arXiv:2303.00503v1 [math.AG] 1 Mar 2023

全亏格 WDVV递归、箭图与BPS不变量 S

PIERRICK BOUSSEAU 与 LONGTING WU

ABSTRACT. 令 X 为光滑射影曲面， D 为 X中的光滑有理丰沛除子。我们证明了局部三维簇 $\mathcal{O}_X(-D)$ 的主Gromov–Witten不变量的亏格0 WDVV方程的全亏格推广。证明依赖于全亏格 Gromov–Witten 不变量与无环箭图的精细Donaldson–Thomas不变量之间的对应关系。特别地，相应的BPS不变量可以用箭图表示模空间的贝蒂数表示。

1. INTRODUCTION

1.1. 全亏格递推。设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑射影曲面， D 是 X中的丰沛除子。设 $\beta \in H_2(X,\mathbb{Z})$ 是 X的一个非零曲线类。我们用 $\mathcal{M}_{g,m}(\mathcal{O}_X(-D)\ \beta)$ 表示到线丛 $\mathcal{O}_X(-D)$ 的全空间中的、类为 β 的 m 点标记亏格 g 稳定映射的模空间。由于 D丰沛，我们有 $D\cdot\beta>0$，因此 $\mathcal{M}_{g,m}(\mathcal{O}_X(-D)\ \beta)$ 与模空间 $\mathcal{M}_{g,m}(X,\beta)$ 重合；后者是到 X 的、类为β的 m 点标记亏格 g 稳定映射的模空间。然而，Gromov–Witten虚拟类 $[\mathcal{M}_{g,m}(\mathcal{O}_X(-D)\ \beta)]^{\mathrm{vir}}$ 通常不同于 $[\mathcal{M}_{g,m}(X,\beta)]^{\mathrm{vir}}$。我们考虑以下主 Gromov–Witten 不变量：

$$N_{g,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(\mathcal{O}_X(-D),\beta)]^{\mathrm{vir}}} \prod_{i=1}^{m} ev_i^*([pt])\,,$$

其中 $[pt]\in H^4(X)$ 是 X 的点类，而 $ev_i\colon \mathcal{M}_{g,\ m}(\mathcal{O}_X(-D)\ \beta)\to X$ 是对第 i 个标记点的评价映射。$\mathcal{M}_{g,\ m}(\mathcal{O}_X(-D)\ \beta)$ 的虚拟维数为 $T_{\log}\cdot\beta+m$，其中$T_{\log}=-K_X-D$，因此要使不变量可能非零，我们需要 $m=T_{\log}\cdot\beta$。特别地，我们需要 $T_{\log}\cdot\beta\geq 0$。固定 β 并对 g 求和，可得以下生成级数

$$F_{\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)} := \sum_{g\geq 0} N_{g,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)} h^{2g-2+T_{\log}\cdot\beta}.$$

根据 [Zin11、IP18、DW19、DIW21], 证明的 Gopakumar–Vafa猜想，我们知道 $F_{\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)} \in \mathbb{Q}((-q)^{-\frac{1}{2}}),$ 即 $(-q)^{-\frac{1}{2}}$ 的有理函数。这里， $\bar{q}$与 h 的关系为 $q=e^{\sqrt{-1}h}$。然而，这些 $F^{\mathcal{O}_X}{}_{(-D)\ \beta}$ 通常很难计算。本文给出一个简单统一的递归公式，用于计算 $F^{\mathcal{O}_X}{}_{(-D)\ \beta}$，其中进一步假设 D 的虚拟亏格为 0。这里，除子 D 的虚拟亏格 $g(D)$ 定义为 $g(D):=1-\frac{1}{2}T_{\log}\cdot D.$

定理 1.1. 设 X 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的光滑射影曲面， D 是X 中的一个虚拟亏格为 *0* 的丰沛除子。那么，我们有以下递归公式：

$$F_{\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)} = \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \beta_1,\beta_2>0}} F_{\beta_1}^{\mathcal{O}_X(-D)} F_{\beta_2}^{\mathcal{O}_X(-D)} \left(q^{D\cdot\beta_1}+q^{-D\cdot\beta_1}-2\right)\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1} \tag{1}$$

如果 $T_{\log}\cdot\beta\geq 3$。这里 $\binom{*}{*}$ 表示二项式系数。

注 1.2. 我们采用以下约定：

$$\binom{m}{n} = 0, \quad \text{if } n < 0 \text{ or } n > m\,.$$

因此，右侧求和中只涉及类 β_i $(i = 1,2)$，其中 $T_{\log} \cdot \beta_i > 0$ 出现在（1）中。

注 1.3。 如果放宽充足条件，仅要求 D 为数值有效，递归公式可能不成立。我们在附录A中给出一个反例。

根据 [LP84，推论 2，3]，条件 X 具有一个 D 虚拟亏格为 0 的丰沛除子，实际上迫使（X, D）只能是以下两种类型：

(1) (X, D) =（$\mathbb{P}^2$、直线）或（$\mathbb{P}^2$、圆锥曲线）；

(2) X 是一个 Hirzebruch 曲面，并且 $D \cdot f = 1$ 永远 $\quad$ y 纤维 f Hirzebruch 曲面的 X。

特别地，我们总能选择 D 使其有效且满足 $D \simeq \mathbb{P}^1$。取上述递推中 h 的最低次系数，可得到以下亏格零不变量的递推：

推论 1.4。 在与定理 *1.1*相同的假设下，我们有

$$N_{0,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)} = -\sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta \\ \beta_1,\beta_2>0}} N_{0,\beta_1}^{\mathcal{O}_X(-D)} N_{0,\beta_2}^{\mathcal{O}_X(-D)} (D \cdot \beta_1)^2 \binom{T_{\log} \cdot \beta - 3}{T_{\log} \cdot \beta_1 - 1} \tag{2}$$

若 $T_{\log} \cdot \beta \geq 3$。

目前，尚无格罗莫夫–维滕理论中全亏格递推（1）的直接证明。我们将先通过局部/相对对应 [GGR19，BFGW21] 以及 [Bou21] 中导出的 GW/箭图对应，将该递推转化为箭图 Donaldson–Thomas（DT）不变量的递推；该对应源自对数 Calabi–Yau 曲面的 GW/Kronecker 对应 [GP10，RSW12，RW13，RW21，Bou20]。随后，可以利用箭图模空间的几何性质推导箭图 DT 侧的递推，方法与 Reineke–Weist 在 [RW21]中的工作类似。

不过，亏格零递推可以直接在 Gromov–Witten 侧推导出来。事实上，它可由X， D）这一对的亏格零相对 Gromov–Witten 不变量所满足的相应 WDVV递归 [FW21] ，再结合[GGR19]中的局部/相对对应得到。此类证明的细节见附录B。从证明中可以清楚看出， D 必须是有理的。因此，可以将（1）视为全亏格 WDVV 方程的一个例子。

注 1.5. 高亏格 Gromov–Witten 不变量背后的另一种结构，是由猜想中的 Virasoro 约束给出的 [EHX97, EJX98]。在亏格 0 的情形下，已知 Virasoro 约束本质上可由 WDVV 方程推出 [LT98]，，因此也可以将 Virasoro 约束视为 WDVV 方程在高亏格情形下的推广。不过，递推式（1）与 Virasoro 约束之间存在重大差异：Virasoro 约束自然是按亏格逐一表述的，其生成级数对曲线类求和；而递推式（1）则是按曲线类逐一表述的，其生成级数对亏格求和。事实上，由于 D 是丰沛的，定理 1.1 中 $\mathcal{O}_X(-D)$ 的 Gromov–Witten 不变量可以视为射影紧化 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{O}_X(-D))$ 的 Gromov–Witten 不变量。后者是射影托里克簇，因此已知其满足 Virasoro 约束 [Giv01, Iri07,Tel12]。在附录 C 中，我们比较了由（1）和 Virasoro 约束导出的亏格一不变量递推式

：这两种递推式并不相同，而它们却能得到相同的不变量，这一点似乎极为深奥。

注 1.6. 近年来，[BFGW21、CI21、LP18、FRZZ19、Lho21、Wan19] 对局部 Calabi–Yau 三维簇的 Gromov-Witten 不变量，即 $\mathcal{O}_X$（$-D$）的 Gromov-Witten 不变量，其中 D 为一个反典范除子，进行了广泛研究。他们研究中的一个关键特征是所谓的全纯反常方程，它以递归方式约束局部 Calabi–Yau 三维簇的高亏格 Gromov-Witten 不变量。而在我们的类 Fano 情形中，新特征是上述全亏格 WDVV递归，它似乎取代了全纯反常方程的作用。探索其他 Fano 三维簇的这类全亏格递推将会很有意思。

1.2. **局部/相对对应**。作为迈向递推（1）的第一步，我们将 $\mathcal{O}_X(-D)$ 的局部 Gromov–Witten 不变量与对偶 $(X,\ D)$ 的相对 Gromov–Witten 不变量联系起来。令 $\mathcal{M}_{g,\ m}(X/D,\ \beta)$ 为模空间，其参数化类别为 β、映至 $(X,\ D)$ 的带 m 个标记点、亏格为 g 的相对稳定映射，且沿 D 仅有一个最大切触的接触条件。我们考虑以下最大接触相对 Gromov–Witten 不变量：

$$N_{g,\beta}^{X/D} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(X/D,\beta)]^{\mathrm{vir}}} \prod_{i=1}^{m} ev_i^*([pt])(-1)^g\lambda_g$$

其中 λ_g 是 Hodge 丛的最高陈类。与局部情形类似，根据维数约束，我们还需要 $m = T_{\log}\cdot\beta$ 才能使不变量可能非零。固定 β 并对 g求和，我们也得到如下生成级数：

$$F_\beta^{X/D} := \sum_{g\geq 0} N_{g,\beta}^{X/D} h^{2g-1+T_{\log}\cdot\beta}.$$

根据下述定理，它与 $F^{\mathcal{O}_X(-D)}_\beta$ 有关：

定理 1.7。在与定理 *1.1* 关于配对 $(X,\ D)$ 相同的假设下，有

$$F_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)} = F_\beta^{X/D}\frac{(-1)^{D\cdot\beta-1}}{2\sin(\frac{(D\cdot\beta)h}{2})}.$$

上述定理在第 2 节中利用局部/相对对应 [GGR19、BFGW21]得以证明。第一作者的工作 $F_\beta^{X/D}$ 进一步将生成级数与某些箭图模空间的庞加莱′多项式联系起来 [Bou21]。

1.3. **变形等价**。继续之前，我们先更详细地描述满足以下条件的那些配对 (X, D)：X 是一个 Hirzebruch 曲面，并且 $D\cdot f = 1$。

对于某个 $n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，我们有 $X = F_n = \mathbb{P}(\mathcal{O}(n)\oplus\mathcal{O})$。设 C_n 和 C_{-n} 分别为 X 的截面，其交数分别为 n 和 $-n$。$D\cdot f = 1$ 和 D 是充足的这一要求意味着，对于某个 $s>0$，有 $D = C_n + sf$。

从 F_n 到 F_{n+2} 的变形由下式给出

$$\left\{([x_0:x_1],[y_0:y_1:y_2],t)\in\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^2\times\mathbb{C}\middle| x_0^{n+2}y_1 - x_1^{n+2}y_0 + tx_0^{n+1}x_1y_2 = 0\right\}.$$

在这样的变形下，除子 $C_n+(s+1)f$的 F_n变形为除子 $C_{n+2}+sf$的F_{n+2}，而曲线类 $d_1C_{-n}+d_2f$变形为曲线类 $d_1C_{-n-2}+(d_1+d_2)f$。因此，递推式（1）中出现的交数 $T_{\log}\cdot\beta$和 $D\cdot\beta$保持不变。这

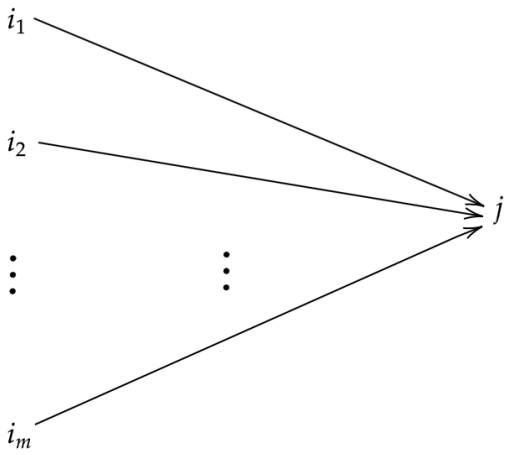
意味着递推式（1）与上述变形相容。因此，经过一系列变形后，我们得到

$$\begin{aligned}\mathrm{GW}(\mathcal{O}_{F_n}(-C_n - sf)) \simeq \mathrm{GW}(\mathcal{O}_{F_{n+2}}(-C_{n+2} - (s-1)f)) \simeq \\ \cdots \simeq \mathrm{GW}(\mathcal{O}_{F_{n+2s-2}}(-C_{n+2s-2} - f))\end{aligned}$$

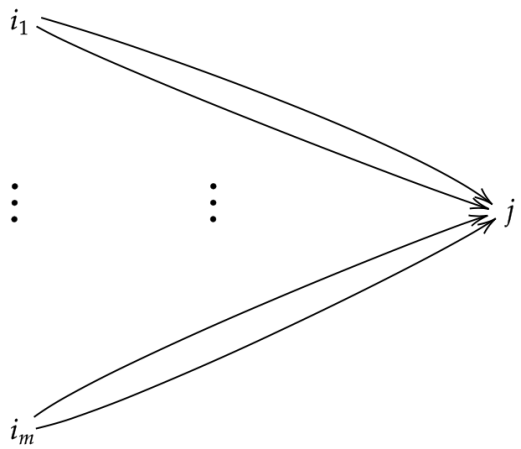
根据格罗莫夫–维滕理论的变形不变性。因此，只需考虑以下三种类型的配对 (X, D)：

$$(\mathbb{P}^2, \text{line}), \quad (\mathbb{P}^2, \text{conic}), \quad (F_n, C_n + f),\ n \geq 0\,. \tag{3}$$

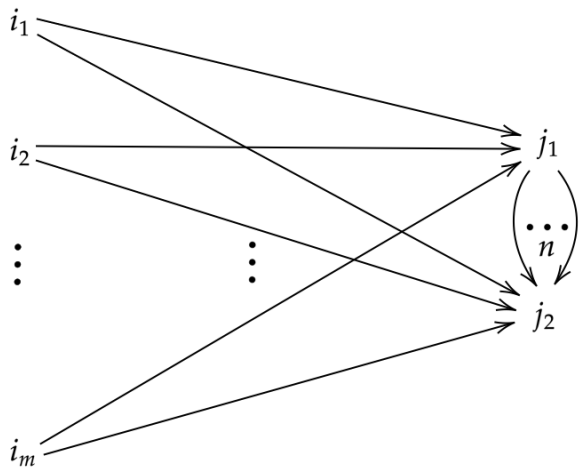
1.4. **箭图**。 对于上述每一种配对，都有一种与之关联的特定类型的箭图，其构造方式如下[Bou21]。我们在第 3.2 节简要回顾这一构造。结果可概括如下。对于 $(\mathbb{P}^2$,直线$)$，相应的箭图为



对于 $(\mathbb{P}^2$,圆锥曲线$)$，相应的箭图为



对于（F_n， $C_n + f$），相应的箭图为



请注意，对于这三种类型的箭图，左侧顶点的数量 m 并不固定。在第三种类型的箭图中，顶点 j_1 与 j_2 之间的箭数 n 与 F_n 的下标相同。要得到箭图模空间，我们需要指定维数向量。对于左侧的那些顶点，我们始终令其维数为一。对于由 j，j_1，j_2 索引的那些顶点，其维数可以是任意非负整数，我们分别将其记为 d，d_1，d_2 。

