arXiv:2303.00488v1 [math.OC] 1 Mar 2023

含源项的非等温 Cahn–Hilliard 系统的最优温度分布

Pierluigi Colli[1]电子邮件：
pierluigi.colli@unipv.it
Gianni Gilardi (1)电子邮件：
gianni.gilardi@unipv.it
Andrea Signori[2]电子邮件：
andrea.signori@polimi.it
Jürgen Sprekels[3]电子邮件：
juergen.sprekels@wias-berlin.de

(1) “F. Casorati”数学系，帕维亚大学；并任意大利国家研究委员会 IMATI 研究员。地址：意大利帕维亚 Ferrata 路 5 号，邮编 I-27100

(2) 米兰理工大学数学系，意大利米兰 E. Bonardi 路 9 号，邮编 I-20133

(3) 德国柏林洪堡大学数学系，Unter den Linden 6，邮编 D-10099；以及魏尔施特拉斯应用分析与随机研究所，德国柏林 Mohrenstraße 39，邮编 D-10117

摘要

本文研究了一类 Cahn–Hilliard 型非等温相场系统的最优控制问题。该系统是经典 Caginalp 模型的扩展，用于描述具有守恒序参量的非等温相变。该系统将带源项的序参量 Cahn–Hilliard 型方程与内能普适平衡定律耦合起来。不同于标准的傅里叶形式，热流的本构关系采用 Green 和 Naghdi 理论所给出的形式，该理论考虑了演化过程中可能存在的热记忆。这导致内能平衡定律成为关于热位移或冻结指数的时间二阶方程，其中热位移或冻结指数是温度关于时间的一个原函数。我们系统的另一个特殊之处在于，序参量方程中存在源项，这带来了额外的数学困难，因为序参量的质量守恒——经典 Cahn–Hilliard 方程的典型性质——不再成立。本文分析了驱动相变演化的双阱势可微的情形：在正则情形下，该势函数在整个实数集上可微；在奇异对数情形下，则在某个有限开区间上可微；不包含双障碍势等不可微情形。

我们证明了在正则情形和对数情形下，控制到状态算子在适当巴拿赫空间之间的 Fr´echet 可微性，并建立了相应伴随系统的可解性，从而推导出该最优控制问题所对应的一阶必要最优性条件。整个分析得以进行的关键在于所谓的“严格分离性质”，即序参量的取值始终位于非线性项有效定义域内部的某个紧子集中。事实证明，在三维空间中，对于正则势，该分离性质通常成立；而对于对数情形，则只能在二维空间中得到证明。

关键词：最优控制、非等温 Cahn–Hilliard 方程、热记忆、带源项的 Cahn–Hilliard 方程、Cahn–Hilliard–Oono 方程。

AMS（MOS）学科分类：35K55，35K51，49J20，49K20，49J50。

1 引言

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$ 是某个具有光滑边界 $\Gamma := \partial\Omega$ 和外向单位法向量场 $\boldsymbol{n}$ 的开、有界且连通集合。记 $\partial_{\boldsymbol{n}}$ 为沿 $\boldsymbol{n}$ 方向的方向导数，并取固定的终止时间 $T > 0$,

$Q_t := \Omega \times (0, t)$ 以及 $\Sigma_t := \Gamma \times (0, t)$，其中 $t \in (0, T]$，同时还有 $Q := Q_T$ 和 $\Sigma := \Sigma_T$,

本文研究 以下初边值问题作为状态系统:

$$\partial_t \varphi - \Delta \mu + \gamma \varphi = f \qquad \text{in } Q, \tag{1.1}$$

$$\mu = -\Delta \varphi + F'(\varphi) + a - b\partial_t w \qquad \text{在 } Q \text{中}, \tag{1.2}$$

$$\partial_t^2 w - \Delta(\kappa_1 \partial_t w + \kappa_2 w) + \lambda \partial_t \varphi = u \qquad \text{in } Q, \tag{1.3}$$

$$\partial_{\boldsymbol{n}} \varphi = \partial_{\boldsymbol{n}} \mu = \partial_{\boldsymbol{n}}(\kappa_1 \partial_t w + \kappa_2 w) = 0 \qquad \text{on } \Sigma, \tag{1.4}$$

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad w(0) = w_0, \quad \partial_t w(0) = w_1 \qquad \text{in } \Omega. \tag{1.5}$$

所考虑的代价泛函为

$$\begin{aligned} \mathcal{J}((\varphi, w), u) := {} & \frac{\alpha_1}{2} \int_0^T \!\! \int_\Omega |\varphi - \varphi_Q|^2 + \frac{\alpha_2}{2} \int_\Omega |\varphi(T) - \varphi_\Omega|^2 \\ & + \frac{\alpha_3}{2} \int_0^T \!\! \int_\Omega |w - w_Q|^2 + \frac{\alpha_4}{2} \int_\Omega |w(T) - w_\Omega|^2 \\ & + \frac{\alpha_5}{2} \int_0^T \!\! \int_\Omega |\partial_t w - w'_Q|^2 + \frac{\alpha_6}{2} \int_\Omega |\partial_t w(T) - w'_\Omega|^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^T \!\! \int_\Omega |u|^2, \end{aligned} \tag{1.6}$$

其中 α_i、$1 \le i \le 6$ 为非负常数，且不全为零； φ_Ω、w_Ω、$w'_\Omega \in L^2(\Omega)$ 和 φ_Q、w_Q、$w'_Q \in L^2(Q)$ 表示给定的目标函数。

对于控制变量 u，我们选择的控制空间为

$$\mathcal{U} := L^\infty(Q), \tag{1.7}$$

相关的可容许控制集合定义为

$$\mathcal{U}_{\mathrm{ad}} := \big\{ u \in \mathcal{U} : u_{\min} \le u \le u_{\max} \quad \text{a.e. in } Q \big\}, \tag{1.8}$$

其中 $u_{\min}, u_{\max} \in L^\infty(Q)$ 在 Q 中几乎处处满足 $u_{\min} \le u_{\max}$。

总而言之，所研究的控制问题可改写如下：

(P) $\min_{u \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}}} \mathcal{J}((\varphi, w), u)$，满足约束条件：$(\varphi, \mu, w)$ 是 (1.1)–(1.5) 的解。

状态系统(1.1)–(1.5)是对 Caginalp 在 [4] 中提出的非等温 Cahn–Hilliard 系统的形式扩展，用于模拟二元混合物中的非等温相分离现象（另见 [3, 5] 以及 [2, Ex. 4.4.2, (4.44), (4.46)] 中的推导）；它对应于近期在 [13] 中分析的 Allen–Cahn 对应模型。状态系统中的未知量具有以下物理意义： φ 是二元混合物中纯相体积分数之差的归一化值（相变的无量纲序参量，其取值应属于区间 $[-1, 1]$）， μ 是相应的化学势，而 w 是所谓的热位移（或冻结指数），它与温度 ϑ 直接相关（在 Caginalp 模型中，温度实际上是温差），其关系如下

$$w(\cdot, t) = w_0 + \int_0^t \vartheta(\cdot, s)\, ds, \quad t \in [0, T]. \tag{1.9}$$

此外，(1.3) 中的 κ_1 和 κ_2 表示与热流相关的给定正系数，此处假设热流具有 Green–Naghdi 形式（见 [19–21, 26]）

$$\mathbf{q} = -\kappa_1 \nabla(\partial_t w) - \kappa_2 \nabla w \quad \text{where } \kappa_i > 0,\ i = 1, 2, \tag{1.10}$$

这考虑了该现象可能具有的既往热历史。此外， γ是一个与源项质量吸收/产生强度相关的正物理常数，其中 (1.1) 中的源项为 $S := f - \gamma\varphi$。这一项反映了系统可能并非孤立系统，因而可能发生质量损失或产生；例如，在细胞生物学 [15] 以及肿瘤生长模型 [17]中出现的许多液-液相分离问题便是如此。请注意，源项的存在意味着序参量的质量守恒性质不再成立；事实上，由 (1.1) 可直接得出，质量平衡的形式为

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varphi(t)\Big) = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega S(t), \quad \text{for a.e. } t \in (0, T), \tag{1.11}$$

其中， $|\Omega|$ 表示Ω的体积。关于这一点，我们想引用论文 [8]，该文从最优控制的角度研究了一个不具有质量守恒的类似Cahn–Hilliard系统。此外，我们还参考 [6, 7, 12, 23, 25, 27, 31],，其中分析了类似的系统。对于涉及稀疏效应的最优控制问题，我们提及 [14, 16, 28, 30]。另外顺便指出，方程（1.3）关于 w的微分结构有时也被称为强阻尼波动方程，参见例如 [24] 及其中的参考文献。

除已经介绍的量外， λ 表示相变的潜热， a、 b 为物理常数，而控制变量 u 是一个分布式热源/热汇。此外， φ_0、 w_0和 w_1 表示某些给定的初始值。最后，假设函数 F 具有双井形。双井型非线性 F 的典型选择包括正则势和奇异对数势，以及其常见的（非奇异）多项式近似，即正则势。依次定义如下：

$$F_{log}(r) := \begin{cases} (1+r)\ln(1+r) + (1-r)\ln(1-r) - c_1 r^2 & \text{if } |r| \le 1, \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1.12}$$

$$F_{reg}(r) := \frac{1}{4}(r^2-1)^2, \quad r \in \mathbb{R}, \tag{1.13}$$

约定 $0 \ln(0) := \lim_{r \searrow 0} r \ln(r) = 0$ 且 $c_1 > 1$，因此 F_{log} 是非凸的。另一个重要例子是非正则且奇异的双障碍势，定义为

$$F_{2obs}(r) := -c_2 r^2 \quad \text{if } |r| \le 1 \quad \text{and} \quad F_{2obs}(r) := +\infty \quad \text{if } |r| > 1, \tag{1.14}$$

其中 $c_2 > 0$。不过，后续分析并未涵盖双障碍情形，尽管我们预期，采用与 [10], 中类似的技术，也可以将分析推广到这类非正则势函数。

近期， [11] 对状态系统(1.1)–(1.5)的适定性和正则性进行了分析（见第 2 节下文引用的结果），其中也包括双障碍情形。本文将重点放在最优控制问题上。虽然证明最优控制的存在性并不太困难，但推导一阶必要最优性条件要困难得多，因为这需要推导相应控制到状态算子的可微性。然而，这要求序参量 φ 满足所谓的严格分离性质，即 φ 的取值落在导数 F' 的有效定义域 F 的内部某个紧子集中。对于正则势，这一条件通常能够满足；但对于奇异势，则无法保证。事实上，沿用近期关于等温情形的论文 [9] 中的思路，只能在二维情形 $d = 2$ 下确保对数势 $F_{\log}$ 满足严格分离性质。因此，推导一阶必要最优性条件的分析将仅限于 $d \le 3$ 的正则情形，或二维空间中的对数势情形。从这个意义上说，我们的结果适用于与等温情形 [9] 中所研究情形类似的问题。不过请注意， [9] 中考虑的控制问题与本文研究的问题有很大差异：事实上，在 [9] 中，控制 u 出现在类似于(1.1)的序参量方程中，而在本文中，它出现在能量平衡(1.3)中；因此， $\mathcal{U}_{\rm ad}$ 中的可容许控制集合不得不在 [9] 中假设为空间 $H^1(0,T; L^2(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ 的子集，这从最优控制的角度来看相当繁琐，而本文采用的空间 $L^\infty(Q)$ 则好得多。

本文的安排如下。下一节将汇集有关状态系统(1.1)–(1.5)适定性的已有结果。随后，在适当条件下，我们将给出一些更强的解析结果，讨论状态系统关于出现在(1.3)中的控制变量 u 的正则性和稳定性性质。

