 的最大根，即 $a = -1$。

$\delta_{i,j}^{(k)}$	范数 $N(\delta_i^{(k)}{}_{,j})$	不可分解整数 α	单位 ε
$\delta_{2,0}^{(1)}$	$-(2a+3)$	$\theta'_{0,0}$	$-\rho^{-1}\rho'^{-1}$
$\delta_{2,1}^{(1)}$	-1	1	$-\rho^{-1}\rho'$
$\delta_{3,j}^{(1)}$ $1\le j\le a$	$-j^3+aj^2+(a+3)j+1$	$\theta'_{a-j+1,0}$	$\rho^{-2}\rho'^{-2}$
$\delta_{2,0}^{(2)}$	$2a+3$	$\theta'_{0,0}$	$\rho^{-2}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(2)}$	1	1	ρ^{-1}
$\delta_{3,j}^{(2)}$ $1\le j\le a$	$-j^3+aj^2+(a+3)j+1$	$\theta'_{a-j+1,0}$	$\rho^{-3}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(3)}$	1	1	ρ^{2}
$\delta_{3,0}^{(4)}$	-1	1	$-\rho^{-2}\rho'^{-1}$
$\delta_{3,j}^{(4)}$ $1\le j\le A_0-1$	$-(2a+3)j^3+a^2j^2$ $+(a^2+2a+3)j-1$	$\theta'_{a-2j,j+1}$	$\rho^{-4}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(5)}$	$2a+3$	$\theta'_{0,0}$	$\rho^{-3}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,1}^{(5)}$	1	1	ρ^{-3}
$\delta_{3,0}^{(6)}$	-1	1	$-\rho^{-3}\rho'^{-1}$
$\delta_{2,j}^{(7)}$ $0\le j\le A_0-3$	$j^3-(A_0-6)j^2-(6A_0-9)j$ $-A_0^2j+A_0^3-5A_0+3$	$\theta'_{A_0-j-3,a-(A_0-j-3)}$	$\rho^{-5}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,j}^{(7)}$ $0\le j\le A_0+1$	$j^3-(A_0+6)j^2+(2A_0+9)j$ $-A_0^2j+A_0^3+4A_0^2+3A_0-1$	θ'_{0,A_0+1-j}	$\rho^{-4}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,A_0+2}^{(7)}$	1	1	ρ^{-4}
$\delta_{2,0}^{(8)}$	-1	1	$-\rho^{-5}\rho'^{-1}$
$\delta_{3,0}^{(8)}$	-1	1	$-\rho^{-4}\rho'^{-1}$
$\delta_{3,1}^{(8)}$	1	1	$\rho^{-4}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,j}^{(8)}$ $2\le j\le a+1$	$-j^3+(a+3)j^2-aj-1$	$\theta'_{a-j+2,0}$	$\rho^{-6}\rho'^{-4}$

TABLE 2. THE SIMPLEST CUBIC FIELDS: JPA展开$_j$ $(1,-\rho',\rho'^2)$ 的半收敛分数 $\delta_i^{(k)}{}_{,j}$，$a=2A_0\ge 4$、其范数、相应的不可分解整数α 以及单位 ε，使得 $\delta_i^{(k)}{}_{,j}=\alpha\varepsilon$。

可以很容易地计算出，它是周期的，前周期为 $(1,\rho,\rho^2)$ 和 $(-1+\rho,-1+\rho^2,1)$，周期为 $(1-2\rho+\rho^2,5-4\rho,-1+\rho)$ 和 $(5-4\rho,-5+9\rho-4\rho^2,1-2\rho+\rho^2)$。在这种情况下，所有渐近分数都是单位。因此，它们在其符号型中都是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。另一方面，半收敛分数 $\delta_3^{(2)}{}_{,2}=-3+5\rho-2\rho^2$ 的范数为 13。由于 $\mathfrak{s}$-不可分解元的范数的所有可能绝对值为 1 和 7，因此该半收敛分数在 $\mathcal{O}_K$ 中是 $\mathfrak{s}$-可分解的。

8.2. Ennola三次域。回想一下，在Ennola三次域中，也就是由多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的根ρ 生成的域，其中 $a\in\mathbb{N},a\ge 3$，所有 $\mathfrak{s}$-不可分解元都可以表示为以下形式元素的单位倍：

(1) $\kappa_w=1+w\rho+\rho^2$，其中 $1\le w\le a-1$；(2) $\lambda_{v,w}=-v-(a(v-1)+w)\rho+(a(v-1)+w+1)\rho^2$，其中 $1\le v\le a-1$ 且$\max\{1,v-1\}\le w\le a-1$；(3) $\mu_u=-1-u\rho+(u+2)\rho^2$，其中 $0\le u\le a-2$。

与小节 8.1中一样，我们将考察某些形如 $(1,|\theta|,\theta^2)$ 的向量的 JPA 展开中的半收敛分数，并讨论它们是否是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。正如我们将看到的，在某些情况下，我们再次只得到 $\mathfrak{s}$中的 $\mathbb{Z}[\rho]$-不可分解整数。然而，有时，尽管 JPA 展开是周期的，我们也会得到 $\mathfrak{s}$-可分解整数。

$\delta_{i,j}^{(k)}$	范数 $N(\delta_i^{(k)},{}_j)$	不可分解整数 α	单位 ε
$\delta_{2,0}^{(1)}$	$-(2a+3)$	$\theta'_{0,0}$	$-\rho^{-1}\rho'^{-1}$
$\delta_{2,1}^{(1)}$	-1	1	$-\rho^{-1}\rho'$
$\delta_{3,j}^{(1)}$ $1\le j\le a$	$-j^3+aj^2+(a+3)j+1$	$\theta'_{a-j+1,0}$	$\rho^{-2}\rho'^{-2}$
$\delta_{2,0}^{(2)}$	$2a+3$	$\theta'_{0,0}$	$\rho^{-2}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(2)}$	1	1	ρ^{-1}
$\delta_{3,j}^{(2)}$ $1\le j\le a$	$-j^3+aj^2+(a+3)j+1$	$\theta'_{a-j+1,0}$	$\rho^{-3}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(3)}$	1	1	ρ^{2}
$\delta_{3,0}^{(4)}$	-1	1	$-\rho^{-2}\rho'^{-1}$
$\delta_{3,j}^{(4)}$ $1\le j\le A_0-1$	$-(2a+3)j^3+a^2j^2$ $+(a^2+2a+3)j-1$	$\theta'_{a-2j,j+1}$	$\rho^{-4}\rho'^{-2}$
$\delta_{2,0}^{(5)}$	$3A_0^3+9A_0^2+6A_0-1$	θ'_{1,A_0+1}	$\rho^{-4}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(5)}$	$2a+3$	$\theta'_{0,0}$	$\rho^{-3}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,1}^{(5)}$	1	1	ρ^{-3}
$\delta_{3,0}^{(6)}$	-1	1	$-\rho^{-3}\rho'^{-1}$
$\delta_{2,j}^{(7)}$ $0\le j\le A_0-3$	$j^3-(A_0-7)j^2-(8A_0-12)j$ $-A_0^2j+A_0^3+A_0^2-8A_0+5$	$\theta'_{A_0-j-3,a-(A_0-j-3)}$	$\rho^{-5}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,j}^{(7)}$ $0\le j\le A_0+2$	$j^3-(A_0+8)j^2+(2A_0+17)j$ $-A_0^2j+A_0^3+6A_0^2+7A_0-5$	θ'_{0,A_0+2-j}	$\rho^{-4}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,A_0+3}^{(7)}$	1	1	ρ^{-4}
$\delta_{2,0}^{(8)}$	-1	1	$-\rho^{-5}\rho'^{-1}$
$\delta_{3,0}^{(8)}$	-1	1	$-\rho^{-4}\rho'^{-1}$
$\delta_{3,1}^{(8)}$	1	1	$\rho^{-4}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,j}^{(8)}$ $2\le j\le a+1$	$-j^3+(a+3)j^2-aj-1$	$\theta'_{a-j+2,0}$	$\rho^{-6}\rho'^{-4}$

TABLE 3. THE SIMPLEST CUBIC FIELDS: $(1,-\rho',\rho'^2)$的 JPA 展开 $\delta_i^{(k)}{}_{,j}$ 的半收敛分数，适用于 $a=2A_0+1\ge 4$；其范数、对应的不可分解整数α 以及满足 $\delta_i^{(k)}{}_{,j}=\alpha\varepsilon$ 的单位 ε。

定理 8.2。 设 ρ， ρ'， ρ''， ψ， ψ' 和 ψ'' 如小节 7。1 和 7。2所述。则

(1) 向量 $(1,-\rho',\rho'^2)$、$(1,-\psi',\psi'^2)$ 和 $(1,-\psi'',\psi''^2)$ 的 JPA 展开的所有半收敛分数，在其符号型中都是 $\mathfrak{s}$-不可分解的；(2) 向量 $(1,\rho,\rho^2)$、$(1,-\rho'',\rho''^2)$ 和 $(1,\psi,\psi^2)$ 的 JPA 展开的某个半收敛分数，在其符号型中是$\mathfrak{s}$-可分解的。

证明。 表4 和5中给出了 $(1,\rho,\rho^2)$ 和 $(1,-\rho'',\rho''^2)$ 的 JPA 展开结果。在这些情况下，我们可以找到一些作为半收敛分数的 $\mathfrak{s}$-不可分解元，用符号 ✗表示。请注意，表 5 未包含 $a=3$。不过，这个具体情形的表格几乎相同，只有收敛分数 $\delta_{3\,0}^{(3)}{}_{,}$例外；它是 $\mathfrak{s}$-不可分解元（当 $a=3$ 时），且与 μ_0相伴。其余情形的表格见本文 KST arXiv版本的附录A8节。 □

9. EXPERIMENTS ON INDECOMPOSABILITY OF SEMICONVERGENTS

对于最简单的三次域和 Ennola三次域，我们找到了雅可比–佩龙展开的例子，其收敛分数和半收敛分数均为 $\mathfrak{s}$-不可分解元。此外，正如我们将在下一节看到的，其中一些展开甚至可以产生更多的 $\mathfrak{s}$-不可分解元。然而，在其他情况下，某些半收敛分数（甚至收敛分数）是 $\mathfrak{s}$-可分解的。特别是，周期性本身并不能保证我们得到的只有 $\mathfrak{s}$-不可分解元。

$\delta_{i,j}^{(k)}$	范数 $N(\delta_i^{(k)}, {}_j)$	$\mathfrak{s}$-不可分解整数 α	单位 ε
$\delta_{2,0}^{(1)}$	$-2a+3$	$\lambda_{a-1,a-1}$	ρ^{-2}
$\delta_{2,1}^{(1)}$	1	1	$\rho(\rho-1)$
$\delta_{3,j}^{(1)}$ $1\le j\le a-1$	$-j^3+(a+1)j^2+(a+2)j+1$	κ_{a-j}	$\rho^{-1}(\rho-1)$
$\delta_{3,j}^{(1)}$ $a\le j\le a+1$	$-j^3+(a+1)j^2+(a+2)j+1$	✗	
$\delta_{3,0}^{(2)}$	1	1	$\rho-1$
$\delta_{3,j}^{(2)}$ $1\le j\le a-1$	$-j^3+(a+1)j^2+(a+2)j+1$	κ_{a-j}	$\rho^{-1}(\rho-1)^2$
$\delta_{3,j}^{(2)}$ $a\le j\le a+1$	$-j^3+(a+1)j^2+(a+2)j+1$	✗	
$\delta_{3,0}^{(3)}$	1	1	$(\rho-1)^2$
$\delta_{3,1}^{(3)}$	1	1	$\rho^{-1}(\rho-1)^2$
$\delta_{3,j}^{(3)}$ $2\le j\le a$	$-j^3+(a+4)j^2-(a+3)j+1$	κ_{a-j+1}	$\rho^{-2}(\rho-1)^3$
$\delta_{3,j}^{(3)}$ $a+1\le j\le a+2$	$-j^3+(a+4)j^2-(a+3)j+1$	✗	

TABLE 4. ENNOLA'S CUBIC FIELDS: JPA展开 $\delta_i^{(k)}$, $_j$ 的半收敛分数，其中展开对象为 $(1,\rho,\rho^2)$， $1<\rho$是多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$的根，且 $a\ge 3$ 为其范数，对应的 $\mathfrak{s}$-不可分解整数为 α ，单位为 ε ，满足$\delta_i^{(k)}$, $_j=\alpha\varepsilon$。

$\delta_{i,j}^{(k)}$	范数 $N(\delta_i^{(k)}, {}_j)$	$\mathfrak{s}$-不可分解的 α	单位 ε
$\delta_{2,j}^{(0)}$ $1\le j\le a-2$	$-j^3+(a-1)j^2+aj-1$	$\lambda''_{a-j,a-1}$	$-\rho''^{-2}(\rho''-1)^{-1}$
$\delta_{3,1}^{(0)}$	$-2a+3$	$\lambda''_{a-1,a-1}$	ρ''^{-2}
$\delta_{3,2}^{(0)}$	$2a^2-4a+1$	$\lambda''_{1,a-2}$	$-\rho''^{-1}$
$\delta_{3,3}^{(0)}$	$6a^2-6a-11$	μ''_{a-3}	$-\rho''^{-1}$
$\delta_{3,j}^{(0)}$ $4\le j\le a^2-2$	$-j^3+(a^2+1)j^2-(a^2+2a-2)j+1$	✗	
$\delta_{3,0}^{(2)}$	a^2-a-1	$\lambda''_{1,a-1}$	$-\rho''^{-2}(\rho''-1)^{-1}$
$\delta_{2,j}^{(3)}$ $0\le j\le a-4$	$-j^3+(4a-4)j^2-(5a^2-11a+5)j$ $+2a^3-7a^2+7a-3$	✗	
$\delta_{2,a-3}^{(3)}$	$2a+3$	κ''_{a-1}	ρ''^{-2}
$\delta_{2,a-2}^{(3)}$	-1	1	$-\rho''^{-1}$
$\delta_{2,a-1}^{(3)}$	-1	1	$-(\rho''-1)^{-1}$
$\delta_{2,j}^{(3)}$ $a\le j\le 2a-3$	$-j^3+(4a-4)j^2-(5a^2-11a+5)j$ $+2a^3-7a^2+7a-3$	$\lambda''_{2a-j-1,a-1}$	$-\rho''^{-3}(\rho''-1)^{-2}$
$\delta_{3,j}^{(3)}$ $0\le j\le a^2-a-2$	$-j^3+(a^2-3a+1)j^2+(2a^3-4a^2+2)j$ $a^4-2a^3-a^2+2a+1$	✗	

TABLE 5. ENNOLA'S CUBIC FIELDS: 雅可比–佩龙展开的半收敛分数 $\delta_i^{(k)}$, $_j$ ，其中 $(1,-\rho'',\rho''^2)$ 中的 $\rho''<-(a-1)$ 是多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的根，其中 $a\ge 4$ 为其范数，相应的 $\mathfrak{s}$-不可分解整数为 α ，单位为 ε，满足 $\delta_i^{(k)}$, $_j=\alpha\varepsilon$。

本节提供其他全实三次域的一些数据。已有一些优美的三次无理数族，其雅可比–佩龙展开具有周期性。然而，例如 Bernstein 的论文 [Be1，Be2，Be3] 中的那些例子并不适合我们的研究目的，因为它们不属于全实数域。因此，我们决定采用另一种方法。在这一部分中，我们讨论判别式较小的域的情形，这些域（连同一组基本单位）见 [CS，第 149–153]页。我们从该文列出的域中，选取了具有所有符号型的单位且满足 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\rho]$ 其中一个所列基本单位的域。第一个条件源于求全正不可分解元（比求其他类型的不可分解元）稍微容易一些。第二个要求相当直观——似乎单位比其他元素能给出更合适的展开；而对于形如 $(1,\ \rho,\ \rho^2)$ 的向量的展开，自然应考虑$\mathfrak{s}$中的 -不可分解元 $\mathbb{Z}[\rho]$。

对于该子集中的每个域 K，我们讨论形如 $(1,\rho,\rho^2)$ 的向量的若干周期展开，其中 $\rho \in K$ 是满足 $0 < \rho < 2$ 的适当单位。同样，这个条件是直观上的；例如，在最简三次域和 Ennola三次域中，此类单位的展开给出$\mathfrak{s}$-不可分解元，而不是与单位 $\rho > 2$ 相对应的展开。请注意，对于某些域，我们无法找到任何看起来具有周期性的适当展开，因此这些域未出现在我们的表格中。不过，我们并不排除存在此类展开的可能性。

由于这些域中具有所有符号型的单位，因此只需确定全正不可分解元的代表元。为此，我们不采用第2.1小节中所述的方法，而是按以下方式进行。对于这些域中的每一个，我们求出集合 S_T，其中包含迹不超过某个较大值 T的所有全正不可分解元。这可以通过计算机程序完成（所有这些计算均使用 Mathematica，所用代码示例见 https://sites.google.com/view/tinkovamagdalena/codes），因为给定迹的全正整数集合是有限的。我们可能无法得到 $\mathfrak{s}$-不可分解元的全部代表元，但在这项工作中，无须得到全部代表元。然后，对于若干周期 JPA 展开，我们通过程序检查其（半）收敛分数是否与集合 S_T中的元素相伴。若是，则我们得到的展开仅给出 $\mathfrak{s}$-不可分解元。否则，我们进一步检查与 S_T中的元素不相伴的元素是否确实是 $\mathfrak{s}$-可分解的。在表6中，我们展示了判别式 Δ_K 不超过 2101 的域的结果；关于 $2177 \le \Delta_K \le 6241$ 的结果见本文 arXiv版本的附录A9 [KST]。

此外，这些表格还包含以下信息：首先是三次域 K 的判别式 Δ_K。请注意，我们不区分通过共轭同构的域，因为在这种共轭下，它们具有相同的 $\mathfrak{s}$-不可分解元。然后，表中列出了若干多项式示例，其中一些根 $\rho \in K$ 满足向量 $(1,\rho,\rho^2)$ 具有周期 JPA 展开。此外，还可以查到 ρ 及其共轭元 ρ' 和 ρ'' 的近似值，以及展开的前周期和周期长度。标题为 “ 收敛分数 ” 的列汇总了向量 $(1,\rho,\rho^2)$ 的 JPA 展开的收敛分数信息，而“半收敛分数”列则列出其中不是收敛分数的半收敛分数。符号 √ 表示向量 $(1,\rho,\rho^2)$ 的展开中的所有（半）收敛分数在其符号型中都是 $\mathfrak{s}$-不可分解元。符号 表示至少有一个（半）收敛分数是 $\mathfrak{s}$-可分解的情形。

此外，条件 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\rho]$ 对于 [CS]中列出的许多具有所有符号型单位的域似乎并不成立。另一方面，对于一些不具有所有此类单位的良好域族，这一条件确实成立（这也包括我们先前在第7 节或第8.2小节讨论过的 Ennola三次域）。因此，我们还研究了另一族由多项式 $x^3-(a+b)x^2+abx-1$的根生成的三次域，其中 $2 \le a \le b-2$ [Th]。对于这些域，我们知道所有全正不可分解元[Ti2，命题 5。3] 此外，对于这一族域，我们还用 Mathematica 编写了一个程序，用于求出与全正不可分解元不相伴的 $\mathfrak{s}$-不可分解元。该程序同样基于迹（在此情形下，是乘以 $\mathcal{O}^\vee$中的元素后所得的迹，$_K{}^{\mathfrak{s}}$）。这一族的结果见表7。

总之，这些展开的一般行为似乎相当难以预测。

10. More general semiconvergents

正如我们在上一节所看到的，对于我们所研究的域中的某些展开，收敛分数和半收敛分数可能是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。然而，即使在最有利的情形下，我们从 $\mathfrak{s}$-不可分解元的代表元集合中也只得到了少数几个元素。例如，在最简三次域的情形下，我们得到了全正不可分解元三角形中的一些直线