我们用 $M^L_{m,d}$，$M^C_{m,d}$ 和 $M^{F_n}_{m,d_1,d_2}$ 表示与第一、第二和第三类箭图相关联的、稳定性条件θ 总是给定为的 θ-半稳定箭图表示的模空间

$$\theta(\cdot) = \{\underline{d}, \cdot\}$$

其中 $\{\cdot,\cdot\}$ 是反对称化 Euler 形式，而 d 是与相应箭图关联的维数向量（更多详情见第 3.1 节）。

给定半稳定箭图表示的射影模空间 Y，相应的精细唐纳森–托马斯不变量 $\Omega_Y(q)$ 定义如下。如果 Y 的稳定轨迹非空，则

$$\Omega_Y(q) = (-q^{1/2})^{-\dim_{\mathbb{C}} Y} \sum_{i=0}^{2\dim_{\mathbb{C}} Y} \dim \mathrm{IH}^i(Y,\mathbb{Q})(-q^{1/2})^i \tag{4}$$

即，$\Omega_Y(q)$ 是交叉上同调的移位 Poincar´e 多项式 Y。否则，如果 Y 的稳定轨迹为空，则 $\Omega_Y(q) = 0$。基于动机霍尔代数定义的箭图 Donaldson–Thomas 不变量与此定义的等价性 [JS12,KS08,Rei10] 见 [MR19]。

定理 1.8 （[Bou21]）。对于以下三类成对对象 (X, D)：

$$(\mathbb{P}^2, \text{line}), \quad (\mathbb{P}^2, \text{conic}), \quad (F_n, C_n + f), n \geq 0,$$

我们有

$$\Omega_{M^{X/D}_\beta}(q) = F^{X/D}_\beta \frac{(-1)^{D\cdot\beta+1}}{(2\sin(h/2))^{T_{\log}\cdot\beta-1}}$$

若 $T_{\log}\cdot\beta > 0$，其中 $q = e^{\sqrt{-1}h}$，且 $M^{X/D}_\beta$ 由 (X, D) 和 β 确定如下：

(1) 若(X, D) =($\mathbb{P}^2$，直线) 且 $\beta = d[l]$，则 $M^{X/D}_\beta = M^L_{2d,d}$ 其中 $[l]$ 是直线类；

(2) 若$(X, D) = (\mathbb{P}^2$，圆锥曲线) 且 $\beta = d[l]$，则 $M_\beta^{X/D} = M_{d,}^C$；(3) 若$(X, D) = (F_n$，$C_n + f)$且 $\beta = d_1 C_{-n} + d_2 f$，则 $M_\beta^{X/D} = M_m^{F_n, d_1, d_2}$其中$m = T_{\log} \cdot \beta = (1-n)d_1 + d_2$。

结合定理 1.7 和 1.8，我们可以将递推从局部侧转移到箭图侧。我们将在第5 节说明如何根据以下箭图模空间的几何性质推导出箭图侧的递推。

1.4.1. 对偶性。 利用反射函子，我们得到以下同构：

定理 1.9。 (1) $M_{m,\ d}^L \simeq M_{m,\ m-d}^L$若 m、 d 互素且 $m - d > 0$；
(2) $M_{m、\ d}^C \simeq M_{m、\ 2m-d}^C$，若 m、 d 互素且 $2m - d > 0$；*(3)* $M_{m、\ d_1、\ d_2}^{F_0} \simeq M_{m、\ m-d_1、\ m-d_2}^{F_0}$，若 $m > \max\{d_1, d_2\}$且 m、 $d_1 + d_2$互素；*(4)* $M^{F_n}{}_{(1-n)d_1+d_2+1、\ d_1、\ d_2} \simeq M^{F_n}{}_{(1-n)d_1+d_2+1、\ d_1+1、\ d_2+n+1}$，若 $n > 0$且 $(1-n)d_1 + d_2 \geq 0$。

1.4.2. 其他几何性质。 我们还需要其他几何性质，概述如下。设 $M^{L,\text{带框架}\, m,d}$，$M^{C,\text{带框架}\, m,d}$，$M^{F_n,\text{带框架}\, m,d_1,d_2}$分别为与 $M_{m,d}^L$，$M_{m,d}^C$，$M_{m,d_1,d_2}^{F_n}$相关的带框架箭图模空间（更多详情见第 3.4 节）。

定理 1.10。 我们有以下同构
(1) $M^{L,m}{}_{,d}^{fr} \simeq M_{m+1,d}^L$，若 m 整除 d；*(2)* $M^{C,m}{}_{,d}^{fr} \simeq M_{m+1,d}^C$，若 m 整除 d；*(3)* $M^{F_0,m}{}_{d_1,,d_2}^{fr} \simeq M_{m+1,d_1,d_2}^{F_0}$，若 m 整除 $d_1 + d_2$；*(4)* $M^{F_n,fr}{}_{(1-n)d_1+d_2,d_1,d_2} \simeq M^{F_n}{}_{(1-n)d_1+d_2+1,d_1,d_2}$，若 $n > 0$ 且 $(1-n)d_1 + d_2 \geq 0$。

定理 1.11. 假设 $m > 0$。存在以下小解消：
(1) $M^{L,fr}{}_{m-1,d} \to M_{m,d}^L$ 当 m 整除 d 且 $m > d$时；*(2)* $M^{C,fr}{}_{m-1,d} \to M_{m,d}^C$ 当 m 整除 d 时；*(3)* $M^{F_0,fr}{}_{m-1,d_1,d_2} \to M_{m,d_1,d_2}^{F_0}$ 当 m 整除 $d_1 + d_2$ 且 $d_1, d_2 > 0$ 时；*(4)* $M^{F_n,fr}{}_{(1-n)d_1+d_2-1,d_1,d_2} \to M^{F_n}{}_{(1-n)d_1+d_2,d_1,d_2}$ 当 $n > 0$, $d_1 > 0$且 $d_2 > \max\{d_1 - 1, (n-1)d_1\}$时。

注 1.12. 定理 1.9、1.10 和1.11 中情形 (1) 的所有几何性质最初由 Reineke 和 Weist 在 [RW21] 中证明。我们将在第 3 节证明，定理1.9、1.10 和1.11 中的情形 (2)、(3)、(4) 可以通过对他们在 [RW21] 中的论证稍作推广而推导得出。

1.5。 **BPS不变量**。对于 $\mathcal{O}_X(-D)$，BPS不变量 $n^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{g,\beta}$ 由以下方式定义

$$F_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)} = \sum_g n_{g,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)} (2\sin(h/2))^{2g-2+T_{\log}\cdot\beta} \tag{5}$$

若 $T_{\log} \cdot \beta > 0$。结合变形等价以及定理1.7、1.8 和1.11，我们可以推得

定理 1.13。在与定理*1.1* 中关于(X, D)这一对的相同假设下，有

$$\sum_g n_{g,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)} (2\sin(h/2))^{2g} = (-1)^{D\cdot\beta-1} \Omega_{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}(q) \tag{6}$$

若 $T_{\log} \cdot \beta > 0$，其中 $q = e^{\sqrt{-1}h}$，且 $M^{\mathcal{O}_X(-D)\,\beta}$由$(X, D)$和 β按如下方式确定：

(1) 若 $(X, D) = (\mathbb{P}^2$, 直线) 且 $\beta = d[l]$，则 $M^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{\beta} = M^L_{2d-1,d}$；(2) 若 $(X, D) = (\mathbb{P}^2$, 圆锥曲线) 且 $\beta = d[l]$，则 $M^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{\beta} = M^C_{d-1,d}$；(3) 若 $(X, D) = (F_n, C_n + (s+1)f)$ 且 $\beta = d_1 C_{-n} + d_2 f$，则 $M^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{\beta} = M^{F_{n+2s}}_{m-1}, d_1, d_2 + sd_1$其中 $m = T_{\log} \cdot \beta = (1 - n - s)d_1 + d_2$。

通过计算 $M^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{\beta}$ 的维数，我们能够确定 BPS Castelnuovo 数[1]，其定义为

$$g_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)} := \sup\{g \mid n_{g,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)} \neq 0\}.$$

推论 1.14。对于定理 *1.1* 中关于有序对 (X, D) 的相同假设，并假设 $T_{\log} \cdot \beta > 0$, $M^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{\beta} \neq \emptyset$，我们有

(1) $g^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{\beta} = \frac{(K_X+\beta)\cdot\beta}{2} + 1$；(2) $n^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{g,\beta} = (-1)^{g+D\cdot\beta-1}$，若 $g = \frac{(K_X+\beta)\cdot\beta}{2} + 1 \geq 0$。

请注意，推论1.14 的情形 (1) 与属数-次数公式相符，而推论 1.14 的情形 (2) 实际上可由几何事实推出：模空间 $M^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{\beta}$ 是连通的。

1.6. **数值结果**。定理 1.1 给出了一种有效的方法来计算 $F^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{\beta}$，只要我们知道那些 $F^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{\beta}$，使得 $T_{\log} \cdot \beta < 3$。我们在第 6 节证明，对于以下五对：

$$(\mathbb{P}^2, \text{line}),\ (\mathbb{P}^2, \text{conic}),\ (F_n, C_n + f),\ n = 0, 1, 2,$$

那些初始 $F^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{\beta}$ 可以从箭图侧显式确定。我们还在第 6 节给出了上述五对的一些数值结果。至于这些对：

$$(F_n, C_n + f),\ n > 2,$$

初始的 $F^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{\beta}$ 与 n-克罗内克箭图的箭图 DT 不变量有关，其中 $n > 2$，目前尚无已知的显式闭式公式（更多细节见第 6 节）。

1.7. **论文结构**。本文结构如下。在第 2 节，我们简要介绍局部/相对对应，并证明定理1.7。在第3 节，简要回顾 GW/箭图对应后，我们证明定理 1.9、1.10 和1.11。在第 4 节，结合局部/相对对应与 GW/箭图对应，我们证明关于 BPS不变量的定理 1.13 和推论 1.14 。在第5 节，我们证明主要定理，即关于全亏格 WDVV递推的定理 1.1 。在第6 节，我们根据全亏格 WDVV递推给出一些数值结果。在附录 A 中，我们给出一个反例，表明定理 1.1 中的充足条件不能放宽为数值有效条件。在附录 B 中，我们完全从 Gromov-Witten 理论方面给出推论 1.4 的另一种证明。在附录 C 中，我们将本文的递推与由 Virasoro 约束导出的递推进行比较。

1.8. **致谢**。感谢 Rahul Pandharipande、Honglu Fan、Shuai Guo、Hyenho Lho 和 Michel van Garrel 与我们进行了有益的讨论。本项目得到国家重点研发计划（编号：2022YFA1006200）资助。

[1]我们对 BPS Castelnuovo 数的定义与 Doan 和 Walpuski 在 [DW19] 中的定义不同；他们将 BPS Castelnuovo 数定义为下确界 $\{g \mid n^{\mathcal{O}_X(-D)}{}_{g,\beta} = 0\}$。

2. Local/relative correspondence

设 D 是光滑射影曲面 X 上的有理光滑丰沛除子 $\mathbb{C}$。本节作为导向递归公式（1）的第一步，将证明定理1.7 ，该定理将 $\mathcal{O}_X$（$-D$）的局部 Gromov–Witten 不变量生成级数与相对 Gromov–Witten 不变量生成级数联系起来，后者对应于这一对（X， D）。

2.1. **局部/相对对应**。 我们将通过应用1.7中建立的高亏格局部/相对对应来证明定理 [BFGW21]，该对应将 $\mathcal{M}_g(\mathcal{O}_X(-D)\ \beta)$ 的虚循环表示为

$$\frac{(-1)^{\beta\cdot D-1}}{\beta\cdot D}F_*\left((-1)^g\lambda_g\cap[\overline{\mathcal{M}}_g(X/D,\beta)]^{\mathrm{vir}}\right)+\sum_{\mathcal{G}\in G_{g,\beta}}\frac{1}{|\operatorname{Aut}(\mathcal{G})|}(\tau_{\mathcal{G}})_*\left(C_{\mathcal{G}}\cap[\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{G}}]^{\mathrm{vir}}\right),$$

其中，各项的描述如下。映射 $F\colon \mathcal{M}_g(X/D,\beta)\to\mathcal{M}_g(X,\beta)$ 是通过忘却唯一的相对标记并进行稳定化得到的。此外，$G_{g,\beta}$ 是一组星形图 $\mathcal{G}=(V,E,g,b)$，其形式如下： $\mathcal{G}$的顶点集 V可分解为 $\{v\}\coprod V_1$，使得对每个 $v_i\in V_1$，v 与 v_i之间存在唯一一条边，而 $\mathcal{G}$ 的所有边都具有这种形式。此外，我们有映射 $\mathrm{g}:V\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 和$b\colon V\to H_2(D,\mathbb{Z})\cup H_2(X,\mathbb{Z})$，分别为每个顶点指定一个亏格和一个曲线类，使得对每个 $v_i\in V_1$，$b(v)\in H_2(D,\mathbb{Z})$， $b(v_i)\in H_2(X,\mathbb{Z})$，$\mathrm{g}(v)=g$，且 $\sum_{v_i\in V_1}b(v_i)+\iota_*(b(v))=\beta$，其中 $\iota\colon D\hookrightarrow X$ 是 D 到 X 的包含映射。

由图 $\mathcal{G}\in G_g$ 装饰的 $\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{G}}$ β 模空间是

$$\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{G}}=\left(\prod_{v_i}\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{g}(v_i)}(X/D,b(v_i))\right)\times_{D^{|E|}}\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{g}(v),|E|}(D,b(v)),$$

其中 $|E|$ 是 $\mathcal{G}$ 的边数。 $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ 的虚循环通过与对角映射 $\Delta\colon D^{|E|}\to D^{|E|}\times D^{|E|}$ 相关联的 Gysin 映射定义如下：

$$[\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{G}}]^{\mathrm{vir}}:=\Delta^!\left(\prod_{v_i\in V_1}\left[\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{g}(v_i)}(X/D,b(v_i))\right]^{\mathrm{vir}}\times\left[\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{g}(v),|E|}(D,b(v))\right]^{\mathrm{vir}}\right).$$

最后， $C_{\mathcal{G}}$ 是$\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ 的 Chow 环中的某个类，其中包含因子 $\prod_{v_i\in V_1}\lambda_{g_{v_i}}$ （详见[BFGW21第2 节2] ），而 $\tau_{\mathcal{G}}$ 是从 $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ 到$\mathcal{M}_g$（X， β）的自然粘合映射。

在我们的情形中，局部不变量 $N^{\mathcal{O}_X(-D),\ g,\ \beta}$ 的定义还包括点类的插入。因此，我们需要将上述表达式 $[\mathcal{M}_g(\mathcal{O}_X(-D)\ \beta)]^{\mathrm{vir}}$ 推广到以下情形：

$$\prod_{i=1}^m ev_i^*([pt])\cap[\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(\mathcal{O}_X(-D),\beta)]^{\mathrm{vir}}. \tag{7}$$

按照与 [BFGW21], 中相同的论证，可得（7）可表示为

$$\prod_{i=1}^m ev_i^*([pt])\cap\left(\frac{(-1)^{\beta\cdot D-1}}{\beta\cdot D}F_*\left((-1)^g\lambda_g\cap[\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(X/D,\beta)]^{\mathrm{vir}}\right)+\sum_{\mathcal{G}\in G_{g,\beta,m}}\frac{1}{|\operatorname{Aut}(\mathcal{G})|}(\tau_{\mathcal{G}})_*\left(C_{\mathcal{G}}\cap[\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{G}}]^{\mathrm{vir}}\right)\right).$$

这里，每个图 $\mathcal{G}=(V,E,g,b,a)\in G_{g,\beta,m}$ 都包含附加数据 a，用于将 m 标记分配给 V_1 中的顶点。令 $|a^{-1}(v_i)|$ 表示

分配给顶点 $v_i \in V_1$ 的附加标记数。于是 $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ 变为

$$\left(\prod_{v_i} \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{g}(v_i),|a^{-1}(v_i)|}(X/D, b(v_i))\right) \times_{D^{|E|}} \overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{g}(v),|E|}(D, b(v))$$