这些新结果的证明将在第3节中给出。随后，我们利用这些结果，在第4节中分析最优控制问题(P)。

2 符号、假设与解析结果

首先，我们引入一些符号和一般假设。对于任意巴拿赫空间 X，我们采用记号 $\|\cdot\|_X$、X^* 和 $\langle\cdot,\cdot\rangle_X$，分别表示相应的范数、其对偶空间，以及 X^* 与 X 之间相关的对偶配对。对于连续嵌入某个拓扑向量空间 Z 的两个巴拿赫空间 X 和 Y，我们引入线性空间 $X\cap Y$；赋予其自然范数 $\|v\|_{X\cap Y} := \|v\|_X + \|v\|_Y$（$v\in X\cap Y$）后，它成为一个巴拿赫空间。

对于定义在 Ω 上的标准勒贝格空间和索博列夫空间，我们采用特殊记号。对于每个 $1\le p\le\infty$ 和 $k\ge 0$，分别记为 $L^p(\Omega)$ 和 $W^{k,p}(\Omega)$，相应的范数分别记为 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} = \|\cdot\|_p$ 和 $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$。若 $p=2$，它们便成为希尔伯特空间，我们采用标准约定 $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$。为方便起见，我们还设

$$H := L^2(\Omega),\quad V := H^1(\Omega),\quad W := \{v\in H^2(\Omega):\ \partial_{\boldsymbol{n}} v = 0 \text{ on } \Gamma\}.$$

为简便起见，我们用符号 $\|\cdot\|$ 表示 H 及其任意次幂空间中的范数。注意，嵌入 $W\hookrightarrow V\hookrightarrow H\hookrightarrow V^*\hookrightarrow W^*$ 是稠密且紧的。按照惯例，将 H 视为 V^* 的子空间，从而得到希尔伯特三元组 (V,H,V^*)，并配以恒等

$$\langle u,v\rangle = (u,v)\quad \text{for every } u\in H \text{ and } v\in V,$$

映射，其中我们采用特殊记号 $\langle\cdot,\cdot\rangle := \langle\cdot,\cdot\rangle_V$。

Nex对于一般元素 $v\in V^*$，我们定义其广义平均值 $\overline{v}$ b y

$$\overline{v} := \frac{1}{|\Omega|}\,\langle v,\mathbf{1}\rangle, \tag{2.1}$$

其中，$\mathbf{1}$ 表示在 Ω 中取值恒为 1 的常值函数。显然，当 $v\in H$时，$\overline{v}$退化为通常的平均值。若 v 是时变函数，也采用相同记号 $\overline{v}$。

最后，对于赋范空间 X和 $v\in L^1(0,T;X)$，我们定义卷积乘积

$$(\mathbf{1}*v)(t) := \int_0^t v(s)\,\mathrm{d}s,\quad (\mathbf{1}\circledast v)(t) := \int_t^T v(s)\,\mathrm{d}s,\qquad t\in[0,T]. \tag{2.2}$$

本文余下部分中，我们作出以下一般性假设。

(A1) 结构常数 γ、a、b、κ_1、κ_2 和 λ 均为正数。

(A2) 双阱势 F 可写为 $F=\beta+\widehat{\pi}$，其中

$\beta:\ \mathbb{R}\to[0,+\infty]$ 是凸且下半连续的，并且 $\beta(0) = 0$.

这意味着 $\beta := \partial\beta$ 是一个满足 $\beta(0) \ni 0$的极大单调图。此外，我们假设

$$\widehat{\pi} \in C^3(\mathbb{R}), \text{ where } \pi := \widehat{\pi}' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ is a Lipschitz continuous function.}$$

此外，将 β 的有效定义域记为 $D(\beta)$，我们假设 $D(\beta) = (r_-, r_+)$，其中 $-\infty \le r_- < 0 < r_+ \le +\infty$，并且 β在(r_-, r_+)上的限制属于 $C^3(r_-, r_+)$。此时，β 退化为 $\widehat{\beta}$的导数，并且我们要求

$$\lim_{r \searrow r_-} \beta(r) = -\infty \ \text{ and } \lim_{r \nearrow r_+} \beta(r) = +\infty.$$

请注意，(1.2)中的 F' 应理解为 $\beta + \pi$。

(A3) 令 $f \in L^\infty(Q)$。设 $\rho := \frac{\|f\|_\infty}{\gamma}$，并假设满足相容性条件，即所有下列量

$$\inf_{x\in\Omega} \varphi_0(x), \ \sup_{x\in\Omega} \varphi_0(x), \ -\rho - (\overline{\varphi_0})^-, \ \rho + (\overline{\varphi_0})^+ \quad \text{belong to the interior of } D(\beta),$$

其中，$(\cdot)^+$ 和$(\cdot)^-$ 分别表示正部函数和负部函数。

上述系统(1.1)–(1.5)的分析一直是 [11]中研究的主题。该文针对一般势函数和源项讨论了弱适定性和强适定性。由于我们此处旨在求解最优控制问题(P)，因此必须在强解框架下开展研究。特别是，这使我们不得不将研究限制在可微势函数上；更确切地说，要么是(1.13)所示的正则势函数，要么是在进一步限制 $d = 2$的条件下，采用(1.12)中的对数势。由于无论如何我们都将假设(A1)–(A3)，因此下面的结果均在这些假设下陈述，即使部分条件可以放宽（参见 [11]）。

根据 [11, 定理 2.2、2.3 和 2.5], ，我们得到初边值问题 (1.1)–(1.5) 的如下适定性结果。

定理 2.1（状态系统的适定性）。假设 (A1)–(A3) 成立，且系统的数据满足

$$f \in H^1(0,T;V^*), \quad u \in L^2(0,T;H), \tag{2.3}$$
$$\varphi_0 \in H^3(\Omega) \cap W, \quad w_0 \in V, \quad w_1 \in V. \tag{2.4}$$

那么，系统 (1.1)–(1.5) 存在唯一解 (φ, μ, w)，并满足

$$\varphi \in H^1(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;W^{2,6}(\Omega)) \quad \textit{with} \quad \beta(\varphi) \in L^\infty(0,T;L^6(\Omega)), \tag{2.5}$$
$$\mu \in L^\infty(0,T;V), \tag{2.6}$$
$$w \in H^2(0,T;H) \cap C^1([0,T];V), \tag{2.7}$$

以及估计

$$\begin{aligned} &\|\varphi\|_{H^1(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;W^{2,6}(\Omega))} + \|\mu\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|\beta(\varphi)\|_{L^\infty(0,T;L^6(\Omega))} \\ &\quad + \|w\|_{H^2(0,T;H)\cap C^1([0,T];V)} \le K_1 \,, \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中某个常数 $K_1 > 0$ 仅依赖于系统的结构、Ω、 T，以及数据范数和与假设 (2.3)–(2.4) 相关量的上界。此外，令 $u_i \in L^2(0,T;\, H)$，$i = 1, 2$，并令 (φ_i, μ_i, w_i) 为相应解。则有

$$\begin{aligned} &\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty(0,T;V^*)\cap L^2(0,T;V)} + \|w_1 - w_2\|_{H^1(0,T;H)\cap L^\infty(0,T;V)} \\ &\quad \le K_2 \|\mathbf{1} * (u_1 - u_2)\|_{L^2(0,T;H)}\,, \end{aligned} \tag{2.9}$$

其中某个 $K_2 > 0$ 仅取决于系统的结构、Ω、 T，以及 $\beta(\varphi_1)$ 和 $\beta(\varphi_2)$ 在 $L^1(Q)$ 中范数的上界。

我们指出，由于 (2.5)、紧嵌入 $W^{2,\,6}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$ 以及经典紧性结果（参见例如 [29, 第 8 节，推论 4]），可得 $\varphi \in C^0(\overline{Q})$。

注 2.2. 上述适定性结果针对的是方程 (1.1) 的齐次诺伊曼问题的自然变分形式，这是由于 (2.6) 中指定的 μ 正则性较低。不过，显然，借助 (2.5)、(A3) 和椭圆正则性理论，我们还有 $\mu \in L^2(0,T;\, W)$，因此实际上可以将 (1.1) 写成强形式。对于 (1.3) 中的线性组合 $\kappa_1 \partial_t w + \kappa_2 w$，也可以作类似考虑，详见下文的注释。

注记 2.3. 我们指出，(2.7) 中给出的变量 w 的正则性 $C^1([0,T];\, V)$ 并不能直接由 [11, 定理 2.2 、 2.3 、 2.5], 得出，因为其中只提到了正则性 $W^{1,\infty}(0,T;\, V)$。然而，利用 (1.3) 可以推出这一点，将 (1.3) 改写为抛物型方程

$$\frac{1}{\kappa_1}\partial_t y - \Delta y = f_w, \quad \text{with } y := \kappa_1 \partial_t w + \kappa_2 w \text{ and } f_w := u - \lambda \partial_t \varphi + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\partial_t w, \tag{2.10}$$

其中，根据前面的结果，很容易得出 $f_w \in L^2(0,T;\, H)$。注意， y 满足 (2.10)，并满足 (1.4) 中的齐次诺伊曼边界条件，且初始条件（参见 (1.5) ）为

$$y(0) = (\kappa_1 \partial_t w + \kappa_2 w)(0) = \kappa_1 w_1 + \kappa_2 w_0 \in V.$$

然后，通过直接应用抛物型方程正则性理论（例如参见 [1,22]），可得

$$y = \kappa_1 \partial_t w + \kappa_2 w \in H^1(0,T;H) \cap C^0([0,T];V) \cap L^2(0,T;W).$$

此时，不难验证 $w \in C^1([0,T];\, V)$，但除非 $w(0) = w_0 \in W$，否则我们无法推出正则性 $w \in H^1(0,T;\, W)$。

正如即将到来的第 4 节将会说明的那样，定理 2.1 中所概括的解析框架不足以严格证明与系统(1.1)–(1.5)相关的解算子的 Fr´echet 可微性（参见后文的定理 4.4）；而这正是阐述第 4.3 节所讨论的最优性一阶必要条件的关键。为此，在着手研究最优控制问题 (P) 之前，我们先给出一些经过改进的解析结果；得益于我们对势函数所采用的更

严格的限制条件，这些结果如今得以建立。具体而言，为了在最优控制问题的分析中纳入奇异势和正则势，一项关键的正则性性质是序参量 φ 所满足的所谓严格分离性质。这意味着 φ 的取值始终被限制在 $D(\beta)$ 内部的某个紧子集中。注意，若 $D(\beta) = \mathbb{R}$，那么由前述定理得到的 φ 的有界性已经保证了这一性质。对于奇异势，当 $D(\beta)$ 是一个开区间时，这意味着势函数在 $D(\beta)$ 端点处的奇点在任何时刻都不会被 φ 触及；也就是说，势函数及其导数实际上都是全局 Lipschitz 连续函数。下述结果的证明概要见第 3 节，其推导仅需对 [9, 命题 2.6] 中的论证作少许修改。该结果保证了解具有更高的正则性，并在二维情形下的重要对数势 (1.12) 中确立了所需的分离性质。

定理 2.4（正则性与分离原理）。假设 (A1)–(A3) 成立，令$d = 2$，且 F 为 (1.12) 中定义的对数势。此外，除 (2.3)–(2.4) 外，令 f 及辅助数据 μ_0 满足

$$f \in H^1(0,T;H), \quad \mu_0 := -\Delta\varphi_0 + F'(\varphi_0) + a - bw_1 \in W. \tag{2.11}$$

那么，由定理 2.1 得到的唯一解 (φ, μ, w) 还具有如下正则性性质

$$\partial_t\varphi \in L^\infty(0,T;H) \cap L^2(0,T;W), \quad \mu \in L^\infty(Q), \quad \beta(\varphi) \in L^\infty(Q), \tag{2.12}$$

以及

$$\|\partial_t\varphi\|_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;W)} + \|\mu\|_{L^\infty(Q)} + \|\beta(\varphi)\|_{L^\infty(Q)} \le K_4,$$

其中 $K_4 > 0$ 仅取决于系统的结构、初始数据、Ω 和 T。此外，假设

$$r_- < \min_{x\in\overline{\Omega}} \varphi_0(x) \le \max_{x\in\overline{\Omega}} \varphi_0(x) < r_+.$$

那么，序参量 φ 具有严格分离性质，即存在实数 r_* 和 r^*，它们仅取决于系统的结构，并且满足

$$r_- < r_* \le \varphi(x,t) \le r^* < r_+ \quad \text{for a.e. } (x,t) \in Q.$$

注 2.5。我们指出，(2.12) 中 μ 的正则性是正则性 $\mu \in L^\infty(0,T;W)$ 以及 Sobole夫嵌入 $W \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ 的结果；该嵌入在三维情形下仍成立。另请注意，可能可以考虑一类比 (1.12) 中的对数势稍广的势函数：为此，我们请读者参阅 [18, 定理 5.1], ，其中在适当的框架下推导出了严格分离性质。

As 由上述结果可直接得到以下结论 .