Δ_K	多项式	ρ	ρ'	ρ''	前周期	周期	收敛分数	半收敛分数
49	$x^3 - x^2 - 2x + 1$	1.802	0.445	-1.247	1	2	✓	✓
	$x^3 - x^2 - 2x + 1$	0.445	1.802	-1.247	5	2	✓	✓
	$x^3 + x^2 - 2x - 1$	1.247	-0.445	-1.802	2	2	✓	✗
81	$x^3 - 3x + 1$	1.532	0.347	-1.879	2	3	✓	✓
	$x^3 - 3x + 1$	0.347	1.532	-1.879	3	3	✓	✓
	$x^3 - 3x - 1$	1.879	-1.532	-0.347	4	6	✓	✗
148	$x^3 + 3x^2 - x - 1$	0.675	-0.461	-3.214	2	7	✓	✓
	$x^3 - 3x^2 - x + 1$	0.461	-0.675	3.214	7	2	✓	✓
169	$x^3 + x^2 - 4x + 1$	1.377	0.274	-2.651	2	5	✓	✓
	$x^3 + x^2 - 4x + 1$	0.274	1.377	-2.651	3	5	✓	✓
321	$x^3 - x^2 - 4x + 1$	0.239	-1.7	2.461	5	3	✓	✗
	$x^3 + x^2 - 4x - 1$	1.7	-0.239	-2.461	8	3	✗	✗
361	$x^3 + 2x^2 - 5x + 1$	1.285	0.222	-3.507	2	5	✓	✓
	$x^3 + 2x^2 - 5x + 1$	0.222	1.285	-3.507	3	5	✓	✓
404	$x^3 + x^2 - 5x + 1$	0.211	1.655	-2.866	3	3	✓	✓
469	$x^3 + 2x^2 - 4x - 1$	1.391	-0.227	-3.164	2	5	✓	✗
473	$x^3 - 5x + 1$	0.202	2.128	-2.33	3	3	✓	✓
	$x^3 - 5x^2 + 1$	0.47	4.959	-0.429	9	2	✓	✓
	$x^3 + 5x^2 - 1$	0.429	-0.47	-4.959	2	30	✗	✗
564	$x^3 + 7x^2 + 11x - 1$	0.086	-4.514	-2.572	2	1	✗	✗
621	$x^3 - 6x^2 + 6x + 1$	1.476	-0.145	4.669	7	9	✗	✗
733	$x^3 + 2x^2 - 6x + 1$	0.178	1.518	-3.696	3	11	✗	✗
785	$x^3 - 2x^2 - 5x + 1$	0.187	-1.576	3.388	8	14	✗	✗
	$x^3 + 2x^2 - 5x - 1$	1.576	-0.187	-3.388	12	4	✗	✗
837	$x^3 - 6x + 1$	0.167	-2.529	2.361	3	3	✓	✓
	$x^3 - 6x^2 + 1$	0.423	-0.395	5.972	23	10	✗	✗
1300	$x^3 - 7x^2 + 3x + 1$	0.702	-0.218	6.516	7	5	✓	✓
1345	$x^3 - 7x + 1$	0.143	2.571	-2.714	3	3	✓	✓
1369	$x^3 + 4x^2 - 7x + 1$	1.187	0.158	-5.345	2	7	✓	✓
	$x^3 + 4x^2 - 7x + 1$	0.158	1.187	-5.345	3	7	✓	✓
1425	$x^3 + 7x^2 + 8x - 1$	0.114	-1.596	-5.517	2	1	✗	✗
	$x^3 + 8x^2 - 7x + 1$	0.181	0.626	-8.808	3	13	✗	✓
	$x^3 + 8x^2 - 7x + 1$	0.626	0.181	-8.808	6	2	✗	✗
1524	$x^3 - x^2 - 7x + 1$	0.14	3.133	-2.273	5	3	✓	✗
	$x^3 - 7x^2 - x + 1$	0.319	7.121	-0.44	9	6	✓	✓
1573	$x^3 + 8x^2 + 14x - 1$	0.069	-2.722	-5.346	2	1	✗	✗
	$x^3 + 14x^2 - 8x + 1$	0.187	0.367	-14.554	5	9	✗	✗
2101	$x^3 - 4x^2 - 6x + 1$	0.152	-1.283	5.131	8	11	✗	✗
	$x^3 + 4x^2 - 6x - 1$	1.283	-0.152	-5.131	19	7	✗	✗
	$x^3 - 6x^2 - 4x + 1$	0.195	-0.779	6.584	5	8	✗	✗

TABLE 6. 形式为 $(1, \rho, \rho^2)$ 的向量的 JPA 展开中（半）收敛分数的不可分解性，其中 ρ 满足 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\rho]$；$K$ 是判别式为 $\Delta_K \le 2101$ 且具有所有符号型的单位的全实数域示例

Δ_K	多项式	ρ	ρ'	ρ''	前周期	周期	收敛分数	半收敛分数
229	x^3-4x+1	1.861	0.254	−2.115	6	3	✓	✓
	x^3-4x+1	0.254	1.861	−2.115	3	3	✓	✓
	x^3-8x^2+6x-1	0.573	0.243	7.184	5	3	✗	✗
	x^3-8x^2+6x-1	0.243	0.573	7.184	2	2	✓	✓
761	$x^3-7x^2+10x-1$	1.828	0.108	5.064	18	12	✗	✗
	x^3+x^2-6x+1	1.892	0.172	−3.064	6	3	✓	✓
	x^3+x^2-6x+1	0.172	1.892	−3.064	3	3	✓	✓
	x^3-10x^2+7x-1	0.197	0.547	9.255	2	2	✓	✓
985	x^3-x^2-6x+1	0.163	2.931	−2.094	5	3	✓	✗
	x^3-15x^2+8x-1	0.352	0.196	14.451	12	21	✗	✗
	x^3-15x^2+8x-1	0.196	0.352	14.451	2	2	✓	✓
	x^3-6x^2-x+1	0.341	−0.478	6.136	3	3	✓	✓
1957	$x^3-8x^2+12x-1$	0.088	1.871	6.041	2	16	✗	✗
	x^3+2x^2-8x+1	1.912	0.129	−4.041	6	3	✓	✓
	x^3+2x^2-8x+1	0.129	1.912	−4.041	3	3	✓	✓
	x^3-12x^2+8x-1	0.166	0.535	11.3	2	2	✓	✓
2597	$x^3-24x^2+10x-1$	0.164	0.258	23.578	2	2	✓	✓
	x^3-8x^2-2x+1	0.253	−0.481	8.228	3	3	✓	✓
	x^3+8x^2-2x-1	0.481	−0.253	−8.228	2	2	✓	✓
5521	$x^3-3x^2-10x+1$	0.097	4.971	−2.068	3	13	✗	✗
	$x^3-35x^2+12x-1$	0.204	0.141	34.655	10	13	✗	✗
	$x^3-35x^2+12x-1$	0.141	0.204	34.655	2	2	✓	✓
	x^3-10x^2-3x+1	0.201	−0.483	10.282	3	3	✓	✓
6809	$x^3+x^2-12x+1$	0.084	2.951	−4.035	3	3	✓	✓
	$x^3-21x^2+10x-1$	0.142	0.343	20.515	2	2	✓	✓
	x^3-12x^2+x+1	0.339	−0.248	11.909	3	3	✓	✓
7249	$x^3-x^2-12x+1$	0.083	3.964	−3.047	5	3	✓	✗
	$x^3-28x^2+11x-1$	0.142	0.255	27.603	2	2	✓	✓
	x^3-12x^2-x+1	0.252	−0.328	12.076	3	3	✓	✓
8069	$x^3+4x^2-12x+1$	1.935	0.086	−6.021	6	3	✓	✓
	$x^3+4x^2-12x+1$	0.086	1.935	−6.021	3	3	✓	✓
	$x^3-16x^2+10x-1$	0.125	0.522	15.353	2	2	✓	✓
10309	$x^3-4x^2-12x+1$	0.081	5.979	−2.06	3	7	✓	✓
	$x^3-48x^2+14x-1$	0.124	0.169	47.707	2	2	✓	✓
	x^3-12x^2-4x+1	0.167	−0.485	12.318	3	3	✓	✓
13801	$x^3+2x^2-15x+1$	0.067	2.958	−5.025	3	3	✓	✓
	$x^3-24x^2+11x-1$	0.125	0.341	23.534	2	2	✓	✓
	x^3-15x^2+2x+1	0.338	−0.199	14.861	3	3	✓	✓
14089	$x^3-11x^2+18x-1$	0.058	1.927	9.016	2	16	✗	✗
	$x^3+5x^2-14x+1$	1.942	0.073	−7.016	6	3	✓	✓
	$x^3+5x^2-14x+1$	0.073	1.942	−7.016	3	3	✓	✓
	$x^3-18x^2+11x-1$	0.519	0.111	17.37	5	9	✗	✗
	$x^3-18x^2+11x-1$	0.111	0.519	17.37	2	2	✓	✓

TABLE 7. 形式为 $(1,\rho,\rho^2)$ 的向量的 JPA 展开之（半）收敛分数的不可分解性，其中 ρ 满足 $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[\rho]$； K 是一个不具有所有符号型单位的全实数域

$-v-(v(a+2)+1+W)\rho+(v+1)\rho^2$ 其中 $0 \le v \le a$ 和 $0 \le W \le a-v$。此外，这些直线中只有一条不在三角形的边界上。特别是，它们并未覆盖整个三角形。而特殊不可分解整数 $1+\rho+\rho^2$ 根本没有出现在展开中。

处理这种情况的一种方法，是考虑由展开的收敛分数导出的更一般的元素。特别是，半收敛分数实际上是收敛分数的某些具体线性组合，这或许可以解释为什么我们得到的只有三角形中的直线。考虑其他组合以获得三角形之类的其他形状并不存在障碍。因此，在本节中，我们将详细研究前几节所确定的展开，并尝试寻找一些能够在我们的域中给出 $\mathfrak{s}$-不可分解元的其他线性组合。

10.1. 最简三次域。我们将再次从最简三次域的情形开始；在这种情形下，$(1, -\rho', \rho'^2)$ 的展开的收敛分数和半收敛分数都是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。回想一下，这里，$-2 < \rho' < -1$ 是多项式 $x^3 - ax^2 - (a+3)x - 1$ 的一个根，其中 $a \ge -1$。我们将会看到，在这种情形下，可以求出 $\mathfrak{s}$-不可分解元的所有代表元，包括那个例外代表元。为此，我们将采用以下思路。

考虑某个半收敛 $\beta_2^{(k)} - i\beta_1^{(k)}$。根据构造，我们知道它的值很小，收敛分数 $\beta_3^{(k)}$ 的值也同样很小。因此，如果 $\beta_2^{(k)} - i\beta_1^{(k)} - \beta_3^{(k)}$ 为正，它的值会比 $\beta_2^{(k)} - i\beta_1^{(k)}$ 还小。于是，它可能是一个很好的 $\mathfrak{s}$-不可分解整数候选项。此外，如果我们想要得到例如由若干元素构成的三角形，这些元素就应具有相同的符号型。因此，我们可以考虑具有与 $\beta_2^{(k)} - i\beta_1^{(k)}$ 相同符号型的 $\beta_2^{(k)} - i\beta_1^{(k)} - j\beta_3^{(k)}$ 形式的元素（以及 $\beta_3^{(k)} - i\beta_1^{(k)}$ 的对应元素）。再增加一个条件，就能通过以下方式求出最简三次域中 $\mathfrak{s}$-不可分解元的所有代表元。

命题 10.1. 设 $\langle \boldsymbol{\beta}^{(k)} \rangle$ 是向量 $(1, -\rho', \rho'^2)$ 的雅可比–佩龙展开，其中 $-2 < \rho' < -1$ 是多项式 $x^3 - ax^2 - (a+3)x - 1$ 的一个根，并设 $a \ge 15$。假设元素 $\beta_2^{(k)} - i\beta_1^{(k)} - j\beta_3^{(k)}$ 满足以下条件：

(1) $1 \le i \le \left\lfloor \frac{\beta_2^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor - 1$，(2) $j \in \mathbb{N}_0$ 使得 $\beta_2^{(k)} - i\beta_1^{(k)} - j\beta_3^{(k)}$ 与 $\beta_2^{(k)} - i\beta_1^{(k)}$ 具有相同的符号型，(3) 对所有 $i+1 \le l \le \left\lfloor \frac{\beta_2^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor - 1$，元素 $(l-i)\beta_1^{(k)} - \beta_3^{(k)}$ 与 $\beta_2^{(k)} - i\beta_1^{(k)}$ 不具有相同的符号型。

那么，$\beta_2^{(k)} - i\beta_1^{(k)} - j\beta_3^{(k)}$ 在其符号型中是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。类似地，设元素$\beta_3^{(k)} - i\beta_1^{(k)} - j\beta_2^{(k)}$ 满足以下条件：

(1) $1 \le i \le \left\lfloor \frac{\beta_3^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor - 1$，(2) $j \in \mathbb{N}_0$ 满足：$\beta_3^{(k)} - i\beta_1^{(k)} - j\beta_2^{(k)}$ 与 $\beta_3^{(k)} - i\beta_1^{(k)}$ 具有相同的符号型；(3) 对所有 $i+1 \le l \le \left\lfloor \frac{\beta_3^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor - 1$，元素$(l-i)\beta_1^{(k)} - \beta_2^{(k)}$ 与 $\beta_3^{(k)} - i\beta_1^{(k)}$ 不具有相同的符号型。

那么，$\beta_3^{(k)} - i\beta_1^{(k)} - j\beta_2^{(k)}$ 在其符号型 $\mathfrak{s}$中是 $\mathfrak{s}$–不可分解的。

此外，通过这种方式，我们得到了 $\mathbb{Z}[\rho]$中所有不可分解整数的代表元，模去单位乘法和共轭。

证明。对于 $k=0$，我们不会得到任何额外元素，因为 $\left\lfloor \frac{\beta_2^{(0)}}{\beta_1^{(0)}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\beta_3^{(0)}}{\beta_1^{(0)}} \right\rfloor = 1$。

对于 $k=1$，元素 $\delta_{2,1}^{(0)} = -1+\rho'^2-(-1-\rho') < 1$，因为 $-1+\rho'^2 < 1$，因此 $\beta_2^{(1)} - \beta_1^{(1)} - \beta_3^{(1)} = \delta_{2,1}^{(0)} - 1 < 0$。因此，我们不会得到更多元素。同样，对于所有 $1 \le i \le \left\lfloor \frac{\beta_3^{(1)}}{\beta_1^{(1)}} \right\rfloor - 1 = a$，元素 $\beta_3^{(1)} - i\beta_1^{(1)}$ 都是全正的，并且可以证明，对于任何元素 $\beta_3^{(1)} - i\beta_1^{(1)} - \beta_2^{(1)}$，这一点都不成立。

另一方面，对于 $k=2$，我们确实得到额外的元素，即 $\beta_3^{(2)}-i\beta_1^{(2)}-j\beta_2^{(2)}$，其中 $1\le i\le a$ 且 $1\le j\le\left\lfloor\frac{a-(i-1)}{2}\right\rfloor$。这些元素是不可分解整数 $\theta'_{a+1-i-2j,\ j}$ 的单位倍。

对于 $k=3$，我们的整数部分为 0 和 1。因此，我们没有得到任何额外元素。

在下一步中，$\left\lfloor\frac{\beta_2^{(4)}}{\beta_1^{(4)}}\right\rfloor=0$ 和 $\left\lfloor\frac{\beta_3^{(4)}}{\beta_1^{(4)}}\right\rfloor=A_0$。这里，我们得到元素 $\beta_3^{(4)}-\beta_1^{(4)}-(a-1)\beta_2^{(4)}$，它是一个单位，以及元素 $\beta_3^{(4)}-i\beta_1^{(4)}-j\beta_2^{(4)}$，其中 $1\le i\le A_0-1$ 和 $1\le j\le a-2i$。这些整数是 $\theta'_{a-2i-j,\ i+j+1}$ 的单位倍。

对于 $k=5$，只有当 a 为偶数时，我们才会得到一个额外元素。它等于 $\beta_3^{(5)}-\beta_1^{(5)}-\beta_2^{(5)}$，并与不可分解整数 $\theta'_{A_0-2,\ a-(A_0-2)}$ 相伴。第六次迭代不会产生更多元素。

第七次迭代的第一部分也是如此，其中得到的元素不具有所需的符号型。相反，在第二部分中，我们会得到一些元素。若 $a=2A0$ 为偶数，则得到元素 $\beta_3^{(7)}-i\beta_1^{(7)}-\beta_2^{(7)}$，其中 $1\le i\le 5$。在这种情况下，$(A_0-1)\beta_1^{(7)}-\beta_2^{(7)}$ 的符号型与 $\beta_3^{(7)}-i\beta_1^{(7)}$ 相同，因此可排除具有 $i=1$、2、3 的元素。若 $i=5$，则我们的元素是一个单位。若 $i=4$，我们的元素与不可分解整数 $1+\rho'+\rho'^2$ 相伴。若 $a=2A0+1$ 为奇数，则得到元素 $\beta_3^{(7)}-i\beta_1^{(7)}-\beta_2^{(7)}$，其中 $1\le i\le 6$。与之前一样，$(A_0-1)\beta_1^{(7)}-\beta_2^{(7)}$ 的符号型与 $\beta_3^{(7)}-i\beta_1^{(7)}$ 相同；因此我们可以排除 $i=1$、2、3、4。若 $i=6$，我们的元素又是一个单位。对于 $i=5$，我们的元素与特殊不可分解整数 $1+\rho'+\rho'^2$ 相伴。

最后，对于 $k=8$，所有得到的元素都不具有所需的符号型 .