而 $C_{\mathcal{G}}$ 的定义与 $m = 0$ 情形中的定义相同。

2.2. **定理 1.7的证明**。 现在令 $m = T_{\log} \cdot \beta$ 并将次数映射应用于（7），得到 $N^{\mathcal{O}_X(-D)}_{g,\beta}$。如果将次数映射应用于

$$\prod_{i=1}^{m} ev_i^*([pt]) \cap \left(\frac{(-1)^{\beta\cdot D-1}}{\beta \cdot D} F_* \left((-1)^g \lambda_g \cap [\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(X/D, \beta)]^{\mathrm{vir}}\right)\right)$$

那么得到 $\frac{(-1)^{D\cdot\beta-1}}{D\cdot\beta} N^{X/D}_{g,\beta}$。剩下需要研究的是

$$\prod_{i=1}^{m} ev_i^*([pt]) \cap \left(\sum_{\mathcal{G}\in G_{g,\beta,m}} \frac{1}{|\operatorname{Aut}(\mathcal{G})|} (\tau_{\mathcal{G}})_* \left(C_{\mathcal{G}} \cap [\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{G}}]^{\mathrm{vir}}\right)\right). \tag{8}$$

由于所有标记都被分配给 V_1 中的顶点，并且 $C_{\mathcal{G}}$ 总是包含一个因子 $\prod_{v_i\in V_1} \lambda_{\mathrm{g}(v_i)}$，因此分配给因子 $\prod_{v_i\in V_1} \mathcal{M}_{\mathrm{g}(v_i),|a^{-1}(v_i)|}(X/D, b(v_i))$ 中 $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ 的上同调类的次数至少为

$$\deg\left(\prod_{i=1}^{m} ev_i^*([pt]) \prod_{v_i\in V_1} \lambda_{\mathrm{g}(v_i)}\right) = 2m + \sum_{v_i\in V_1} \mathrm{g}(v_i)\,.$$

给定虚拟维数

$$\dim\left(\prod_{v_i\in V_1} \left[\overline{\mathcal{M}}_{\mathrm{g}(v_i),|a^{-1}(v_i)|}(X/D, b(v_i))\right]^{\mathrm{vir}}\right) = m + \sum_{v_i\in V_1} \left(T_{\log}\cdot b(v_i) + \mathrm{g}(v_i)\right),$$

为了使（8）有非零贡献，我们需要

$$m + \sum_{v_i\in V_1} \left(T_{\log}\cdot b(v_i) + \mathrm{g}(v_i)\right) \geq 2m + \sum_{v_i\in V_1} \mathrm{g}(v_i)\,,$$

这等价于

$$\sum_{v_i\in V_1} T_{\log}\cdot b(v_i) \geq m = T_{\log}\cdot\beta = T_{\log}\cdot\iota_*(b(v)) + \sum_{v_i\in V_1} T_{\log}\cdot b(v_i),$$

也就是说，$T_{\log}\cdot\iota_*(b(v)) \leq 0$。由于 D 是一条曲线，$\iota_*(b(v))$ 是 D的基本类的倍数，因此 $T_{\log}\cdot\iota_*(b(v)) = nT_{\log}\cdot D$，其中 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 是 $b(v) \in H_2(D,\mathbb{Z})$ 的次数。由伴随公式可知，D 是有理曲线这一条件进一步意味着 $T_{\log}\cdot D = 2 > 0$。因此必有 $n = 0$。在这种情况下，不可能在因子 $\prod_{v_i\in V_1} \mathcal{M}_{\mathrm{g}(v_i),|a^{-1}(v_i)|}(X/D, b(v_i))$ 上添加更多插入项。因此，若对 (8) 应用次数映射，对角类 $[\Delta] \in H^2(D^{|E|}\times D^{|E|},\mathbb{Z})$ 的 Künneth 分解会向 $\mathcal{M}_{\mathcal{G}}$ 中的因子 $\mathcal{M}_{\mathrm{g}(v),|E|}(D, b(v))$ 加入 $|E|$ 个 D 的点类插入项。由于 $b(v) = 0$，非零不变量中不可能向 $\mathcal{M}_{\mathrm{g}(v),|E|}(D, 0)$ 加入多于一个点类插入项。这意味着 $|E| = 1$。

由上述讨论可知，若对 (8) 应用次数映射，那么只有满足以下条件的 $\mathcal{G} \in G_{g,\ \beta,\ m}$

$$\overline{\mathcal{M}}_{\mathcal{G}} = \overline{\mathcal{M}}_{g_1,m}(X/D,\beta) \times_D \overline{\mathcal{M}}_{g_2,1}(D,0)$$

在以下情况下给出非零贡献 $g_1+g_2=g,\quad g_2>0$。根据类 $C_{\mathcal{G}}$ 在[BFGW21第 2 节中的描述, 2], 相应的贡献为

$$N_{g_1,\beta}^{X/D}(-1)^{g_2-1+D\cdot\beta}(D\cdot\beta)^{2g_2-1}\int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g_2,1}(D,0)]^{\mathrm{vir}}}\psi_1^{2g_2-2}ev_1^*(w)\,.$$

这里，w 是 D 的点类，而 ψ_1 是与唯一标记相关联的ψ类。次数为零的 Gromov–Witten 不变量由曲线模空间上的 Hodge 积分确定：

$$\int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g_2,1}(D,0)]^{\mathrm{vir}}}\psi_1^{2g_2-2}ev_1^*(w)=(-1)^{g_2}\int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g_2,1}]}\psi_1^{2g_2-2}\lambda_{g_2},,$$

因此我们得出

$$N_{g,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)}=\sum_{g_1+g_2=g}N_{g_1,\beta}^{X/D}(-1)^{D\cdot\beta-1}(D\cdot\beta)^{2g_2-1}\int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g_2,1}]}\psi_1^{2g_2-2}\lambda_{g_2}. \tag{9}$$

这里我们简单地令 $\int_{[\underline{\mathcal{M}}_{g_2,1}]}\psi_1^{2g_2-2}\lambda_{g_2}=1$ 当 $g_2=0$，以便将项 $\underset{D\cdot\beta}{(-1)^{D\cdot\beta-1}}N_{g\ \beta}^{X/D}$ 纳入（9）的右侧。出现在（9）中的 Hodge 积分已由 Faber 和 Pandharipande 在 [FP00]中计算得到：定理1.7:

$$F_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}=F_\beta^{X/D}\frac{(-1)^{D\cdot\beta-1}}{2\sin(\frac{(D\cdot\beta)h}{2})}$$

由（9）以及 [FP00，定理 2]可得。

3. GW/quiver correspondence

本节回顾箭图表示以及 [Bou21], 的 GW／箭图对应之后，证明定理1.9、1.10、1.11，讨论箭图表示模空间的几何性质。

3.1. **箭图模空间**。

本节简要介绍箭图表示的模空间。主要参考文献为 [Rei08]。我们始终在 $\mathbb{C}$上工作。

箭图 Q 由有限个顶点 Q_0 和有限个箭 $Q_1=\{\alpha$ 组成：$i\to j|i,\ j\in Q_0\}$。设

$$\mathbb{Z}Q_0 \coloneqq \bigoplus_{i\in Q_0}\mathbb{Z}e_i$$

其中 $\{e_i\}_{i\in Q_0}$ 构成一个自然基。$\mathbb{Z}Q_0$ 上的欧拉形式定义为

$$\langle \underline{a},\underline{b}\rangle \coloneqq \sum_{i\in Q_0}a_ib_i-\sum_{\alpha:i\to j\in Q_1}a_ib_j$$

对于 $\underline{\ } a=(a_i)^{i\in Q_0},\ \ b=(b_i)_{i\in Q_0}\in\mathbb{Z}Q_0$。我们进一步用 $(\underline{a},\underline{\ b})\coloneqq\langle\underline{a},\underline{b}\rangle+\langle\underline{b},\underline{a}\rangle$ 表示对称化 Euler 形式，并用 $\{a,b\}\coloneqq\langle a,b\rangle-\langle b,a\rangle$表示反对称化 Euler 形式。

箭图 Q的一个表示由按顶点 $i\in Q_0$ 索引的向量空间组 (V_i)，以及按箭 $\alpha:i\to j$ 索引的线性态射组 $(V_\alpha:\ V_i\to V_j)$ 组成。两个表示 V,W 之间的态射由一组线性态射 $\{f_i:V_i\to W_i\}_{i\in Q}$ 组成，且对于任意箭 $\alpha:\ i\to j,\quad f_j\circ V_\alpha=W_\alpha\circ f_i$ 成立。复形

固定箭图 Q的表示在逐分量复合下构成一个范畴。记作 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} Q$。实际上，$\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} Q$ 是一个具有有限长度的 $\mathbb{C}$-线性阿贝尔范畴。

设 $\underline{d} = (\dim V_i)_{i\in Q_0}$ 是一个维数向量。向量空间

$$R_{\underline{d}}(Q) := \bigoplus_{\alpha: i\to j} \mathrm{Hom}(V_i, V_j)$$

参数化了所有具有固定维数的 Q 表示。群

$$G_{\underline{d}}(Q) := \bigoplus_{i\in Q_0} GL(V_i)$$

自然地作用于 R_d ,_如下所示:

$$\begin{aligned} G_{\underline{d}}(Q) \times R_{\underline{d}}(Q) &\longrightarrow R_{\underline{d}}(Q) \\ (g_i)_{i\in Q_0} \circ (V_\alpha)_{\alpha: i\to j} &\longmapsto (g_j \circ V_\alpha \circ g_i^{-1})_{\alpha: i\to j} \end{aligned}$$

我们希望构造一个模空间，用于参数化箭图表-示的同构类。将 R_d 除以 G_d 所得到的商空间可能不会产生有趣的模空间。例如，如果 Q 是无圈的，也就是说，如果 Q 中不存在有向圈，那么

$$R_{\underline{d}} // G_{\underline{d}} := \mathrm{Spec}\,(\mathbb{C}[R_{\underline{d}}]^{G_{\underline{d}}})$$

就只是一个点。为了得到良好的箭图表示模空间，我们需要引入一个稳定性条件。一个稳定性条件

$$\theta = \sum_{i\in Q_0} \theta_i e_i^*$$

是对偶空间 $(\mathbb{Z}Q_0)^*$中的一个元素，其中 $\{e_i^*\}_{i\in Q_0}$ 是对偶基，即 $\theta(d) = \sum_{i\in Q_0} \theta_i d_i$。

稳定性条件 θ 诱导出一个斜率函数 $\mu: \mathbb{N}Q_0 \setminus \{0\} \to \mathbb{Q}$，定义为

$$\mu(\underline{d}) = \frac{\theta(\underline{d})}{|\underline{d}|}$$

其中 $|d| = \sum_{i\in Q_0} d_i$。若对 V的所有非零真子表示 U，均有 $\mu(U) \le \mu(V)$（分别为 $\mu(U) < \mu(V)$），则称表示 V为 θ-半稳定（分别为 θ-稳定）。我们用$R_d^{\theta-sst}$（分别用 $R_d^{\theta-st}$）表示 R_d中 θ-半稳定（分别为 θ-稳定）表示的集合。商空间 $M_d^{\theta-sst} = R_d^{\theta-sst} // G_d$参数化闭轨道。[2]模空间 $M_d^{\theta-sst}$包含一个扎里斯基开子集 $M_d^{\theta-st} = R_d^{\theta-st}/G_d$，它参数化 R_d中的 θ-稳定表示。若 $M_d^{\theta-st}$非空，则 $M_d^{\theta-sst}$和 $M_d^{\theta-st}$均不可约，维数为 $1- < d, d >$。

除非另有说明，本文中针对给定维数向量 $\theta(\cdot) = \{d, \cdot\}$ 的稳定性条件始终假定为 d。沿用 [AP19、MP20、AB22],$\theta = \{d, \cdot\}$ 中的术语，这是反吸引子稳定性条件。

[2]闭轨道与 θ-多稳定表示的同构类一一对应。

3.2. **GW/箭图对应**。 本小节将说明定理1.8 如何由 [Bou21]的 GW/箭图对应推出。

设定 [Bou21] 是一个定义在 Y 上的光滑射影曲面 $\mathbb{C}$，具有两个光滑且非空的除子 D_1 与 D_2 横截相交，并且它们的并 $D_1 \cup D_2$ 是反典范的。我们考虑数对（Y， D_1）的以下最大接触相对 Gromov–Witten 不变量：

$$N_{g,\beta}^{Y/D_1} := \int_{[\overline{\mathcal{M}}_{g,m}(X/D,\beta)]^{\mathrm{vir}}} \prod_{i=1}^{m} ev_i^*([pt])(-1)^g \lambda_g$$

其中 β 是 Y 上的一个曲线类，满足 $\beta \cdot D_1 > 0$ 且 $\beta \cdot D_2 > 0$， $m = \beta \cdot D_2$，而 λ_g 是 Hodge 丛的最高陈类。 [Bou21] 的主要结果是构造一个箭图 Q_β^{Y/D_1} 和一个维数向量 d（β），使得若 Q_β^{Y/D_1} 是无圈的，则根据[Bou21，定理 1，2]

$$\Omega_{M_\beta}(q) = (-1)^{\beta \cdot D_1 + 1} \frac{1}{(2\sin(h/2))^{\beta \cdot D_2 - 1}} \sum_{g \geq 0} N_{g,\beta}^{Y/D_1} \hbar^{2g-1+\beta \cdot D_2}, \tag{10}$$

其中 M_β 是 Q_β^{Y/D_1} 的 θ-半稳定表示的模空间，维数为 $d(\beta)$，其中 $\theta = \{d(\beta)\ -\}$，且 $q = e^{\sqrt{-1}h}$。

对于定理 1.8 中的前两对，可以取 $(Y, D_1) = (X, D)$：($\mathbb{P}^2$, 直线) 见 [Bou21, 6.1]，($\mathbb{P}^2$, 圆锥曲线) 见 [Bou21, 6.2]。对于每种情况，箭图 Q_β^{Y/D_1} 和维数向量 $d(\beta)$ 均如定理 1.8 的陈述所给出。利用 $\beta \cdot D_2 = \beta \cdot (-K_X - D) = T_{\log} \cdot \beta$，可推出这些配对的定理 1.8 由 (10) 得出。

对于 $(F_n, C_n + f)$，我们利用这对对象与配对 $(F_{n-2}, C_{n-2} + 2f)$ 变形等价这一事实，其中 $\beta = d_1 C_{-n} + d_2 f$ 上的类变形为 F_{n-2} 上的类 $\beta' = d_1 C_{-(n-2)} + d_2 f$。配对 $(Y, D_1) = (F_{n-2}, C_{n-2} + 2f)$ 在 [Bou21, 6.10] 中有所讨论。 [Bou21, 6.10] 中给出的箭图 $Q_{\beta'}^{Y/D_1}$ 和维数向量 $d(\beta')$，通过对右下顶点进行变异，与定理 1.8 中的箭图和维数向量相关。一般而言，对于 $(Y, D_1 \cup D_2)$ 的每一种托里克模型选择，[Bou21] 都会定义一个箭图 $Q_{\beta'}^{Y/D_1}$，而箭图变异对应于托里克模型的变化。因此，定理 1.8 中的箭图和维数向量，可直接通过为托里克模型作不同选择时 [Bou21] 的构造得到。由此可得，$(F_n, C_n + f)$ 的定理 1.8 同样由 (10) 得出。

注 3.1。 遗憾的是， [Bou21定理 1 的表述中存在两个小错误。2] 正如已发表版本的 [Bou21] 中所写。首先，包含 $2\sin(h/2)$ 的前因子并不正确。其次，箭图 DT 不变量所取的稳定性条件是“最大非平凡稳定性条件”，而不是反吸引子稳定性条件。最新版的 arXiv 版本 [Bou21] 已修正了这两个错误。

3.3. **对偶性**。 在本小节中，我们证明定理1.9。首先，让我们按照 [BGP73、Wei13]的做法，简要介绍反射函子。

对于一个箭图 $Q = (Q_0, Q_1)$，如果没有从 i 出发的箭（相应地，没有以 i为终点的箭），我们称顶点 $i \in Q_0$ 为汇点 （相应地，为源点）。设 i 为一个顶点。于是，我们用 $\sigma_i Q$ 表示将所有从 i出发或以其为终点的箭反向后的箭图。我们将定义一对反射函子

$$R_i^+, R_i^- : \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} Q \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} \sigma_i Q$$