推论 2.6. 假设 $D(\beta) = \mathbb{R}$，或者定理 2.4 的假设成立。那么，存在一个正常数 K_5，它仅取决于系统的结构以及系统数据的范数上界，使得

$$\|\varphi\|_{L^\infty(Q)} + \max_{i=0,1,2,3} \|F^{(i)}(\varphi)\|_{L^\infty(Q)} \le K_5. \tag{2.13}$$

有了上述正则性改进，我们现在可以得到关于控制的更强连续依赖估计。

定理 2.7（精细连续依赖结果）。假设 (A1)–(A3) 成立。此外，假设势函数 F 的一阶和二阶导数是 Lipschitz 连续的。考虑 $u_i \in L^2(0,T;H)$、$i=1$、2，并令 (φ_i,μ_i,w_i)、$i=1$、2 为相应解。则有

$$\begin{aligned}&\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H^1(0,T;V^*)\cap L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;W)}+\|\mu_1-\mu_2\|_{L^2(0,T;V)}\\&\quad+\|w_1-w_2\|_{H^2(0,T;V^*)\cap W^{1,\infty}(0,T;V)\cap H^1(0,T;W)}\le K_6\|u_1-u_2\|_{L^2(0,T;H)},\end{aligned}\tag{2.14}$$

其中某个 $K_6>0$ 仅依赖于系统的结构、Ω 和 T。

注意，上述结果对于二维和三维中的正则势均成立，因为根据定理 2.1，对于这两种情形，F' 的 Lipschitz 连续性均可作为推论得到。另一方面，根据定理 2.4 所确立的分离原理，对数势只能在二维情形下考虑。值得指出的是，定理 2.4 中获得的正则性改进并不要求控制变量 u 具有更高的正则性。特别地，对于任意控制 $u\in L^2(0,T;H)$，系统均具有强适定性（其中控制空间 $\mathcal{U}$ 嵌入其中，见 (1.7)）。

最后，我们通过汇总一些后文将用到的有用工具来结束本节。我们经常会用到 Young 不等式、Poincar´e 不等式和紧性不等式：

$$ab\le\delta a^2+\frac{1}{4\delta}\,b^2\quad\text{for every } a,b\in\mathbb{R} \text{ and } \delta>0,\tag{2.15}$$

$$\|v\|_V\le C_\Omega\left(\|\nabla v\|+|\overline{v}|\right)\quad\text{for every } v\in V,\tag{2.16}$$

$$\|v\|\le\delta\,\|\nabla v\|+C_{\Omega,\delta}\,\|v\|_*\quad\text{for every } v\in V \text{ and } \delta>0,\tag{2.17}$$

其中，C_Ω 仅依赖于 Ω，$C_{\Omega,\,\delta}$ 依赖于 δ，此外，$\|\cdot\|_*$ 是 V^*中的范数，将在下文中引入（见 (2.20)）。

接下来，我们回顾一个在研究与 Cahn–Hilliard 方程相关的问题时常用的重要工具。考虑带齐次诺伊曼边界条件的泊松方程 $-\Delta z=\psi$ 的弱形式。具体而言，对于给定的 $\psi\in V^*$（不一定属于 H），我们考虑如下问题：

$$\text{find}\quad z\in V\quad\text{such that}\quad\int_\Omega\nabla z\cdot\nabla v=\langle\psi,v\rangle\quad\text{for every } v\in V.\tag{2.18}$$

由于 Ω 连通且正则，众所周知，上述问题有唯一解 z 当且仅当 ψ 具有零均值。因此，我们可以引入相应的解算子 $\mathcal{N}$，事实证明，该算子是以下空间之间的一个同构，如下所示：

$$\mathcal{N}:\mathrm{dom}(\mathcal{N}):=\{\psi\in V^*:\ \overline{\psi}=0\}\to\{z\in V:\ \overline{z}=0\},\quad\mathcal{N}:\psi\mapsto z,\tag{2.19}$$

其中，z 是满足 $\overline{z}=0$ 的方程 (2.18) 的唯一解。此外，由此可得公式

$$\|\psi\|_*^2:=\|\nabla\mathcal{N}(\psi-\overline{\psi})\|^2+|\overline{\psi}|^2\quad\text{for every } \psi\in V^*\tag{2.20}$$

在 V^* 中定义了一个希尔伯特范数，该范数等价于 V^* 的标准对偶范数。根据上述性质，可以得到以下恒等式：

$$\int_\Omega \nabla \mathcal{N}\psi \cdot \nabla v = \langle \psi, v \rangle \quad \text{for every } \psi \in \mathrm{dom}(\mathcal{N}),\, v \in V, \tag{2.21}$$

$$\langle \psi, \mathcal{N}\zeta \rangle = \langle \zeta, \mathcal{N}\psi \rangle \quad \text{for every } \psi, \zeta \in \mathrm{dom}(\mathcal{N}), \tag{2.22}$$

$$\langle \psi, \mathcal{N}\psi \rangle = \int_\Omega |\nabla \mathcal{N}\psi|^2 = \|\psi\|_*^2 \quad \text{for every } \psi \in \mathrm{dom}(\mathcal{N}), \tag{2.23}$$

以及

$$\int_0^t \langle \partial_t v(s), \mathcal{N}v(s) \rangle \, ds = \int_0^t \langle v(s), \mathcal{N}(\partial_t v(s)) \rangle \, ds = \frac{1}{2} \|v(t)\|_*^2 - \frac{1}{2} \|v(0)\|_*^2 , \tag{2.24}$$

这对每个 $t \in [0,T]$ 和每个 $v \in H^1(0,T; \mathrm{dom}(\mathcal{N}))$ 都成立。

最后，以下约定将在后文中使用，且不再另行说明：大写符号 C 表示仅依赖于问题结构数据的任意常数，例如 Ω、T、a、b、κ_1、κ_2、γ、λ、非线性项的形式以及所涉及函数的范数。因此，该符号的含义可能随行而变，甚至在同一行中也可能不同。此外，当一个正常数 δ出现在计算中时，相关符号 C_δ（而非一般的 C）表示除依赖于 δ之外，还依赖于该正常数的常数。

3 正则性与连续依赖性结果

本节旨在证明定理 2.4 和定理 2.7。第一个结果为第二个结果作准备；后者将在证明与该系统相关联的解算子具有某些可微性时发挥关键作用。

定理 2.4 的证明。我们可以完全沿用 [9,第 5 节2] 中的论证，证明类似的结果 [9, 命题 2.6]。不过，虽然我们本应像引用论文中那样，在适当的逼近问题上构造合适的离散格式，并以严谨的方式进行估计，但为求简便，我们改为直接对问题 (1.1)–(1.5) 进行形式推导，并指出由额外变量 w 的存在所导致的少数差异。我们分别对 (1.1) 和 (1.2) 关于时间求导，并分别用 $\partial_t \varphi$ 和 $\Delta \partial_t \varphi$ 检验所得的不等式。将两式相加，并进行分部积分及在 $(0,t)$ 上积分后，会发生抵消，从而得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int_\Omega |\partial_t \varphi(t)|^2 + \gamma \int_{Q_t} |\partial_t \varphi|^2 + \int_{Q_t} |\Delta \partial_t \varphi|^2 \\ &\quad = \frac{1}{2} \int_\Omega |\partial_t \varphi(0)|^2 + \int_{Q_t} \partial_t f \, \partial_t \varphi + \int_{Q_t} (\beta' + \pi')(\varphi) \, \partial_t \varphi \, \Delta \partial_t \varphi - b \int_{Q_t} \partial_t^2 w \, \Delta \partial_t \varphi \, . \end{aligned}$$

这与 [9, 公式（5.16）]类似，主要区别仅在于多出了最后一项。不过，利用杨氏不等式以及由（2.7）保证的 w 正则性，可以轻松处理这一项。事实上，我们有

$$- b \int_{Q_t} \partial_t^2 w \, \Delta \partial_t \varphi \le \frac{1}{4} \int_{Q_t} |\Delta \partial_t \varphi|^2 + C \int_{Q_t} |\partial_t^2 w|^2 \le \frac{1}{4} \int_{Q_t} |\Delta \partial_t \varphi|^2 + C \, .$$

其余各项的处理方式与所引用的论文相同，因此我们得到与 [9, 公式（5.17）],类似的结果，即：

$$\begin{aligned}&\|\partial_t\varphi\|^2_{L^\infty(0,T;H)} + \|\Delta\partial_t\varphi\|^2_{L^2(0,T;H)}\\&\quad\le C\left(\|\partial_t\varphi(0)\|^2 + \|\beta'(\varphi)\|^2_{L^2(0,T;L^3(\Omega))} + 1\right) e^{C\,\|\beta'(\varphi)\|^4_{L^4(0,T;L^3(\Omega))}}.\end{aligned}$$

此时，新变量 w 才开始参与 $\partial_t\varphi$(0) 的计算。继续进行形式推导，我们从 (1.2) 在时刻 $t=0$ 处求得 μ(0) $=\mu_0$ 的初值；随后利用 (2.11) 中所述的 μ_0 (及 f) 的正则性，得到

$$\partial_t\varphi(0) = f(0) + \Delta\mu_0 - \gamma\varphi_0 \in H$$

由 (1.1) 得到，对 $t=0$ 也可写出同样的关系。于是，我们得到

$$\|\partial_t\varphi(0)\|^2 \le \|f(0) + \Delta\mu_0 - \gamma\varphi_0\|^2 \le C.$$

此时， w 不再参与论证，我们可以继续推导，最终得到与 [9] 中完全相同的结论。

□

定理 2.7 的证明。首先，我们为陈述中涉及的差定义如下记号：

$$\varphi := \varphi_1 - \varphi_2, \quad \mu := \mu_1 - \mu_2, \quad u := u_1 - u_2, \quad w := w_1 - w_2.$$

接下来，我们 写出这些差所满足的系统，其强形式为

$$\begin{aligned}
&\partial_t\varphi - \Delta\mu + \gamma\varphi = 0 && \text{in } Q, && (3.1)\\
&\mu = -\Delta\varphi + (F'(\varphi_1) - F'(\varphi_2)) - b\partial_t w && \text{in } Q, && (3.2)\\
&\partial_t^2 w - \Delta(\kappa_1\partial_t w + \kappa_2 w) + \lambda\partial_t\varphi = u && \text{in } Q, && (3.3)\\
&\partial_{\boldsymbol{n}}\varphi = \partial_{\boldsymbol{n}}\mu = \partial_{\boldsymbol{n}}(\kappa_1\partial_t w + \kappa_2 w) = 0 && \text{on } \Sigma, && (3.4)\\
&\varphi(0) = w(0) = \partial_t w(0) = 0 && \text{in } \Omega. && (3.5)
\end{aligned}$$