现在我们讨论该陈述的最后一部分，即我们是否得到了所有 $\mathfrak{s}$-不可分解整数的代表元。在第七次迭代中，我们得到一个单位以及一个与特殊不可分解整数 $1+\rho'+\rho'^2$ 相伴的元素。另一方面，对于 $k=2$，我们得到元素 $\theta'_{a+1-i-2j,j}$ 的单位倍，其中 $1\le i\le a$ 且 $0\le j\le\left\lfloor\frac{a-(i-1)}{2}\right\rfloor$。这些元素覆盖了不可分解元素三角形的三分之一以上，特别是所有元素 $-(a-v-W)-((a+2)(a-v-W)+1+v)\rho'+(a-v-W+1)\rho'^2$，其中 $0\le v\le A$ 且 $v\le W\le a-2v-1$，并且 $a=3A+a_0$，$a_0\in\{0,1,2\}$。此外，若 $3|a$，它们还覆盖元素 $\theta'_{A,A}$。注意，在 [KT 的第5.1],小节中，我们证明了：如果不可分解整数三角形包含 α，那么它也包含 $\alpha'\varepsilon_1$ 和 $\alpha''\varepsilon_2$，其中 ε_1 和 ε_2 是两个具体单位。这意味着，从某种意义上说，只考虑该三角形的三分之一就足够了。因此，在乘法和共轭意义下，我们得到了该三角形的所有不可分解元。□

10.2. Ennola三次域。本节将重点讨论更一般的半收敛分数，即 Ennola 三次域中 JPA 展开的收敛分数的其他线性组合。我们不会讨论所有可能的组合，而是考察至少一个系数 j、k、l 固定的形式为$j\beta_1^{(i)}+k\beta_2^{(i)}+l\beta_3^{(i)}$的半收敛分数。

首先，让我们引入以下记号：
$S=\{\lambda_{v,w}=-v-(a(v-1)+w)\rho+(a(v-1)+w+1)\rho^2$其中 $1\le v\le a-1$，$\max\{1,v-1\}\le w\le a-1\}$。乘以某个单位并进行指标平移后，上述集合可表示为

$\tilde{S}=\{\tilde{\lambda}_{v,u}=1+v-u+au+(a-u+au)\psi-(u+1)\psi^2$其中 $1\le v\le a-3$、$0\le u\le v$，且 $(v,u)\ne(1,0)\}$。符号 $\langle\gamma_1,\ .....,\ \gamma_r\rangle$，其中 $\gamma_i\in K$ 对所有 $i=1,\ .....,\ r$ 以及 $r\in\mathbb{N}$ 均成立，表示由元素 $\gamma_1,\ .....,\ \gamma_r$ 生成的格。

定理 10.2。我们有

(1) 设 τ 为多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根，其中 $a\ge 3$。设 $\langle\boldsymbol{\beta}^{(k)}\rangle_{k\ge0}$ 为向量 $(1,|\tau|,\tau^2)$ 的周期 JPA 展开。那么，每当对于某个迭代 k，存在一个单位 ε 使得

$$L=\langle\alpha-\beta|\alpha,\beta\in\sigma(S)\rangle=\langle\beta_1^{(k)}\varepsilon,\beta_2^{(k)}\varepsilon\rangle$$

and

$$|N(\beta_3^{(k)})|\le a^2-5a,$$

then

$$\sigma(S)\subset\beta_3^{(k)}\varepsilon+L,$$

其中 σ 是与根 τ 对应的嵌入。

（2）设 τ 是多项式 $x^3-(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根，其中 $a\geq 5$。设 $\langle\beta^{(k)}\rangle_{k\geq 0}$ 是向量 $(1,|\tau|,\tau^2)$ 的周期 JPA 展开。那么，只要对于某次迭代 k，存在一个单位 ε 使得

$$L=\langle\alpha-\beta|\alpha,\beta\in\sigma(\tilde{S})\rangle=\langle\beta_1^{(k)}\varepsilon,\beta_2^{(k)}\varepsilon\rangle$$

and

$$|N(\beta_3^{(k)})|\leq a^2-5a,$$

then

$$\sigma(\tilde{S})\subset\beta_3^{(k)}\varepsilon+L,$$

其中 σ 是对应于根 τ 的嵌入。

证明。要证明此定理，只需检查每个展开的情形。为简洁起见，我们仅展示多项式 $x^3-(a-1)x^2-ax-1$ 的两个根的展开中的两个有趣情形。

在 $(1,-\psi',\psi'^2)$ 的展开的第十次迭代中，$\beta|\alpha,\beta\in\langle(S)'\rangle$。设 $\varepsilon=-a+5+7\psi^{(10)}+(a+4)\psi'^2$。于是

$$\beta_3^{(10)}-h\beta_1^{(10)}-j\beta_2^{(10)}=\tilde{\lambda}'_{1+h+j,1+h}\varepsilon.$$

Thus

$$(S)'\subset\beta_3^{(10)}\varepsilon^{-1}+L.$$

第二个例子来自展开 $(1,-\psi'',\psi''^2)$，其中在第四次迭代中，$N(\beta_3^{(4)})=2a^2-12a+17$。$L=\langle\alpha-\beta|\alpha,\beta\in(S)''\rangle$，其中 $\varepsilon=\psi''+(a-1)\psi''^2$。我们有

$$\beta_3^{(4)}-h\beta_1^{(4)}-j\beta_2^{(4)}=\tilde{\lambda}''_{a-4-h-2j,a-3-h-j}\varepsilon.$$

所以再次

$$(S)''\subset\beta_3^{(4)}\varepsilon^{-1}+L.$$ □

然而，在这个定理中，条件 $|N(\beta_3^{(k)})|\leq a^2-5a$ 是必要的。在 $(1,\rho',\rho'^2)$ 的 JPA展开中有一个反例：在第五次迭代中，元素 $\beta_1^{(5)},\beta_2^{(5)}$ 生成了不可分解元素 $\lambda'_{u,\,v}$ 所在的格 L 的基，而 $\beta_3^{(5)}$ 的范数是 a^2-a-1，但 $\beta_2^{(k)}-h\beta_1^{(k)}-j\beta_3^{(k)}$ 并未给出所有元素 $\lambda'_{u,\,v}$。

我们可以考察该定理蕴含关系的逆向。容易验证，如果

$$(\beta_3^{(k)}-h\beta_1^{(k)}-j\beta_2^{(k)})\varepsilon$$

对某个单位 ε 及相应的嵌入 σ，覆盖 $\sigma(S)$，那么

$$L=\langle\alpha-\beta|\alpha,\beta\in\sigma(S)\rangle\subseteq\langle\beta_1^{(k)}\varepsilon,\beta_2^{(k)}\varepsilon\rangle.$$

这个定理有些令人惊讶，自然会让人提出一个问题：更一般的情形下是否也成立。

11. Other multidimensional continued fraction algorithms

正如我们在引言中提到的，存在许多生成多维连分数的算法。我们选择雅可比–佩龙算法，主要是因为它简单、已有大量研究成果，或者因为哈塞–伯恩斯坦单位的存在。正如我们所见，它有时能给出不错的结果，但迄今为止，它还没有为我们的问题提供完整答案。因此，我们也考察了其他几种算法，并在本节总结了其中一些实验。

布伦算法是最简单的算法之一 [Bru]。下面以三维向量为例说明。令 $(\beta_1^{(0)},\ \beta_2^{(0)},\ \beta_3^{(0)})$ 为满足 $\beta_i^{(0)}\geq 0$ 对所有 i 的初始向量。然后在每次迭代 k 中，执行以下操作：

(1) $(\beta_1^{(k)},\beta_2^{(k)},\beta_3^{(k)}):=(\beta_{\pi\,1()}^{(k)}\ \beta_{\pi\,2()}^{(k)}\ \beta_{\pi\,3()}^{(k)})$ 其中，π 是集合 $\{1,2,3\}$ 上的一个排列，满足 $\beta_{\pi\,1()}^{(k)}\leq\beta_{\pi\,2()}^{(k)}\leq\beta_{\pi\,3()}^{(k)}$。(2) $(\beta_1^{(k+1)},\beta_2^{(k+1)},\beta_3^{(k+1)}):=(\beta_1^{(k)},\beta_2^{(k)},\beta_3^{k)}-\beta_2^{(k)})$。

我们以与雅可比–佩龙算法相同的方式定义周期性、预周期和周期。

根据我们的数据，布伦算法似乎并不优于雅可比–佩龙算法（反而更差）。例如，当我们取 ρ 为多项式 $x^3 - 4x^2 - 7x - 1$的一个根，即取具有 $a = 4$的最简三次域，并考虑形式为 $(1, |\rho|, \rho^2)$ 的初始向量时，对于任何根 ρ，展开似乎都不是周期的。请注意，周期性对我们至关重要，因为除去单位的乘法作用后，只有有限多个 $\mathfrak{s}$-不可分解元。

另一方面，在 Ennola 三次域中，我们可以通过以下方式得到周期展开。请注意，每次迭代中的坐标已经按照大小排列。

命题 11.1. 设 $\rho > 1$ 是多项式 $x^3 + (a-1)x^2 - ax - 1$ 的一个根，其中 $a \geq 3$。向量 $(1, \rho, \rho^2)$ 的布伦展开是周期的，周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}^{(0)} &= (1, \rho, \rho^2), \\
\boldsymbol{\beta}^{(1)} &= (-\rho + \rho^2, 1, \rho), \\
\boldsymbol{\beta}^{(2)} &= (-1 + \rho, -\rho + \rho^2, 1), \\
\boldsymbol{\beta}^{(k+2)} &= (-1 + \rho, -\rho + \rho^2, 1 + k\rho - k\rho^2) \ \textit{where } 1 \leq k \leq a-1.
\end{aligned}$$

此外，对所有 $k \in \mathbb{N}_0$ 和 $1 \leq i \leq 3$，元素 $\beta_i^{(k)}$ 在其符号型中是 $\mathfrak{s}$-不可分解的。

证明. 在这种情况下，布伦展开 $(1, \rho, \rho^2)$ 是简单的，因此验证其形式很容易。关于陈述的第二部分，几乎所有元素 $\beta_i^{(k)}$ 都是单位，除非 $\beta_3^{(k+2)} = 1 + k\rho - k\rho^2$ 与$1 \leq k \leq a-1$。在这种情况下，我们有

$$1 + k\rho - k\rho^2 = \rho^{-1}\lambda_{k,a-1}$$

其中元素 $\lambda_{k,a-1}$ 是来自 Ennola三次域中 $\mathfrak{s}$-不可分解元集合的特定整数。□

然而，对于 ρ 的其他共轭元，情况并非如此；它们对应的类似展开似乎并不具有周期性。此外，即使在这种情况下，我们也只能从三角形中得到一条很短的 $\mathfrak{s}$-不可分解元序列，因此目前没有令人信服的理由认为布伦算法优于雅可比–佩龙算法。

我们的下一个选择是田村–安富算法 [TY] 它由雅可比–佩龙算法衍生而来，并被认为在实三次数域中具有周期性。我们尝试了 Ennola 三次域中的若干初始向量，结果似乎不如雅可比–佩龙算法。此外，我们开始尝试 Karpenkov[Kar] 定义的新算法，该算法在全实数域中总能产生周期展开，但目前我们的结果还只是初步的。关于周期性，Garrity [Ga]提出了另一种很有前景的算法，后来 Dasaratha、Flapan、Garrity、Lee、Mihaila、Neumann-Chun、Peluse 和 Stoffregen 对其作了进一步发展 [DF+] ，值得在今后研究我们的问题时尝试。

此外，˘Rada、Starosta 和 Kala [RSK]也考虑了另一种方法。他们不预先固定某种已知算法，而是在每次迭代中“选择一种算法”。具体来说，上述大多数算法中的每一步都对应于与一个矩阵相乘。例如，在雅可比–佩龙算法中，这个矩阵为

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $a_i = \left\lfloor \frac{\beta_{i+1}^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor$ 对于 $i = 1, 2$。这意味着 $\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = M^{(k)}(\boldsymbol{\beta}^{(k)})^T$。这些矩阵在一个周期内的乘积就是该周期对应的矩阵；我们将其简记为 M。如果 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{(0)}$ 具有矩阵为 M的纯周期展开，那么必然有

$$\varepsilon\boldsymbol{\beta} = M\boldsymbol{\beta} \tag{11.1}$$

对于某个单位 ε，即 β 是 M的特征向量。在后续研究中，我们首先固定一个经过适当选择的矩阵 M，使其满足（11.1），其中单位 ε。然后，我们尝试将 M 分解为若干具有特定形式的矩阵的乘积，以得到

(1) 仅有 $\mathfrak{s}$-不可分解元，

(2) 除相差单位乘法外的所有 $\mathfrak{s}$-不可分解元。迄今为止，我们在最简单三次域方面已取得了令人鼓舞的成果，相关内容将发表于一篇即将发表的文章中。

Acknowledgments

所有作者均获得捷克科学基金会（GAˇCR）项目 21-00420M 的资助。E. S. 还获得了项目 GA UK 742120（由查理大学资助）和 SVV-2020-260589 的资助。M. T. 还获得了捷克科学基金会（GA ˇCR）项目 22-11563O 的资助。

我们还要感谢匿名审稿人提出的宝贵建议和修正意见。

Statements and Declarations

利益冲突声明。不适用。

代码可用性声明。所有代码均可在
https://sites.google.com/view/tinkovamagdalena/codes 获取。

数据可用性声明。不适用。

References

[Ad] B. Adam, *Voronoi-algorithm expansion of two families with period length going to infinity*,《数学计算》64 (1995), 1687–1704. [Be1] L. Bernstein, *Periodical Continued Fractions for Irrationals of Degree n by Jacobi's Algorithm*,《纯粹与应用数学杂志》 213 (1964), 31–38. [Be2] L. Bernstein,
New Infinite Classes of Periodic Jacobi–Perron Algorithms, Pacific J. Math. 16 (1965), 1–31. [Be3] L. Bernstein,
Representation of $(D^n - d)^{1/n}$ *as a Periodic Continued Fraction by Jacobi's Algorithm*,《数学年刊》29 (1965), 179–200. [Be4] L. Bernstein, *The Jacobi–Perron algorithm – Its theory and application*, 数学讲义207, 施普林格出版社, 柏林、纽约, 1971。[BeH] L. Bernstein, H. Hasse, *Einheitenberechnung mittels des Jacobi–Perronschen Algorithmus*,《纯粹与应用数学杂志》218 (1965), 51–69. [BK] V. Blomer, V. Kala,
Number fields without n-ary universal quadratic forms,《剑桥哲学学会数学学报》159 (2015), 239–252. [Bru] V. Brun,
En generalisation av kjedebroken, Skr. Vid. Selsk. Kristiana, Mat. Nat. K.1. 6 (1919), 1–29. [Br] H. Brunotte,
Zur Zerlegung totalpositiver Zahlen in Ordnungen totalreeller algebraischer Zahlkörper,《数学档案》(巴塞尔) 41 (1983), 502–503. [CEP] J. W. S. Cassels, W. J. Ellison, A. Pfister, *On sums of squares and on elliptic curves over function fields*,《数论杂志》 3 (1971), 125–149. [CL+] M. ˇCech, D. Lachman, J. Svoboda, M. Tinkov
´ ´ *Universal quadratic forms and indecomposables* a, K. *over biquadratic fields* **292** 2019 540 555
Zemkova, ,《数学新报》( ), – . [CDLR] M. D. Choi, Z. D. Dai, T. Y. Lam, B. Reznick,
The Pythagoras number of some affine algebras and local algebras,《纯粹与应用数学杂志》336 (1982), 45–82. [CF] S. Chowla, J. Friedlander, *Class numbers and quadratic residues*, Glasgow Math. J. 17 (1976), 47–52. [CS] T. Cusick, L. Schoenfeld, *A Table of Fundamental Pairs of Units in Totally Real Cubic Fields*,《数学计算》48 (1987), 147–158. [DF+] K. Dasaratha, L. Flapan, T. Garrity, C. Lee, C. Mihaila, N. Neumann-Chun, S. Peluse, M. Stoffregen, *Cubic irrationals and periodicity via a family of multi-dimensional continued fraction algorithms* **174** ,

Monatsh. Math. (2014), 549–566. [DS] A. Dress, R. Scharlau,
Indecomposable totally positive numbers in real quadratic orders,《数论杂志》14 (1982), 292–306. [DPLR] E. Dubois, R. Paysant-Le Roux, *Une application des nombres de Pisot à l'algorithme de Jacobi–Perron*, Monatsh. Math. 98 (1984), 145–155. [En1] V. Ennola, *Cubic number fields with exceptional units*, Computational Number Theory (A.Peth¨o et al., 编), de Gruyter, 柏林, 1991, 103–128. [En2] V. Ennola, *Fundamental units in a family of cubic fields*, J. Th´eor. Nombres Bordeaux 16 (2004), 569–575. [Ga] T. Garrity, *On Periodic Sequences for Algebraic Numbers*,《数论杂志》 88 (2001), 86–103. [GMT] D. Gil Mu˜noz, M. Tinkov´a, *Additive structure of non-monogenic simplest cubic fields*,《拉马努金杂志》, 即将出版。arXiv:2212.00364
[ ] *Pythagoras number of quartic orders containing* $\sqrt{2}$ 10 2204 10468 HH Z. He, Y. Hu, ,
[ ] *Pythagoras numbers of fields* **12** 1999 839 848
页。arXiv: 。Ho D. W. Hoffmann, , J. Amer. Math. Soc. ( ), – . [HKK] J. S. Hsia, Y. Kitaoka, M. Kneser,
Representations of positive definite quadratic forms,《纯粹与应用数学杂志》301 (1978), 132–141. [Ja] C. G. J. Jacobi,
Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen in welche jede Zahl aus drei vorherge- , ,《纯
henden gebildet wird **69** 1868 29 64
粹与应用数学杂志》( ), – .

[JK] S. W. Jang, B. M. Kim, *A refinement of the Dress-Scharlau theorem*, 《数论杂志》158 (2016), 234–243. [Ka] V. Kala, *Universal quadratic forms and elements of small norm in real quadratic fields*, 《澳大利亚数学会通报》94 (2016), 7–14. [Ka2] V. Kala, *Norms of indecomposable integers in real quadratic fields*, 《数论杂志》166 (2016), 193–207. [Ka3] V. Kala, *Number fields without universal quadratic forms of small rank exist in most degrees*, 《剑桥哲学学会数学学报》174 (2023), 225–231. [Ka4] V. Kala, *Universal quadratic forms and indecomposables in number fields: A survey*, 《数学通讯》31 (2023), 专题：欧几里得格：理论与应用，81–114. [KST] V. Kala, E. Sgallov´a, M. Tinkova, *Pythagoras and indecomposables* **61** 2303.00485, arXiv版本，页。arXiv: 。[ ] KS V. Kala, J. Svoboda, *Universal quadratic forms over multiquadratic fields*, 《拉马努金杂志》48 (2019), 151–157. [KT] V. Kala, M. Tinkov´a, *Universal quadratic forms, small norms and traces in families of number fields*, 《国际数学研究通报》(2023), 7541–7577. [KY] V. Kala, P. Yatsyna, *Lifting problem for universal quadratic forms*, Adv. Math. 377 (2021), 107497, 24页。[KY2] V. Kala, P. Yatsyna, *On Kitaoka's conjecture and lifting problem for universal quadratic forms*, 《伦敦数学会通报》55 (2023), 854–864. [Kar] O. Karpenkov, *On Hermite's problem, Jacobi–Perron type algorithms, and Dirichlet groups*, 《算术学报》203 (2022), 27–48. [Kr] J. Kr´asensk´y, *A cubic ring of integers with the smallest Pythagoras number*, 《数学档案》(巴塞尔) 118 (2022), 39–48.[KRS] J. Kr´asensk´y, M. Ra˘ska, E. Sgallov´a, *Pythagoras numbers of orders in biquadratic fields*, 《数学展示》40 (2022), 1181–1228.[KTZ] J. Kr´asensk´y, M. Tinkov´a, K. Zemkov´a, *There are no universal ternary quadratic forms over biquadratic fields*, 《爱丁堡数学学会会刊》63 (2020), 861–912. [LP] F. Lemmermeyer, A. Peth¨o, *Simplest Cubic Fields*, 《数学手稿》88 (1995), 53–58. [LR] C. Levesque, G. Rhin, *Two Families of Periodic Jacobi Algorithms with Period Lengths Going to Infinity*, 《数论杂志》37 (1991), 173–180. [Ma] S. H. Man, *Minimal rank of universal lattices and number of indecomposable elements in real multiquadratic fields* **447** 2024 109694, 38, Adv. Math. ( ), 页。[MVV] Z. Mas´akova, T. Vavra, F. Veneziano, *Finiteness and periodicity of continued fractions over quadratic number fields* **150** 2022 77 109, 《法国数学会公报》( ), – . [Na] W. Narkiewicz, *Elementary and analytic theory of algebraic numbers*, 第3版，施普林格出版社，柏林，2004。[Ne] J. Neukirch, *Algebraic Number Theory*, 数学科学基础丛书322，施普林格出版社，1999。[Pe1] O. Perron, *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus*, 《数学年刊》64 (1907), 1–76. [Pe2] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, B. G. Teubner，1913。[Pet] M. Peters, *Quadratische Formen über Zahlringen*, 《算术学报》24 (1973), 157–164. [Pf] A. Pfister, *Quadratic forms with applications to algebraic geometry and topology*, 伦敦数学会讲义217，剑桥大学出版社，1995。[Pr] A. Prestel, *Remarks on the Pythagoras and Hasse number of real fields*, 《纯粹与应用数学杂志》303/304 (1978), 284–294.[RSK] H. ˇRada, ˇS. Starosta, V. Kala, *Periodicity of general multidimensional continued fractions using repetend matrix form* **42** 2024 125571, 36, 《数学展示》( ), 页。[Sch] R. Scharlau, *On the Pythagoras number of orders in totally real number fields*, 《纯粹与应用数学杂志》316 (1980), 208–210. [Schw] F. Schweiger, *Multidimensional continued fractions*, 牛津大学出版社，牛津，2000。[Sg] E. Sgallov´a, *Periodicity of Jacobi–Perron algorithm*, 硕士论文，查理大学，2021。[Sh] D. Shanks, *The simplest cubic number fields*, 《数学计算》28 (1974), 1137–1152. [Si] C. L. Siegel, *Sums of m-th powers of algebraic integers*, 《数学年刊》46 (1945), 313–339. [TB] M. Taljaoui, M. Bouhamza, *Periodic Jacobi–Perron Algorithms in Cubic Fields and Fundamental Units*, 《p 进数与超度量分析及其应用》11 (2019), 248–254. [TY] J.-I. Tamura, S.-I. Yasutomi, *A New Multidimensional Continued Fraction Algorithm*, 《数学计算》78 (2009), 2209–2222.[Th] E. Thomas, *Fundamental units for orders in certain cubic number fields*, 《纯粹与应用数学杂志》310 (1979), 33–55.[ThV] E. Thomas, A. T. Vasquez, *On the resolution of cusp singularities and the Shintani decomposition in totally real cubic number fields* **247** 1980 1 20, 《数学年刊》( ), – . [Ti1] M. Tinkov´a, *On the Pythagoras number of the simplest cubic fields*, 《算术学报》208 (2023), 325–354. [Ti2] M. Tinkov´a, *Trace and norm of indecomposable integers in cubic orders*, 《拉马努金杂志》61 (2023), 1121–1144. [Ti3] M. Tinkov´a, *Arithmetics of number fields and generalized continued fractions*, 博士论文，查理大学，2021。[TV] M. Tinkov´a, P. Voutier, *Indecomposable integers in real quadratic fields*, 《数论杂志》212 (2020), 458–482. [Vo] P. Voutier, *Families of periodic Jacobi–Perron algorithms for all period lengths*, 《数论杂志》168 (2016), 472–486.[Ya] P. Yatsyna, *A lower bound for the rank of a universal quadratic form with integer coefficients in a totally real field* **94** 2019 221 239, Comment. Math. Helvet. ( ), – .