分别对应汇点和源点的情形。设 V、 W 是 $\mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} Q$ 的两个表示， $f\colon V \to W$ 是它们之间的一个态射。

(I) 我们先从 i 是汇点的情形开始。反射函子 R_i^+ 可以按如下方式构造。我们令 $R_i^+V = X$，使得对于 $j \neq i$ 有 $X_j = V_j$，而 X_i 由下式的核给出：

$$(V_\alpha): \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ t(\alpha)=i}} V_{s(\alpha)} \longrightarrow V_i$$

其中 s, t: $Q_1 \to Q_0$ 是两个自然映射，使得对于每个箭 α，它始于 $s(\alpha)$，终于 $t(\alpha)$。对于满足 $t(\alpha) \neq i$ 的箭 α，我们定义线性态射 $X_\alpha = V_\alpha$。注意，若 $t(\alpha) = i$，则需要反转箭 α 的方向，从而得到 $\sigma_i Q$中的箭 $\sigma_i\alpha$。相应的线性态射 $X_{\sigma_i\alpha}: X_i \to V_{s(\alpha)} = X_{t(\sigma_i\alpha)}$ 由自然包含映射与投影的复合给出：

$$X_i \hookrightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ t(\alpha)=i}} V_{s(\alpha)} \longrightarrow V_{s(\alpha)}.$$

类似地，我们可以构造 $R_i^+W = Y$。对于态射 $R_i^+f = g$: $X \to Y$，令 $g_j = f_j$，若$j \neq i$，并将 g_i: $X_i \to Y_i$ 定义为线性态射的限制

$$(f_{s(\alpha)}): \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ t(\alpha)=i}} V_{s(\alpha)} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ t(\alpha)=i}} W_{s(\alpha)}.$$

(II) 接下来考虑 i 是源点的情形。反射函子 R_i^- 可按如下方式构造。令 $R_i^-V = X'$。若 $j \neq i$，仍有 $X'_j = V_j$。但此时 X'_i 由以下对象的余核给出：

$$(V_\alpha): V_i \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ s(\alpha)=i}} V_{t(\alpha)}.$$

对于满足 $s(\alpha) \neq i$ 的箭 α，线性态射为 $X'_\alpha = V_\alpha$。若 $s(\alpha) = i$，则 $\sigma_i\alpha$ 的方向与 α 相反。相应的线性态射 $X'_{\sigma_i\alpha}: X'_{s(\sigma_i\alpha)} = V_{t(\alpha)} \to X'_i$ 由自然包含映射与商映射的复合给出：

$$V_{t(\alpha)} \hookrightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ s(\alpha)=i}} V_{t(\alpha)} \longrightarrow X'_i.$$

令 $R_i^-W = Y'$。对于态射 $R_i^-f = g'$: $X' \to Y'$，若 $j \neq i$，令 $g'_j = f_j$；而 g'_i: $X'_i \to Y'_i$ 由以下对象诱导：

$$(f_{t(\alpha)}): \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ s(\alpha)=i}} V_{t(\alpha)} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{\alpha\in Q_1\\ s(\alpha)=i}} W_{t(\alpha)}.$$

反射函子满足以下性质。设 E_i 为单表示，使得 $(E_i)_i = \mathbb{C}$，且当 $j \neq i$ 时 $(E_i)_j = 0$。

定理 3.2 ([BGP73])。设 i 为汇点（分别地，为源点），且 V 为不可约表示[3]。则反射函子 R_i^+ 具有以下性质（若 i 为源点，则将 $+$ 替换为 $-$）：

(1) *If* $V = E_i$, *then* $R_i^+V = 0$;

[3]若满足 $V \neq 0$，且 $V = V_1 \oplus V_2$ 蕴含 $V_1 = 0$ 或 $V_2 = 0$，则称表示 V为不可约。

(2) 若 $V \neq E_i$，则 R_i^+V 不可约，且 $R_i^- R_i^+ V \simeq V$。此外，维数向量 维数 $R_i^+V = r_i($维数$V)$ 其中 r_i： $\mathbb{Z}Q_0 \to \mathbb{Z}Q_0$ 由下式给出

$$r_i(x) = x - (x, e_i)e_i.$$

这里， e_i 是第 i 个坐标向量，而 $(\cdot, \cdot)$ 是前面给出的对称化 *Euler* 形式。

我们还需要以下对偶函子。令 Q^{op} 为由Q 反转箭的方向得到的反向箭图。向量空间对偶 $\mathrm{Hom}_k(-, k)$ 诱导出自然的对偶函子：

$$D : \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} Q \longrightarrow \mathrm{Rep}_{\mathbb{C}} Q^{op}$$

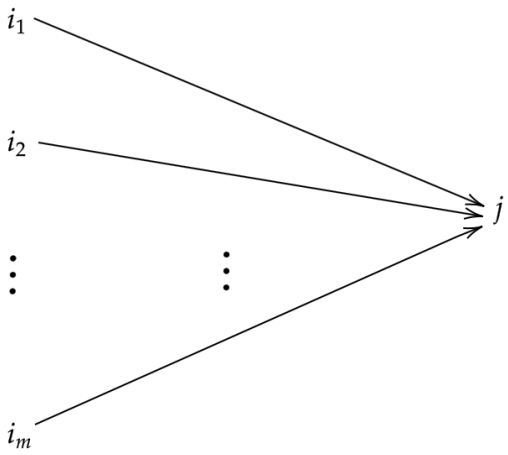
它将箭图表示映射为其对偶表示。对于一个 θ-半稳定表示，其对偶表示是 $(-\theta)$-半稳定的。因此，它自然诱导出以下同构

$$D : M_{\underline{d}}^{\theta-sst}(Q) \simeq M_{\underline{d}}^{(-\theta)-sst}(Q^{op}).$$

现在，定理 1.9 中出现的同构由反射函子与上述对偶函子共同诱导。

定理 *1.9* 的证明。 我们从情形 (1) 开始： $M^L_{m,\ d} \simeq M^L_{m,\ m-d}$，若 m、 d 互素且$m-d>0$；该同构最早由 Reineke 和 Weist 在 [RW21] 中建立，他们证明了 $M^L_{m,\ d}$ 和 $M^L_{m,\ m-d}$ 都同构于同一个几何商空间。

我们先从上文给出的反射函子和对偶函子的角度重新解读他们的证明。随后我们将证明，定理1.9 的所有其他情形都可以通过类似的论证得出。此处的箭图 Q 为

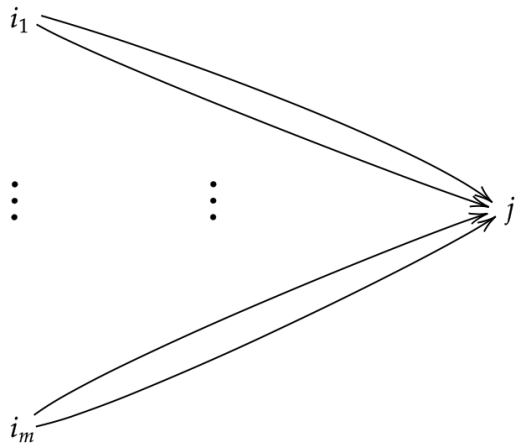


其维数向量为 $d = \sum_{k=1}^m e_{i_k} + de_j$。 $M^L_{m,\ d}$就是与上述箭图相关、维数向量固定为 d 的 θ-半稳定表示的模空间 $M_d^{\theta-sst}$。注意，稳定性条件 θ 总是假设为 $\theta(\cdot) = \{d, \cdot\}$。于是容易验证 $M_d^{\theta-sst} = M_d^{\theta-st}$，因为 m， d 互素。 –

顶点 j 是一个汇点，因此我们可以应用反射函子 R_j^+。再与对偶函子 D进行复合后，$D \circ R_j^+$会将 $M^L_{m,d}$ 中的一个 θ-稳定表示（它总是不可约的）映射为上述箭图 Q 的一个表示，其维数向量为

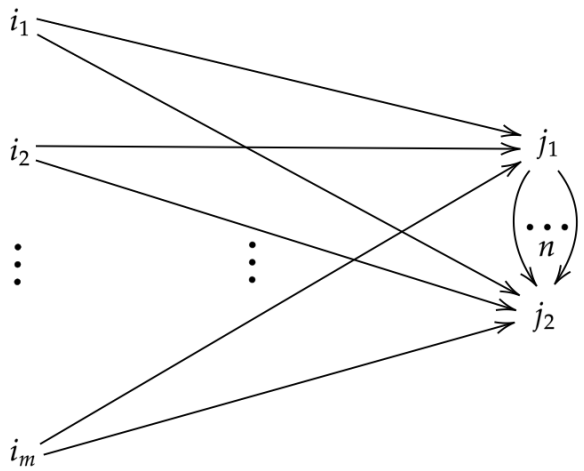
$r_j(d) = \sum_{k=1}^{m} e_{i_k} + (m-d)e_j$。实际上，还可以进一步验证，$D \circ R_j^+$在 $M^L_{m,d}$ 与 $M^L_{m,m-d}$ 之间诱导出一个同构（逆映射为 $R_j^- \circ D$），并且该同构与 Reineke-Weist 在其证明中给出的同构一致。关键在于证明：对于 $R_d(Q)$的一个表示 V， V是 θ-稳定的，当且仅当 $D \circ R_j^+(V)$ 是 $R_{r_j(d)}(Q)$的一个 θ-稳定表示；这由一个简单的线性代数事实 [RW21, 引理 3.2] 得出。在此处，略微滥用记号，我们仍用 θ 表示 $R_{r_j(d)}(Q)$所对应的稳定性条件，即 $\theta(\cdot) = \{r_j(d)\ \cdot\}$。这为使用反射函子和对偶函子重新诠释 Reineke-Weist 关于情形 (1) 的证明提供了方法。

对于情形 (2)：$M^C_{m,\ d} \simeq M^C_{m,\ 2m-d}$若 m、 d互素且 $2m - d > 0$，则相应的箭图 Q' 为



其维数向量为 $d = \sum_{k=1}^{m} e_{i_k} + de_j$。 $M^C_{m,d}$ 是维数向量固定为 d 的 θ-稳定表示的模空间。与情形 (1) 类似，可以证明 $D \circ R_j^+$在 $M^C_{m,d} \simeq M^C_{m,2m-d}$之间诱导一个同构。关键仍在于证明：对于给定的 $R_d(Q')$ 的表示 V， V是 θ-稳定的，当且仅当 $D \circ R_j^+(V)$ 是 $R_{r_j(d)}(Q')$ 的 θ-稳定表示；这仍可由线性代数事实 [RW21，引理 3.2] 得出。注意，此处 $r_j(d) = \sum_{k=1}^{m} e_{i_k} + (2m - d)e_j$

情形 (3) 和 (4) 类似，它们对应的箭图



维数向量始终由 $d = \sum_{k=1}^{m} e_{i_k} + d_1 e_{j_1} + d_2 e_{j_2}$ 给出。两个同构都由函子 $D \circ R_{j_1}^{+} \circ R_{j_2}^{+}$ 给出。此处省略细节，因为它们与情形 (1) 和 (2) 类似。不过我们注意到

$$r_{j_1} \circ r_{j_2}(d) = \sum_{k=1}^{m} e_{i_k} + ((n^2-1)d_2 - nd_2 + (n+1)m)e_{j_1} + (nd_1 + m - d_2)e_{j_2}$$

并且，$D \circ R_{j_1}^{+} \circ R_{j_2}^{+}$ 将与上述箭图相关联的表示映射到与另一个箭图相关联的表示；后一个箭图可由上述箭图简单地改变顶点之间所有箭的方向而得到 j_1 和 j_2。□

3.4. **其他几何性质**。在本小节中，我们证明定理1.10和1.11。

在给出定理1.10的证明之前，我们需要做一些准备。给定一个箭图 $Q = (Q_0, Q_1)$及一个非负整数向量 $n \in \mathbb{N}Q_0$。根据 [RW21第2节，3]，的 θ-半稳定 n-带框架表示的模空间 Q，其维数为 d ，可定义如下：

令 $\widehat{Q}$ 为 Q 的带框架箭图，它由 Q 添加一个额外顶点 i_0ˆ以及从 i_0 到 $i \in Q_0$的 n_i 条箭而得到。我们通过在顶点 i_0处添加分量1，将维数向量 d 扩展为 Q 的维数向量 $\widehat{d}$。假设 θ 已归一化，即 $\theta(d) = 0$。随后，我们ˆ还通过为顶点 i_0添加分量1，将稳定性 θ 扩展为 $\widehat{Q}$ 的稳定性 θ 。则根据 [ER09]，，具有维数 d 的 Q的 θ-半稳定 n-带框架表示的模空间 $M^{\theta\text{-fr}}_{d\,n}$，($Q$)同构于具有维数 d的 Q 的ˆθ-半稳定表示ˆ的模空间 $M^{\hat{\theta}-sst}_{\hat{d}}(\widehat{Q})$。

我们记 $n = e_j$ 为与 ($\mathbb{P}^2$,直线) 相关联的箭图，记 $n = 2e_j$ 为与 ($\mathbb{P}^2$, 圆锥曲线) 相关联的箭图，并记 $n = e_{j_1} + e_{j_2}$ 为与 $(F_n, C_n + f)$ 相关联的箭图。我们进一步用 $M^{L,m\text{-fr}}_{d}$，，$M^{C,\mathbf{fr}\,m}_{d}$，$M^{F_n,\mathbf{fr}\,m,d_1,d_2}$ 表示相应的 n-框架模空间。注意，此处稳定性 θ 总是假设为 $\theta(\cdot) = \{d, \cdot\}$，其中维数向量为 d。我们准备好证明定理 1.10。

定理的证明 *1.10*。 我们先从情形 (1) 开始： $M^{L,\,m\text{-}fr}_{d} \simeq M^{L}_{m+1,\,d}$若 m整除 d。此情形最初由 Reineke 和 Weist 在 [RW21]中通过比较两边的稳定性条件得到。

实际上，容易验证 $M^{L,\ m\ \overset{fr}{d}\ ,}$ 和 $M^L_{m+1,\ d}$具有相同的底层箭图和维数向量 $\sum_{k=0}^m e_{i_k}+de_j$。这里我们用 i_0，$\cdots$，i_m表示相应箭图 $M^L_{m+1,\ d}$的左侧顶点 $m+1$。对于 $M^{L,\ m\ \overset{fr}{d}\ ,}$，其稳定性由以下条件给出

$$\hat{\theta}=\sum_{k=0}^m e^*_{i_k}-\frac{m}{d}e^*_j$$

而 $M^L_{m+1,\ d}$ 的稳定性条件是

$$\theta'=d\left(\sum_{k=0}^m e^*_{i_k}\right)-(m+1)e^*_j.$$

于是我们有

$$\hat{\theta}=\frac{(m+d)}{d(m+1+d)}\theta'+\frac{1}{m+1+d}\dim$$

其中 $\dim=\sum e^*_{i_k}+e^*_j$是记录总维数的线性函数。因此，$M^{L,\ m\ \overset{fr}{,}\ d}\simeq M^L_{m+1,\ d}$，若 m 整除 d。类似地，我们可以证明情形 (2)：$M^{C,\ m\ \overset{fr}{,}\ d}\simeq M^C_{m+1,\ d}$，若 m整除d；以及情形 (3)：$M^{F_0,\ m\ \overset{fr}{d_1}\ ,\ ,d_2}\simeq M^{F_0}_{m+1,\ d_1,\ d_2}$，若 m 整除 d_1+d_2。