第一个估计。首先，我们回顾一下，现在假设 F' 是 Lipschitz 连续的。然后，用 φ 测试 (3.1)，用 μ 测试 (3.2)，并将所得方程相加，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\varphi\|^2 + \gamma\|\varphi\|^2 + \|\mu\|^2 &= \int_\Omega (F'(\varphi_1) - F'(\varphi_2))\mu - b\int_\Omega \partial_t w\mu\\&\le \frac{1}{2}\|\mu\|^2 + C\big(\|\varphi\|^2 + \|\partial_t w\|^2\big).\end{aligned}$$

现在，回想定理 2.1 中已经证明的连续依赖估计，我们可知，对时间积分后，

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^\infty(0,T;H)} + \|\mu_1 - \mu_2\|_{L^2(0,T;H)} \le C\|1 * (u_1 - u_2)\|_{L^2(0,T;H)}. \tag{3.6}$$

第二个估计。首先，我们来建立一个辅助估计。由于 F' 和 F'' 假设为 Lipschitz 连续，且 (2.8) 确保了 $\|\nabla\varphi_2\|_\infty$ 一致有界，因此几乎处处在 $(0,T)$ 上有，

$$\begin{aligned}\|F'(\varphi_1)-F'(\varphi_2)\|_V &\le \|F'(\varphi_1)-F'(\varphi_2)\| + \|F''(\varphi_1)\nabla\varphi_1 - F''(\varphi_2)\nabla\varphi_2\| \\ &\le C\,\|\varphi\| + \|F''(\varphi_1)\nabla\varphi\| + \|(F''(\varphi_1)-F''(\varphi_2))\nabla\varphi_2\| \\ &\le C\,\|\varphi\| + C\,\|\nabla\varphi\| \le C\,\|\varphi\|_V\,.\end{aligned}$$

接下来，我们将 (3.1) 乘以 $1/|\Omega|$，从而得到

$$\frac{d}{dt}\,\overline{\varphi}(t) + \gamma\,\overline{\varphi}(t) = 0 \quad \text{for a.a. } t\in(0,T), \tag{3.7}$$

这意味着，对于每个 $t\in[0,T]$，有 $\overline{\varphi}(t)=0$，因为 $\overline{\varphi}(0)=0$。特别地，除了 φ 之外，$\partial_t\varphi$ 也具有零均值。因此，我们可以分别用 $\mathcal{N}(\partial_t\varphi)$ 测试 (3.1)，用 $-\partial_t\varphi$ 测试 (3.2)，并用 $\frac{b}{\lambda}\partial_t w$ 测试 (3.3)，然后将所得恒等式相加。再考虑到 F' 的利普希茨连续性和杨氏不等式，我们推得，对于几乎处处的 $(0,T)$，

$$\begin{aligned}&\|\partial_t\varphi\|_*^2 + \frac{\gamma}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|\varphi\|_*^2 + \frac12\,\frac{d}{dt}\,\|\nabla\varphi\|^2 + \frac{b}{2\lambda}\,\frac{d}{dt}\,\|\partial_t w\|^2 + \frac{\kappa_1 b}{2\lambda}\,\|\nabla(\partial_t w)\|^2 + \frac{\kappa_2 b}{2\lambda}\,\frac{d}{dt}\,\|\nabla w\|^2 \\ &\quad= \int_\Omega (F'(\varphi_1)-F'(\varphi_2))\partial_t\varphi + \frac{b}{\lambda}\int_\Omega u\,\partial_t w \\ &\quad\le C\big(\|\varphi\|_V\,\|\partial_t\varphi\|_* + \|u\|\,\|\partial_t w\|\big) \le \frac12\,\|\partial_t\varphi\|_*^2 + C\big(\|\varphi\|_V^2 + \|u\|^2 + \|\partial_t w\|^2\big).\end{aligned}$$

因此，对时间进行积分并利用 (2.9)，我们可以得出

$$\begin{aligned}&\|\varphi_1-\varphi_2\|_{H^1(0,T;V^*)\cap L^\infty(0,T;V)} + \|w_1-w_2\|_{W^{1,\infty}(0,T;H)\cap H^1(0,T;V)} \\ &\quad\le C\|u_1-u_2\|_{L^2(0,T;H)}.\end{aligned} \tag{3.8}$$

第三个估计。用 μ 测试 (3.1)，可得

$$\int_\Omega \partial_t\varphi\,\mu + \int_\Omega |\nabla\mu|^2 + \gamma\int_\Omega \varphi\mu = 0\,.$$

现在，我们回顾 φ 和 $\partial_t\varphi$ 具有零均值。因此，再考虑到 Poincaré 不等式 (2.16)，我们推得

$$\int_\Omega |\nabla\mu|^2 = -\int_\Omega \partial_t\varphi\,(\mu-\overline{\mu}) - \gamma\int_\Omega \varphi(\mu-\overline{\mu}) \le \frac12\int_\Omega |\nabla\mu|^2 + C\big(\|\partial_t\varphi\|_*^2 + \|\varphi\|^2\big).$$

因此，由（3.6）和（3.8）可立即得到

$$\|\mu_1-\mu_2\|_{L^2(0,T;V)} \le C\|u_1-u_2\|_{L^2(0,T;H)}. \tag{3.9}$$

第四个估计。对 (3.2) 进行简单的比较论证，并结合上述估计和椭圆正则性理论，可得

$$\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^2(0,T;W)} \le C\|u_1-u_2\|_{L^2(0,T;H)}. \tag{3.10}$$

第五个估计。任取一个 $v \in L^2(0,T;V)$，将 (3.3) 乘以 v，并在 Q 上积分并分部积分。经过整理和估计，我们很容易得到

$$\int_Q \partial_t^2 w\, v \le C\big(\|u\|_{L^2(0,T;H)} + \|\partial_t w\|_{L^2(0,T;V)} + \|w\|_{L^2(0,T;V)} + \|\partial_t \varphi\|_{L^2(0,T;V^*)}\big)\|v\|_{L^2(0,T;V)}.$$

根据前面的估计，我们得出

$$\|\partial_t^2 w_1 - \partial_t^2 w_2\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;H)}. \tag{3.11}$$

第六个估计。按照注记 2.3 中的论证，我们现在将 (3.3) 改写为关于辅助变量 y 的抛物型方程：$= \kappa_1 \partial_t w + \kappa_2 w + \kappa_1 \lambda \varphi$ 从而得到

$$\frac{1}{\kappa_1}\partial_t y - \Delta y = u + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\partial_t w - \kappa_1 \lambda \Delta \varphi.$$

此外，我们强调指出，y 满足齐次诺伊曼边界条件和零初始条件，这一点可由 (3.4) 和 (3.5) 看出。然后，利用一个众所周知的抛物型正则性结果以及已经得到的估计 (3.8) 和 (3.10)，可以直接推出

$$\|y\|_{H^1(0,T;H)\cap C^0([0,T];V)\cap L^2(0,T;W)} \le C\left\|u + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\partial_t w - \kappa_1 \lambda \Delta \varphi\right\|_{L^2(0,T;H)} \le C\|u\|_{L^2(0,T;H)}.$$

因此，通过求解关于常微分方程 $\kappa_1 \partial_t w + \kappa_2 w = y - \kappa_1 \lambda \varphi$ 的柯西问题，并再次回顾 (3.8) 和 (3.10)，我们得到

$$\|w_1 - w_2\|_{H^2(0,T;V^*)\cap W^{1,\infty}(0,T;V)\cap H^1(0,T;W)} \le C\|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;H)}. \tag{3.12}$$

这就完成了证明，因为汇总上述估计即可得到 (2.14)。 □

4 最优控制问题

本节研究开篇介绍的最优控制问题，为方便读者，现将其重述如下：

(P) $\min_{u\in \mathcal{U}_{\rm ad}} \mathcal{J}((\varphi, w)\ u)$，约束条件为$(\varphi, \mu, w)$是系统(1.1)–(1.5)的解,

其中，代价泛函 $\mathcal{J}$ 由(1.6)给出。

首先，介绍与系统(1.1)–(1.5)相关的解算子 $\mathcal{S}$ 的一些记号。根据定理2.1、2.4和2.7，控制到状态算子

$$\mathcal{S} = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3) : L^2(Q)(\supset \mathcal{U}) \to \mathcal{Y}, \quad \mathcal{S} : u \mapsto (\varphi, \mu, w),$$

定义良好，其中（φ，μ，w）$\in \mathcal{Y}$ 是状态系统的唯一解，而巴拿赫空间 $\mathcal{Y}$（称为状态空间）由 (2.5)–(2.7) 以及部分 (2.12) 中规定的正则性定义，即

$$\begin{aligned}\mathcal{Y} := &\big(W^{1,\infty}(0,T;H)\cap H^1(0,T;W)\cap L^\infty(0,T;W^{2,6}(\Omega))\big)\times L^\infty(0,T;V)\\ &\times \big(H^2(0,T;H)\cap C^1([0,T];V)\big).\end{aligned}$$

此外，定理 2.7 给出的连续依赖估计使我们能够推断，解算子是 Lipschitz 连续的，即对于任意一对控制（u_1， u_2），均有

$$\|\mathcal{S}(u_1) - \mathcal{S}(u_2)\|_{\mathcal{X}} \le K_6 \|u_1 - u_2\|_{L^2(0,T;H)},$$

其中 $\mathcal{X}$ 是由下式定义的空间

$$\begin{aligned}\mathcal{X} := {} & \big(H^1(0,T;V^*) \cap L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;W)\big) \times L^2(0,T;V) \\ & \times \big(H^2(0,T;V^*) \cap W^{1,\infty}(0,T;V) \cap H^1(0,T;W)\big). \end{aligned} \tag{4.1}$$

此外，我们引入约化代价泛函，其定义如下

$$\mathcal{J}_{\rm red} : L^2(Q) \subset \mathcal{U} \to \mathbb{R}, \quad \mathcal{J}_{\rm red} : u \mapsto \mathcal{J}(\mathcal{S}_1(u), \mathcal{S}_3(u), u), \tag{4.2}$$

由此可将优化问题 (P) 化为以下形式

$$\min_{u \in \mathcal{U}_{\rm ad}} \mathcal{J}_{\rm red}(u).$$

下文将在定理 2.1 的框架下（也可能在定理 2.4 的意义下）展开。因此，以下条件成立：

(C1) 源项 f 满足 (2.3)，初始数据 φ_0、w_0 和 w_1 满足 (2.4)。此外，若考虑对数势且 $d = 2$，则还满足 (2.11)。

(C2) 函数 $u_{\min}$、$u_{\max}$ 属于 $\mathcal{U}$，其中 $u_{\min} \le u_{\max}$ 几乎处处成立于 Q。

(C3) α_1、α_6和 ν是非负常数，且不全为零。

(C4) 目标　函数满足 φ_Q、w_Q、$w_Q' \in L^2(Q)$、$\varphi_\Omega \in V$、$w_\Omega \in H$和 $w_\Omega' \in V$。

4.1 最优控制的存在性

我们将要讨论的第一个结果涉及最优控制的存在性。

定理 4.1（最优控制的存在性）。假设(A1)–(A3)和(C1)–(C4)成立，则最优控制问题(P)存在一个解。

定理 4.1 的证明。由于该证明可由变分法直接方法立即得出，我们仅简要概述关键步骤。考虑约化代价泛函 $\mathcal{J}_{\rm red}$ 的极小化序列 $\{u_n\}_n \subset \mathcal{U}_{\rm ad}$，该泛函由式 (4.2) 定义。再引入相应状态序列 $\{(\varphi_n, \mu_n, w_n)\}_n$，其中对每个 $n \in \mathbb{N}$，$(\varphi_n, \mu_n, w_n) = \mathcal{S}(u_n)$。也就是说，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_{\rm red}(u_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}\big((\mathcal{S}_1(u_n), \mathcal{S}_3(u_n)), u_n\big) = \inf_{u \in \mathcal{U}_{\rm ad}} \mathcal{J}_{\rm red}(u) \ge 0.$$