A5. Preliminaries on the Jacobi–Perron algorithm

本节将证明雅可比–佩龙算法的非齐次版本与齐次版本之间一个众所周知的关系。

命题 A5.1. 设 $\langle \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \rangle$ 是向量 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ 的 iJPA 展开。那么，$\boldsymbol{\beta}^{(0)} = (1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ 的 JPA 展开等于

$$\boldsymbol{\beta}^{(k)} = \left(\delta_k, \alpha_1^{(k)}\delta_k, \dots, \alpha_{n-2}^{(k)}\delta_k, \alpha_{n-1}^{(k)}\delta_k\right),$$

其中，当 $k \geq 0$ 时，$\delta_k = \frac{1}{\alpha_{n-1}^{(1)} \cdots \alpha_{n-1}^{(k)}}$，且 $\delta_0 = 1$。此外，对每个 i，k，我们有

$$\left\lfloor \frac{\beta_{i+1}^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor = \lfloor \alpha_i^{(k)} \rfloor.$$

证明. 我们将用关于 k 的归纳法证明这一点。当 $i = 0$ 时，我们有 $\beta_1^{(0)} = 1 = \delta_0$；而当 $1 < i \leq n$ 时，我们得到

$$\beta_i^{(0)} = \theta_{i-1} = \alpha_{i-1}^{(0)} = \alpha_{i-1}^{(0)}\delta_0.$$

因此，

$$\boldsymbol{\beta}^{(0)} = \left(\delta_0, \alpha_1^{(0)}\delta_0, \dots, \alpha_{n-1}^{(0)}\delta_0\right).$$

L现在假设公式对 k 成立；我们将证明它对 $k+1$ 成立。我们看到 at

$$\beta_1^{(k+1)} = \beta_2^{(k)} - \left\lfloor \frac{\beta_2^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor \beta_1^{(k)} = \alpha_1^{(k)}\delta_k - \left\lfloor \frac{\alpha_1^{(k)}\delta_k}{\delta_k} \right\rfloor \delta_k = (\alpha_1^{(k)} - \lfloor \alpha_1^{(k)} \rfloor)\delta_k = \frac{1}{\alpha_{n-1}^{(k+1)}}\delta_k = \delta_{k+1},$$

$$\beta_n^{(k+1)} = \beta_1^{(k)} = \delta_k = \alpha_{n-1}^{(k+1)}\delta_{k+1},$$

并且对于 $1 < i < n$，我们得到

$$\begin{aligned}\beta_i^{(k+1)} &= \beta_{i+1}^{(k)} - \left\lfloor \frac{\beta_{i+1}^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor \beta_1^{(k)} = \alpha_i^{(k)}\delta_k - \left\lfloor \frac{\alpha_i^{(k)}\delta_k}{\delta_k} \right\rfloor \delta_k = (\alpha_i^{(k)} - \lfloor \alpha_i^{(k)} \rfloor)\delta_k \\ &= \frac{\left(\alpha_i^{(k)} - \lfloor \alpha_i^{(k)} \rfloor\right)}{\left(\alpha_1^{(k)} - \lfloor \alpha_1^{(k)} \rfloor\right)} \left(\alpha_1^{(k)} - \lfloor \alpha_1^{(k)} \rfloor\right) \delta_k = \alpha_{i-1}^{(k+1)} \frac{1}{\alpha_{n-1}^{(k+1)}}\delta_k = \alpha_{i-1}^{(k+1)}\delta_{k+1}.\end{aligned}$$

因此，

$$\boldsymbol{\beta}^{(k+1)} = \left(\delta_{k+1}, \alpha_1^{(k+1)}\delta_{k+1}, \dots, \alpha_{n-2}^{(k+1)}\delta_{k+1}, \alpha_{n-1}^{(k+1)}\delta_{k+1}\right),$$

并且，根据上述方程，很容易看出

$$\left\lfloor \frac{\beta_{i+1}^{(k)}}{\beta_1^{(k)}} \right\rfloor = \lfloor \alpha_i^{(k)} \rfloor.$$

□

此外，命题 A5.1 意味着以下陈述：

命题 A5.2. 如果 $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ 的 iJPA 展开是周期的，前周期长度为 l_0，周期长度为 l_1，那么 $(1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ 的 JPA展开也是周期的，且前周期和周期的长度相同；iJPA 展开周期中的单位 ε 是哈塞–伯恩斯坦单位的倒数。

证明。由前一个命题可得。容易看出，如果 $k \geq l_0$，那么

$$\delta_{k+l_1} = \frac{1}{\alpha_{n-1}^{(1)} \cdots \alpha_{n-1}^{(k)} \cdots \alpha_{n-1}^{(k+l_1)}} = \delta_k \frac{1}{\alpha_{n-1}^{(k+1)} \cdots \alpha_{n-1}^{(k+l_1)}} = \delta_k \frac{1}{\alpha_{n-1}^{(l_0)} \cdots \alpha_{n-1}^{(l_0+l_1-1)}}.$$

因此，由于对于 $k \geq l_0$ 有 $\boldsymbol{\alpha}^{k+l_1} = \boldsymbol{\alpha}^{(k)}$，$(1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ 的 JPA展开是周期的，且其周期中的 ε 是哈塞–伯恩斯坦单位的倒数。□

A6. Jacobi-Perron algorithm in the simplest cubic fields

本部分将给出若干命题的证明，这些命题在第 6 节中未予证明。

A6.1. 最简单三次域中的非齐次雅可比–佩龙展开。 首先，在第 6 节中，我们讨论向量 $(-\rho',\ \rho'^2)$ 的非齐次雅可比–佩龙展开，其中 $-2<\rho'<-1$ 是多项式 $x^3-ax^2-(a+3)x-1$ 的一个根，其中 $a\geq -1$。我们推导出它在$a\geq 4$ 时的形式（见命题 6.1 或本节中的命题 A6.1 ）。同一向量在 $-1\leq a\leq 3$ 时的展开也具有周期性。不过，其形式有所不同，下面的例子将展示这一点。

例 2. 对于 $-1\leq a\leq 3$，我们可以使用计算机程序（计算使用 Mathematica 完成）来确定向量 $(-\rho',\ \rho'^2)$ 的非齐次雅可比–佩龙展开。我们得到以下结果：

- 对于 $a=-1$，$(-\rho',\ \rho'^2)$ 的 iJPA 展开是周期的，其前周期为 $\boldsymbol{\alpha}(0)=(-\rho',\ \rho'^2)$，$\boldsymbol{a}(0)=(1,3)$，周期为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{(1)}&=(5-\rho'-2\rho'^2,-2+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(1)}&=(0,1),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(2)}&=(-1-\rho',\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(2)}&=(0,3).\end{aligned}$$

- 对于 $a=0$，我们的 iJPA 展开是周期的，其前周期为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{(0)}&=(-\rho',\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(0)}&=(1,2),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(1)}&=(3-\rho'^2,-2-\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(1)}&=(0,1),\end{aligned}$$

  周期为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{(2)}&=(-1+\rho'^2,-\rho'), & \boldsymbol{a}^{(2)}&=(1,1),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(3)}&=(-\rho',-1-\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(3)}&=(1,2),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(4)}&=(4-\rho'^2,-2-\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(4)}&=(1,1).\end{aligned}$$

- 对于 $a=1$，我们的 iJPA 展开是周期的，其前周期为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{(0)}&=(-\rho',\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(0)}&=(1,1),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(1)}&=(1-\rho',-2-2\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(1)}&=(2,2),\end{aligned}$$

  以及周期

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{(2)}&=(5+\rho'-\rho'^2,-2-2\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(2)}&=(1,2),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(3)}&=(-1+\rho'^2,-\rho'), & \boldsymbol{a}^{(3)}&=(0,1),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(4)}&=\left(\tfrac{4}{5}-\tfrac{1}{5}\rho'^2,-\tfrac{7}{5}-\rho'+\tfrac{3}{5}\rho'^2\right), & \boldsymbol{a}^{(4)}&=(0,1),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(5)}&=(-3-\rho'+\rho'^2,1-\rho'), & \boldsymbol{a}^{(5)}&=(0,2),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(6)}&=(-\rho',-1-2\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(6)}&=(1,3).\end{aligned}$$

- 对于 $a=2$，我们的 iJPA 展开是周期的，前周期为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{(0)}&=(-\rho',\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(0)}&=(1,1),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(1)}&=(1-\rho',-2-3\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(1)}&=(2,3),\end{aligned}$$

  以及周期

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{(2)}&=(6+2\rho'-\rho'^2,-2-3\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(2)}&=(1,3),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(3)}&=(-1+\rho'^2,-\rho'), & \boldsymbol{a}^{(3)}&=(0,1),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(4)}&=\left(\tfrac{6}{7}+\tfrac{1}{7}\rho'-\tfrac{1}{7}\rho'^2,-\tfrac{10}{7}-\tfrac{11}{7}\rho'+\tfrac{4}{7}\rho'^2\right), & \boldsymbol{a}^{(4)}&=(0,1),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(5)}&=(-3-2\rho'+\rho'^2,1-\rho'), & \boldsymbol{a}^{(5)}&=(1,2),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(6)}&=(-\rho',-1-3\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(6)}&=(1,4).\end{aligned}$$

- 对于 $a=3$，我们的 iJPA 展开是周期的，前周期为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{(0)}&=(-\rho',\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(0)}&=(1,1),\\ \boldsymbol{\alpha}^{(1)}&=(1-\rho',-2-4\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(1)}&=(2,4),\end{aligned}$$

周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(2)} &= (7+3\rho'-\rho'^2,-2-4\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(2)} &= (1,4),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(3)} &= (-1+\rho'^2,-\rho'), & \boldsymbol{a}^{(3)} &= (0,1),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(4)} &= \left(\tfrac{8}{9}+\tfrac{2}{9}\rho'-\tfrac{1}{9}\rho'^2,-\tfrac{13}{9}-\tfrac{19}{9}\rho'+\tfrac{5}{9}\rho'^2\right), & \boldsymbol{a}^{(4)} &= (0,1),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(5)} &= (-3-3\rho'+\rho'^2,1-\rho'), & \boldsymbol{a}^{(5)} &= (2,2),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(6)} &= (-\rho',-1-4\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(6)} &= (1,5).
\end{aligned}$$

此外，在命题 6.1中，我们只给出了 $a\geq 4$ 的证明概要。在这里，可以看到完整的证明步骤：

命题 A6.1。设 $a\geq 4$。则向量（$-\rho'$，ρ'^2）的雅可比–佩龙展开是周期的。特别地，设 $\lfloor\frac{a}{2}\rfloor=A_0$。则（$-\rho'$，$\rho'^2$）的 JPA展开的前周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(0)} &= (-\rho',\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(0)} &= (1,1),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(1)} &= (1-\rho',-2-(a+1)\rho'+\rho'^2), & \boldsymbol{a}^{(1)} &= (2,a+1).
\end{aligned}$$

对于 a 为偶数时，周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(2)} &= (a+4+a\rho'-\rho'^2,-2-(a+1)\rho'+\rho'^2),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(3)} &= (-1+\rho'^2,-\rho'),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(4)} &= \left(\frac{2a+2+(a-1)\rho'-\rho'^2}{2a+3},\frac{-3a-4-(a^2+3a+1)\rho'+(a+2)\rho'^2}{2a+3}\right),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(5)} &= \left(-(A_0+2)-(A_0+1)\rho'+\rho'^2,1-\rho'\right),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(6)} &= \left(\frac{A_0^2+2A_0-1+(A_0-2)\rho'-\rho'^2}{A_0^3+4A_0^2+3A_0-1},\right.\\
&\qquad\left.\frac{-2A_0^2-3A_0+1-(2A_0^3+3A_0^2+A_0-1)\rho'+(A_0^2+A_0)\rho'^2}{A_0^3+4A_0^2+3A_0-1}\right),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(7)} &= (-(A_0+4)-2A_0\rho'+\rho'^2,A_0+2-\rho'),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(8)} &= (-\rho',-1-(a+1)\rho'+\rho'^2),
\end{aligned}$$

相应的整数部分向量为 $\boldsymbol{a}^{(2)}=(1,\ a+1)$、$\boldsymbol{a}^{(3)}=(0,\ 1)$、$\boldsymbol{a}^{(4)}=(0,\ A_0)$、$\boldsymbol{a}^{(5)}=(0,\ 2)$、$\boldsymbol{a}^{(6)}=(0,1)$、$\boldsymbol{a}^{(7)}=(A_0-2,\ A_0+3)$ 和 $\boldsymbol{a}^{(8)}=(1,\ a+2)$。

当 a为奇数时，周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(2)} &= (a+4+a\rho'-\rho'^2,-2-(a+1)\rho'+\rho'^2),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(3)} &= (-1+\rho'^2,-\rho'),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(4)} &= \left(\frac{2a+2+(a-1)\rho'-\rho'^2}{2a+3},\frac{-3a-4-(a^2+3a+1)\rho'+(a+2)\rho'^2}{2a+3}\right),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(5)} &= \left(-(A_0+2)-(A_0+2)\rho'+\rho'^2,1-\rho'\right),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(6)} &= \left(\frac{A_0^2+3A_0-2+(A_0-2)\rho'-\rho'^2}{A_0^3+6A_0^2+7A_0-5},\right.\\
&\qquad\left.\frac{-2A_0^2-5A_0+3-(2A_0^3+6A_0^2+2A_0-3)\rho'+(A_0^2+2A_0-1)\rho'^2}{A_0^3+6A_0^2+7A_0-5}\right),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(7)} &= (-(A_0+5)-(2A_0+1)\rho'+\rho'^2,A_0+3-\rho'),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(8)} &= (-\rho',-1-(a+1)\rho'+\rho'^2),
\end{aligned}$$

相应的整数部分向量为 $\boldsymbol{a}^{(2)}=(1,a+1)$、$\boldsymbol{a}^{(3)}=(0,1)$、$\boldsymbol{a}^{(4)}=(0,A_0)$、$\boldsymbol{a}^{(5)}=(1,2)$、$\boldsymbol{a}^{(6)}=(0,1)$、$\boldsymbol{a}^{(7)}=(A_0-2,A_0+4)$ 和 $\boldsymbol{a}^{(8)}=(1,a+2)$。

证明。回忆一下，对于 $a\geq 7$，我们有

$$-1-\frac{1}{a+1}<\rho'<-1-\frac{1}{a+2}. \tag{A6.1}$$

容易验证，当 $4 \le a \le 6$ 时，该结论在具体情形下成立。因此，在证明的其余部分中，我们假设 $a \ge 7$。

第一次迭代

在初始迭代中，我们有向量 $(-\rho', \rho'^2)$。我们知道 $\lfloor -\rho' \rfloor = 1$，即 $a_1^{(0)} = 1$。利用 (A6.1)，可知

$$1 < \rho'^2 < \left(1 + \frac{1}{a+1}\right)^2 < 1 + \frac{2}{a+1} + \frac{1}{(a+1)^2} < 2$$

对于 $a \ge 7$。这意味着在这些 a 情形下，$a_2^{(0)} = 1$。于是我们有

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{\rho'^2 - 1}{-\rho' - 1} = 1 - \rho'.$$

事实是

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{1}{-\rho' - 1} = -2 - (a+1)\rho' + \rho'^2$$

可以利用 $\rho'^3 - a\rho'^2 - (a+3)\rho' - 1 = 0$ 验证。

第二次迭代

我们将以类似的方式处理 $\boldsymbol{\alpha}^{(1)}$。可以立即得出结论，$a_1^{(1)} = \lfloor 1 - \rho' \rfloor = 2$。另一方面，元素 $\alpha_2^{(1)} = -2 - (a+1)\rho' + \rho'^2$ 是 ρ' 的一个共轭元，即 ρ，对此我们有 $a_2^{(1)} = \lfloor \rho \rfloor = a + 1$。于是，很容易验证

$$\frac{-2 - (a+1)\rho' + \rho'^2 - (a+1)}{1 - \rho' - 2} = a + 4 + a\rho' - \rho'^2 \quad \text{and} \quad \frac{1}{1 - \rho' - 2} = -2 - (a+1)\rho' + \rho'^2.$$

因此，从现在起，我们只关注整数部分的确定，这是每一步中最具挑战性的部分。

第三次迭代

与第二次迭代类似，我们有 $a_2^{(2)} = \lfloor \rho \rfloor = a + 1$。对于 $a_1^{(2)}$，可以得出结论：

$$\alpha_1^{(2)} = a + 4 + a\rho' - \rho'^2 > a + 4 - a\left(1 + \frac{1}{a+1}\right) - \left(1 + \frac{1}{a+1}\right)^2 = 1 + \frac{a^2 + a - 1}{(a+1)^2} > 1$$

and

$$\alpha_1^{(2)} = a + 4 + a\rho' - \rho'^2 < a + 4 - a\left(1 + \frac{1}{a+2}\right) - \left(1 + \frac{1}{a+2}\right)^2 = 2 - \frac{1}{(a+2)^2} < 2.$$

因此，$a_1^{(2)} = 1$。

第四次迭代

和之前一样，我们看到 $a_1^{(3)} = \lfloor -1 + \rho'^2 \rfloor = 0$ 和 $a_2^{(3)} = \lfloor -\rho' \rfloor = 1$。

第五次迭代

现在让我们讨论下一次迭代。首先，我们看到

$$2a + 2 + (a-1)\rho' - \rho'^2 < 2a + 2 - (a-1) - 1 = a + 2 < 2a + 3,$$

因此

$$a_1^{(4)} = \left\lfloor \frac{2a + 2 + (a-1)\rho' - \rho'^2}{2a+3} \right\rfloor = 0.$$