至于情形 (4)：$M^{F_n,\ fr\,(1-n)d_1+d_2,\ d_1,\ d_2}\simeq M^{F_n}_{(1-n)d_1+d_2+1,\ d_1,\ d_2}$，在 $n>0$ 的条件下，我们需要更仔细地分析两边的稳定性条件。在这种情况下，$m=(1-n)d_1+d_2\geq 0$。首先，很容易看出两边具有相同的底层箭图，其维数向量为

$$\sum_{k=0}^m e_{i_k}+d_1e_{j_1}+d_2e_{j_2}.$$

$M^{F_n,fr\ (1-n)d_1+d_2,d_1,d_2}$ 的稳定性为

$$\hat{\theta}=\sum_{k=0}^m e^*_{i_k}+(n-1)e^*_{j_1}-e^*_{j_2}$$

而 $M^{F_n(1-n)d_1+d_2+1,d_1,d_2}$ 的稳定性为

$$\theta'=(d_1+d_2)\left(\sum_{k=0}^m e^*_{i_k}+(n-1)e^*_{j_1}-e^*_{j_2}\right)-(e^*_{j_1}+e^*_{j_2}).$$

˄设 V 是一个 θ-半稳定表示。则对于所有非零真子表示$U\subset V$，都有

$$\frac{\hat{\theta}(\mathbf{dim}\,U)}{\dim U}\leq\frac{\hat{\theta}(\mathbf{dim}\,V)}{\dim V}=\frac{1}{\dim V}$$

其中，我们使用 **维数** U、**维数** V表示相应的维数向量，并使用维数 U、维数 V表示相应的总维数。由于 $\frac{\text{维数}\,U}{\text{维数}\,V}<1$，因为 U是一个真˄子表示，并且 θ~~(维数 U)~~必须是整数，上述等式等价于

$$\hat{\theta}(\mathbf{dim}\,U)\leq 0.$$

接下来，如果 V 是 θ'-半稳定表示，那么我们有

$$\theta'(\mathbf{dim}\,U)=(d_1+d_2)\hat{\theta}(\mathbf{dim}\,U)-(e^*_{j_1}+e^*_{j_2})(\mathbf{dim}\,U)\leq 0$$

ˆ 对所有非零真子表示 $U \subset V$ 都成立。由于 U 是真且 θ（**维数** U）是一个整数，上述等式也等价于

$$\hat{\theta}(\mathbf{dim}\, U) \leq 0.$$

ˆ 我们可以得出结论： V 是 θ-半稳定的，当且仅当它是 θ'-半稳定的。于是情形 (4): $M^{F_n,\ fr(1-n)d_1+d_2,\ d_1,\ d_2} \simeq M^{F_n}{}_{(1-n)d_1+d_2+1,\ d_1,\ d_2}$ 随之成立。

□

接下来，我们将证明定理 1.11。根据 [Rei17，定理 4.3], 对于箭图Q ，其维数向量为 d ，稳定性为 θ 和 θ'，若假设

(I) 半稳定表示的模空间 $M_d^{\theta-st}(Q)$ 非空；(II) $\theta(d) = 0$ 且 θ' 是 θ'的一般变形；(III) 欧拉形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在 Ker (θ) 上的限制是对称的。

那么存在一个自然的小解消 $p : M_d^{\theta'-sst}(Q) \to M_d^{\theta-sst}(Q)$。我们有以下判据 [Rei17，定理5。1] 用于检查 θ' 是否是 θ的一般变形：

我们进一步假设 $d = (d_i)_{i\in Q_0}$ 是不可约的，即 $\gcd(d_i : i \in Q_0) = 1$。于是存在一种稳定性 η ，使得 $\eta(d) = 0$ 且对于任意满足 $0 \neq e \lneq d$ 的 $e \in \mathbb{N}Q_0$ ，都有 $\eta(e) \neq 0$ ，并且 $\theta(e) = 0$。如果存在一个常数 $C \in \mathbb{N}$ ，满足

$$C > \max(\max(\eta(e) : e \leq d, \theta(e) < 0), \max(-\eta(e) : e \leq d, \theta(e) > 0))$$

使得 $\theta' = C\theta + \eta$，那么 θ' 是 θ的一般变形。现在我们可以证明定理 1.11了。

定理 1.11 的证明。回顾一下，$M^L_{m,d}$, $M^C_{m,d}$, $M^{F_0}_{m,d_1,d_2}$ 以及 $M^{F_n}{}_{(1-n)d_1+d_2,d_1,d_2}$ 的稳定性 θ 总是由 $\{d, \cdot\}$ 给出，其中 d 是相应的维数向量。容易验证，欧拉形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 在 Ker (θ) 上的限制是对称的，即条件 (III) 总是满足的。也容易验证，条件 (I) 总是满足的。这是因为我们针对定理 1.11 的不同情形额外添加了条件，例如在情形 (1) 中，我们要求 m 整除 d 和 $m > d$ 。因此我们只需检查条件 (II)。为此，我们将使用上述判据。

我们先从情形 (1) 开始。在这种情形下， θ' 关于 $M^{L,\ fr}_{,m-1\ ,d}$ 的稳定性条件为

$$\theta' = (r+1)d\hat{\theta} - \dim$$

其中我们令 $r = \frac{m}{d}$并且

$$\hat{\theta} = e^*_{i_0} + d\left(\sum_{k=1}^{m-1} e^*_{i_k}\right) - (rd-1)e^*_j.$$

注意，与定理 1.10 的证明类似，我们用 $i_0, \cdots, i_{m-1}$ 表示对应于 $M^{L,\ fr}_{,m-1,d}$的箭图的左侧 m 个顶点。$M^L_{m,d}$的稳定性 θ可以明确写为：

$$\theta = \sum_{k=0}^{m-1} e^*_{i_k} - re^*_j$$

于是我们得到

$$\theta' = C\theta + \eta$$

其中 $C = (r+1)d^2 - 1$ 和

$$\eta = -(r+1)(d-1)(de^*_{i_0} - e^*_j).$$

注意到 $d = (d_i)_{i\in Q_0}$ 至少有一个分量为 1。因此 d 是不可约的。也很容易验证，判据的条件均得到满足。因此， θ' 是 θ的一般变形。注意，对应于定理 θ 和 θ' 中情形（2）的箭图，其稳定性条件与情形（1）中的表达式相同。因此，情形（2）也满足条件（II）。对应于情形（3）的箭图，其 θ 和 θ' 的表达式也很相似。实际上，我们只需在情形（1）的 θ表达式中，将 d 替换为 $d_1 + d_2$ ，并将 e_j^* 替换为 $e_{j_1}^* + e_{j_2}^*$ 即可。因此，定理 1.11中情形（3）也满足条件（II）。

为了验证情形 (4) 的条件 (II)，我们需要更仔细地分析稳定性 $\theta'$for $M^{F_n,\ fr\ (1-n)d_1+d_2-1,\ d_1,\ d_2}$。首先，经过简单计算，我们知道无框模空间 $M^{F_n}{}_{(1-n)d_1+d_2-1,\ d_1,\ d_2}$ 的稳定性 $\tilde{\theta}$ for 为

$$\tilde{\theta} = (d_1 + d_2)\left(\sum_{k=1}^{m-1} e_{i_k}^* + (n-1)e_{j_1}^* - e_{j_2}^*\right) + (e_{j_1}^* + e_{j_2}^*)$$

˜其中我们设 $m = (1-n)d_1 + d_2$。不难看出， θ 等价于如下稳定性

$$\sum_{k=1}^{m-1} e_{i_k}^* + (n-1)e_{j_1}^* - e_{j_2}^*.$$

后者还可以进一步规范化为

$$\bar{\theta} = (m + d_1 + d_2 - 1)\left(\sum_{k=1}^{m-1} e_{i_k}^* + (n-1)e_{j_1}^* - e_{j_2}^*\right) + \left(\sum_{k=1}^{m-1} e_{i_k}^* + e_{j_1}^* + e_{j_2}^*\right).$$

因此，带框模空间 $M^{F_n,\ fr\ (1-n)d_1+d_2-1,\ d_1,\ d_2}$ 的稳定性由下式给出

$$\hat{\theta} = e_{i_0}^* + \bar{\theta}$$

这还可以进一步规范化为

$$\theta' = (m + d_1 + d_2)\left(\sum_{k=1}^{m-1} e_{i_k}^* + (n-1)e_{j_1}^* - e_{j_2}^*\right) + \dim.$$

其中 $\dim = \sum_{k=0}^{m-1} e_{i_k}^* + e_{j_1}^* + e_{j_2}^*$。回忆一下， $M^{F_n}{}_{(1-n)d_1+d_2,d_1,d_2}$ 的稳定性 θ 由 $\{d, \cdot\}$ 给出，可以将其归一化为

$$\theta = \sum_{k=0}^{m-1} e_{i_k}^* + (n-1)e_{j_1}^* - e_{j_2}^*.$$

因此我们有

$$\theta' = C\theta + \eta$$

其中 $C = (m + d_1 + d_2)$，且 $\eta = \dim -(m + d_1 + d_2)e_{i_0}^*$。利用$C$ 和 η的这些显式表达式，很容易验证 θ' 是 θ的一般变形。□

4. BPS invariants

在本节中，我们证明定理 1.13 和推论 1.14。

定理 *1.13*的证明。 结合定理 1.7 和 1.8，我们知道，对于以下各对（X， D）：

$$(\mathbb{P}^2, \text{line}), \quad (\mathbb{P}^2, \text{conic}), \quad (F_n, C_n + f),\ n \geq 0$$

我们有

$$F_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)} = \Omega_{M_\beta^{X/D}}(q)\frac{(2\sin(h/2))^{T_{\log}\cdot\beta-1}}{2\sin(\frac{(D\cdot\beta)h}{2})} \tag{11}$$

若 $T_{\log}\cdot\beta>0$，其中 $q=e^{ih}$。我们回顾一下， $M_\beta^{X/D}$可由（X,D）和 β按如下方式确定：

(a) 若（X,D）$=$（$\mathbb{P}^2$,直线）且 $\beta=d[l]$，则 $M_\beta^{X/D}=M_{2d,d}^L$，其中 $[l]$是直线类；(b) 若（X,D）$=$（$\mathbb{P}^2$,圆锥曲线）且 $\beta=d[l]$，则 $M_\beta^{X/D}=M_{d,d}^C$；(c) 若（X,D）$=$（F_n,C_n+f）且 $\beta=d_1C_{-n}+d_2f$，则 $M_\beta^{X/D}=M_m^{F_n,d_1,d_2}$，其中$m=T_{\log}\cdot\beta=(1-n)d_1+d_2$。

当 $M_\beta^{X/D}$ 的稳定轨迹非空时，由定理 1.11 可知， $M_\beta^{X/D}$ 存在一个由带框模空间给出的一个小解消。这样的带框模空间是光滑箭图模空间 $M^{\mathcal{O}_X(-D),\beta}$上的一个 $\mathbb{P}^{D\cdot\beta-1}$-丛。后者可由（$X,D$）和 β按如下方式确定：

(i) 若 $(X,D)=(\mathbb{P}^2,$ 直线$)$ 且 $\beta=d[l]$，则 $M^{\mathcal{O}_X(-D),\beta}=M_{2d-1,d}^L$; (ii) 若 $(X,D)=(\mathbb{P}^2,$ 圆锥曲线 $)$ 且 $\beta=d[l]$，则 $M^{\mathcal{O}_X(-D),\beta}=M_{d-1,d}^C$; (iii) 若 $(X,D)=(F_n,C_n+f)$ 且 $\beta=d_1C_{-n}+d_2f$，则 $M^{\mathcal{O}_X(-D),\beta}=M_{m-1}^{F_n,d_1,d_2}$其中$m=T_{\log}\cdot\beta=(1-n)d_1+d_2$。

因此，根据 Leray–Hirsch 定理，我们有

$$\Omega_{M_\beta^{X/D}} = P_{\mathbb{P}^{D\cdot\beta-1}}\Omega_{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}} \tag{12}$$

其中

$$P_{\mathbb{P}^{D\cdot\beta-1}} = (-1)^{D\cdot\beta-1}\frac{q^{\frac{D\cdot\beta}{2}}-q^{-\frac{D\cdot\beta}{2}}}{q^{1/2}-q^{-1/2}} = (-1)^{D\cdot\beta-1}\frac{2\sin(\frac{(D\cdot\beta)h}{2})}{2\sin(h/2)}$$

是移位的庞加莱多项式， $\mathbb{P}^{D\cdot\beta-1}$。当 $M_\beta^{X/D}$ 的稳定轨迹为空时，很容易验证 $M^{\mathcal{O}_X(-D),\beta}$ 的稳定轨迹也为空。因此，等式（12）仍然成立。

结合（11）和（12），可得

$$\frac{F_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}{(2\sin(h/2))^{T_{\log}\cdot\beta-2}} = (-1)^{D\cdot\beta-1}\Omega_{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}. \tag{13}$$

根据（6），左边等于 $\sum_g n_g^{\mathcal{O}_X(-D),\beta}(2\sin(h/2))^{2g}$。因此

$$\sum_g n_{g,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)}(2\sin(h/2))^{2g} = (-1)^{D\cdot\beta-1}\Omega_{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}. \tag{14}$$

最后，对于满足 X，D）$=$（F_n，C_n+（$s+1$）f）且 $s\geq 1$和 $\beta=d_1C_{-n}+d_2f$ 的这些对，我们定义$M^{\mathcal{O}_X(-D),\beta}=M_{m-1}^{F_{n+2s}),d_1,d_2+sd_1}$其中 $m=T_{\log}\cdot\beta=(1-n-s)d_1+d_2$。那么，根据第1.3节讨论的变形等价，我们知道（14）仍然成立。□

接下来，我们将基于定理 1.14 给出推论 1.13的证明。

推论 *1.14*的证明。 容易验证，$\Omega^{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}$ 只包含稳定表示，因此条件$\Omega^{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}$ 非空意味着

$$\Omega_{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}(q)=(-q^{1/2})^{-\dim_{\mathbb{C}} M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}\sum_i \dim H^i(M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)},\mathbb{Q})(-q^{1/2})^i.$$

注意，在此情形下，$\Omega^{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}$ 是光滑的。因此， $M^{\mathcal{O}_X(-D)\ \beta}$的交叉上同调与通常上同调一致。

现在，推论1.14 由以下事实得出：$\dim_{\mathbb{C}} M^{\mathcal{O}_X(-D)\ \beta}\quad =1-<\underline{d},\underline{d}>$，其中 $\underline{d}$是 $M^{\mathcal{O}_X(-D)\beta}$的维数向量；并且 $M^{\mathcal{O}_X(-D)\beta}$是连通的，因此 $\dim\ H^0(M^{\mathcal{O}_X(-D)\beta},\mathbb{Q})=1$。□

5. Proof of Theorem 1.1

我们在本节证明定理 1.1 。首先，根据第 1.3 节讨论的变形等价，我们只需考虑以下配对（X,D）：

$$(\mathbb{P}^2,\text{line}),\quad (\mathbb{P}^2,\text{conic}),\quad (F_n,C_n+f),\ n\geq 0.$$

接下来，我们利用（1）将递归公式转化为箭图 DT 不变量的递归公式，方法是应用（13）：

$$\Omega_{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}=\sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \beta_1,\beta_2>0}}\Omega_{M_{\beta_1}^{\mathcal{O}_X(-D)}}\Omega_{M_{\beta_2}^{\mathcal{O}_X(-D)}}(P_{\mathbb{P}^{D\cdot\beta_1-1}})^2\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1}. \tag{15}$$

这里我们回顾

$$P_{\mathbb{P}^{D\cdot\beta_1-1}}=(-1)^{D\cdot\beta_1-1}\frac{q^{\frac{D\cdot\beta_1}{2}}-q^{-\frac{D\cdot\beta_1}{2}}}{q^{1/2}-q^{-1/2}}.$$

当（X， D）$=$（$\mathbb{P}^2$，直线）时，上述递推最早由 Reineke-Weist [RW21，定理 1.2] 利用一个将带框模空间的 DT不变量与无框模空间的 DT不变量联系起来的公式，以及相应箭图模空间的一些几何性质推导而来[4]。实际上，我们将在证明中表明，他们的证明也可以推广到（$\mathbb{P}^2$，圆锥曲线）和（F_n， C_n+f）这两种情况。