因此，由于 $\mathcal{U}_{\rm ad}$ 在 $\mathcal{U}$ 中有界，利用标准紧性论证，并注意到 $\mathcal{U}_{\rm ad}$ 是闭凸集，我们得到一个极限函数 $u^* \in \mathcal{U}_{\rm ad}$ 和一个不重标记子序列，使得当 $n \to \infty$ 时，

$$u_n \to u^* \quad \text{weakly-star in } L^\infty(Q).$$

另一方面，根据定理 2.1中所述的有界性性质 (2.8)，以及标准的紧性结果（例如参见 [29, 第 8 节，推论 4]），我们还可得到

$$\begin{aligned}
\varphi_n &\to \varphi^* \quad \text{weakly-star in } H^1(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;W^{2,6}(\Omega)),\\
&\qquad \text{and strongly in } C^0(\overline{Q}),\\
\mu_n &\to \mu^* \quad \text{weakly-star in } L^\infty(0,T;V),\\
w_n &\to w^* \quad \text{weakly-star in } H^2(0,T;H) \cap W^{1,\infty}(0,T;V),\\
&\qquad \text{and strongly in } C^1([0,T];H),\\
F'(\varphi_n) &\to \xi^* \quad \text{weakly-star in } L^\infty(0,T;L^6(\Omega)),
\end{aligned}$$

对于某些极限 φ^*、μ^*、w^* 和 ξ^*。第一个强收敛性由紧嵌入 $W^{2,6}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\Omega)$ 得出。此外，由于

$$\pi(\varphi_n) \to \pi(\varphi^*) \quad \text{strongly in } C^0(\overline{Q}) \quad \text{and} \quad \beta(\varphi_n) \to \xi^* - \pi(\varphi^*) \quad \text{weakly in } L^1(Q),$$

利用极大单调性论证，不难得出 $\xi^* = F'(\varphi^*)$。然后，利用上述弱收敛、弱星收敛和强收敛性质，在与系统(1.1)–(1.5)相关的变分表述中令 n趋于无穷，并针对 φ_n、μ_n、w_n 和 u_n 进行极限处理，是标准的步骤。这也将证明 (φ^*, μ^*, w^*) 不过就是 $\mathcal{S}(u^*)$。最后，范数的下半连续性意味着

$$\mathcal{J}_{\rm red}(u^*) \le \liminf_{n\to\infty} \mathcal{J}_{\rm red}(u_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{J}_{\rm red}(u_n) = \inf_{u\in\mathcal{U}_{\rm ad}} \mathcal{J}_{\rm red}(u)\,,$$

这意味着 u^* 是 $\mathcal{J}_{\rm red}$的全局极小化器。 □

4.2 解算子的可微性

下面，我们将证明解算子 $\mathcal{S}$的一些可微性性质。由于这些性质必须在开集中进行分析，我们在L^∞拓扑中取一个包含可容许控制集 $\mathcal{U}_{\rm ad}$的开球，即令 $R > 0$ 满足

$$\mathcal{U}_R := \{u \in \mathcal{U} : \|u\|_{\mathcal{U}} < R\} \supset \mathcal{U}_{\rm ad}.$$

现在，固定 $u \in \mathcal{U}_R$，并用 $(\varphi, \mu, w) = \mathcal{S}(u)$ 表示相应的唯一状态。则在固定控制 u 处，针对任意 $h \in L^2(Q)$，系统 (1.1)–(1.5) 的线性化系统如下：

$$\begin{aligned}
&\partial_t \xi - \Delta\eta + \gamma\xi = 0 && \text{in } Q, && (4.3)\\
&\eta = -\Delta\xi + F''(\varphi)\xi - b\partial_t\zeta && \text{在 } Q\text{中}, && (4.4)\\
&\partial_t^2\zeta - \Delta(\kappa_1\partial_t\zeta + \kappa_2\zeta) + \lambda\partial_t\xi = h && \text{in } Q, && (4.5)\\
&\partial_{\boldsymbol{n}}\xi = \partial_{\boldsymbol{n}}\eta = \partial_{\boldsymbol{n}}(\kappa_1\partial_t\zeta + \kappa_2\zeta) = 0 && \text{on } \Sigma, && (4.6)\\
&\xi(0) = \zeta(0) = \partial_t\zeta(0) = 0 && \text{in } \Omega. && (4.7)
\end{aligned}$$

上述系统适定性的证明与定理 2.1 的证明非常相似（事实上，由于该系统是线性的，证明更为简单）。我们有以下结果。

定理 4.2（线性化系统的适定性）。假设 (A1)–(A3) 和 (C1) 成立，并设给定 $u \in \mathcal{U}_R$ 及其对应的状态 $(\varphi, \mu, w) = \mathcal{S}(u)$。那么，对于任意 $h \in L^2(Q)$，线性化系统 (4.3)–(4.7) 存在唯一解 $(\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{X}$，其中 $\mathcal{X}$ 是由 (4.1) 引入的巴拿赫空间。此外，存在某个 $K_7 > 0$，它仅取决于系统的结构、 f 的范数的一个上界以及初始数据的范数，使得

$$\begin{aligned}&\|\xi\|_{H^1(0,T;V^*)\cap L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;W)} + \|\eta\|_{L^2(0,T;V)} \\ &\quad + \|\zeta\|_{H^2(0,T;V^*)\cap W^{1,\infty}(0,T;V)\cap H^1(0,T;W)} \le K_7 \|h\|_{L^2(0,T;H)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

注 4.3。由于定义 (4.1) 中 $\mathcal{X}$所具有的正则性较低，上述结果必须采用线性化问题的适当变分表述。例如，对于 η 满足齐次诺伊曼边界条件的 (4.3)，应将其理解为

$$\langle \partial_t \xi, v \rangle + \int_\Omega \nabla \eta \cdot \nabla v + \gamma \int_\Omega \xi v = 0 \quad \text{a.e. in } (0,T), \text{ for every } v \in V.$$

定理 4.2 的证明。由于系统是线性的，一旦对某个特解证明了 (4.8)，解的唯一性便可直接得出。事实上，假设存在两个解 (ξ_1, η_1, ζ_1) 和 (ξ_2, η_2, ζ_2)。只需按照下文所用的步骤，令 $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\eta = \eta_1 - \eta_2$ 和 $\zeta = \zeta_1 - \zeta_2$，即可得知，同样的结论 (4.8) 仍然成立，只是右端等于 0，因此 $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \equiv (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$，即解具有唯一性。

由于存在性的证明是标准的，我们不引入任何逼近格式，而只给出形式估计。严谨的论证可以很容易地通过例如适当的法厄多–伽辽金格式重现。

第一个估计。我们的目标是证明

$$\|\xi\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|\eta\|_{L^2(0,T;V)} + \|\zeta\|_{W^{1,\infty}(0,T;H)\cap H^1(0,T;V)} \le C \|h\|_{L^2(0,T;H)}\,. \tag{4.9}$$

我们首先观察到

$$\|\partial_t \xi\|_{L^2(0,t;V^*)} \le C\big(\|\xi\|_{L^2(0,t;H)} + \|\eta\|_{L^2(0,t;V)}\big) \quad \text{for every } t \in (0,T]\,, \tag{4.10}$$

这一点只需将 (4.3) 乘以任意 $v \in L^2(0,t;V)$，在Q_t 上积分并分部积分即可立即得出。此外，回顾 (2.8) 和 (2.13)，并注意到前者给出了 $\nabla\varphi$ 的一个一致 L^∞ 界，因为 $W^{1,6}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$。因此可得

$$\|F''(\varphi)\xi\|_V \le C\|\xi\|_V \quad \text{a.e. in } (0,T)\,. \tag{4.11}$$

此时，我们可以进行所需的估计。我们分别以 $\eta + \xi$、 $-\partial_t \xi + \eta$ 和 $\frac{b}{\lambda}\partial_t\zeta$ 测试 (4.3)、(4.4) 和 (4.5)，并将所得等式相加，从而推得对几乎处处的 $(0,T)$，有

$$\begin{aligned}&\|\eta\|_V^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\xi\|_V^2 + \gamma\|\xi\|^2 + \frac{b}{2\lambda}\frac{d}{dt}\|\partial_t\zeta\|^2 + \frac{\kappa_1 b}{\lambda}\|\nabla\partial_t\zeta\|^2 + \frac{\kappa_2 b}{2\lambda}\frac{d}{dt}\|\nabla\zeta\|^2 \\ &\quad = -\gamma\int_\Omega \xi\eta + \int_\Omega F''(\varphi)\xi\,(\eta - \partial_t\xi) - b\int_\Omega \partial_t\zeta\eta + \frac{b}{\lambda}\int_\Omega h\,\partial_t\zeta\,,\end{aligned}$$

这得益于若干项的相互抵消。现在，整个右端很容易从上方估计为

$$\frac{1}{4}\,\|\eta\|_V^2 + C\big(\|\xi\|_V^2 + \|\partial_t\zeta\|^2 + \|h\|^2\big) - \int_\Omega F''(\varphi)\xi\,\partial_t\xi\,,$$

显然，只要能恰当地估计最后一项的时间积分，对时间积分并应用格朗沃尔引理即可推出 (4.9)。此外，利用 (4.10) 和 (4.11)，我们有

$$\begin{aligned}
-\int_{Q_t} F''(\varphi)\xi\,\partial_t\xi &\le C\|F''(\varphi)\xi\|_{L^2(0,t;V)}\|\partial_t\xi\|_{L^2(0,t;V^*)}\\
&\le C\|\xi\|_{L^2(0,t;V)}\big(\|\xi\|_{L^2(0,t;H)} + \|\eta\|_{L^2(0,t;V)}\big) \le \frac{1}{4}\,\|\eta\|^2_{L^2(0,t;V)} + C\|\xi\|^2_{L^2(0,t;V)}\,,
\end{aligned}$$

这就足以得出结论。

第二个估计。由 (4.10) 可立即推出

$$\|\partial_t\xi\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C\|h\|_{L^2(0,T;H)}\,. \tag{4.12}$$

另一方面，通过比较 (4.4) 中的各项，并利用 (4.9) 和 (4.11)，已知的椭圆正则性结果使我们能够推得

$$\|\xi\|_{L^2(0,T;W)} \le C\|h\|_{L^2(0,T;H)}\,. \tag{4.13}$$

第三个估计。现在，我们将方程 (4.5) 改写为关于辅助变量 $z := \kappa_1\partial_t\zeta + \kappa_2\zeta + \kappa_1\lambda\xi$ 的形式。得到

$$\frac{1}{\kappa_1}\partial_t z - \Delta z = h + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\partial_t\zeta - \kappa_1\lambda\Delta\xi,$$

并注意到，根据 (4.6)–(4.7)，z 满足齐次纽曼边界条件和零初始条件。于是，根据已知的抛物正则性结果、(4.9) 和 (4.13)，我们很容易推出

$$\|z\|_{H^1(0,T;H)\cap C^0([0,T];V)\cap L^2(0,T;W)} \le C\left\|h + \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\partial_t\zeta - \kappa_1\lambda\Delta\xi\right\|_{L^2(0,T;H)} \le C\|h\|_{L^2(0,T;H)}\,.$$

因此，回顾 z 的定义以及已证明的估计式 (4.9)、(4.12) 和 (4.13)，可得

$$\|\zeta\|_{H^2(0,T;V^*)\cap W^{1,\infty}(0,T;V)\cap H^1(0,T;W)} \le C\|h\|_{L^2(0,T;H)}\,. \tag{4.14}$$