在这一步的第二部分中，可以很容易地验证 $\alpha_2^{(4)}$ 是多项式的一个根

$$h(x) = (2a+3)x^3 - a^2x^2 - (a^2 + 2a + 3)x + 1,$$

它有两个正根和一个负根。特别是 $h(0) = 1 > 0$，$h(1) = 1 - 2a^2 < 0$，$8h\left(\frac{a}{2}\right) = -a^3 - 8a^2 - 12a + 8 < 0$ 以及 $8h\left(\frac{a+1}{2}\right) = a^3 + a^2 - 9a - 1 > 0$。元素 $\alpha_2^{(4)}$ 是这两个正根之一。此外，

$$-3a - 4 - (a^2 + 3a + 1)\rho' + (a+2)\rho'^2 > -3a - 4 + (a^2 + 3a + 1) + (a+2)$$
$$= a^2 + a - 1 > 2a + 3,$$

这意味着 $\alpha_2^{(4)} > 1$。由此可得 $\lfloor \alpha_2^{(4)} \rfloor = \lfloor \frac{a}{2} \rfloor = A_0$。

第六次迭代

接下来，当 a 为偶数时，我们可以推导出

$$\alpha_1^{(5)} = -(A_0+2) - (A_0+1)\rho' + \rho'^2 < -(A_0+2) + (A_0+1)\left(1+\frac{1}{2A_0+1}\right) + \left(1+\frac{1}{2A_0+1}\right)^2 = \frac{2A_0^2+7A_0+4}{(2A_0+1)^2} < 1$$

对于 $A_0 \geq 3$。这给出 $a_1^{(5)} = 0$ 对于 a 为偶数。

如果 a 为奇数，我们得到

$$\alpha_1^{(5)} = -(A_0+2) - (A_0+2)\rho' + \rho'^2 < -(A_0+2) + (A_0+2)\left(1+\frac{1}{2A_0+2}\right) + \left(1+\frac{1}{2A_0+2}\right)^2 = \frac{6A_0^2+18A_0+13}{4(A_0+1)^2} < 2$$

对于 $A_0 \geq 3$。此外，

$$\alpha_1^{(5)} > -(A_0+2) + (A_0+2)\left(1+\frac{1}{2A_0+3}\right) + \left(1+\frac{1}{2A_0+3}\right)^2 = 1 + \frac{A_0+4}{2A_0+3} + \frac{1}{(2A_0+3)^2} > 1.$$

因此，$a_1^{(5)} = 1$。

在第二部分中，我们立即得到 $a_2^{(5)} = \lfloor 1-\rho' \rfloor = 2$。

第七次迭代

对于 a 偶数的情况，我们有

$$A_0^2 + 2A_0 - 1 + (A_0-2)\rho' - \rho'^2 < A_0^2 + 2A_0 - 1 - (A_0-2) - 1 = A_0^2 + A_0 < A_0^3 + 4A_0^2 + 3A_0 - 1$$

对于 $A_0 \geq 1$。类似地，对于 a 奇数的情况，我们得到

$$A_0^2 + 3A_0 - 2 + (A_0-2)\rho' - \rho'^2 < A_0^2 + 3A_0 - 2 - (A_0-2) - 1 = A_0^2 + 2A_0 - 1 < A_0^3 + 6A_0^2 + 7A_0 - 5.$$

这给出了 $a_1^{(6)} = 0$ 在 a 的两种情况下的结果。

关于第二个坐标，对于 a 偶数的情况，我们看到

$$-2A_0^2 - 3A_0 + 1 - (2A_0^3 + 3A_0^2 + A_0 - 1)\rho' + (A_0^2 + A_0)\rho'^2 < \frac{8A_0^5 + 20A_0^4 + 18A_0^3 + 10A_0^2 + A_0 - 1}{(2A_0+1)^2} < 2(A_0^3 + 4A_0^2 + 3A_0 - 1)$$

and

$$-2A_0^2 - 3A_0 + 1 - (2A_0^3 + 3A_0^2 + A_0 - 1)\rho' + (A_0^2 + A_0)\rho'^2 > \frac{8A_0^4 + 20A_0^3 + 14A_0^2 + 3A_0 - 2}{4(A_0+1)} > A_0^3 + 4A_0^2 + 3A_0 - 1$$

对于 $A_0 \geq 3$。同样地，如果 a 为奇数，则有

$$-2A_0^2 - 5A_0 + 3 - (2A_0^3 + 6A_0^2 + 2A_0 - 3)\rho' + (A_0^2 + 2A_0 - 1)\rho'^2 < \frac{8A_0^5 + 40A_0^4 + 64A_0^3 + 37A_0^2 - 8A_0 - 15}{4(A_0+1)^2} < 2(A_0^3 + 6A_0^2 + 7A_0 - 5)$$

and

$$-2A_0^2 - 5A_0 + 3 - (2A_0^3 + 6A_0^2 + 2A_0 - 3)\rho' + (A_0^2 + 2A_0 - 1)\rho'^2 > \frac{8A_0^5 + 48A_0^4 + 96A_0^3 + 66A_0^2 - 11A_0 - 25}{(2A_0+3)^2} > A_0^3 + 6A_0^2 + 7A_0 - 5$$

对于 $A_0 \geq 3$。由此可得 $a_2^{(6)} = 1$。

第八次迭代

如果 a 是偶数，我们可以很容易地推导出

$$-(A_0+4)-2A_0\rho'+\rho'^2<\frac{4A_0^3-4A_0^2-5A_0}{(2A_0+1)^2}<A_0-1$$

and

$$-(A_0+4)-2A_0\rho'+\rho'^2>\frac{4A_0^3-12A_0^2-7A_0}{4(A_0+1)^2}>A_0-2.$$

类似地，对于 a 奇数，我们有

$$-(A_0+5)-(2A_0+1)\rho'+\rho'^2<\frac{4A_0^3-10A_0-5}{4(A_0+1)^2}<A_0-1$$

and

$$-(A_0+5)-(2A_0+1)\rho'+\rho'^2>\frac{4A_0^3+4A_0^2-15A_0-17}{(2A_0+3)^2}>A_0-2.$$

在这两种情况下，我们得到 $a_1^{(7)}=A_0-2$。

在第二部分中，我们立即看到，当 a 为偶数时有 $a_2^{(7)}=\lfloor A_0+2-\rho'\rfloor=A_0+3$，而当 a 为奇数时有$a_2^{(7)}=\lfloor A_0+3-\rho'\rfloor=A_0+4$。

第九次迭代

在这一步，我们有 $a_1^{(8)}=\lfloor-\rho'\rfloor=1$。此外，$a_2^{(8)}=\lfloor-1-(a+1)\rho'+\rho'^2\rfloor=a+2$，这直接由我们之前计算得到的 $a_2^{(2)}=\lfloor-2-(a+1)\rho'+\rho'^2\rfloor=a+1$ 这一事实推出。然后，不难验证 $\alpha_2^{(8)}-\left(\frac{a+2}{\alpha_1^{(8)}-1}\right)=\alpha_1^{(2)}$ 以及 $\frac{1}{\alpha_1^{(8)}-1}=\alpha_2^{(2)}$。 □

A6.2. 最简单三次域中的齐次雅可比–佩龙展开。与 iJPA 展开的情形类似，我们可以很容易地推导出向量 $(1,-\rho',\rho'^2)$ 的齐次 JPA展开，其中 $-2<\rho'<-1$ 是多项式 $x^3-ax^2-(a+3)x-1$ 的一个根，且 $-1\le a\le 3$。

例3. 对于 $a=-1$，$(1,-\rho',\rho'^2)$ 的展开是周期的，前周期为 $\boldsymbol{\beta}^{(0)}=(1,-\rho',\rho'^2)$，周期

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{(1)}&=(-1-\rho',-3+\rho'^2,1),\\ \boldsymbol{\beta}^{(2)}&=(-3+\rho'^2,2+\rho',-1-\rho').\end{aligned}$$

对于 $a=0$，我们得到的展开前周期为 $\boldsymbol{\beta}^{(0)}=(1,-\rho',\rho'^2)$ 和 $\boldsymbol{\beta}^{(1)}=(-1-\rho',-2+\rho'^2,1)$，周期

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{(2)}&=(-2+\rho'^2,2+\rho',-1-\rho'),\\ \boldsymbol{\beta}^{(3)}&=(4+\rho'-\rho'^2,1-\rho'-\rho'^2,-2+\rho'^2),\\ \boldsymbol{\beta}^{(4)}&=(-3-2\rho',-10-2\rho'+3\rho'^2,4+\rho'-\rho'^2).\end{aligned}$$

最后，对于 $1\le a\le 3$，我们得到的展开前周期为 $\boldsymbol{\beta}^{(0)}=(1,-\rho',\rho'^2)$ 和$\boldsymbol{\beta}^{(1)}=(-1-\rho',-1+\rho'^2,1)$，周期

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}^{(2)}&=(1+2\rho'+\rho'^2,a+2+(a+1)\rho',-1-\rho'),\\ \boldsymbol{\beta}^{(3)}&=(a+1+(a-1)\rho'-\rho'^2,-(a+2)-(2a+3)\rho'-(a+1)\rho'^2,1+2\rho'+\rho'^2),\\ \boldsymbol{\beta}^{(4)}&=(-(a+2)-(2a+3)\rho'-(a+1)\rho'^2,-a-(a-3)\rho'+2\rho'^2,a+1+(a-1)\rho'-\rho'^2),\\ \boldsymbol{\beta}^{(5)}&=(-a-(a-3)\rho'+2\rho'^2,2a+3+(3a+2)\rho'+a\rho'^2,-(a+2)-(2a+3)\rho'-(a+1)\rho'^2),\\ \boldsymbol{\beta}^{(6)}&=(a^2+a+3+(a^2-a+5)\rho'-(a-2)\rho'^2,a-2-9\rho'-(a+5)\rho'^2,-a-(a-3)\rho'+2\rho'^2).\end{aligned}$$

A7. Jacobi-Perron algorithm in Ennola's cubic fields

本部分将重点讨论多项式 $x^3-(a-1)x^2-ax-1$ 的根对应的非齐次和齐次 JPA 展开，并给出在第7节中省略的证明。

A7.1. Ennola三次域中的非齐次 Jacobi-Perron 算法。本节将推导向量 $(|\psi|, \psi^2)$ 的 iJPA 展开，其中 ψ 是多项式$x^3-(a-1)x^2-ax-1$的一个根，且 $a\in\mathbb{N}, a\geq 5$。我们将该多项式记作 $f(x)$（或 $f_a(x)$），并将多项式的根记作 ψ, ψ', ψ''，其中 $\psi'<\psi''<\psi$。

我们知道

$$a<a+\frac{a-1}{a^3}<\psi<a+\frac{a^2-1}{a^4}<a+\frac{1}{a^2}.$$
$$-1<-\frac{a-1}{a}<\psi'<-\frac{a-2}{a-1}<0,$$
$$-1<-\frac{1}{a-2}<\psi''<-\frac{1}{a-1}<0,$$

A7.1.1. 第一根。首先，我们将关注向量 (ψ, ψ^2) 的 iJPA 展开。我们证明它是周期的，前周期长度为 2，周期长度为 1。

命题 A7.1. 设 $a\geq 5$。那么，向量 $\left(\psi,\psi^2\right)$ 的非齐次雅可比–佩龙展开是周期的。$\left(\psi, \psi^2\right)$ 的 iJPA 展开的前周期为

$$\boldsymbol{\alpha}^{(0)}=\left(\psi, \psi^2\right), \qquad \boldsymbol{a}^{(0)}=(a, a^2),$$
$$\boldsymbol{\alpha}^{(1)}=\left(a+\psi, \psi+\psi^2\right), \qquad \boldsymbol{a}^{(1)}=(2a, a+a^2),$$

周期为

$$\boldsymbol{\alpha}^{(2)}=\left(a+1+\psi, \psi+\psi^2\right), \qquad \boldsymbol{a}^{(2)}=(2a+1, a+a^2).$$

证明。我们将采用与最简单三次域相同的技巧。这里，我们知道 $a<\psi<\frac{a^3+1}{a^2}$，并且根据 iJPA算法的定义，所有系数 $a_i^{(k)}\geq 0$。

第一次迭代

首先，我们证明 $\boldsymbol{a}^{(0)}=(a, a^2)$。我们知道 $a<\psi<a+1$，所以 $a_1^{(0)}=\lfloor\psi\rfloor=a$。并且 $a^2<\psi^2<\frac{a^6+2a^3+1}{a^4}=a^2+\frac{2a^3+1}{a^4}<a^2+1$。因此 $a_2^{(0)}=\lfloor\psi^2\rfloor=a^2$。由此可得

$$\alpha_1^{(1)}=\frac{\alpha_2^{(0)}-a_2^{(0)}}{\alpha_1^{(0)}-a_1^{(0)}}=\frac{\psi^2-a^2}{\psi-a}=a+\psi$$

and

$$\alpha_2^{(1)}=\frac{1}{\alpha_1^{(0)}-a_1^{(0)}}=\frac{1}{\psi-a}=\psi+\psi^2.$$

因此，第一次迭代为 $(a+\psi, \psi+\psi^2)$。

第二次迭代

现在，我们将证明 $\boldsymbol{a}^{(1)}=(2a, a+a^2)$。根据第一次迭代，我们知道 $\lfloor\psi\rfloor=a$，所以 $a_1^{(1)}=\lfloor a+\psi\rfloor=a+\lfloor\psi\rfloor=2a$。对于 $a_2^{(1)}$，我们可以计算得

$$\alpha_2^{(1)}=\psi+\psi^2>a^2+a$$

and

$$\alpha_2^{(1)}=\psi+\psi^2<\frac{a^3+1}{a^2}+\frac{a^6+2a^3+1}{a^4}=\frac{a^6+a^5+2a^3+a^2+1}{a^4}<a^2+a+1.$$

因此，$a_2^{(1)}=a^2+a$。现在，很容易证明

$$\alpha_1^{(2)}=\frac{\alpha_2^{(1)}-a_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}-a_1^{(1)}}=\frac{\psi+\psi^2-a^2-a}{a+\psi-2a}=a+1+\psi$$

and

$$\alpha_2^{(2)}=\frac{1}{\alpha_1^{(1)}-a_1^{(1)}}=\frac{1}{a+\psi-2a}=\psi+\psi^2.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}^{(2)}=(a+1+\psi, \psi+\psi^2)$。

第三次迭代

根据第二次迭代，我们知道 $a_1^{(2)} = \lfloor a+1+\psi \rfloor = 1 + \lfloor a+\psi \rfloor = 2a+1$ 和 $a_2^{(2)} = \lfloor \psi + \psi^2 \rfloor = a^2 + a$。因此 $\boldsymbol{a}^{(2)} = (2a+1, a^2+a)$。此外，我们很容易验证

$$\alpha_1^{(3)} = \frac{\alpha_2^{(2)} - a_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)} - a_1^{(2)}} = \frac{\psi + \psi^2 - a^2 - a}{a+1+\psi-2a-1} = a+1+\psi$$

and

$$\alpha_2^{(3)} = \frac{1}{\alpha_1^{(2)} - a_1^{(2)}} = \frac{1}{a+1+\psi-2a-1} = \psi + \psi^2.$$

因此，$\alpha^{(2)} = (a+1+\psi, \psi+\psi^2)$。我们可以看到，第二次迭代与第三次迭代相同，因此我们已经证明，向量 (ψ, ψ^2) 的 iJPA 展开是周期的，前周期长度为 2，周期长度为 1。□

A7.1.2. 第二个根。在下一部分中，我们将证明，向量 $(-\psi', \psi'^2)$ 的 iJPA 展开是周期的，前周期长度为 4，周期长度为 7。

命题 A7.2. 设 $a \geq 5$。那么，向量 $(-\psi', \psi'^2)$ 的非齐次雅可比–佩龙展开是周期的。$(-\psi', \psi'^2)$ 的 iJPA 展开的前周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(0)} &= \left(-\psi', \psi'^2\right), \\
\boldsymbol{\alpha}^{(1)} &= \left(-\psi', a + (a-1)\psi' - \psi'^2\right), \\
\boldsymbol{\alpha}^{(2)} &= \left(a^2 - 2a + 1 + (a^2-2a+2)\psi' - (a-1)\psi'^2, a + (a-1)\psi' - \psi'^2\right), \\
\boldsymbol{\alpha}^{(3)} &= \left(-\psi', -1 - (a-1)\psi' + \psi'^2\right),
\end{aligned}$$

相应的整数部分向量为 $\boldsymbol{a}^{(0)} = (0, 0)$、$\boldsymbol{a}^{(1)} = (0, 1)$、$\boldsymbol{a}^{(2)} = (0, 1)$ 和 $\boldsymbol{a}^{(3)} = (0, a-3)$。周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(4)} &= \left(-a^2 + 3a - 1 - (a^2 - 3a + 3)\psi' + (a-2)\psi'^2, a + (a-1)\psi' - \psi'^2\right), \\
\boldsymbol{\alpha}^{(5)} &= \left(\tfrac{-2-3\psi'+\psi'^2}{2a-7}, \tfrac{-2-(2a-4)\psi'+\psi'^2}{2a-7}\right), \\
\boldsymbol{\alpha}^{(6)} &= \left(a - 1 + (a-1)\psi' - \psi'^2, -a - (2a-1)\psi' + 2\psi'^2\right), \\
\boldsymbol{\alpha}^{(7)} &= \left(-3 - (a-1)\psi' + \psi'^2, -1 - a\psi' + \psi'^2\right), \\
\boldsymbol{\alpha}^{(8)} &= \left(\tfrac{2a-5+3\psi'-\psi'^2}{2a-7}, \tfrac{-4-(2a-1)\psi'+2\psi'^2}{2a-7}\right), \\
\boldsymbol{\alpha}^{(9)} &= \left(\tfrac{-(a-2)^2-(a^2-3a+3)\psi'+(a-2)\psi'^2}{a^2-5a+5}, \tfrac{a^2-6a+7-(2a-4)\psi'+\psi'^2}{a^2-5a+5}\right) \\
\boldsymbol{\alpha}^{(10)} &= \left(-\psi', -2 - (a-1)\psi' + \psi'^2\right).
\end{aligned}$$

相应的整数部分向量为 $\boldsymbol{a}^{(4)} = (0, 1)$、$\boldsymbol{a}^{(5)} = (0, 1)$、$\boldsymbol{a}^{(6)} = (0, a-2)$、$\boldsymbol{a}^{(7)} = (a-5, a-2)$、$\boldsymbol{a}^{(8)} = (0,1)$、$\boldsymbol{a}^{(9)} = (0, 1)$ 和 $\boldsymbol{a}^{(10)} = (0, a-4)$。

证明。我们将采用与之前类似的方法。

第一次迭代

由 $-1 < \psi' < 0$ 这一事实，我们直接得到 $a_1^{(0)} = \lfloor \alpha_1^{(0)} \rfloor = \lfloor -\psi' \rfloor = 0$，并且 $a_2^{(0)} = \lfloor \alpha_2^{(0)} \rfloor = \lfloor \psi'^2 \rfloor = 0$. 现在，很容易看出

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{\alpha_2^{(0)} - a_2^{(0)}}{\alpha_1^{(0)} - a_1^{(0)}} = \frac{\psi'^2}{-\psi'} = -\psi'$$

and

$$\alpha_2^{(1)} = \frac{1}{\alpha_1^{(0)} - a_1^{(0)}} = \frac{1}{-\psi'} = a + (a-1)\psi' - \psi'^2.$$

第二次迭代

由第一次迭代可知 $a_1^{(1)} = \lfloor -\psi' \rfloor = 0$。因此，我们只需要计算 $a_2^{(1)} = \lfloor \alpha_2^{(1)} \rfloor$:

$$\alpha_2^{(1)} = a + (a-1)\psi' - \psi'^2 > a - (a-1)\frac{a-1}{a} - \frac{a^2-2a+1}{a^2} = 1 + \frac{a-1}{a^2} > 1,$$

$$\alpha_2^{(1)} = a + (a-1)\psi' - \psi'^2 < a - (a-1)\frac{a-2}{a-1} - \frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1}$$
$$= 2 - \frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1} < 2.$$

因此，我们有 $\boldsymbol{a}^{(1)} = (0,1)$。

此外，我们可以直接计算得出

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{\alpha_2^{(1)} - a_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)} - a_1^{(1)}} = \frac{a + (a-1)\psi' - \psi'^2 - 1}{-\psi'} = a^2 - 2a + 1 + (a^2-2a+2)\psi' - (a-1)\psi'^2$$

and

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{1}{\alpha_1^{(1)} - a_1^{(1)}} = \frac{1}{-\psi'} = a + (a-1)\psi' - \psi'^2.$$

This 意味着 $\boldsymbol{\alpha}^{(2)} = (a^2 - 2a + 1 + (a^2-2a+2)\psi' - (a-1)\psi'^2, a + (a-1)\psi' - \psi'^2)$.