定理 *1.1* 的证明。 设 Q 是一个带有稳定性 θ的箭图。我们用 Λ_0^+表示满足 d 且 $\theta(d)=0$ 的非零维数向量集合。Reineke-Weist 证明中用到的关键关系可描述如下：

$$1+\sum_{\underline{d}\in\Lambda_0^+}\Omega_{M^{\theta,\mathrm{fr}}_{\underline{d},\underline{n}}}(-1)^{\underline{n}\cdot\underline{d}}x^{\underline{d}}=\mathrm{Exp}\left(\sum_{\underline{d}\in\Lambda_0^+}P_{\mathbb{P}^{\underline{n}\cdot\underline{d}-1}}\Omega_{M_{\underline{d}}^{\theta-sst}}(-1)^{\underline{n}\cdot\underline{d}}x^{\underline{d}}\right) \tag{16}$$

其中，Exp(·) 是多重对称指数[5]。请注意，为使上述等式成立，我们需要一个技术性假设：欧拉形式 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 在 Λ_0^+ 上的限制是对称的。接下来我们要讨论的所有情形都满足这一假设。和之前一样，对于给定的维数向量 d，我们总是选择稳定性 θ 为 $\{d,\cdot\}$。

[4]这些几何性质正是定理1.9、1.10和1.11中出现的情形 (1)。[5]对于一个不含常数项的形式幂级数 $f(x)$，$\mathrm{Exp}(f)=\exp(\sum_{k=1}^{\infty}{}^{f_{(x^k)\ k}}\ )$ 。

情形 I：$(X,\ D)\ =(\mathbb{P}^2,$ 直线)。我们选择与这一对（$\mathbb{P}^2$，直线）相对应的箭图，并设 $d=\sum_{k=1}^{2d} e_{i_k}+de_j$，$n=e_j$。在这种情形下，$\theta=\sum_{k=1}^{2d} e_{i_k}^*-2e_j^*$。那么，使用前面的记号，我们有

$$M_{\underline{d},\underline{n}}^{\theta,\mathrm{fr}}=M_{2d,d}^{L,\mathrm{fr}},\quad M_{\underline{d}}^{\theta-sst}=M_{2d,d}^{L}.$$

根据定理 1.9、1.10和1.11，可得

$$M_{2d,d}^{L,\mathrm{fr}}\simeq M_{2d+1,d}^{L}\simeq M_{2d+1,d+1}^{L},\quad \Omega_{M_{2d,d}^{L}}=P_{\mathbb{P}^{d-1}}\Omega_{M_{2d-1,d}^{L}}.$$

令 $z_d^L(q)\ =\Omega^{M_{2d-1,d}^L}(q)$。由 (16)，我们可以推得

$$z_{d+1}^L=\sum_{\substack{a_1+a_2\cdots+a_d=d\\ a_i\geq 0}}\frac{(2d)!}{\prod_{k=1}^d\left((2k)!\right)^{a_k}(a_k)!}\prod_{k=1}^d\left(\left(P_{\mathbb{P}^{k-1}}\right)^2z_k^L\right)^{a_k}$$

这等价于

$$\frac{z_{d+1}^L}{(2d)!}=\sum_{\substack{a_1+a_2\cdots+a_d=d\\ a_i\geq 0}}\frac{1}{(a_k)!}\prod_{k=1}^d\left(\frac{\left(P_{\mathbb{P}^{k-1}}\right)^2z_k^L}{(2k)!}\right)^{a_k}.$$

因此，对 d求和可得

$$1+\sum_{d>0}\frac{z_{d+1}^L}{(2d)!}x^d=\exp\left(\sum_{k>0}\frac{\left(P_{\mathbb{P}^{k-1}}\right)^2z_k^L}{(2k)!}x^k\right).$$

进一步对两边关于 $2x\frac{d}{dx}$ 求导，可得

$$\sum_{d>0}\frac{z_{d+1}^L}{(2d-1)!}x^d=\left(\sum_{k>0}\frac{\left(P_{\mathbb{P}^{k-1}}\right)^2z_k^L}{(2k-1)!}x^k\right)\left(\sum_{d\geq 0}\frac{z_{d+1}^L}{(2d)!}x^d\right).$$

这里我们用到了这样一个事实：$z_1^L=1$，它可以由这样一个事实推得：$M_{1,\ 1}^L$ 是一个点。因此，对等式两边的 x^{d-1} 取系数，我们得到递推关系

$$z_d^L=\sum_{\substack{d_1+d_2=d\\ d_1,d_2>0}}z_{d_1}^Lz_{d_2}^L\left(P_{\mathbb{P}^{d_1-1}}\right)^2\binom{2d-3}{2d_1-1}.$$

这恰好是关于（15）的方程，对于（$\mathbb{P}^2$，直线）这一对，只需注意 $z_d^L=\Omega_{M\ \ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{2(-1)}}}$。

情形II：（$X,\ D$）=（$\mathbb{P}^2$，圆锥曲线）。在此情形下，箭图对应于（$\mathbb{P}^2$，圆锥曲线）这一对的箭图，并令 $d=\sum_{k=1}^d e_{i_k}+de_j$，$n=e_j$。在此情形下，$\theta=\sum_{k=1}^d e_{i_k}^*-e_j^*$。然后利用定理 1.9、1.10和1.11的情形（2），得到

$$M_{d,d}^{C,fr}\simeq M_{d+1,d+2}^{C},\quad \Omega_{M_{d,d}^C}=P_{\mathbb{P}^{2d-1}}\Omega_{M_{d-1,d}^C}.$$

在这种情况下，我们可以由（16）推得

$$1+\sum_{d>0}\frac{z_{d+2}^C}{d!}x^d=\exp\left(\sum_{k>0}\frac{\left(P_{\mathbb{P}^{2k-1}}\right)^2z_k^C}{(k)!}x^k\right)$$

其中 $z_d^C = \Omega^{M^C_{d-1,\ d}}$。对等式两边 $x\frac{d}{dx}$ 求导，得到递推关系

$$z_d^C = \sum_{\substack{d_1+d_2=d\\ d_1,d_2>0}} z_{d_1}^C z_{d_2}^C P_{\mathbb{P}^{2d_1-1}} \binom{d-3}{d_1-1}$$

这恰好是方程（15）对应于这对（$\mathbb{P}^2$，圆锥曲线）。这里我们用到了这一事实：$z_2^C = 1$它可以像情形 I 中那样类似地推导出来。

情形 III：$(X,\ D) = (F_n,\ C_n + f)\ n \geq 0$。接下来，我们选择与这对（$F_n$，$C_n+f$）相对应的箭图。对于满足 $T_{\log}\cdot\beta = (1-n)d_1+d_2 \geq 0$ 的曲线类 $\beta = d_1C_{-n}+d_2f$，我们令维数向量为 $d = \sum_{k=1}^{(1-n)d_1+d_2} e_{i_k} + d_1e_{j_1} + d_2e_{j_2}$，并且 $n = e_{j_1} + e_{j_2}$。稳定性 $\theta = \sum_{k=1}^{(1-n)d_1+d_2} e^*_{i_k} + (n-1)e^*_{j_1} - e^*_{j_2}$。在这种情况下，我们有

$$M^{\theta,\mathrm{fr}}_{\underline{d},\underline{n}} = M^{F_n,\mathrm{fr}}_{(1-n)d_1+d_2,d_1,d_2}, \quad M^{\theta-sst}_{\underline{d}} = M^{F_n}_{(1-n)d_1+d_2,d_1,d_2}.$$

由定理1.9、1.10 和1.11的情况 (3)、(4)，可得

$$M^{F_n,\mathrm{fr}}_{(1-n)d_1+d_2,d_1,d_2} \simeq M^{F_n}_{(1-n)d_1+d_2+1,d_1+1,d_2+n+1},\ \Omega_{M^{F_n}_{(1-n)d_1+d_2,d_1,d_2}} = P_{\mathbb{P}^{d_1+d_2-1}}\Omega_{M^{F_n}_{(1-n)d_1+d_2-1,d_1,d_2}}.$$

将它们代入方程 (16)，并令 $z^{F_n}_{d_1,\ d_2} = \Omega^{M^{F_n}_{(1-n)d_1+d_2-1,\ d_1,\ d_2}}$，可推得

$$1 + \sum_{\substack{(1-n)d_1+d_2\geq 0\\ d_1+d_2>0}} \frac{z^{F_n}_{d_1+1,d_2+n+1}}{\big((1-n)d_1+d_2\big)!} x_1^{d_1}x_2^{d_2} = G\exp\left(\sum_{(1-n)k_1+k_2>0} \frac{\big(P_{\mathbb{P}^{d_1+d_2-1}}\big)^2 z^{F_n}_{k_1,k_2}}{\big((1-n)k_1+k_2\big)!} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\right)$$

其中

$$G = 1 + \sum_{\substack{(1-n)d_1+d_2=0\\ d_1+d_2>0}} z^{F_n}_{d_1+1,d_2+n+1} x_1^{d_1}x_2^{d_2}.$$

对两边求导 $(1-n)x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}$，并注意到

$$\left((1-n)x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) G = 0,$$

可推得

$$z^{F_n}_{d_1,d_2} = \sum_{\substack{k_1+k_1'=d_1\\ k_2+k_2'=d_2}} z^{F_n}_{k_1,k_2} z^{F_n}_{k_1',k_2'} \big(P_{\mathbb{P}^{k_1+k_2-1}}\big)^2 \binom{(1-n)d_1+d_2-3}{(1-n)k_1+k_2-1}.$$

这里我们用到了以下事实：$z^{F_n}_{1,\ n+1} = 1$。这正是对于数对 (15) 中的 $(F_n,\ C_n+f)$ 的方程。□

6. Numerical results

本节列出以下五组（X，D）对应的前几个 $F^{\mathcal{O}_X}_{(-D)\ \beta}$ 和 $n^{\mathcal{O}_X}_{(-D)\ g,\ \beta}$

$$(\mathbb{P}^2, \mathrm{line}), \quad (\mathbb{P}^2, \mathrm{conic}), \quad (F_0, C_0+f), \quad (F_1, C_1+f), \quad (F_2, C_2+f)$$

基于递推（1）。初始数据可以从箭图侧确定（结合（5）和（6）。

情形 I：$(X,\ D) = (\mathbb{P}^2,$ 直线$)$。在此情形下，$\mathbb{P}^2$ 的曲线类 β 由整数 $d \in \mathbb{N}$标记。我们只需计算满足 $0 < T_{\log}\cdot\beta = 2d < 3$，即 $d = 1$的那些 $F^{\mathcal{O}_X}{}_{(-D)\,\beta}$。当

$d=1$，$F^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)}{}_d = 1$可由 (5)、(6) 以及 $M^{\mathcal{O}_X(-D)\,\beta} = M^L_{1,\,1}$是一个点这一事实推导得出。下面给出了 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ 的 Gromov–Witten 不变量生成级数表格，次数最高为 5：

TABLE 1. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$的GW不变量

d	$F_d^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)}$
1	1
2	$(q-1)^2/q$
3	$(q-1)^4(q^2+5q+1)/q^3$
4	$(q-1)^6(q^6+7q^5+29q^4+64q^3+29q^2+7q+1)/q^6$
5	$(q-1)^8(q^{12}+9q^{11}+46q^{10}+175q^9+506q^8+1138q^7$ $+1727q^6+1138q^5+506q^4+175q^3+46q^2+9q+1)/q^{10}$

BPS不变量 $n^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)}{}_{g,d}$ 由以下公式确定

$$F_d^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)} = \sum_{g\geq 0} n_{g,d}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)} (2\sin(h/2))^{2g-2+2d},$$

其中 $q = e^{\sqrt{-1}h}$。

TABLE 2. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ 的 BPS不变量

d \ g	0	1	2	3	4	5	6
1	1	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	0	0	0	0
3	7	-1	0	0	0	0	0
4	-138	66	-13	1	0	0	0
5	5477	-5734	3031	-970	190	-21	1

情形II：$(X,\ D) = (\mathbb{P}^2,$ 圆锥曲线)。曲线类 β仍由整数 $d\in\mathbb{N}$索引。在这种情况下，我们需要计算那些 $F^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)\,d}$，使得 $d=1,\ 2$；这可以类似地从箭图侧确定。

TABLE 3. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ 的 GW不变量

d	$F_d^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)}$
1	$-(-q)^{1/2}/(q-1)$
2	-1
3	$(q-1)(q^2+2q+1)/(-q)^{3/2}$
4	$(q-1)^2(q^6+3q^5+7q^4+10q^3+7q^2+3q+1)/q^4$
5	$-(q-1)^3(q^{12}+4q^{11}+11q^{10}+25q^9+46q^8+71q^7$ $+84q^6+71q^5+46q^4+25q^3+11q^2+4q+1)/(-q)^{15/2}$

BPS不变量 $n^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)}_{g,\,d}$ 由以下公式确定

$$F_d^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)} = \sum_{g\geq 0} n_{g,d}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)} (2\sin(h/2))^{2g-2+d}.$$

TABLE 4. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$的BPS不变量

d \ g	0	1	2	3	4	5	6
1	-1	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	0	0	0	0	0
3	-4	1	0	0	0	0	0
4	-32	28	-9	1	0	0	0
5	-400	792	-721	365	-105	16	-1

情形 III：$(X, D) = (F_0, C_0 + f)$。在这种情形下，F_0 恰为 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，且每个曲线类 β 都可唯一地写为 $d_1 C_0 + d_2 f$，其中 $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$。我们将 $F^{\mathcal{O}_X(-D)}_{\beta}$ 记为 $F^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)}_{d_1,d_2}$。由对称性可知，$F^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)}_{d_2,d_1} = F^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)}_{d_1,d_2}$，因此我们只需确定满足 $d_2 \geq d_1$ 的那些对(d_1, d_2)。对于初始数据，我们需要确定满足$0 < T_{\log}\cdot\beta = d_1 + d_2 < 3$的那些 $F^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)}_{d_1,d_2}$。所有这些 $F^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)}_{d_1,d_2}$ 都可由箭图侧确定，因为相应的箭图模空间 $M^{\mathcal{O}_X(-D)}_{\beta}$ 要么是一个点，要么为空。

TABLE 5. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,\ -1)$的GW不变量

$(d_1,\ d_2)$	$F^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,\ -1)}_{d_1,\ d_2}$
(0, 1)	$(-q)^{1/2}/(q-1)$
(1, 1)	-1
(2, 2)	$(q-1)^2(q^2+4q+1)/q^2$
(2, 3)	$(q-1)^3(q^4+5q^3+12q^2+5q+1)/(-q)^{7/2}$
(2, 4)	$-(q-1)^4(q^6+6q^5+17q^4+32q^3+17q^2+6q+1)/q^5$
(3, 3)	$-(q-1)^4(q^8+6q^7+23q^6+58q^5+94q^4+58q^3+23q^2+6q+1)/q^6$
(3, 4)	$(q-1)^5(q^{12}+7q^{11}+30q^{10}+93q^9+227q^8+429q^7$ $+586q^6+429q^5+227q^4+93q^3+30q^2+7q+1)/(-q)^{17/2}$

当 $d_1 = 0$ 和 $d_2 \geq 2$ 时，我们有 $F^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)}_{d_1,d_2} = 0$。这既可以从箭图侧推得，因为相应的箭图模空间为空；也可以从格罗莫夫–维滕侧推得，因为在这种情况下，曲线映射到 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的纤维，因此无法经过一般位置的 $d_2 \geq 2$ 个点。当 $d_1 = 1$ 时，可以由递推推出

$$F_{1,d_2}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)} = -\left(\frac{1-q}{(-q)^{1/2}}\right)^{d_2-1}.$$

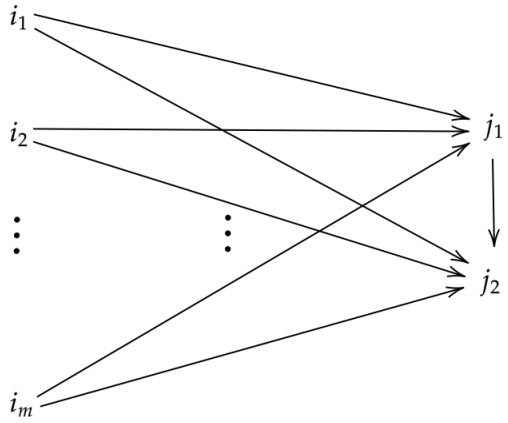
BPS不变量 $n^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)}_{g,(d_1,d_2)}$ 由以下公式确定

$$F^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)}_{d_1,d_2}=\sum_{g\geq 0} n^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)}_{g,(d_1,d_2)}(2\sin(h/2))^{2g-2+d_1+d_2}\,.$$