由于嵌入关系 $V^* \hookrightarrow W^*$ 和 $W \hookrightarrow H \equiv H^* \hookrightarrow W^*$，通过插值可得

$$H^2(0,T;V^*)\cap H^1(0,T;W) \hookrightarrow C^1([0,T];H),$$

由此，特别地，(4.14) 蕴含

$$\|\zeta\|_{C^1([0,T];H)} \le C\|h\|_{L^2(0,T;H)}. \tag{4.15}$$

至此，证明概要告一段落。 □

现在我们认为，只要选取正确的巴拿赫空间，线性化系统就能概括解算子 $\mathcal{S}$ 的 Fr´echet 导数的行为。下一个定理将对此作出严格表述；但在此之前，我们先引入以下巴拿赫空间：

$$\begin{aligned}\mathcal{Z} := \big(H^1(0,T;W^*) \cap C^0([0,T];H) \cap L^2(0,T;W)\big) \times L^2(0,T;H) \\ \times \big(H^2(0,T;W^*) \cap C^1([0,T];H) \cap H^1(0,T;W)\big).\end{aligned} \tag{4.16}$$

定理 4.4（解算子的 Fr´échet 可微性）。设假设 (A1)–(A3) 和 (C1) 均成立。则控制到状态算子 $\mathcal{S}$ 在任意 $u \in \mathcal{U}_R$ 处，作为从 $L^2(Q)$ 到 $\mathcal{Z}$ 的映射，均为 Fr´échet 可微。此外，对于 $u \in \mathcal{U}_R$，映射 $D\mathcal{S}(u) \in \mathcal{L}(L^2(Q)\ \mathcal{Z})$ 的作用如下：对每个 $h \in L^2(Q)$，$D\mathcal{S}(u)h$ 是与 h 相关的线性化系统 (4.3)–(4.7) 的唯一解 (ξ, η, ζ)。

定理 4.4 的证明。固定 $u \in \mathcal{U}_R$，首先注意到，根据 (4.8)，陈述中的映射 $h \mapsto (\xi, \eta, \zeta)$ 实际上属于 $\mathcal{L}(L^2(Q)\ \mathcal{Z})$。然后，我们直接验证这一结论，具体如下：

$$\frac{\|\mathcal{S}(u+h) - \mathcal{S}(u) - (\xi,\eta,\zeta)\|_{\mathcal{Z}}}{\|h\|_{L^2(Q)}} \to 0 \quad \text{as } \|h\|_{L^2(Q)} \to 0. \tag{4.17}$$

这将意味着 $\mathcal{S}$ 在命题所述意义下的 Fr´echet 可微性，以及恒等式 $D\mathcal{S}(u)h = (\xi, \eta, \zeta)$ 的成立。

在此我们指出，由于线性化变量的正则性较低（参见注 4.3），以下论证是形式上的。尽管如此，为求简洁，我们仍采用这一论证，以避免进行任何近似，例如基于拉普拉斯算子特征函数且满足齐次诺伊曼边界条件的法厄多–伽辽金格式（在这种情况下，例如，离散解各分量的拉普拉斯算子实际上可以作为测试函数）。

不失一般性，我们可以假设$\|h\|_{L^2\ (Q)}$ 足够小。特别地，这得益于针对分别对应于 u 和 $u+h$的非线性问题的解所证明的估计。为方便起见，令

$$\psi := \varphi^h - \varphi - \xi, \quad \sigma := \mu^h - \mu - \eta, \quad \omega := w^h - w - \zeta,$$

其中 $(\varphi^h, \mu^h, w^h) := \mathcal{S}(u+h)$，$(\varphi, \mu, w) := \mathcal{S}(u)$，而 (ξ, η, ζ) 是与 h对应的 (4.3)–(4.7) 的唯一解。根据前面的结果，我们已经知道 $(\psi, \sigma, \omega) \in \mathcal{X} \hookrightarrow \mathcal{Z}$，并且通过作差可得，它是以下系统的弱解

$$\partial_t \psi - \Delta\sigma + \gamma\psi = 0 \qquad \text{in } Q, \tag{4.18}$$

$$\sigma = -\Delta\psi + [F'(\varphi^h) - F'(\varphi) - F''(\varphi)\xi] - b\partial_t\omega \quad \text{in } Q, \tag{4.19}$$

$$\partial_t^2\omega - \Delta(\kappa_1\partial_t\omega + \kappa_2\omega) + \lambda\partial_t\psi = 0 \quad \text{在 } Q \text{中,} \tag{4.20}$$

$$\partial_{\boldsymbol{n}}\psi = \partial_{\boldsymbol{n}}\sigma = \partial_{\boldsymbol{n}}(\kappa_1\partial_t\omega + \kappa_2\omega) = 0 \qquad \text{on } \Sigma, \tag{4.21}$$

$$\psi(0) = \omega(0) = \partial_t\omega(0) = 0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{4.22}$$

此外，采用上述记号，(4.17) 表明

$$\|(\psi, \sigma, \omega)\|_{\mathcal{Z}} = o(\|h\|_{L^2(Q)}) \quad \text{as } \|h\|_{L^2(Q)} \to 0. \tag{4.23}$$

此外，定理 2.1 和 2.7 意味着

$$\|\varphi^h\|_{H^1(0,T;V)\cap L^\infty(0,T;W^{2,6}(\Omega))} + \|\mu^h\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|w^h\|_{H^2(0,T;H)\cap W^{1,\infty}(0,T;V)} \le K_1, \tag{4.24}$$

以及

$$\begin{aligned}&\|\varphi^h - \varphi\|_{H^1(0,T;V^*)\cap L^\infty(0,T;V)\cap L^2(0,T;W)} + \|\mu^h - \mu\|_{L^2(0,T;V)}\\ &\quad + \|w^h - w\|_{H^2(0,T;V^*)\cap W^{1,\infty}(0,T;H)\cap H^1(0,T;V)} \le K_6\|h\|_{L^2(0,T;H)}.\end{aligned} \tag{4.25}$$

事实上，对于二维情形下的对数势，由定理 2.4 可知，我们还有 (4.24) 的一个更强版本。

在详细讨论之前，我们先回顾一下，泰勒公式给出

$$F'(\varphi^h) - F'(\varphi) - F''(\varphi)\xi = F''(\varphi)\psi + R^h\,(\varphi^h - \varphi)^2, \tag{4.26}$$

其中余项 R^h 为

$$R^h = \int_0^1 F^{(3)}\big(\varphi + s(\varphi^h - \varphi)\big)(1-s)\,ds\,.$$

由 (2.13) 可知,

$$\|R^h\|_{L^\infty(Q)} \le C. \tag{4.27}$$

第一个估计。我们注意到，通过用 $1/|\Omega|$ 检验 (4.18) 并利用 (4.22)，可以很容易地验证 ψ 具有零均值。因此，我们可以用 $\mathcal{N}\psi$ 检验 (4.18)，并用 $-\psi$ 检验 (4.19)。此外，我们对 (4.20) 关于时间积分，并用 $\frac{b}{\lambda}\partial_t\omega$ 检验所得的方程。最后，我们将各式相加，并在两边加上相同的项 $\frac{\kappa_1 b}{2\lambda}\frac{d}{dt}\|\omega\|^2 = \frac{\kappa_1 b}{2\lambda}\int_\Omega \omega\,\partial_t\omega$。于是得到

$$\begin{aligned}&\frac12\frac{d}{dt}\|\psi\|_*^2 + \gamma\|\psi\|_*^2 + \|\nabla\psi\|^2 + \frac{b}{\lambda}\|\partial_t\omega\|^2 + \frac{\kappa_1 b}{2\lambda}\frac{d}{dt}\|\omega\|_V^2\\ &\quad = \int_\Omega [F'(\varphi^h) - F'(\varphi) - F''(\varphi)\xi]\psi - \frac{b\kappa_2}{\lambda}\int_\Omega \nabla(\mathbf{1}*\omega)\cdot\nabla\partial_t\omega + \frac{\kappa_1 b}{2\lambda}\int_\Omega \omega\,\partial_t\omega.\end{aligned}$$

由于我们旨在应用格朗沃尔引理，因此应对时间在 $(0,t)$ 上积分。不过，为简洁起见，我们仅估计积分后右端的前两项（最后一项可直接用杨氏不等式处理），并省略 $(0,t)$ 上积分中的积分变量 s。第一项可利用 H¨older 不等式和杨氏不等式、(4.25)、连续嵌入$V \hookrightarrow L^4(\Omega)$、(4.26)、(4.27) 以及紧性不等式 (2.17) 控制如下:

$$\begin{aligned}&\int_{Q_t}[F'(\varphi^h) - F'(\varphi) - F''(\varphi)\xi]\psi = \int_{Q_t}[F''(\varphi)\psi + R^h\,(\varphi^h-\varphi)^2]\psi\\ &\le C\int_0^t\|\psi\|^2\,ds + C\int_0^t\|\varphi^h-\varphi\|_4^2\|\psi\|\,ds \le C\int_0^t\|\psi\|^2\,ds + C\int_0^t\|\varphi^h-\varphi\|_V^4\,ds\\ &\le C\int_0^t\|\psi\|^2\,ds + CT\|h\|_{L^2(Q)}^4 \le \frac12\int_0^t\|\nabla\psi\|^2\,ds + C\int_0^t\|\psi\|_*^2\,ds + C\|h\|_{L^2(Q)}^4.\end{aligned}$$

对于第二项，我们分别对空间和时间进行分部积分。再结合杨氏不等式，可得

$$
\begin{aligned}
&-\frac{b\kappa_2}{\lambda}\int_{Q_t}\nabla(\mathbf{1}*\omega)\cdot\nabla\partial_t\omega = -\frac{b\kappa_2}{\lambda}\int_\Omega\nabla(\mathbf{1}*\omega)(t)\cdot\nabla\omega(t)+\frac{b\kappa_2}{\lambda}\int_{Q_t}|\nabla\omega|^2\\
&\quad\le\frac{\kappa_1 b}{4\lambda}\int_\Omega|\nabla\omega(t)|^2+C\int_\Omega\Big|\int_0^t\nabla\omega\,ds\Big|^2+C\int_{Q_t}|\nabla\omega|^2\le\frac{\kappa_1 b}{4\lambda}\int_\Omega|\nabla\omega(t)|^2+C\int_{Q_t}|\nabla\omega|^2.
\end{aligned}
$$

因此，我们可以应用格朗沃尔引理，并得出

$$
\|\psi\|_{L^\infty(0,T;V^*)\cap L^2(0,T;V)}+\|\omega\|_{H^1(0,T;H)\cap L^\infty(0,T;V)}\le C\|h\|^2_{L^2(Q)}. \tag{4.28}
$$

第二个估计。我们用 ψ 检验（4.18），用 $\Delta\psi$ 检验（4.19），并将所得等式相加，得到

$$
\frac12\frac{d}{dt}\|\psi\|^2+\|\Delta\psi\|^2+\gamma\|\psi\|^2=\int_\Omega[F'(\varphi^h)-F'(\varphi)-F''(\varphi)\xi]\Delta\psi-b\int_\Omega\partial_t\omega\Delta\psi.
$$

与上文一样，我们只估计在 $(0,t)$ 上积分所得等式的右端。再结合前面的估计，可得

$$
\begin{aligned}
&\int_{Q_t}[F'(\varphi^h)-F'(\varphi)-F''(\varphi)\xi]\Delta\psi-b\int_{Q_t}\partial_t\omega\Delta\psi\\
&\quad\le\int_{Q_t}|F''(\varphi)|\,|\psi|\,|\Delta\psi|+\int_{Q_t}|R^h|\,|\varphi^h-\varphi|^2\,|\Delta\psi|+C\int_0^t\|\partial_t\omega\|\,\|\Delta\psi\|\,ds\\
&\quad\le\frac12\int_0^t\|\Delta\psi\|^2\,ds+C\int_0^t(\|\psi\|^2+\|\partial_t\omega\|^2)\,ds+C\|h\|^4_{L^2(Q)}\\
&\quad\le\frac12\int_0^t\|\Delta\psi\|^2\,ds+C\|h\|^4_{L^2(Q)}.
\end{aligned}
$$