第三次迭代

不，我们将证明 $\boldsymbol{a}^{(2)} = (0,1)$:

$$\alpha_1^{(2)} = a^2 - 2a + 1 + (a^2-2a+2)\psi' - (a-1)\psi'^2$$
$$< a^2 - 2a + 1 - (a^2-2a+2)\frac{a-2}{a-1} - (a-1)\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1}$$
$$= a^2 - 2a + 1 - (a^2-2a+2) + \frac{a^2-2a+2}{a-1} - \frac{a^2-4a+4}{a-1}$$
$$= -1 + \frac{2a-2}{a-1} = -1 + 2 = 1.$$

由于元素 $\alpha_1^{(2)}$ 非负，我们有 $a_1^{(2)} = 0$。从第二次迭代可以看出$a_2^{(2)} = a_2^{(1)} = 1$。因此

$$\alpha_1^{(3)} = \frac{\alpha_2^{(2)} - a_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)} - a_1^{(2)}} = \frac{a + (a-1)\psi' - \psi'^2 - 1}{a^2 - 2a + 1 + (a^2-2a+2)\psi' - (a-1)\psi'^2} = -\psi'$$

and

$$\alpha_2^{(3)} = \frac{1}{\alpha_1^{(2)} - a_1^{(2)}} = \frac{1}{a^2 - 2a + 1 + (a^2-2a+2)\psi' - (a-1)\psi'^2} = -1 - (a-1)\psi' + \psi'^2.$$

由此，我们验证了 $\boldsymbol{\alpha}^{(3)} = (-\psi', -1 - (a-1)\psi' + \psi'^2)$。

第四次迭代

与之前一样, 我们首先计算 $\boldsymbol{a}^{(3)}$。显然， $a_1^{(3)} = 0$，因此只需计算 $a_2^{(3)}$ 。我们有 e

$$\alpha_2^{(3)} = -1 - (a-1)\psi' + \psi'^2 > -1 + (a-1)\frac{a-2}{a-1} + \frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1}$$
$$= -1 + a - 2 + \frac{1}{a} + \frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1} > a - 3$$

and

$$\alpha_2^{(3)} = -1 - (a-1)\psi' + \psi'^2 < -1 + (a-1)\frac{a-1}{a} + \frac{a^2-2a+1}{a^2}$$
$$= -1 + a - 2 + \frac{1}{a} + 1 + \frac{-2a+1}{a^2} = a - 2 - \frac{a-1}{a^2} < a - 2.$$

因此，我们得到 $\boldsymbol{a}^{(3)} = (0, a-3)$。经简单验证可知

$$\alpha_1^{(4)} = \frac{\alpha_2^{(3)} - a_2^{(3)}}{\alpha_1^{(3)} - a_1^{(3)}} = \frac{-1 - (a-1)\psi' + \psi'^2 - a + 3}{-\psi'} = -a^2 + 3a - 1 - (a^2-3a+3)\psi' + (a-2)\psi'^2$$

并且，与之前一样， $\alpha_2^{(4)} = (-\psi')^{-1} = a + (a-1)\psi' - \psi'^2$. 因此，我们有

$$\boldsymbol{\alpha}^{(4)} = (-a^2 + 3a - 1 - (a^2-3a+3)\psi' + (a-2)\psi'^2, a + (a-1)\psi' - \psi'^2).$$

第五次迭代

首先，我们将证明 $\boldsymbol{a}^{(4)} = (0,1)$。元素 $\alpha_1^{(4)}$ 大于或等于零，因此我们只需证明 $\alpha_1^{(4)} < 1$。这里需要用到这样一个事实：$\frac{-a^4+a^3+2a+2}{a^4} < \psi'$：

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(4)} &= -a^2+3a-1-(a^2-3a+3)\psi'+(a-2)\psi'^2\\ &< -a^2+3a-1-(a^2-3a+3)\frac{-a^4+a^3+2a+2}{a^4}+(a-2)\left(\frac{-a^4+a^3+2a+2}{a^4}\right)^2\\ &= \frac{a^8-2a^6+8a^5-2a^4-4a^3-12a-8}{a^8} < 1.\end{aligned}$$

因此，$a_1^{(4)} = 0$，并且根据第二次迭代，我们知道 $a_2^{(4)} = 1$。现在，很容易验证

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(5)} = \frac{\alpha_2^{(4)}-a_2^{(4)}}{\alpha_1^{(4)}-a_1^{(4)}} &= \frac{a+(a-1)\psi'-\psi'^2-1}{-a^2+3a-1-(a^2-3a+3)\psi'+(a-2)\psi'^2}\\ &= \frac{1}{2a-7}(-2-3\psi'+\psi'^2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(5)} = \frac{1}{\alpha_1^{(4)}-a_1^{(4)}} &= \frac{1}{-a^2+3a-1-(a^2-3a+3)\psi'+(a-2)\psi'^2}\\ &= \frac{1}{2a-7}(-2-(2a-4)\psi'+\psi'^2).\end{aligned}$$

因此，我们得到 $\boldsymbol{\alpha}^{(5)} = \left(\frac{1}{2a-7}(-2-3\psi'+\psi'^2)\ \frac{1}{2a-7}(-2-(2a-4)\psi'+\psi'^2)\right)$。

第六次迭代

现在，我们将计算 $\boldsymbol{a}^{(5)}$。对于 $\alpha_1^{(5)}$，我们可以看到

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(5)} = \frac{1}{2a-7}(-2-3\psi'+\psi'^2) &< \frac{1}{2a-7}\left(-2+3\frac{a-1}{a}+\frac{a^2-2a+1}{a^2}\right)\\ &= \frac{1}{2a-7}\left(-2+3-\frac{3}{a}+1+\frac{-2a+1}{a^2}\right) = \frac{1}{2a-7}\frac{2a^2-5a+1}{a^2} < 1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha_1^{(5)} \geq 0$，我们得到 $a_1^{(5)} = 0$。对于 $\alpha_2^{(5)}$，有

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(5)} &= \frac{1}{2a-7}\left(-2-(2a-4)\psi'+\psi'^2\right)\\ &> \frac{1}{2a-7}\left(-2+(2a-4)\frac{a-2}{a-1}+\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1}\right)\\ &= \frac{1}{2a-7}\left(-2+2a-6+\frac{2}{a-1}+1+\frac{-2a+3}{a^2-2a+1}\right)\\ &= 1+\frac{1}{(2a-7)(a^2-2a+1)} > 1\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(5)} &= \frac{1}{2a-7}\left(-2-(2a-4)\psi'+\psi'^2\right)\\ &< \frac{1}{2a-7}\left(-2-(2a-4)\frac{a-1}{a}+\frac{a^2-2a+1}{a^2}\right)\\ &= \frac{1}{2a-7}\left(-2+2a-6+\frac{4}{a}+1+\frac{-2a+1}{a^2}\right)\\ &= 1+\frac{2a+1}{a^2(2a-7)} < 2.\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{a}^{(5)} = (0,1)$。现在很容易验证

$$\alpha_1^{(6)} = \frac{\alpha_2^{(5)}-a_2^{(5)}}{\alpha_1^{(5)}-a_1^{(5)}} = \frac{\frac{1}{2a-7}\left(-2-(2a-4)\psi'+\psi'^2\right)-1}{\frac{1}{2a-7}\left(-2-3\psi'+\psi'^2\right)} = a-1+(a-1)\psi'-\psi'^2$$

and

$$\alpha_2^{(6)} = \frac{1}{\alpha_1^{(5)} - a_1^{(5)}} = \frac{1}{\frac{1}{2a-7}\left(-2 - 3\psi' + \psi'^2\right)} = -a - (2a-1)\psi' + 2\psi'^2.$$

因此，我们得到 $\boldsymbol{\alpha}^{(6)} = (a - 1 + (a-1)\psi' - \psi'^2, -a - (2a-1)\psi' + 2\psi'^2)$。

第七次迭代

根据第二次迭代，我们知道 $a_2^{(1)} = 1 = \lfloor a + (a-1)\psi' - \psi'^2 \rfloor$。因此，显然有$a_1^{(6)} = \lfloor a - 1 + (a-1)\psi' - \psi'^2 \rfloor = 0$。于是，我们只需计算 $a_2^{(6)}$。对于 $a > 5$，有

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(6)} = -a - (2a-1)\psi' + 2\psi'^2 &> -a + (2a-1)\frac{a-2}{a-1} + 2\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1} \\ &= -a + 2a - 3 - \frac{1}{a-1} + 2 + \frac{-4a+6}{a^2-2a+1} = a - 1 + \frac{-5a+7}{a^2-2a+1} > a - 2.\end{aligned}$$

对于 $a = 5$，我们有 $f_5(x) = x^3 - 4x^2 - 5x - 1$ 以及 $\psi' < \frac{-31}{40}$。于是得到

$$\alpha_2^{(6)} = -5 - 9\psi' + 2\psi'^2 > -5 + 9\frac{31}{40} + 2\frac{31^2}{40^2} = \frac{2541}{800} > 3 = a - 2.$$

因此，对于所有 $a \geq 5$，都有 $\alpha_2^{(6)} > a - 2$。对于 $\alpha_2^{(6)}$，也有

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(6)} = -a - (2a-1)\psi' + 2\psi'^2 &< -a + (2a-1)\frac{a-1}{a} + 2\frac{a^2-2a+1}{a^2} \\ &= -a + 2a - 3 + \frac{1}{a} + 2 + \frac{-4a+2}{a^2} = a - 1 + \frac{-3a+2}{a^2} < a - 1.\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{a}^{(6)} = (0, a-2)$。此外，我们可以验证

$$\alpha_1^{(7)} = \frac{\alpha_2^{(6)} - a_2^{(6)}}{\alpha_1^{(6)} - a_1^{(6)}} = \frac{-a - (2a-1)\psi' + 2\psi'^2 - a + 2}{a - 1 + (a-1)\psi' - \psi'^2} = -3 - (a-1)\psi' + \psi'^2$$

and

$$\alpha_2^{(7)} = \frac{1}{\alpha_1^{(6)} - a_1^{(6)}} = \frac{1}{a - 1 + (a-1)\psi' - \psi'^2} = -1 - a\psi' + \psi'^2.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}^{(7)} = (-3 - (a-1)\psi' + \psi'^2, -1 - a\psi' + \psi'^2)$。

第八次迭代

在这一部分，我们将证明 $\boldsymbol{a}^{(7)} = (a-5, a-2)$。对于 $\alpha_1^{(7)}$，我们有

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(7)} = -3 - (a-1)\psi' + \psi'^2 &> -3 + (a-1)\frac{a-2}{a-1} + \frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1} \\ &= -3 + a - 2 + 1 + \frac{-2a+3}{a^2-2a+1} = a - 4 + \frac{-2a+3}{a^2-2a+1} > a - 5\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(7)} = -3 - (a-1)\psi' + \psi'^2 &< -3 + (a-1)\frac{a-1}{a} + \frac{a^2-2a+1}{a^2} \\ &= -3 + a - 2 + \frac{1}{a} + 1 + \frac{-2a+1}{a^2} = a - 4 + \frac{-a+1}{a^2} < a - 4.\end{aligned}$$

对于 $\alpha_2^{(7)}$，我们可以看到

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(7)} = -1 - a\psi' + \psi'^2 &> -1 + a\frac{a-2}{a-1} + \frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1} \\ &= -1 + a - 1 - \frac{1}{a-1} + 1 + \frac{-2a+3}{a^2-2a+1} = a - 1 + \frac{-3a+4}{a^2-2a+1} > a - 2\end{aligned}$$

and

$$\alpha_2^{(7)} = -1 - a\psi' + \psi'^2 < -1 + a\frac{a-1}{a} + \frac{a^2-2a+1}{a^2} = -1 + a - 1 + 1 + \frac{-2a+1}{a^2} < a - 1.$$

现在，很容易验证以下等式：

$$\alpha_1^{(8)} = \frac{\alpha_2^{(7)} - a_2^{(7)}}{\alpha_1^{(7)} - a_1^{(7)}} = \frac{-1 - a\psi' + \psi'^2 - a + 2}{-3 - (a-1)\psi' + \psi'^2 - a + 5} = \frac{1}{2a-7}(2a - 5 + 3\psi' - \psi'^2),$$

$$\alpha_2^{(8)} = \frac{1}{\alpha_1^{(7)} - a_1^{(7)}} = \frac{1}{-3 - (a-1)\psi' + \psi'^2 - a + 5} = \frac{1}{2a-7}(-4 - (2a-1)\psi' + 2\psi'^2).$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}^{(8)} = \left(\frac{1}{2a-7}(2a - 5 + 3\psi' - \psi'^2)\ \frac{1}{2a-7}(-4 - (2a-1)\psi' + 2\psi'^2)\right)$。

第九次迭代

首先，我们将按以下方式计算 $\boldsymbol{a}^{(8)}$：

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(8)} = \frac{1}{2a-7}(2a - 5 + 3\psi' - \psi'^2) &< \frac{1}{2a-7}\left(2a - 5 - 3\frac{a-2}{a-1} - \frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1}\right) \\ &= \frac{1}{2a-7}\left(2a - 5 - 3 + \frac{3}{a-1} - \frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1}\right) = 1 - \frac{2a^2-9a+8}{(2a-7)(a^2-2a+1)} < 1.\end{aligned}$$

由于 $\alpha_1^{(8)} \geq 0$，我们得到 $a_1^{(8)} = 0$。对于 $a_2^{(8)}$，我们看到

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(8)} = \frac{1}{2a-7}(-4 - (2a-1)\psi' + 2\psi'^2) &> \frac{1}{2a-7}\left(-4 + (2a-1)\frac{a-2}{a-1} + 2\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1}\right) \\ &= \frac{1}{2a-7}\left(-4 + 2a - 3 - \frac{1}{a-1} + 2 + \frac{-4a+6}{a^2-2a+1}\right) = 1 + \frac{1}{2a-7}\left(2 + \frac{-5a+7}{a^2-2a+1}\right) > 1\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(8)} = \frac{1}{2a-7}(-4 - (2a-1)\psi' + 2\psi'^2) &< \frac{1}{2a-7}\left(-4 + (2a-1)\frac{a-1}{a} + 2\frac{a^2-2a+1}{a^2}\right) \\ &= \frac{1}{2a-7}\left(-4 + 2a - 3 + \frac{1}{a} + 2 + \frac{-4a+2}{a^2}\right) = 1 + \frac{1}{2a-7}\left(2 + \frac{-3a+2}{a^2}\right) < 2.\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{a}^{(8)} = (0,1)$。现在，很容易求出 $\boldsymbol{\alpha}^{(9)}$ 的值：

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(9)} = \frac{\alpha_2^{(8)} - a_2^{(8)}}{\alpha_1^{(8)} - a_1^{(8)}} &= \frac{\frac{1}{2a-7}(-4 - (2a-1)\psi' + 2\psi'^2) - 1}{\frac{1}{2a-7}(2a - 5 + 3\psi'' - -\psi'^2)} \\ &= \frac{1}{a^2-5a+5}(-(a-2)^2 - (a^2-3a+3)\psi' + (a-2)\psi'^2)\end{aligned}$$

and

$$\alpha_2^{(9)} = \frac{1}{\alpha_1^{(8)} - a_1^{(8)}} = \frac{1}{\frac{1}{2a-7}(2a - 5 + 3\psi' - \psi'^2)} = \frac{1}{a^2-5a+5}(a^2 - 6a + 7 - (2a-4)\psi' + \psi'^2).$$

因此，我们得到

$$\boldsymbol{\alpha}^{(9)} = \left(\frac{1}{a^2-5a+5}(-(a-2)^2 - (a^2-3a+3)\psi' + (a-2)\psi'^2),\right.$$
$$\left.\frac{1}{a^2-5a+5}(a^2 - 6a + 7 - (2a-4)\psi' + \psi'^2)\right).$$

第十次迭代

这里，我们将证明 $\boldsymbol{a}^{(9)} = (0, 1)$，并从 $a_1^{(9)}$ 开始：

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(9)} &= \frac{1}{a^2-5a+5}(-(a-2)^2-(a^2-3a+3)\psi'+(a-2)\psi'^2)\\ &< \frac{1}{a^2-5a+5}\left(-(a-2)^2+(a^2-3a+3)\frac{a-1}{a}+(a-2)\frac{a^2-2a+1}{a^2}\right)\\ &= \frac{1}{a^2-5a+5}\left(-a^2+4a-4+a^2-4a+6-\frac{3}{a}+a-4+\frac{5a-2}{a^2}\right)\\ &= \frac{1}{a^2-5a+5}\left(a-2+\frac{2a-2}{a^2}\right) < 1.\end{aligned}$$

因此，$a_1^{(9)} = 0$ 由于 $\alpha_1^{(9)}$ 非负。对于 $a_2^{(9)}$，我们得到以下不等式：

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(9)} &= \frac{1}{a^2-5a+5}(a^2-6a+7-(2a-4)\psi'+\psi'^2)\\ &> \frac{1}{a^2-5a+5}\left(a^2-6a+7+(2a-4)\frac{a-2}{a-1}+\frac{a^2-4a+4}{a^2-2a+1}\right)\\ &= \frac{1}{a^2-5a+5}\left(a^2-6a+7+2a-4-2+\frac{2}{a-1}+1+\frac{-2a+3}{a^2-2a+1}\right)\\ &= 1+\frac{1}{a^2-5a+5}\left(a-3+\frac{1}{a^2-2a+1}\right) > 1\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(9)} &= \frac{1}{a^2-5a+5}(a^2-6a+7-(2a-4)\psi'+\psi'^2)\\ &< \frac{1}{a^2-5a+5}\left(a^2-6a+7+(2a-4)\frac{a-1}{a}+\frac{a^2-2a+1}{a^2}\right)\\ &= \frac{1}{a^2-5a+5}\left(a^2-6a+7+2a-6+\frac{4}{a}+1+\frac{-2a+1}{a^2}\right)\\ &= 1+\frac{1}{a^2-5a+5}\left(a-3+\frac{2a+1}{a^2}\right) < 2.\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{a}^{(9)} = (0, 1)$。

此外，我们可以看到

$$\alpha_1^{(10)} = \frac{\alpha_2^{(9)}-a_2^{(9)}}{\alpha_1^{(9)}-a_1^{(9)}} = \frac{\frac{1}{a^2-5a+5}(a^2-6a+7-(2a-4)\psi'+\psi'^2)-1}{\frac{1}{a^2-5a+5}(-(a-2)^2-(a^2-3a+3)\psi'+(a-2)\psi'^2)} = -\psi',$$

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(10)} &= \frac{1}{\alpha_1^{(9)}-a_1^{(9)}} = \frac{1}{\frac{1}{a^2-5a+5}(-(a-2)^2-(a^2-3a+3)\psi'+(a-2)\psi'^2)}\\ &= -2-(a-1)\psi'+\psi'^2.\end{aligned}$$