TABLE 6. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}(-1,-1)$ 的 BPS不变量

$(d_1,\ d_2)$ \ g	0	1	2	3	4	5	6
(0, 1)	1	0	0	0	0	0	0
(1, 1)	−1	0	0	0	0	0	0
(2, 2)	−6	1	0	0	0	0	0
(2, 3)	24	−9	1	0	0	0	0
(2, 4)	−80	50	−12	1	0	0	0
(3, 3)	−270	220	−79	14	−1	0	0
(3, 4)	2160	−2865	1840	−690	154	−19	1

情形IV：$(X,\ D)=(F_1,\ C_1+f)$。每个有效曲线类 β都可以写成 $d_1C_{-1}+d_2f$，其中 $d_1,\ d_2\in\mathbb{N}$。因此，生成级数 $F^{\mathcal{O}_X}_{(-D)\,\beta}$可以写成 $F^{\mathcal{O}_{F_1}}_{(-C_1-f)\,d_1,\ d_2}$。相应的箭图 $M^{X/D}_{\beta}$ 为



若 $\beta=d_1C_{-1}+d_2f$，则左侧这些顶点 i_k 的数量 m 等于$T_{\log}\cdot\beta=d_2$。与顶点 $j_1,\ j_2$ 相关联的维数分别为 $d_1,\ d_2$。而稳定性条件为

$$\theta=\sum_k i_k^*-j_2^*.$$

因此，如果 $d_1>d_2$，那么对于每个箭图表示 $(V_i,\ f_i)_{i\in Q_0}$，我们总能找到一个真子空间 W_{j_1}，它属于 V_{j_1}，且是来自以下 d_2 一维空间的像 V_{i_k}。于是，我们可以自然地得到 $(V_i,\ f_i)_{i\in Q_0}$ 的一个非零真子表示，它仍满足 $\theta=0$，因为 $\theta(j_1)=0$。这意味着 θ-稳定表示的模空间为空。因此，与该箭图相关的 DT不变量为零。结合定理1.7 和1.8，

我们可以推导出 $F^{\mathcal{O}_{F_1}(-C_1-f)}_{d_1,\,d_2} = 0$ 如果 $d_1 > d_2$。因此，我们只需确定满足 $d_1 \le d_2$ 的那些对（d_1，d_2）。

$F^{\mathcal{O}_{F_1}(-C_1-f)}_{d_1,\,d_2}$ 的初始数据为

$$(d_2, d_2) = (0,1),\ (0,2),\ (1,1),\ (1,2),\ (2,2).$$

注意，情形 (0，2) 可以像情形 III 一样排除。对于其余的配对，所有这些 $F^{\mathcal{O}_{F_1}(-C_1-f)}_{d_1,\,d_2}$ 都可以从箭图侧确定，因为相应的箭图模空间 $M^{\mathcal{O}_X(-D)}_{\beta}$ 总是一个点。我们有如下关于 $F^{\mathcal{O}_{F_1}(-C_1-f)}_{d_1,\,d_2}$ 的表格：

TABLE 7. $\mathcal{O}_{F_1}(-C_1-f)$的GW不变量

$(d_1,\ d_2)$	$F^{\mathcal{O}_{F_1}(-C_1-f)}_{d_1,d_2}$
(0，1)	$(-q)^{1/2}/(q-1)$
(1，1)	$-(-q)^{1/2}/(q-1)$
(1，2)	1
(2, 2)	-1
(2，3)	$-(q-1)(q^2+3q+1)/(-q)^{3/2}$
(2，4)	$(q-1)^2(q^4+4q^3+8q^2+4q+1)/q^3$
(2, 5)	$-(q-1)^3(q^6+5q^5+12q^4+20q^3+12q^2+5q+1)/(-q)^{9/2}$
(3，3)	$(q-1)(q^2+2q+1)/(-q)^{3/2}$
(3，4)	$-(q-1)^2(q^6+4q^5+11q^4+17q^3+11q^2+4q+1)/q^4$
(4，4)	$(q-1)^2(q^6+3q^5+7q^4+10q^3+7q^2+3q+1)/q^4$
(4, 5)	$(q-1)^3(q^{12}+5q^{11}+16q^{10}+41q^9+82q^8+136q^7$ $+167q^6+136q^5+82q^4+41q^3+16q^2+5q+1)/(-q)^{15/2}$
(5, 5)	$(q-1)^3(q^{12}+4q^{11}+11q^{10}+25q^9+46q^8+71q^7$ $+84q^6+71q^5+46q^4+25q^3+11q^2+4q+1)/(-q)^{15/2}$

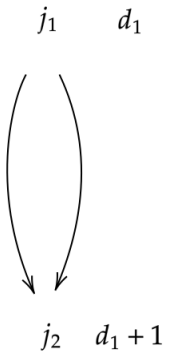
BPS不变量 $n^{\mathcal{O}_{F_1}(-C_1-f)}_{g,(d_1,d_2)}$ 可以由以下公式确定

$$F^{\mathcal{O}_{F_1}(-C_1-f)}_{d_1,d_2} = \sum_{g\ge 0} n^{\mathcal{O}_{F_1}(-C_1-f)}_{g,(d_1,d_2)} (2\sin(h/2))^{2g-2+d_2}.$$

TABLE 8. $\mathcal{O}_{F_1}(-C_1-f)$的BPS不变量

$(d_1,\ d_2)$ \ g	0	1	2	3	4	5	6
(0, 1)	1	0	0	0	0	0	0
(1, 1)	−1	0	0	0	0	0	0
(1, 2)	1	0	0	0	0	0	0
(2, 2)	−1	0	0	0	0	0	0
(2, 3)	5	−1	0	0	0	0	0
(2, 4)	−18	8	−1	0	0	0	0
(2, 5)	56	−41	11	−1	0	0	0
(3, 3)	−4	1	0	0	0	0	0
(3, 4)	49	−36	10	−1	0	0	0
(3, 5)	−384	499	−293	92	−15	1	0
(4, 4)	−32	28	−9	1	0	0	0
(4, 5)	729	−1250	1003	−456	120	−17	1
(5, 5)	−400	792	−721	365	−105	16	−1

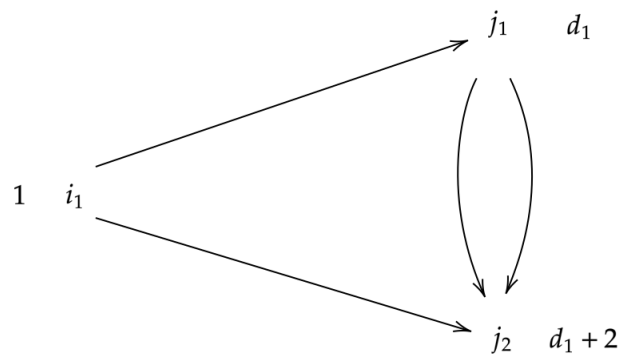
情形 V：$(X, D) = (F_2, C_2 + f)$。每个曲线类 β仍可写成 $d_1C_{-2} + d_2f$。相应的 $F^{\mathcal{O}_X(-D)\,\beta}$可写成 $F^{\mathcal{O}_{F_2}(-C_2-f)\,d_1,d_2}$。我们只考虑满足 $T_{\log}\cdot\beta = d_2 - d_1 > 0$ 的那些 β。此情形下的初始数据是满足 $0 < d_2 - d_1 < 3$ 的那些 $F^{\mathcal{O}_{F_2}(-C_2-f)\,d_1,d_2}$。如果 $d_2 - d_1 = 1$，那么 $M^{\mathcal{O}_X(-D)\,\beta}$ 是与以下 2-Kronecker 箭图相关联的模空间：



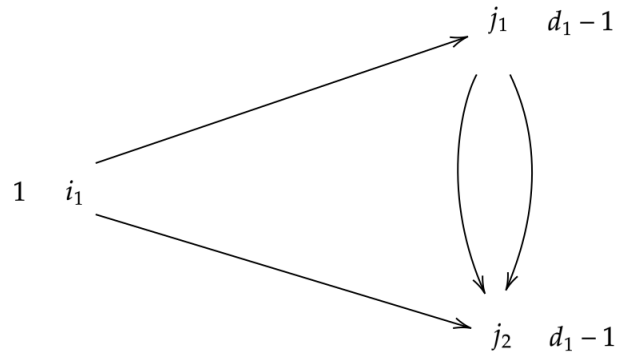
其中顶点 j_1 和 j_2 分别标记有维数 d_1、d_1+1。众所周知，这是一个点。结合（5）和（6），我们总有

$$F_{d,d+1}^{\mathcal{O}_{F_2}(-C_2-f)} = (-q)^{1/2}/(q-1).$$

如果 $d_2 - d_1 = 2$，那么 $M^{\mathcal{O}_X\ (-D)\ \beta}$ 是与以下箭图相关联的模空间：



顶点 i_1、 j_1、 j_2 分别赋予维数 1、 d_1、 d_1+2。我们可以假设 $d_1>0$。否则， $M^{\mathcal{O}_X(-D)}_{\beta}$为空。由定理 1.9, $M^{\mathcal{O}_X(-D)}_{\beta}$与以下箭图相关联的模空间同构：



根据定理 1.10，后者是一个带框架箭图模空间。因此，可以通过上文的 (16) 计算箭图 DT 不变量 $\Omega^{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}(q)$。更具体地说，我们取箭图 Q 为具有顶点 j_1, j_2 的 2-Kronecker 箭图，并在 (16) 中设 $n=e_{j_1}+e_{j_2}$ 和 $\theta=e^*_{j_1}-e^*_{j_2}$。那么，此时的 $\Omega^{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}(q)$ 就是 x^d 中满足 $d=(d_1-1)n$的系数。结合如下事实：$M^{\theta-sst}_{e_{j_1}+e_{j_2}}=\mathbb{P}^1$且 $M^{\theta-st}_{d\ (e_{j_1}+e_{j_2})}=\emptyset$对 $d>1$成立，我们可以推得

$$\Omega_{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}(q)=\left[\frac{1}{(1-qx)(1-q^{-1}x)(1-2x)}\right]_{x^{d_1-1}}$$

其中，$[\cdot]_{x^{d_1-1}}$ 提取 x^{d_1-1}的系数。现在，我们已计算出满足 $0<T_{\log}\cdot\beta<3$的那些β对应的 $\Omega^{M_\beta^{\mathcal{O}_X(-D)}}(q)$。结合（5）和（6），我们可以确定所有初始的 $F^{\mathcal{O}_X(-D)\beta}$。以下是 $F^{\mathcal{O}_{F_2}(-C_2-f)}_{d_1,d_2}$ 的表格：

TABLE 9. ($\mathcal{O}_{F_2}$) 的 GW不变量

$(d_1,\ d_2)$	$F_{d_1,d_2}^{\mathcal{O}_{F_2}(-C_2-f)}$
$(d,\ d+1)$	$(-q)^{1-g}/(q-1)$
$(1,\ 3)$	-1
$(2,\ 4)$	$-(q^2+2q+1)/q$
$(2,\ 5)$	$(q-1)(q^4+3q^3+5q^2+3q+1)/(-q)^{5/2}$
$(2,6)$	$(q-1)^2(q^6+4q^5+8q^4+12q^3+8q^2+4q+1)/q^4$
$(2,7)$	$(q-1)^3(q^8+5q^7+12q^6+20q^5+28q^4+20q^3+12q^2+5q+1)/(-q)^{11/2}$
$(3,\ 5)$	$-(q^4+2q^3+5q^2+2q+1)/q^2$
$(3,6)$	$(q-1)(q^8+3q^7+8q^6+14q^5+20q^4+14q^3+8q^2+3q+1)/(-q)^{9/2}$
$(3,7)$	$(q-1)^2(q^{12}+4q^{11}+12q^{10}+26q^9+49q^8+74q^7$ $+90q^6+74q^5+49q^4+26q^3+12q^2+4q+1)/q^7$
$(4,6)$	$-(q^6+2q^5+5q^4+10q^3+5q^2+2q+1)/q^3$
$(4,\ 7)$	$-(q-1)(q^{12}+3q^{11}+8q^{10}+17q^9+31q^8+47q^7$ $+60q^6+47q^5+31q^4+17q^3+8q^2+3q+1)/(-q)^{13/2}$
$(5,7)$	$-(q^8+2q^7+5q^6+10q^5+21q^4+10q^3+5q^2+2q+1)/q^4$

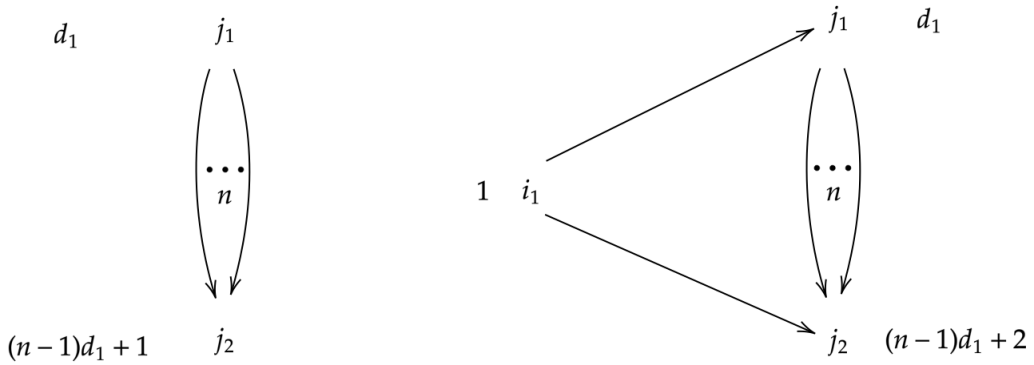
BPS不变量 $n^{\mathcal{O}_{F_2}(-C_2-f)}_{g,(d_1,d_2)}$ 可以通过以下公式确定

$$F^{\mathcal{O}_{F_2}(-C_2-f)}_{d_1,d_2}=\sum_{g\geq 0} n^{\mathcal{O}_{F_2}(-C_2-f)}_{g,(d_1,d_2)}(2\sin(h/2))^{2g-2+d_2-d_1}.$$

TABLE 10. $(-C_2-f)$的 BPS不变量

g / $(d_1,\ d_2)$	0	1	2	3	4	5	6
$(d,\ d+1)$	1	0	0	0	0	0	0
$(1,\ 3)$	-1	0	0	0	0	0	0
$(2,\ 4)$	-4	1	0	0	0	0	0
$(2,\ 5)$	13	-7	1	0	0	0	0
$(2,6)$	-38	33	-10	1	0	0	0
$(2,7)$	104	-129	62	-13	1	0	0
$(3,\ 5)$	-11	6	-1	0	0	0	0
$(3,6)$	72	-89	46	-11	1	0	0
$(3,7)$	-422	832	-750	374	-106	16	-1
$(4,6)$	-26	22	-8	1	0	0	0
$(4,7)$	274	-563	548	-298	92	-15	1
$(5,7)$	-57	64	-37	10	-1	0	0

一般而言，为了确定 $\mathcal{O}_{F_n}(-C_n-f)$ 中带有 $n>2$ 的 Gromov–Witten 不变量，我们需要确定以下两类箭图的所有箭图 DT 不变量：



在这两类箭图中，顶点 j_1 和 j_2 之间都有 n 条箭，不同顶点对应的维数如图所示。据我们所知，带有 $n > 2$ 的 n-Kronecker 箭图的箭图 DT 不变量很难计算。我们尚不知道如何彻底求解上述两类箭图的箭图 DT 不变量。

Appendix附录 A. A Counterexample

在本附录中，我们给出一个反例，说明当20中的 D 仅假设为数值有效时，亏格零递推可能不成立。这尤其表明，一旦我们将1.1 中的 D 充足条件放宽为数值有效，定理可能不再成立。