因此，结合椭圆正则性理论，我们得出

$$
\|\psi\|_{L^\infty(0,T;H)\cap L^2(0,T;W)}\le C\|h\|^2_{L^2(Q)}. \tag{4.29}
$$

第三个估计。接下来，我们用 σ 检验（4.19），并按照上文的推理，得到

$$
\|\sigma\|_{L^2(0,T;H)}\le C\|h\|^2_{L^2(Q)}. \tag{4.30}
$$

第四个估计。现在，我们可以用任意函数 $v\in L^2(0,T;W)$ 对 (4.18) 进行测试，并根据 (4.29) 和 (4.30) 很容易推得

$$
\begin{aligned}
\Big|\int_0^T\langle\partial_t\psi,v\rangle_W\Big|&\le\|\sigma\|_{L^2(0,T;H)}\|\Delta v\|_{L^2(0,T;H)}+\gamma\|\psi\|_{L^2(0,T;H)}\|v\|_{L^2(0,T;H)}\\
&\le C\|h\|^2_{L^2(Q)}\|v\|_{L^2(0,T;W)}\quad\text{for all } v\in L^2(0,T;W).
\end{aligned}
$$

因此，$\|\partial_t\psi\|_{L^2(0,\,T;\,W^*)}$ 被一个与 $\|h\|^2_{L^2(Q)}$ 成正比的量一致有界，因此由 (4.29) 和插值论证可得

$$
\|\psi\|_{H^1(0,T;W^*)\cap C^0([0,T];H)\cap L^2(0,T;W)}\le C\|h\|^2_{L^2(Q)}. \tag{4.31}
$$

第五个估计。接下来，我们将方程 (4.20) 改写为关于辅助变量$\tau := \kappa_1\partial_t\omega + \kappa_2\omega + \kappa_1\lambda\psi$ 的形式，得到

$$\frac{1}{\kappa_1}\partial_t\tau - \Delta\tau = \frac{\kappa_2}{\kappa_1}\partial_t\omega - \kappa_1\lambda\Delta\psi.$$

根据 (4.21)–(4.22)，可知 τ 满足齐次纽曼边界条件和零初始条件。然后，借助抛物正则性结果以及 (4.28) 和 (4.31)，我们得到

$$\|\tau\|_{H^1(0,T;H)\cap C^0([0,T];V)\cap L^2(0,T;W)} \le C\left\|\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\partial_t\omega - \kappa_1\lambda\Delta\psi\right\|_{L^2(0,T;H)} \le C\|h\|^2_{L^2(Q)}\,.$$

因此，注意到 $\kappa_1\partial_t\omega + \kappa_2\omega = \tau - \kappa_1\lambda\psi$，可知 ω和 $\partial_t\omega$均满足与 (4.31) 相同的估计（至少如此），从而得到

$$\|\omega\|_{H^2(0,T;W^*)\cap C^1([0,T];H)\cap H^1(0,T;W)} \le C\|h\|^2_{L^2(Q)}. \tag{4.32}$$

由于估计 (4.30)–(4.32) 可直接推出 (4.23)，故证明完成。 □

4.3 伴随系统与一阶最优性条件

最后一步，我们现在针对 (1.1)–(1.5) 引入一个适当的伴随系统，以便得到问题 (P) 的更实用形式的最优性条件。给定 $u \in \mathcal{U}_{\rm ad}$ 及其对应的状态 (φ, μ, w)。在强形式下，伴随系统表示为反向时间抛物系统

$$-\partial_t p - \Delta q + \gamma p + F''(\varphi)q - \lambda\partial_t r = \alpha_1(\varphi - \varphi_Q) \quad \text{in } Q, \tag{4.33}$$

$$q = -\Delta p \quad \text{in } Q, \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned} &-\partial_t r - \Delta(\kappa_1 r - \kappa_2(1 \circledast r)) - bq \\ &\quad = \alpha_3(1 \circledast (w - w_Q)) + \alpha_4(w(T) - w_\Omega) + \alpha_5(\partial_t w - w'_Q) \end{aligned} \quad \text{in } Q, \tag{4.35}$$

$$\partial_{\boldsymbol{n}} p = \partial_{\boldsymbol{n}} q = \partial_{\boldsymbol{n}}(\kappa_1 r - \kappa_2(1 \circledast r)) = 0 \quad \text{on } \Sigma, \tag{4.36}$$

$$p(T) = \alpha_2(\varphi(T) - \varphi_\Omega) - \lambda\alpha_6(\partial_t w(T) - w'_\Omega), \quad r(T) = \alpha_6(\partial_t w(T) - w'_\Omega) \quad \text{在 } \Omega \text{ 中,} \tag{4.37}$$

其中，卷积乘积 $\circledast$ 已在（2.2）中引入。关于该乘积，需要特别注意的是，$\partial_t(1 \circledast r) = -r$. 我们对（4.35）的右端引入如下简写，

$$f_r := \alpha_3(1 \circledast (w - w_Q)) + \alpha_4(w(T) - w_\Omega) + \alpha_5(\partial_t w - w'_Q)\,.$$

我们还注意到，第二项与时间无关。根据（2.7）和（C4）中的正则性条件，有

$$\|f_r\|_{L^2(0,T;H)} \le C(\|w\|_{H^2(0,T;H)\cap W^{1,\infty}(0,T;V)} + 1) \le C. \tag{4.38}$$

我们指出，变量 r 对应于冻结指数 w的伴随。此外，方程 (4.35) 是时间一阶的，而非二阶的。不过，值得指出的是，(4.35) 可以改写为关于时间积分变量 $1 \circledast r$ 的形式，因为有 $-\partial_t r = \partial_t^2(1 \circledast r)$。

定理 4.5（伴随系统的适定性）。设假设 (A1)–(A3) 和 (C1)–(C4) 成立，并给定 $u \in \mathcal{U}_{\rm ad}$ 及其对应的状态 $(\varphi, \mu, w) = \mathcal{S}(u)$。那么，伴随系统 (4.33)–(4.37) 存在唯一的弱解 (p, q, r)，使得

$$
\begin{aligned}
&p \in H^1(0,T;V^*) \cap L^\infty(0,T;V) \cap L^2(0,T;W),\\
&q \in L^2(0,T;V),\\
&r \in H^1(0,T;H) \cap L^\infty(0,T;V).
\end{aligned}
$$

注 4.6. 与注 4.3 类似，这里应当采用恰当的变分表述。例如，带有关于 q 的齐次诺伊曼边界条件的 (4.33) 应理解为

$$
\begin{aligned}
&-\langle \partial_t p, v\rangle + \int_\Omega \nabla q \cdot \nabla v + \int_\Omega \bigl(\gamma p + F''(\varphi) q - \lambda \partial_t r\bigr) v\\
&\quad = \int_\Omega \alpha_1 (\varphi - \varphi_Q) v \quad \text{a.e. in } (0,T), \text{ for every } v \in V.
\end{aligned}
$$

定理 4.5 的证明。为了证明存在性，我们仍采用形式推导，但需要强调的是，以下计算也可以在严格框架下重现。

第一个估计。我们用 $p + q$ 测试 (4.33)，用 $\partial_t p + (K_5 + 1) q$ 测试 (4.34)，其中 K_5 是由 (2.13) 得到的正常数；用 $-\frac{\lambda}{b}\partial_t r$ 测试 (4.35)，并将所得等式相加。于是，我们推得

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|p\|_V^2 + (K_5+1)\|q\|^2 + \|\nabla q\|^2 + \gamma\|p\|^2 + \frac{\lambda}{b}\|\partial_t r\|^2\\
&\quad - \frac{\kappa_1 \lambda}{2b}\frac{d}{dt}\|\nabla r\|^2 + \frac{\kappa_2 \lambda}{b}\int_\Omega \nabla(1 \circledast r)\cdot \nabla \partial_t r\\
&= -\gamma \int_\Omega pq - \int_\Omega F''(\varphi) q (p+q) + \lambda \int_\Omega \partial_t r\, p + \alpha_1 \int_\Omega (\varphi - \varphi_Q)(p+q)\\
&\quad + K_5 \int_\Omega \nabla p \cdot \nabla q - \frac{\lambda}{b}\int_\Omega f_r\, \partial_t r. \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

现在，回顾 (2.13)，右端的第二项可作如下上界估计：

$$
-\int_\Omega F''(\varphi) q (p+q) \le \|F''(\varphi)\|_\infty \|p\|\|q\| + \|F''(\varphi)\|_\infty \|q\|^2 \le \Bigl(\frac{1}{2} + K_5\Bigr)\|q\|^2 + C\|p\|^2,
$$

右端出现的第一项可由 (4.39) 左端的相应项吸收。由杨氏不等式可知，右端剩余各项的上界为

$$
\frac{\lambda}{2b}\|\partial_t r\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla q\|^2 + \frac{1}{4}\|q\|^2 + C(\|p\|_V^2 + 1)\,,
$$

得益于（2.8）和 f_r 的估计（4.38）。接下来，对于任意 $t \in (0,T)$，我们对 (t,T) 积分，并注意到（C4）借助 $\|p(T)\|_V^2$ 和 $\|r(T)\|_V^2$ 的显式形式（见（4.37））， 给出了它们的一致有界性。

此外，我们对（4.39）左端最后一项产生的积分作如下处理。采用记号 $Q^t := \Omega \times (t, T)$，可得

$$\frac{\kappa_2\lambda}{b}\int_{Q^t}\nabla(1\circledast r)\cdot\nabla\partial_t r = -\frac{\kappa_2\lambda}{b}\int_\Omega\nabla(1\circledast r)(t)\cdot\nabla r(t) + \frac{\kappa_2\lambda}{b}\int_{Q^t}|\nabla r|^2\,.$$

另一方面，我们还有

$$\begin{aligned}\Big|-\frac{\kappa_2\lambda}{b}\int_\Omega\nabla(1\circledast r)(t)\cdot\nabla r(t)\Big| &\le \frac{\kappa_1\lambda}{4b}\int_\Omega|\nabla r(t)|^2 + C\int_\Omega|\nabla(1\circledast r)(t)|^2\\ &\le \frac{\kappa_1\lambda}{4b}\int_\Omega|\nabla r(t)|^2 + C\int_{Q^t}|\nabla r|^2\,.\end{aligned}$$

因此，根据（向后）格朗沃尔引理以及显然可得的后续不等式

$$\|r(t)\| \le C\,\|\partial_t r\|_{L^2(Q)} + C \quad \text{for every } t\in[0,T],$$

我们推知

$$\|p\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|q\|_{L^2(0,T;V)} + \|r\|_{H^1(0,T;H)\cap L^\infty(0,T;V)} \le C.$$

Sec二个估计。将椭圆正则性理论应用于**(4.34)**，即可得到 s

$$\|p\|_{L^2(0,T;W)} \le C.$$

第三个估计。最后，利用**(4.33)**中的比较论证以及上述估计，可以标准地推出

$$\|\partial_t p\|_{L^2(0,T;V^*)} \le C.$$

至此，（形式上的）解的存在性证明完成。对右端和终端数据均为零的情形进行同样的估计，可知该解必为零，由此再根据线性即可得到一般情形下的唯一性。

□

最后，利用伴随变量，我们给出求解 **(P)** 的最优控制 u^* 的一阶必要条件。下文中，(p, q, r) 和 (ξ, η, ζ) 分别表示相应伴随问题和线性化问题的解，但它们是用相关状态 $(\varphi^*, \mu^*, w^*) = \mathcal{S}(u^*)$ 表示的；该状态在系统 **(4.3)–(4.7)** 和 **(4.33)–(4.37)** 中取代了 (φ, μ, w)。

定理 4.7（一阶最优性条件）。假设 **(A1)–(A3)** 和 **(C1)– (C4)** 成立。设 u^* 是问题 **(P)** 的一个最优控制，其对应的状态为 $(\varphi^*, \mu^*, w^*) = \mathcal{S}(u^*)$，伴随变量为 (p, q, r)。那么，它必然满足变分不等式

$$\int_Q (r + \nu u^*)(u - u^*) \ge 0 \quad \textit{for every } u \in \mathcal{U}_{\rm ad}. \tag{4.40}$$