因此，第十次迭代为 $\boldsymbol{\alpha}^{(10)} = (-\psi', -2-(a-1)\psi'+\psi'^2)$。

第十一次迭代

根据第一次迭代，我们知道 $a_1^{(10)} = \lfloor -\psi' \rfloor = 0$。此外，第四次迭代给出$\lfloor -1-(a-1)\psi'+\psi'^2 \rfloor = a-3$。因此 $a_2^{(10)} = \lfloor -2-(a-1)\psi'+\psi'^2 \rfloor = a-4$。此外，显然可验证

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(11)} &= \frac{\alpha_2^{(10)}-a_2^{(10)}}{\alpha_1^{(10)}-a_1^{(10)}} = \frac{-2-(a-1)\psi'+\psi'^2-a+4}{-\psi'}\\ &= -a^2+3a-1-(a^2-3a+3)\psi'+(a-2)\psi'^2,\end{aligned}$$

$$\alpha_2^{(11)} = \frac{1}{\alpha_1^{(10)}-a_1^{(10)}} = \frac{1}{-\psi'} = a+(a-1)\psi'-\psi'^2.$$

因此，$\boldsymbol{\alpha}^{(11)} = (-a^2+3a-1-(a^2-3a+3)\psi'+(a-2)\psi'^2, a+(a-1)\psi'-\psi'^2) = \boldsymbol{\alpha}^{(4)}$。由此，我们证明了向量 $(-\psi', \psi'^2)$ 的 iJPA 展开是周期的，前周期长度为 4，周期长度为 7，并推导出了其形式。□

A7.1.3. 第三个根。最后，我们将证明，向量（$-\psi'', \psi''^2$）的 iJPA 展开的前周期长度为 3，周期长度为 3。

命题 A7.3. 设 $a \geq 5$。那么，向量$\left(-\psi'', \psi''^2\right)$ 的非齐次雅可比–佩龙展开是周期的。$\left(-\psi'', \psi''^2\right)$ 的 iJPA 展开的前周期为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\alpha}^{(0)} = \left(-\psi'', \psi''^2\right), && \boldsymbol{a}^{(0)} = (0,0),\\
&\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = \left(-\psi'', a+(a-1)\psi''-\psi''^2\right), && \boldsymbol{a}^{(1)} = (0, a-2),\\
&\boldsymbol{\alpha}^{(2)} = \left(a+1+(2a-1)\psi''-2\psi''^2, a+(a-1)\psi''-\psi''^2\right), && \boldsymbol{a}^{(2)} = (a-2, a-2),
\end{aligned}$$

周期为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha}^{(3)} &= \left(\tfrac{2a^2-9a+10+(a^2-2a-1)\psi''-(a-2)\psi''^2}{2a^2-12a+17}, \tfrac{2a^2-8a+8+(2a^2-7a+6)\psi''-(2a-5)\psi''^2}{2a^2-12a+17}\right),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(4)} &= \left(1-\psi'', a-2+a\psi''-\psi''^2\right),\\
\boldsymbol{\alpha}^{(5)} &= \left(a+(2a-1)\psi''-2\psi''^2, a+(a-1)\psi''-\psi''^2\right).
\end{aligned}$$

相应的整数部分向量为 $\boldsymbol{a}^{(3)} = (1,1)$、$\boldsymbol{a}^{(4)} = (1, a-4)$和 $\boldsymbol{a}^{(5)} = (a-3, a-2)$。

证明。我们对另一个根使用相同的技巧。对于第三个根，我们知道 $\frac{-1}{a-2} < \psi'' < \overline{-1a-1}$。

第一次迭代

与之前类似，$|\psi''| < 1$，由此得到 $\boldsymbol{a}^{(0)} = (0,0)$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^{(1)} = (-\psi'', a+(a-1)\psi''-\psi''^2)$。

第二次迭代

在这一部分，我们将证明 $\boldsymbol{a}^{(1)} = (0, a-2)$。根据前一次迭代，我们知道$a_1^{(1)} = \lfloor \alpha_1^{(1)} \rfloor = 0$。因此，只需验证 $a_2^{(1)} = \lfloor \alpha_2^{(1)} \rfloor = a-2$。我们有

$$\begin{aligned}
\alpha_2^{(1)} = a+(a-1)\psi''-\psi''^2 &> a-(a-1)\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a^2-4a+4}\\
&= a-1-\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a^2-4a+4} = a-1-\frac{a-1}{a^2-4a+4} > a-2
\end{aligned}$$

and

$$\alpha_2^{(1)} = a+(a-1)\psi''-\psi''^2 < a-(a-1)\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a^2-2a+1} = a-1-\frac{1}{a^2-2a+1} < a-1.$$

因此，我们得到

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{\alpha_2^{(1)}-a_2^{(1)}}{\alpha_1^{(1)}-a_1^{(1)}} = \frac{a+(a-1)\psi''-\psi''^2-a+2}{-\psi''} = a+1+(2a-1)\psi''-2\psi''^2$$

and

$$\alpha_2^{(2)} = \frac{1}{\alpha_1^{(1)}-a_1^{(1)}} = \frac{1}{-\psi''} = a+(a-1)\psi''-\psi''^2.$$

因此 $\boldsymbol{\alpha}^{(2)} = (a+1+(2a-1)\psi''+(-2)\psi''^2, a+(a-1)\psi''-\psi''^2)$。

第三次迭代

首先，我们将计算 $\boldsymbol{a}^{(2)} = (a-2, a-2)$。根据上一次迭代，我们知道 $a_2^{(2)} = a-2$。因此，只需计算 $a_1^{(2)}$。我们可以推导出

$$\begin{aligned}
\alpha_1^{(2)} = a+1+(2a-1)\psi''-2\psi''^2 &> a+1-(2a-1)\frac{1}{a-2}-2\frac{1}{a^2-4a+4}\\
&= a-1+\frac{-3a+4}{a^2-4a+4} > a-2
\end{aligned}$$

对于 $a \geq 6$。如果 $a = 5$，我们可以很容易地验证 $-\frac{4}{13} < \psi''$ 以及

$$6 + 9\psi'' - 2\psi''^2 > 6 - 9\frac{4}{13} - \left(\frac{4}{13}\right)^2 = \frac{514}{169} > 3 = a - 2.$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(2)} = a + 1 + (2a-1)\psi'' - 2\psi''^2 &< a + 1 - (2a-1)\frac{1}{a-1} - 2\frac{1}{a^2-2a+1} \\ &= a - 1 - \frac{a+1}{a^2-2a+1} < a - 1.\end{aligned}$$

现在，很容易验证

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(3)} &= \frac{\alpha_2^{(2)} - a_2^{(2)}}{\alpha_1^{(2)} - a_1^{(2)}} = \frac{a + (a-1)\psi'' - \psi''^2 - a + 2}{a + 1 + (2a-1)\psi'' - 2\psi''^2 - a + 2} \\ &= \frac{1}{2a^2 - 12a + 17}(2a^2 - 9a + 10 + (a^2 - 2a - 1)\psi'' - (a-2)\psi''^2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(3)} &= \frac{1}{\alpha_1^{(2)} - a_1^{(2)}} = \frac{1}{a + 1 + (2a-1)\psi'' - 2\psi''^2 - a + 2} \\ &= \frac{1}{2a^2 - 12a + 17}(2a^2 - 8a + 8 + (2a^2 - 7a + 6)\psi'' - (2a-5)\psi''^2)).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}^{(3)} = \Big(&\frac{1}{2a^2 - 12a + 17}(2a^2 - 9a + 10 + (a^2 - 2a - 1)\psi'' - (a-2)\psi'^2), \\ &\frac{1}{2a^2 - 12a + 17}(2a^2 - 8a + 8 + (2a^2 - 7a + 6)\psi'' - (2a-5)\psi''^2)\Big).\end{aligned}$$

第四次迭代

我们将证明 $\boldsymbol{a}^{(3)} = (1,1)$。对于 $\alpha_1^{(3)}$，我们可以得出

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(3)} &= \frac{1}{2a^2 - 12a + 17}(2a^2 - 9a + 10 + (a^2 - 2a - 1)\psi'' - (a-2)\psi''^2 \\ &> \frac{1}{2a^2 - 12a + 17}\left(2a^2 - 9a + 10 - (a^2 - 2a - 1)\frac{1}{a-2} - (a-2)\frac{1}{a^2-4a+4}\right) \\ &= \frac{1}{2a^2 - 12a + 17}\left(2a^2 - 9a + 10 - a + \frac{1}{a-2} - \frac{a-2}{a^2-4a+4}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2a^2 - 12a + 17}(2a - 7) > 1\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(3)} &= \frac{1}{2a^2 - 12a + 17}(2a^2 - 9a + 10 + (a^2 - 2a - 1)\psi'' - (a-2)\psi''^2) \\ &< \frac{1}{2a^2 - 12a + 17}\left(2a^2 - 9a + 10 - (a^2 - 2a - 1)\frac{1}{a-1} - (a-2)\frac{1}{a^2-2a+1}\right) \\ &= \frac{1}{2a^2 - 12a + 17}\left(2a^2 - 9a + 10 - a + 1 + \frac{2}{a-1} - \frac{a-2}{a^2-2a+1}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2a^2 - 12a + 17}\left(2a - 6 + \frac{a}{a^2-2a+1}\right) < 2.\end{aligned}$$

对于 $\alpha_2^{(3)}$，我们得到

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(3)} &= \frac{1}{2a^2-12a+17}(2a^2-8a+8+(2a^2-7a+6)\psi''-(2a-5)\psi''^2)\\ &> \frac{1}{2a^2-12a+17}\left(2a^2-8a+8-(2a^2-7a+6)\frac{1}{a-2}-(2a-5)\frac{1}{a^2-4a+4}\right)\\ &= \frac{1}{2a^2-12a+17}\left(2a^2-8a+8-2a+3-(2a-5)\frac{1}{a^2-4a+4}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2a^2-12a+17}\left(2a-6-(2a-5)\frac{1}{a^2-4a+4}\right)>1\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(3)} &= \frac{1}{2a^2-12a+17}(2a^2-8a+8+(2a^2-7a+6)\psi''-(2a-5)\psi''^2)\\ &< \frac{1}{2a^2-12a+17}\left(2a^2-8a+8-(2a^2-7a+6)\frac{1}{a-1}-(2a-5)\frac{1}{a^2-2a+1}\right)\\ &= \frac{1}{2a^2-12a+17}\left(2a^2-8a+8-2a+5-\frac{1}{a-1}-(2a-5)\frac{1}{a^2-2a+1}\right)\\ &= 1+\frac{1}{2a^2-12a+17}\left(2a-4-\frac{3a-6}{a^2-2a+1}\right)<2.\end{aligned}$$

因此，$\boldsymbol{a}^{(3)}=(1,1)$。现在，很容易验证

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(4)} &= \frac{\alpha_2^{(3)}-a_2^{(3)}}{\alpha_1^{(3)}-a_1^{(3)}} = \frac{\frac{1}{2a^2-12a+17}(2a^2-8a+8+(2a^2-7a+6)\psi''-(2a-5)\psi''^2)-1}{\frac{1}{2a^2-12a+17}(2a^2-9a+10+(a^2-2a-1)\psi''-(a-2)\psi''^2)-1}\\ &= 1-\psi''\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(4)} &= \frac{1}{\alpha_1^{(3)}-a_1^{(3)}} = \frac{1}{\frac{1}{2a^2-12a+17}(2a^2-9a+10+(a^2-2a-1)\psi''-(a-2)\psi''^2)-1}\\ &= a-2+a\psi''-\psi''^2.\end{aligned}$$

因此，第四次迭代为 $(1-\psi'', a-2+a\psi''-\psi''^2)$。

第五次迭代

在这一部分，我们将证明 $\boldsymbol{a}^{(4)}=(1,a-4)$。由第一次迭代可知，$\lfloor -\psi''\rfloor=0$。因此，显然 $a_1^{(4)}=\lfloor 1-\psi''\rfloor=1$。所以，只需证明 $a_2^{(4)}=a-4$。我们看到

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(4)} = a-2+a\psi''-\psi''^2 &> a-2-\frac{a}{a-2}-\frac{1}{a^2-4a+4}\\ &= a-2-1-\frac{2}{a-2}-\frac{1}{a^2-4a+4} = a-3-\frac{2a-3}{a^2-4a+4} > a-4\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(4)} = a-2+a\psi''-\psi''^2 &< a-2-\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a^2-2a+1}\\ &= a-2-1-\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a^2-2a+1} = a-3-\frac{a}{a^2-2a+1} < a-3.\end{aligned}$$

不难验证

$$\alpha_1^{(5)} = \frac{\alpha_2^{(4)}-a_2^{(4)}}{\alpha_1^{(4)}-a_1^{(4)}} = \frac{a-2+a\psi''-\psi''^2-a+4}{1-\psi''-1} = a+(2a-1)\psi''-2\psi''^2$$

and

$$\alpha_2^{(5)} = \frac{1}{\alpha_1^{(4)}-a_1^{(4)}} = \frac{1}{1-\psi''-1} = a+(a-1)\psi''-\psi''^2.$$

$\delta_{i,j}^{(k)}$	范数 $N(\delta_i^{(k)}, {}_j)$	不可分解整数 α	单位 ε
$\delta_{3,1}^{(0)}$	-1	1	$-\rho\rho'$
$\delta_{3,2}^{(0)}$	1	1	ρ
$\delta_{3,0}^{(2)}$	1	1	ρ^{-1}
$\delta_{3,1}^{(2)}$	-1	1	$-\rho'^{-1}$
$\delta_{3,2}^{(2)}$	1	1	ρ'^{-2}

TABLE 8. THE SIMPLEST CUBIC FIELDS: 三元组 $(1,-\rho',\rho'^2)$ 的 JPA展开的半收敛分数 $\delta_i^{(k)}, {}_j$（其中 $a=-1$）、其范数、相应的不可分解整数 α 以及满足 $\delta_i^{(k)}, {}_j = \alpha\varepsilon$ 的单位 ε。

Therefore, $\boldsymbol{\alpha}^{(5)} = (a+(2a-1)\psi''-2\psi''^2, a+(a-1)\psi''-\psi''^2)$.

第六次迭代

由第三次迭代可知，$\lfloor a+1+(2a-1)\psi'-2\psi'^2\rfloor = a-2$。因此，$a_1^{(5)} = \lfloor a+(2a-1)\psi''-2\psi''^2\rfloor = a-3$。此外，由第二次迭代还可知，$a_2^{(5)} = \lfloor a+(a-1)\psi''-\psi''^2\rfloor = a-2$。因此，$\boldsymbol{a}^{(5)} = (a-3, a-2)$。现在不难验证

$$\begin{aligned}\alpha_1^{(6)} &= \frac{\alpha_2^{(5)}-a_2^{(5)}}{\alpha_1^{(5)}-a_1^{(5)}} = \frac{a+(a-1)\psi''-\psi''^2-a+2}{a+(2a-1)\psi''-2\psi''^2-a+3}\\ &= \frac{1}{2a^2-12a+17}(2a^2-9a+10+(a^2-2a-1)\psi''-(a-2)\psi''^2)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\alpha_2^{(6)} &= \frac{1}{\alpha_1^{(5)}-a_1^{(5)}} = \frac{1}{a+(2a-1)\psi''-2\psi''^2-a+2}\\ &= \frac{1}{2a^2-12a+17}(2a^2-8a+8+(2a^2-7a+6)\psi''-(2a-5)\psi''^2).\end{aligned}$$

因此，我们已经证明

$$\boldsymbol{\alpha}^{(6)} = \Big(\frac{1}{2a^2-12a+17}(2a^2-9a+10+(a^2-2a-1)\psi''-(a-2)\psi''^2),\\ \frac{1}{2a^2-12a+17}(2a^2-8a+8+(2a^2-7a+6)\psi''-(2a-5)\psi''^2)\Big).$$

我们可以看到 $\boldsymbol{\alpha}^{(6)} = \boldsymbol{\alpha}^{(3)}$，这意味着向量 $(-\psi'', \psi''^2)$ 的 iJPA 展开是周期性的，周期长度为 3，前周期长度为 3。□

A8. INDECOMPOSABILITY OF (SEMI)CONVERGENTS

在本部分中，我们展示关于半收敛分数及其不可分解性的若干结果。

A8.1. 最简三次域。我们再次从最简三次域开始。在第 8 节中，我们没有详细描述 $-1\le a\le 3$ 的情形。特别是，我们省略了半收敛分数与 $\mathfrak{s}$-不可分解元的比较。在所有这些情形中，我们得到的都只有 $\mathfrak{s}$-不可分解元。然而，对于这些少数几个 a 值，JPA 展开有所不同。我们的结果列于表 8（对应 $a=-1$）、表 9（对应 $a=0$）以及表 10（对应 $1\le a\le 3$）。

A8.2. Ennola 三次域。设 $\rho''<\rho'<\rho$ 是多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的根，其中 $a\ge 3$。那么，$\mathbb{Z}[\rho]$ 中的 $\mathfrak{s}$-不可分解整数与以下形式的元素相伴

(1) $\kappa_w = 1+w\rho+\rho^2$ 其中 $1\le w\le a-1$，(2) $\lambda_{v,\ w} = -v-(a(v-1)\ +w)\rho+(a(v-1)\ +w+1)\rho^2$ 其中 $1\le v\le a-1$ 且 $\max\{1, v-1\}\le w\le a-1$，(3) $\mu_u = -1-u\rho+(u+2)\rho^2$ 其中 $0\le u\le a-2$。

$\delta_{i,j}^{(k)}$	范数 $N(\delta_i^{(k)},_j)$	不可分解整数 α	单位 ε
$\delta_{3,1}^{(0)}$	-3	$\theta'_{0,0}$	$-\rho^{-1}\rho'^{-1}$
$\delta_{2,0}^{(2)}$	3	$\theta'_{0,0}$	$\rho^{-2}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(2)}$	1	1	ρ^{-1}
$\delta_{2,0}^{(3)}$	-1	1	$-\rho^{-2}\rho'^{-1}$
$\delta_{3,0}^{(3)}$	-1	1	$-\rho^{-1}\rho'^{-1}$
$\delta_{3,1}^{(3)}$	1	1	$\rho^{-1}\rho'^{-2}$
$\delta_{2,0}^{(4)}$	3	$\theta'_{0,0}$	$\rho^{-3}\rho'^{-4}$
$\delta_{3,0}^{(4)}$	1	1	$\rho^{-2}\rho'^{-2}$

TABLE 9. THE SIMPLEST CUBIC FIELDS: 对于 $a=0$, $(1,-\rho',\rho'^2)$ 的 JPA 展开中的半收敛分数 $\delta_i^{(k)},_j$、它们的范数、对应的不可分解整数 α，以及满足 $\delta_i^{(k)},_j=\alpha\varepsilon$ 的单位 ε。

$\delta_{i,j}^{(k)}$	范数 $N(\delta_i^{(k)},_j)$	不可分解元 α	单位 ε
$\delta_{2,0}^{(1)}$	$-(2a+3)$	$\theta'_{0,0}$	$-\rho^{-1}\rho'^{-1}$
$\delta_{2,1}^{(1)}$	-1	1	$-\rho^{-1}\rho'$
$\delta_{3,j}^{(1)}$ $1\le j\le a$	$-j^3+aj^2+(a+3)j+1$	$\theta'_{a-j+1,0}$	$\rho^{-2}\rho'^{-2}$
$\delta_{2,0}^{(2)}$	$2a+3$	$\theta'_{0,0}$	$\rho^{-2}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(2)}$	1	1	ρ^{-1}
$\delta_{3,j}^{(2)}$ $1\le j\le a$	$-j^3+aj^2+(a+3)j+1$	$\theta'_{a-j+1,0}$	$\rho^{-3}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(3)}$	1	1	ρ^{-2}
$\delta_{3,0}^{(4)}$	-1	1	$-\rho^{-2}\rho'^{-1}$
$\delta_{2,j}^{(5)}$ $0\le j\le a-2$	$j^3-(2a-3)j^2$ $+(a^2-5a)j+2a^2-1$	$\theta'_{a-j-2,a-(a-j-2)}$	$\rho^{-4}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(5)}$	$2a+3$	$\theta'_{0,0}$	$\rho^{-3}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,1}^{(5)}$	1	1	ρ^{-3}
$\delta_{2,0}^{(6)}$	-1	1	$-\rho^{-4}\rho'^{-1}$
$\delta_{3,0}^{(6)}$	-1	1	$-\rho^{-3}\rho'^{-1}$
$\delta_{3,1}^{(6)}$	1	1	$\rho^{-3}\rho'^{-2}$
$\delta_{3,j}^{(6)}$ $2\le j\le a+1$	$-j^3+(a+3)j^2-aj-1$	$\theta'_{a-j+2,0}$	$\rho^{-5}\rho'^{-4}$