令 X 为 Hirzebruch 曲面 $F_1 = \mathbb{P}(\mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O})$，令 D 为 F_1 的一条纤维。当 $T_{\log} \cdot \beta \geq 3$ 时，我们有如下递推：

$$N_{0,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)} = -\sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta \\ \beta_1,\beta_2>0}} N_{0,\beta_1}^{\mathcal{O}_X(-D)} N_{0,\beta_2}^{\mathcal{O}_X(-D)} (D\cdot\beta_1)^2 \binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1} + (D\cdot\beta)^2 N_{0,\beta-f}^{\mathcal{O}_X(-D)}$$

其中 f 是纤维类，而 β 不是纤维类的倍数 f。上述递推可仿照 B 节中的方法推导。首先，利用 WDVV 方程，我们可以像 X、D中的 [FW21]一样，推导出上述配对的亏格零相对不变量满足的如下递推：

$$\frac{N_{0,\beta}^{X/D}}{D\cdot\beta} = \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta \\ \beta_1,\beta_2>0}} \frac{N_{0,\beta_1}^{X/D}}{D\cdot\beta_1}\frac{N_{0,\beta_2}^{X/D}}{D\cdot\beta_2} (D\cdot\beta_1)^2 \binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1} + (D\cdot\beta) N_{0,\beta-f}^{X/D} \tag{17}$$

其中 $T_{\log}\cdot\beta \geq 3$。附加项 $(D\cdot\beta)N_0^{X/D,\,\beta-f}$ 可通过以下示例加以说明。

设 F_1 的截面为 C_1，其自交数为 1。那么上述递推意味着

$$N_{0,C_1+nf}^{X/D} = N_{0,C_1}^{X/D},\ \forall n > 0. \tag{18}$$

实际上，在这种情况下，接触阶等于 $D\cdot(C_1+nf) = 1$，因此相对不变量 $N_0^{X/D,\,C_1+nf}$ 等于相应的绝对不变量 $N_0^{X,\,C_1+nf}$它统计经过 X 个 $2n+2$ 一般点的有理曲线。根据 [Gat01，例 8，1], 我们知道 $N_0^{X,\,C_1+nf} = 1$ 对所有 $n \geq 0$均成立。这证实了恒等式（18）。

为了推导 $N^{\mathcal{O}_X}{}_{(-D)\ 0,\ \beta}$ 的递推，我们还需要以下局部/相对对应

$$N_{0,\beta}^{X/D} = (-1)^{D\cdot\beta-1}(D\cdot\beta)N_{0,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)}. \tag{19}$$

根据 [GGR19],，上述等式在附加条件 $D\cdot\beta>0$下成立。但很容易计算得到 $N_0^{X/D}{}_{,\ \beta}=0$ 如果 β是某个纤维类的倍数 f。因此在递推式（17）中，我们总可以假设 $D\cdot\beta_i>0,\quad i=1,2$。关于 $N^{\mathcal{O}_X}{}_{(-D)\ 0}$的递推$\beta$，则由（17）和（19）推出。

Appendix B. Genus 0 recursion

本节将给出格罗莫夫–维滕理论中关于亏格零局部不变量 $N^{\mathcal{O}_X}{}_{(-D)\ 0}$的递归公式$\beta$ 的直接证明:

$$N_{0,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)} = -\sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \beta_1,\beta_2>0}} N_{0,\beta_1}^{\mathcal{O}_X(-D)} N_{0,\beta_2}^{\mathcal{O}_X(-D)} (D\cdot\beta_1)^2 \binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1}. \tag{20}$$

设 $N_{0\ \beta}^{X/D}$，表示 X 中曲线类为 β 、经过 $T_{\log}\cdot\beta$ 个一般位置的点，并在某个未指定点处以接触阶 D 与 $D\cdot\beta$相交的有理曲线的（虚）数目。根据 [FW21，定理 1，1], 当 $T_{\log}\cdot\beta\geq 3$时，我们有以下递归公式:

$$\begin{aligned}(H\cdot D)\frac{N_{0,\beta}^{X/D}}{d} = \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \beta_1,\beta_2>0}} \Bigg(& d_1^2(H\cdot\beta_2)\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1} + d_1d_2(H\cdot\beta_2)\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-2}\\ & - d_1^2(H\cdot\beta_1)\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1} - d_1d_2(H\cdot\beta_1)\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1}\Bigg)\frac{N_{0,\beta_1}^{X/D}}{d_1}\frac{N_{0,\beta_2}^{X/D}}{d_2}\end{aligned}$$

其中 H 是任意除子，$d=D\cdot\beta$、$d_1=D\cdot\beta_1$、$d_2=D\cdot\beta_2$。将 H 替换为 $T_{\log}$后，上述递归公式可简化为

$$(T_{\log}\cdot D)\frac{N_{0,\beta}^{X/D}}{d} = 2\sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \beta_1,\beta_2>0}} d_1^2\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1}\frac{N_{0,\beta_1}^{X/D}}{d_1}\frac{N_{0,\beta_2}^{X/D}}{d_2}. \tag{21}$$

这可由组合恒等式推出

$$(T_{\log}\cdot\beta_2)\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1} - (T_{\log}\cdot\beta_1)\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1} = 2\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1}$$

and

$$\sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \beta_1,\beta_2>0}} \left((T_{\log}\cdot\beta_2)\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-2} - (T_{\log}\cdot\beta_1)\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1}\right)N_{0,\beta_1}^{X/D}N_{0,\beta_2}^{X/D} = 0.$$

由于 D 光滑且有理，我们根据伴随公式得到 $T_{\log}\cdot D=-(K_X+D)\cdot D=2$。因此，(21) 可进一步简化为

$$\frac{N_{0,\beta}^{X/D}}{D\cdot\beta} = \sum_{\substack{\beta_1+\beta_2=\beta\\ \beta_1,\beta_2>0}} (D\cdot\beta_1)^2\binom{T_{\log}\cdot\beta-3}{T_{\log}\cdot\beta_1-1}\frac{N_{0,\beta_1}^{X/D}}{D\cdot\beta_1}\frac{N_{0,\beta_2}^{X/D}}{D\cdot\beta_2}.$$

现在，(20) 由局部/相对对应 [GGR得到：

$$N_{0,\beta}^{X/D} = (-1)^{D\cdot\beta-1}(D\cdot\beta)N_{0,\beta}^{\mathcal{O}_X(-D)}.$$

从证明中可以看出，要求 D 是有理的，即 $T_{\log}\cdot D = 2$，是必要的。

Appendix C. Comparison with genus-one recursion from the Virasoroconstraints

由递推式（1），我们得到以下关于 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ 的亏格 1 Gromov–Witten 不变量的递推式：

$$N_{1,d} = \sum_{\substack{d_1+d_2=d\\ d_1,d_2>0}} \left(N_{0,d_1}N_{0,d_2}\frac{d_1^4}{12} - (N_{0,d_1}N_{1,d_2}+N_{0,d_2}N_{1,d_1})d_1^2 \right) \binom{2d-3}{2d_1-1}.$$

我们也可以将 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ 嵌入 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$。于是，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ 的 Gromov–Witten 不变量等于 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$ 的相应不变量。由于 $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$ 是一个射影托里克簇，我们可以应用 Virasoro 约束 [EHX97, EJX98, Giv01, Iri07, Tel12], ，得到另一个递推式：

$$N_{1,d} = -\frac{d(d-1)}{24}N_{0,d} - \sum_{\substack{d_1+d_2=d\\ d_1,d_2>0}} \frac{(d-1)(2d-1)}{2}\binom{2d-3}{2d_1-2}N_{0,d_1}N_{1,d_2}\,.$$

根据定理 1.1 和 Virasoro 约束，这两个递推是等价的。我们借助计算机直接验证了这一点在次数不超过 19 时确实成立。然而，我们不知道如何用直接的初等方法证明这两个递推等价。

References

[AB22] H. Arg ¨ *The flow tree formula for Donaldson-Thomas invariants of quivers with potentials* uz 和 P. Bousseau，，《组合数学》()，第 – 号。[19] **158** 2022 12, 2206 2249 ↑11

AP S. Alexandrov 和 B. Pioline，，*Attractor flow trees BPS indices and quivers*，《数学理论与物理进展》 **23** 2019 3, 627 699 ↑11 ()，第 – 号。BFGW P. Bousseau、H. Fan、S. Guo 和 L. Wu，[21] *Holomorphic anomaly equation for $\mathbb{P}^2$ E and the* (，)，《Forum Math. Pi》 *Nekrasov-Shatashvili limit of local $\mathbb{P}^2$* **9** 2021 3, 57 ↑2 3 8 10 ()，论文编号 e。，，，[73] *Coxeter functors and Gabriel's theorem* BGP I.N. Bernstein、I.M. Gelfand 和 V.A. Ponomarev，，《Uspehi Mat. Nauk》 **28** 1973 2 170 19 33 ↑12 13 ()，第 () 号，–。， Bou P. Bousseau，，《几何与拓扑》 **24** 2020 3, 1297 1379 ↑2 ()，第 – 号。 Bou，，《国际数学研究通知》[21] *On an example of quiver Donaldson-Thomas/relative Gromov-Witten correspondence* **15** 2021 11845 11888 ↑2 3 4 5 10 12 ()，–。，，，，，，CI T. Coates 和 H. Iritani，[21] *Gromov-Witten invariants of local $\mathbb{P}^2$ and modular forms*，《京都数学杂志》 **61** 2021 3, 543 706 ↑3 ()，第 – 号。 DIW A. Doan、E.-N Ionel 和 T. Walpuski， *The Gopakumar-Vafa finiteness conjecture*，arXiv 预印本 arXiv: [21] 2103 08221 2021 ↑1 。()。DW A. Doan 和 T. Walpuski， *Counting embedded curves in symplectic 6-manifolds*，arXiv 预印本 arXiv: [19] 1910 12338 2019 ↑1 7 。()。，EHX T. Eguchi 、 K. Hori 和 C.-S. Xiong， *Quantum cohomology and Virasoro algebra*，《物理学快报 B》 [97] **402** 1997 71 80 ↑2 33 ()，–。， EJX T. Eguchi、M. Jinzenji 和 C.-S. Xiong， *Quantum cohomology and free field representations*，《核物理 B》 [98] **510** 1998 608 622 ↑2 33 ()，–。， ER J. Engel 和 M. Reineke， *Smooth models of quiver moduli*，《数学杂志》**262** (2009)，第 4 号，817–848。[09] ↑16 FP C. Faber 和 R. Pandharipande， *Hodge integrals and Gromov–Witten theory*，《数学创刊》**139** (2000)，第 1 号，173–199。 [00] ↑10

[FRZZ19] B. Fang、Y. Ruan、Y. Zhang 和 J. Zhou, *Open Gromov-Witten theory of $K_{\mathbb{P}^2}$、$K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}$、$K_{W\mathbb{P}[1,1,2]}$、$K_{\mathbb{F}_1}$ and Jacobi forms* **369** 2019 2, 675 719 ↑3 , 《数学物理通讯》 ( ) , 第 – 号。
[21] FW H. Fan 和 L. Wu, *Witten-Dijkgraaf-Verlinde-Verlinde equation and its application to relative Gromov-Witten theory* **13** 2021 9834 9852 ↑2 31 , 《国际数学研究通知》 ( ) , – 。 ,
, [01] *Gromov-Witten invariants of blow-ups* **10** 2001 Gat A. Gathmann, , 《代数几何杂志》 32
( ) , 第 3 号, 399–432。↑31[GGR19] M. van Garrel、T. Graber 和 H. Ruddat, *Local Gromov-Witten invariants are log invariants*,
《数学进展》 **350** 2019 860 876 ↑2 3 32 33 ( ), – 。 , , , Giv A. Givental,
[01]
Gromov–Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians, 《莫斯科数学杂志》
1 2001 5, 551 568 ↑2 33 ( ), 第 – 号。 , GP M. Gross 和 R. Pandharipande, , ,
[10] *Quivers curves and the tropical vertex*, 《葡萄牙数学》67 (2010年), 第 2, 211 259 ↑2 – 号。IP E.-N. Ionel 和 T.-H. Parker,
[18]
The Gopakumar-Vafa formula for symplectic manifolds, 《数学年刊》(2 **187** 2018 1, 1 64 ↑1)( ), 第 – 号。
[07]
Iri H. Iritani, *Convergence of quantum cohomology by quantum Lefschetz*, 《纯粹与应用数学杂志》610 (2007 29 69 ↑2 33), –
。 , JS D. Joyce 和 Y. Song, *A theory of generalized Donaldson-Thomas invariants*, 《美国数学会回忆录》 [12]
217 2012 1020, +199 ↑5 ( ), 第 iv 号。KS M. Kontsevich 和 Y. Soibelman,
[08]
Stability structures motivic Donaldson-Thomas invariants and cluster transformations 0811 2435 2008 ↑5 , , arXiv 预印本 arXiv: 。( )。
[21] Lho H. Lho,
Gromov-Witten invariants of Calabi-Yau manifolds with two Kähler parameters, 《国际数学研究通知》
10 2021 7552 7596 ↑3 ( ), – 。LP H. Lho 和 R. Pandharipande,
[18]
Stable quotients and the holomorphic anomaly equation, 《数学进展》 **332** 2018 349 402 ↑3 ( ), – 。LP A. Lanteri 和 M.
Palleschi, *About the adjunction process for polarized algebraic surfaces*, 《纯粹与应用数学杂志》 [84]
352 1984 15 23 ↑2 ( ), – 。LT X. Liu 和 G. Tian, 《微分几何杂志》50 (1998年), 第
[98]
3, 537 590 ↑2 – 号。MP S. Mozgovoy 和 B. Pioline, *Attractor invariants、brane tilings and crystals*, arXiv 预印本
[20]
arXiv: 2012 14358 2020 ↑11 。( )。MR S. Meinhardt 和 M. Reineke,
[19] *Donaldson-Thomas invariants versus intersection cohomology of quiver moduli* **754** 2019 143 178 , 《纯粹与应用数学杂志》 ( ) , – 。
↑5
[08] *Moduli of representations of quivers* Rei M. Reineke, , 《代数表示论趋势及相关主题》,
2008, 589 637 ↑10 第 – 页。Rei , *Poisson automorphisms and quiver moduli*, 《朱西厄数学研究所杂志》9
[10]
(2010年), 第 3 号, 653–667。↑5[Rei17] , *Quiver moduli and small desingularizations of some GIT quotients*, 表示论——当前趋
势与展望, 2017, 613 635 ↑18 第 – 页。RSW M. Reineke、J. Stoppa 和 T.
[12]
Weist, *GW/Kronecker correspondence* **16** 2012 4, 2097 2134 , 《几何与拓扑》 ( ) , 第 –
↑2
号。[13] *Refined GW/Kronecker correspondence* RW M. Reineke 和 T. Weist, , 《数学年刊》
↑2
355 1, 17 2013 56 ( ) , 第 – 号。[21] RW , *Moduli spaces of point configurations and plane curve counts*, 《国际数学
研究通知》 **13** 2021 10339 10372 ↑2 6 14 15 16 21 ( ), – 。 , , , , , Tel C. Teleman,
[12]
The structure of 2D semi-simple field theories, 《数学创刊》188 (2012年), 第 3 号, 525– 588 ↑2 33 。 , Wan X. Wang,
Finite generation and holomorphic anomaly equation for equivariant Gromov-Witten [19]
invariants of $K_{\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1}$ 1908 03691 2019 , arXiv 预印本 arXiv: 。( )。
↑3
[13] *Localization in quiver moduli spaces* Wei T. Weist, 《表示论》
17 2013 382 425 ↑12 ( ), – 。Zin A. Zinger, 《数学进展》
[11] *A comparison theorem for Gromov-Witten invariants in the symplectic category*
228 (2011年), 第 1 号, 535–574。↑1

University of Georgia, Department of Mathematics, Athens, GA 30605, US
Email address: Pierrick.Bousseau@uga.edu

Southern University of Science and Technology, Department of Mathematics & SUSTech International Center for Mathematics, Shenzhen, Guangdong 518055, CN*Email address*: wult@sustech.edu.cn