定理 4.7 的证明。根据凸分析的标准结果，对于问题 (P) 的每个最优控制 u^* ，一阶必要最优性条件可表示为如下抽象形式：

$$\langle D\mathcal{J}_{\mathrm{red}}(u^*), u - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}},$$

其中， $D\mathcal{J}_{\mathrm{red}}$ 表示约化代价泛函 $\mathcal{J}$的 Fr´échet 导数。鉴于定理 4.4 中所确立的控制到状态算子的 Fr´échet 可微性，以及代价泛函 $\mathcal{J}$ 在 (1.6) 中的形式，任何最优控制 u^* 都必然满足

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 \int_Q (\varphi^* - \varphi_Q)\xi + \alpha_2 \int_\Omega (\varphi^*(T) - \varphi_\Omega)\xi(T) + \alpha_3 \int_Q (w^* - w_Q)\zeta \\
&\quad + \alpha_4 \int_\Omega (w^*(T) - w_\Omega)\zeta(T) + \alpha_5 \int_Q (\partial_t w^* - w_Q')\partial_t \zeta \\
&\quad + \alpha_6 \int_\Omega (\partial_t w^*(T) - w_\Omega')\partial_t \zeta(T) + \nu \int_Q u^*(u - u^*) \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{U}_{\mathrm{ad}},
\end{aligned} \tag{4.41}$$

其中，(ξ, η, ζ) 是由定理 4.2 得到的、与 $(\varphi, \mu, w) = (\varphi^*, \mu^*, w^*) = \mathcal{S}(u^*)$ 及 $h = u - u^*$相关的线性化系统的唯一解。遗憾的是，上述表述在数值应用中并不十分实用，因为它依赖于线性化变量。不过，借助作为拉格朗日乘子的伴随变量，可以简化上述变分不等式。为此，我们用 p 检验 (4.3)，用 q 检验 (4.4)，用 r 检验 (4.5)，将所得等式相加，并对时间积分后进行分部积分。更准确地说，为避免写出通常意义下并不存在的拉普拉斯算子，我们应考虑注 4.3 和注 4.6 中提到的线性化系统和伴随系统的变分形式；同时，还需借助（众所周知的）分部积分时间广义形式。不过，为简洁起见，我们按上述方式进行，得到

$$\begin{aligned}
0 &= \int_Q [\partial_t \xi - \Delta \eta + \gamma \xi] p + \int_Q [-\eta - \Delta \xi + F''(\varphi)\xi - b\partial_t \zeta] q \\
&\qquad + \int_Q [\partial_t^2 \zeta - \Delta(\kappa_1 \partial_t \zeta + \kappa_2 \zeta) + \lambda \partial_t \xi - h] r \\
&= \int_Q \xi[-\partial_t p - \Delta q + \gamma p + F''(\varphi) q - \lambda \partial_t r] \\
&\qquad + \int_Q \eta[-\Delta p - q] + \int_Q \partial_t \zeta[-\partial_t r - \Delta(\kappa_1 r - \kappa_2 (1 \circledast r)) - bq] \\
&\qquad + \int_\Omega [\xi(T) p(T) + \partial_t \zeta(T) r(T) + \lambda \xi(T) r(T)] - \int_Q hr.
\end{aligned}$$

利用伴随系统 (4.33)–(4.37) 及其相应的终端条件，并进行分部积分，我们推得

$$\int_Q r(u - u^*) = \int_Q hr$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_Q \xi\, \alpha_1(\varphi^* - \varphi_Q) + \int_Q \partial_t\zeta\, [\alpha_3(1 \circledast (w^* - w_Q) + \alpha_4(w^*(T) - w_\Omega) + \alpha_5(\partial_t w^* - w'_Q)] \\
&\quad + \int_\Omega \xi(T)\, [\alpha_2(\varphi^*(T) - \varphi_\Omega) - \lambda\alpha_6(\partial_t w^*(T) - w'_\Omega)] \\
&\quad + \int_\Omega \partial_t\zeta(T)\, \alpha_6(\partial_t w^*(T) - w'_\Omega) + \int_\Omega \lambda\xi(T)\, \alpha_6(\partial_t w^*(T) - w'_\Omega) \\
&= \alpha_1 \int_Q (\varphi^* - \varphi_Q)\xi + \alpha_2 \int_\Omega (\varphi^*(T) - \varphi_\Omega)\xi(T) + \alpha_3 \int_Q (w^* - w_Q)\zeta \\
&\quad + \alpha_4 \int_\Omega (w^*(T) - w_\Omega)\zeta(T) + \alpha_5 \int_Q (\partial_t w^* - w'_Q)\partial_t\zeta + \alpha_6 \int_\Omega (\partial_t w^*(T) - w'_\Omega)\partial_t\zeta(T),
\end{aligned}
$$

因此，(4.41) 推出 (4.40)，证明至此完成。 □

推论 4.8. 假设定理 4.7 的假设均成立，并设 u^* 为一个最优控制，其对应的状态为 $(\varphi^*, \mu^*, w^*) = \mathcal{S}(u^*)$，伴随变量为 (p, q, r)。那么，只要 $\nu > 0$, u^* 就是 $-\frac{1}{\nu}r$ 在 $\mathcal{U}_{\rm ad}$上的 L^2-正交投影。此外，我们有最优控制 u^* 的逐点刻画：

$$
u^*(x,t) = \max\left\{u_{\min}(x,t), \min\{u_{\max}(x,t), -\frac{1}{\nu}\, r(x,t)\}\right\} \quad \textit{for a.a. } (x,t) \in Q.
$$

致谢

本研究部分由意大利教育、大学与研究部（MIUR）的卓越系计划（2018–2022）——帕维亚大学“F. Casorati”数学系资助。此外，PC 和 AS 谨此感谢 MIUR-PRIN 项目资助 2020F3NCPX“面向工业 4.0 的数学（Math4I4）”提供的其他资助，并感谢他们隶属于 INdAM（国家高等数学研究所）的 GNAMPA（Gruppo Nazionale per l’ Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni）。

参考文献

[1] C. Baiocchi，Hilbert空间中一阶和二阶抽象线性微分方程，Ann. Mat. Pura Appl. (4) 76 (1967), 233-304。[2] M. Brokate，J. Sprekels，《滞后与相变》，应用数学科学 121，施普林格，纽约，1996。[3] G. Caginalp，作为相场方程渐近极限的 Stefan 型与 Hele–Shaw 型模型，《物理评论 A》(3) 39 (1989), 5887-5896。[4] G. Caginalp，守恒相场系统的动力学：作为渐近极限的类 Stefan、Hele–Shaw 和 Cahn–Hilliard 模型，《IMA 应用数学杂志》 44 (1990), 77-94。[5] G. Caginalp，X. Chen，相场模型向其尖锐界面极限的收敛，《欧洲应用数学杂志》 9 (1998), 417-445。[6] C. Cavaterra，E. Rocca，H. Wu，肿瘤生长弥散界面模型的长时间动力学与最优控制，《应用数学与优化》 83 (2021), 739-787。

[7] B. Chen，C. Liu，带温度的 Allen–Cahn/Cahn–Hilliard系统的最优分布式控制，《应用数学与优化》 84 (2021), 增刊 2, S1639-S1684。[8] P. Colli，G. Gilardi，E. Rocca，J. Sprekels，肿瘤生长弥散界面模型的最优分布式控制，《非线性项》 30 (2017), 2518-2546。[9] P. Colli，G. Gilardi，E. Rocca，J. Sprekels，质量项中含控制的 Cahn–Hilliard–Oono系统的适定性与最优控制，Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S 15 (2022), 2135-2172。[10] P. Colli，G. Gilardi，A. Signori，J. Sprekels，具有热记忆和双障碍势的 Caginalp型非守恒相场模型的最优控制，Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S，早期在线发表 (2023), doi: 10.3934/dcdss.2022210（另见预印本 arXiv:2207.00375 [math.OC],(2022), 1-23）。[11] P. Colli，G. Gilardi，A. Signori，J. Sprekels，带源项和热记忆的 Cahn–Hilliard系统，预印本 arXiv:2207.08491 [math.AP], (2022), 1-28。[12] P. Colli，G. Gilardi，J. Sprekels，具有分数阶算子的 Caginalp型相场系统的最优控制，Pure Appl. Funct. Anal. 7 (2022), 1597-1635。[13] P. Colli，A. Signori，J. Sprekels，具有热记忆的 Caginalp型相场模型的分析与最优控制理论，Commun. Optim. Theory 4 (2022), doi.org/10.23952/cot.2022.4[14] P. Colli，A. Signori，J. Sprekels，涉及变分不等式的肿瘤生长模型中具有稀疏性的最优控制问题，J. Optim. Theory Appl. 194 (2022), 25-58。[15] E. Dolgi，熔岩灯和油醋汁能教会我们哪些细胞生物学知识，Nature 555 (2018), 300-302。[16] H. Garcke，K. F. Lam，A. Signori，具有机械效应的相场肿瘤模型的稀疏最优控制，SIAM J. Control Optim. 59 (2021), 1555-1580。[17] H. Garcke，K. F. Lam，E. Sitka，V. Styles，具有趋化性和主动运输的肿瘤生长 Cahn–Hilliard–Darcy模型，Math. Models Methods Appl. Sci. 26 (2016), 1095-1148。[18] A. Giorgini，M. Grasselli，A. Miranville，具有奇异势的 Cahn–Hilliard–Oono 方程，Math. Models Methods Appl. Sci. 27 (2017), 2485-2510。[19] A. E. Green，P. M. Naghdi，对热力学基本假设的重新审视，Proc. Roy. Soc. London Ser. A 432 (1991), 171-194。[20] A. E. Green，P. M. Naghdi，关于弹性固体中的无阻尼热波，J. Thermal Stresses 15 (1992), 253-264。[21] A. E. Green，P. M. Naghdi，无能量耗散热弹性，J. Elasticity 31 (1993), 189-208。[22] J. L. Lions，E. Magenes。《非齐次边值问题及其应用》，Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaft，181，Springer-Verlag，Berlin，1972。[23] T. T. Medjo，C. Tone，F. Tone，具有状态约束的 Cahn–Hilliard–Navier–Stokes 模型最优控制的最大值原理，Optimal Control Appl. Methods 42 (2021), 807-832。[24] V. Pata，M. Squassina，关于强阻尼波动方程，Comm. Math. Phys. 253 (2005), 511-533。[25] G. Peralta，非等温黏性两相流二维Cahn–Hilliard–Oberbeck–Boussinesq系统的分布式最优控制，《应用数学与优化》 84 (2021), 增刊 2, S1219-S1279。[26] P. Podio-Guidugli，一种用于热力学的虚功率表述，Contin. Mech. Ther modyn. 20 (2009), 479-487。[27] L. Scarpa，随机对流Cahn–Hilliard方程的分析与最优速度控制，J. Nonlinear Sci. 31 (2021), 第 2 期，论文编号 45，57 页。[28] A. Signori，长期治疗时间的惩罚及具有奇异势的 Cahn–Hilliard 型肿瘤生长模型的最优控制，Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A 41 (2021), 2519-2542。

[29] J. Simon，空间 $L^p(0,T;B)$ 中的紧集，《纯粹与应用数学年刊》（第4辑）146（1987），65-96。[30] J. Sprekels，F. Tr¨oltzsch，肿瘤生长建模中具有奇异势的相场系统的稀疏最优控制，ESAIM Control Optim. Calc. Var. 27（2021），增刊，论文编号 S26，共27页。[31] J. Sprekels，H. Wu，具有质量源的 Cahn–Hilliard–Darcy 系统的最优分布式控制，《应用数学与优化》83（2021），489-530。