TABLE 10. THE SIMPLEST CUBIC FIELDS: 当 $1\le a\le 3$ 时，$(1,-\rho',\rho'^2)$ 的 JPA展开的半收敛分数 $\delta_i^{(k)},_j$、其范数及相应的不可分解整数α，以及满足 $\delta_i^{(k)},_j=\alpha\varepsilon$ 的单位 ε。

此外，在本部分中，我们将考虑多项式 $x^3-(a-1)x^2-ax-1$ 的根，其中 $a\ge 5$。回想一下，我们将这些根记为 $\psi'<\psi''<\psi$。那么（在乘以某些特定的单位并对下标进行移位之后），上面的 $\mathfrak{s}$-不可分解元可以改写为

(1) $\tilde{\kappa}_w=1-w+aw+(1-w+aw)\psi-w\psi^2$ 其中 $1\le w\le a-3$, (2) $\tilde{\lambda}_{v,u}=1+v-u+au+(a-u+au)\psi-(u+1)\psi^2$ 其中 $1\le v\le a-3$、$0\le u\le v$ 且 $(v,u)\neq(1,0)$, (3) $\tilde{\mu}_z=z+2+(z+4)\psi+\psi^2$ 其中 $0\le z\le a-4$。

回顾第8节，我们讨论了与这些根分别对应的向量的 JPA 展开的半收敛分数的不可分解性，并且只给出了其中两种情形的证明。现在，我们也将关注其余情形。

定理 A8.1。我们有

(1) 向量 $(1,-\rho',\rho'^2)$、$(1,-\psi',\psi'^2)$ 和 $(1,-\psi'',\psi''^2)$ 的 JPA 展开的所有半收敛分数，在其符号型中都是 $\mathfrak{s}$-不可分解的；(2) 向量 $(1,\rho,\rho^2)$、$(1,-\rho'',\rho''^2)$ 和 $(1,\psi,\psi^2)$ 的 JPA 展开中，存在某个半收敛分数在其符号型中是$\mathfrak{s}$-可分解的。

证明。关于 $(1,\rho,\rho^2)$ 和 $(1,-\rho'',\rho''^2)$ 的结果见第 8 节的表4和表5。$(1,-\rho',\rho'^2)$ 的半收敛分数见表11，$(1,\psi,\psi^2)$ 的见表12，$(1,-\psi',\psi'^2)$ 的见表13，$(1,-\psi'',\psi''^2)$ 的见表14。□

$\delta_{i,j}^{(k)}$	范数 $N(\delta_i^{(k)},_j)$	$\mathfrak{s}$-不可分解整数 α	单位 ε
$\delta_{3,1}^{(1)}$	$-2a+3$	$\lambda'_{a-1,a-1}$	$\rho'^{-2}(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{3,j}^{(1)}$ $2\le j\le a-1$	$j^3-aj^2-(a-1)j+1$	$\lambda'_{1,j-1}$	$(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{2,j}^{(2)}$ $0\le j\le a-3$	$-j^3+(2a-2)j^2-(a^2-3a+1)j$ $-a^2+a+1$	$\lambda'_{j+1,a-1}$	$(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{3,1}^{(2)}$	$2a-3$	$\lambda'_{a-1,a-1}$	$-\rho'^{-1}(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{3,j}^{(2)}$ $2\le j\le a-1$	$-j^3+aj^2+(a-1)j-1$	$\lambda'_{1,j-1}$	$-\rho'(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{3,0}^{(4)}$	$-2a+3$	$\lambda'_{a-1,a-1}$	$(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{3,j}^{(5)}$ $0\le j\le a-3$	$j^3-(2a-2)j^2+(a^2-3a+1)j$ $+a^2-a-1$	$\lambda'_{j+1,a-1}$	$-\rho'(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{3,0}^{(6)}$	-1	1	$-\rho'^3$
$\delta_{3,0}^{(7)}$	1	1	$\rho'^3(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{3,0}^{(8)}$	$2a-3$	$\lambda'_{a-1,a-1}$	$-\rho'(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{3,1}^{(8)}$	$-a^2+a+1$	$\lambda'_{1,a-1}$	$\rho'^2(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{3,j}^{(8)}$ $2\le j\le a-1$	$j^3-j^2-(a^2+a-4)j$ $+2a-3$	$\lambda'_{2,j-1}$	$\rho'^3(\rho'-1)^{-2}$
$\delta_{2,j}^{(9)}$ $0\le j\le a-4$	$-j^3+(2a-5)j^2-(a^2-7a+8)j$ $-2a^2+6a-3$	$\lambda'_{j+2,a-1}$	$\rho'^3(\rho'-1)^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(9)}$	-1	1	$-\rho'^4(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{3,1}^{(9)}$	$2a-3$	$\lambda'_{a-1,a-1}$	$-\rho'^2(\rho'-1)^{-2}$
$\delta_{3,j}^{(9)}$ $2\le j\le a-1$	$-j^3+aj^2+(a-1)j-1$	$\lambda'_{1,j-1}$	$-\rho'^4(\rho'-1)^{-2}$

TABLE 11. ENNOLA'S CUBIC FIELDS: JPA展开的 $(1,-\rho',\rho'^2)$ 的半收敛分数 $\delta_i^{(k)},_j$，其中 $-1<\rho'<0$ 是多项式 $x^3+(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根，其中$a\ge 3$，它们的范数、相应的 $\mathfrak{s}$-不可分解整数 α 以及单位 ε，满足 $\delta_i^{(k)},_j=\alpha\varepsilon$。

A9. EXPERIMENTS ON INDECOMPOSABILITY OF SEMICONVERGENTS

本节将进一步展示三次数域中半收敛分数的不可分解性结果。特别地，表 15 是第 6 节中表 9的续表。

$\delta_{i,j}^{(k)}$	范数 $N(\delta_i^{(k)}{}_{,\,j})$	$\mathfrak{s}$-不可分解整数 α	单位 ε
$\delta_{2,j}^{(0)}$ $1 \le j \le a-3$	$-j^3+(a-1)j^2+aj+1$	$\tilde{\kappa}_j$	ρ^{-1}
$\delta_{2,j}^{(0)}$ $a-2 \le j \le a-1$	$-j^3+(a-1)j^2+aj+1$	✗	
$\delta_{3,1}^{(0)}$	$2a-1$	$\tilde{\kappa}_1$	$(\rho-1)^{-1}$
$\delta_{3,j}^{(0)}$ $2 \le j \le a^2-1$	$-j^3+(a^2+1)j^2-(a^2-2a+2)j+1$	✗	
$\delta_{2,j}^{(1)}$ $0 \le j \le a-2$	$-j^3+(4a-1)j^2-(5a^2-3a)j$ $+2a^3-2a^2+1$	✗	
$\delta_{2,a-1}^{(1)}$	1	1	$\rho-1$
$\delta_{2,a}^{(1)}$	1	1	$\rho^{-1}(\rho-1)$
$\delta_{2,j}^{(1)}$ $a+1 \le j \le 2a-3$	$-j^3+(4a-1)j^2-(5a^2-3a)j$ $+2a^3-2a^2+1$	$\tilde{\kappa}_{j-a}$	$\rho^{-2}(\rho-1)^2$
$\delta_{2,j}^{(1)}$ $2a-2 \le j \le 2a-1$	$-j^3+(4a-1)j^2-(5a^2-3a)j$ $+2a^3-2a^2+1$	✗	
$\delta_{3,j}^{(1)}$ $1 \le j \le a^2+a-1$	$-j^3+(a^2+a)j^2+(2a+1)j+1$	✗	
$\delta_{2,j}^{(2)}$ $0 \le j \le a-1$	$-j^3+(4a+2)j^2-(5a^2+5a+1)j$ $+2a^3+3a^2+a+1$	✗	
$\delta_{2,a}^{(2)}$	1	1	$\rho^{-1}(\rho-1)^3$
$\delta_{2,a+1}^{(2)}$	1	1	$\rho^{-2}(\rho-1)^3$
$\delta_{2,j}^{(2)}$ $a+2 \le j \le 2a-2$	$-j^3+(4a+2)j^2-(5a^2+5a+1)j$ $+2a^3+3a^2+a+1$	$\tilde{\kappa}_{j-a-1}$	$\rho^{-3}(\rho-1)^4$
$\delta_{2,j}^{(2)}$ $2a-1 \le j \le 2a$	$-j^3+(4a+2)j^2-(5a^2+5a+1)j$ $+2a^3+3a^2+a+1$	✗	
$\delta_{3,0}^{(2)}$	1	1	$\rho^{-1}(\rho-1)^2$
$\delta_{3,j}^{(2)}$ $1 \le j \le a^2+a-1$	$-j^3+(a^2+a)j^2+(2a+1)j+1$	✗	

TABLE 12. ENNOLA'S CUBIC FIELDS: JPA展开的半收敛分数 $\delta_i^{(k)}{}_{,\,j}$ 其中 $a<\psi$ 是多项式 $x^3-(a-1)x^2-ax-1$ 的根， $a \ge 5$，它们的范数，对应的 $\mathfrak{s}$-不可分解整数 α 以及单位 ε ，满足$\delta_i^{(k)}{}_{,\,j}=\alpha\varepsilon$。

$\delta_{i,j}^{(k)}$	范数 $N(\delta_i^{(k)},\ j)$	$\mathfrak{s}$-不可分解整数 α	单位 ε
$\delta_{3,j}^{(3)}$ $1\le j\le a-4$	$-j^3+(2a-3)j^2-(a^2-3a+2)j+1$	$\tilde{\lambda}'_{j,j}$	$\rho'(\rho'-1)^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(4)}$	1	1	$\rho'(\rho'-1)^{-1}$
$\delta_{3,0}^{(5)}$	-1	1	$-\rho'(\rho'-1)^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(6)}$	$-2a+7$	$\tilde{\lambda}'_{a-3,a-3}$	$\rho'(\rho'-1)^{-2}$
$\delta_{3,j}^{(6)}$ $1\le j\le a-3$	$-j^3+j^2+(a^2-3a-2)j-2a+7$	$\tilde{\lambda}'_{j,1}$	$-\rho'^2(\rho'-1)^{-2}$
$\delta_{2,j}^{(7)}$ $0\le j\le a-6$	$j^3-(2a-9)j^2+(a^2-11a+26)j$ $+2a^2-14a+23$	$\tilde{\lambda}'_{j+2,\ j+2}$	$-\rho'^3\ (\rho'-1)^{-3}$
$\delta_{3,0}^{(7)}$	1	1	$\rho'^2\ (\rho'-1)^{-2}$
$\delta_{3,1}^{(7)}$	$-2a+7$	$\tilde{\lambda}'_{a-3,a-3}$	$\rho'^2\ (\rho'-1)^{-3}$
$\delta_{3,j}^{(7)}$ $2\le j\le a-3$	$j^3-\ (a-2)\ j^2-\ (a-3)\ j+1$	$\tilde{\lambda}'_{j,0}$	$\rho'^3\ (\rho'-1)^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(8)}$	-1	1	$-\rho'^3(\rho'-1)^{-2}$
$\delta_{3,0}^{(9)}$	$2a-7$	$\tilde{\lambda}'_{a-3,a-3}$	$-\rho'^3(\rho'-1)^{-3}$
$\delta_{3,j}^{(10)}$ $0\le j\le a-5$	$-j^3+(2a-6)j^2-(a^2-7a+11)j$ $-a^2+5a-5$	$\tilde{\lambda}'_{j+1,\ j+1}$	$\rho'^4(\rho'-1)^{-3}$

TABLE 13. ENNOLA'S CUBIC FIELDS: $\delta_i^{(k)}$ $(1,-\psi',\psi'^2)$ 的JPA展开的半收敛分数，$_j$，其中 $-1<\psi'<-\frac{1}{2}$ 是多项式 $x^3-(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根，其中 $a\ge 5$、它们的范数、相应的 $\mathfrak{s}$-不可分解整数 α 以及单位 ε，使得 $\delta_i^{(k)}{}_{,\ j}=\alpha\varepsilon$。

$\delta_{i,j}^{(k)}$	范数 $N(\delta_i^{(k)},\ j)$	$\mathfrak{s}$-不可分解整数 α	单位 ε
$\delta_{3,1}^{(1)}$	1	1	$\rho''(\rho''-1)^{-1}$
$\delta_{3,j}^{(1)}$ $2\le j\le a-3$	$j^3-aj^2+(a-1)j+1$	$\tilde{\lambda}''_{a-j-1,a-j-1}$	$(\rho''-1)^{-2}$
$\delta_{2,0}^{(2)}$	$-a^2+5a-5$	$\tilde{\lambda}''_{1,1}$	$(\rho''-1)^{-2}$
$\delta_{2,j}^{(2)}$ $1\le j\le a-3$	$-j^3+2j^2+(a^2-3a-3)j$ $-a^2+5a-5$	$\tilde{\lambda}''_{a-3,a-2-j}$	$-\rho''^{-1}(\rho''-1)^{-2}$
$\delta_{3,1}^{(2)}$	-1	1	$-\rho''(\rho''-1)^{-2}$
$\delta_{3,j}^{(2)}$ $2\le j\le a-3$	$-j^3+aj^2-(a-1)j-1$	$\tilde{\lambda}''_{a-j-1,a-j-1}$	$-(\rho''-1)^{-3}$
$\delta_{2,0}^{(3)}$	a^2-5a+5	$\tilde{\lambda}''_{1,1}$	$-(\rho''-1)^{-3}$
$\delta_{2,0}^{(4)}$	$2a-1$	$\tilde{\kappa}''_1$	$\rho''^{-2}(\rho''-1)^{-2}$
$\delta_{3,j}^{(4)}$ $0\le j\le a-5$	$j^3-(2a-7)j^2+(a^2-9a+18)j$ $+2a^2-12a+17$	$\tilde{\lambda}''_{a-3-j,0}$	$-\rho''^{-1}(\rho''-1)^{-2}$
$\delta_{2,j}^{(5)}$ $0\le j\le a-4$	$-j^3-j^2+(a^2-3a-2)j$ $+2a-7$	$\tilde{\lambda}''_{a-3,a-3-j}$	$-\rho''^{-2}(\rho''-1)^{-3}$
$\delta_{3,0}^{(5)}$	-1	1	$-\rho''^{-1}(\rho''-1)^{-2}$
$\delta_{3,1}^{(5)}$	-1	1	$-(\rho''-1)^{-3}$
$\delta_{3,j}^{(5)}$ $2\le j\le a-3$	$-j^3+aj^2-(a-1)j-1$	$\tilde{\lambda}''_{a-j-1,a-j-1}$	$-\rho''^{-1}(\rho''-1)^{-4}$

TABLE 14. ENNOLA'S CUBIC FIELDS: JPA展开的半收敛分数 $\delta_i^{(k)}$，$_j$，其中 $(1,-\psi'',\psi''^2)$ 中的 $-\frac{1}{2}<\psi''<0$ 是多项式 $x^3-(a-1)x^2-ax-1$ 的一个根，其中 $a\ge 5$ 是它们的范数，相应的 $\mathfrak{s}$-不可分解整数 α，以及满足 $\delta_i^{(k)}{}_{,\ j}=\alpha\varepsilon$ 的单位 ε。

Δ_K	多项式	ρ	ρ'	ρ''	前周期	周期	收敛分数	半收敛分数
2177	$x^3+8x^2+13x-1$	0.074	−2.393	−5.68	2	1	✗	✗
2233	x^3-x^2-8x+1	0.123	3.319	−2.443	5	3	✓	✗
	x^3-8x^2-x+1	0.301	8.108	−0.409	4	2	✗	✗
	x^3+8x^2-x-1	0.409	−0.301	−8.108	4	7	✓	✗
2804	x^3+x^2-9x+1	0.113	2.474	−3.587	3	3	✓	✓
2857	x^3+2x^2-9x+1	0.114	2.086	−4.2	3	3	✓	✓
	x^3-9x^2+2x+1	0.479	8.759	−0.238	11	2	✓	✓
	x^3+9x^2+2x-1	0.238	−0.479	−8.759	2	30	✗	✗
	$x^3+8x^2+11x-1$	0.085	−1.886	−6.2	2	1	✗	✗
2993	x^3-8x^2+9x+1	1.485	−0.102	6.617	9	12	✓	✓
	x^3+8x^2+9x-1	0.102	−1.485	−6.617	2	1	✗	✗
3137	x^3-3x^2-8x+1	0.12	−1.788	4.668	5	17	✗	✗
	x^3-8x^2-3x+1	0.214	−0.559	8.345	20	8	✗	✗
	x^3+8x^2-3x-1	0.559	−0.214	−8.345	2	10	✓	✗
3281	x^3+4x^2-9x+1	0.117	1.513	−5.63	3	11	✗	✗
3569	x^3-9x^2-2x+1	0.243	−0.448	9.205	7	5	✗	✗
	x^3+9x^2-2x-1	0.448	−0.243	−9.205	6	6	✗	✗
3604	x^3+5x^2-9x+1	1.306	0.119	−6.425	2	21	✓	✓
	x^3+5x^2-9x+1	0.119	1.306	−6.425	9	30	✗	✗
	x^3+9x^2+5x-1	0.156	−0.766	−8.39	2	13	✓	✓
3892	$x^3+9x^2+17x-1$	0.057	−2.799	−6.258	2	1	✗	✗
3969	x^3+6x^2-9x+1	1.138	0.121	−7.259	2	7	✓	✓
	x^3+6x^2-9x+1	0.121	1.138	−7.259	3	7	✓	✓
4065	$x^3+10x^2+23x-1$	0.043	−3.685	−6.357	2	1	✗	✗
5297	$x^3-11x+1$	0.091	3.27	−3.361	3	3	✓	✓
5369	$x^3-9x^2+10x+1$	1.411	−0.092	7.681	4	4	✗	✗
	$x^3+9x^2+10x-1$	0.092	−1.411	−7.681	2	1	✗	✗
5684	$x^3+3x^2-11x+1$	0.093	2.073	−5.167	3	3	✓	✓
	$x^3+9x^2+13x-1$	0.073	−1.907	−7.167	2	1	✗	✗
	x^3-11x^2+3x+1	0.482	−0.194	10.711	11	2	✓	✓
	x^3+11x^2+3x-1	0.194	−0.482	−10.711	2	30	✗	✗
5697	$x^3+9x^2+12x-1$	0.079	−1.73	−7.348	2	1	✗	✗
	x^3+12x^2-9x+1	0.136	0.578	−12.714	3	8	✗	✗
6185	$x^3+4x^2-11x+1$	0.094	1.801	−5.895	3	3	✓	✓
6241	$x^3+7x^2-10x+1$	1.122	0.108	−8.23	2	7	✓	✓
	$x^3+7x^2-10x+1$	0.108	1.122	−8.23	3	7	✓	✓

TABLE 15. 形式为 $(1,\rho,\rho^2)$ 的向量的 JPA 展开中（半）收敛分数的不可分解性，其中 ρ 满足 $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[\rho]$；$K$ 是判别式为 $2177\le\Delta_K\le 6241$ 且具有所有符号型的单位的全实数域示例