arXiv:2303.00504v1 [math.PR] 1 Mar 2023

传输　　不赋予小集正质量的随机测度之间的传输

¨Martin Huesmann 和 BASTIAN MULLER

摘要。设 (ξ,η) 是一对强度相同且有限的联合平稳遍历随机测度。平衡配置是一个平移不变（等变）映射 $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，使得 ξ 在 T 下的像测度为 η。我们证明，只要 ξ 不赋予小集正质量，即不给 $(d-1)$-可求 rectifiable 集赋予质量，就总存在一个平衡配置 T，它仅依赖于 (ξ,η) 且依赖关系可测；也就是说，T 是一个因子。

1. 引言

设 ξ 和 η 是两个随机、联合平稳且遍历的测度，具有相同的有限强度。分配 T 是一个平移不变（等变）的随机映射 $T\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$。若 ξ 在 T 下的像测度等于 η，则称该分配 T 平衡 ξ 和 η。本文关注平衡配置是否存在这一问题。请注意，若不要求平移不变性，只要 ξ 是弥散的（即 ξ 没有原子），便可通过 Borel 同构定理证明其存在。然而，平移不变性的要求使这一问题困难得多。Last 和 Thorisson 最近证明了以下存在性结果：

定理 1.1 ([LT21，定理 1.1])。设 ξ 和 η 是两个随机、联合平稳且遍历的测度，具有相同的有限强度。设 ξ 是弥散的。若满足以下任一条件，则存在一个平衡 ξ和 η 的分配：

(a) η 具有非零离散分量；*(b)* η 是弥散的，并且存在一个定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的非零简单点过程 χ，其强度有限，使得三元组 $(\xi、\eta、\chi)$ 联合平稳且遍历。

条件 (b) 最有趣的应用（见下文）是过程 χ 由 $(\xi、\eta)$ 的因子导出时，即它在可测意义上依赖于 $(\xi、\eta)$。如果不要求它是因子，则可以通过扩展概率空间来构造这样的过程 χ。由此引出一个问题：要么刻画哪些随机测度对 $(\xi、\eta)$ 存在点过程因子 χ，要么推导出互补条件，以确保平衡因子分配存在，例如参见 [HMK16、LT21]。本文关注后一个问题，并仅推导出确保存在分配的关于 ξ 的条件。根据 [LT21，第 8]，节中的例子可知，对于这样的一般存在性结果，ξ 不应对 $d-1$ 维集合赋予质量。事实上，Last 和 Thorisson 构造了一对联合平稳、遍历且弥散的随机测度 $(\xi、\eta)$，其中 ξ 集中在一个 $d-1$ 维集合上，但不存在平衡分配。我们的主要结果给出了因子分配存在的一般性结论：

定理 1.2。设 ξ 和 η 是两个随机的、联合平稳且遍历的测度，并具有相同的有限强度。假设 ξ 不对小集赋予质量，即不对 $(d-1)$-可整集赋予质量。则存在一个使 ξ 和 η 达到平衡的因子分配。

日期：2023年3月2日。MH 和 BM 获德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助，资助项目为德国卓越战略下的 EXC 2044 -390685587“明斯特数学：动力学–几何–结构”，并获 DFG 通过 SPP 2265 项目资助：随机几何系统。

我们注意到，关于 ξ 的假设是严格的，Last 和 Thorisson 的反例对此作了说明。我们还要指出，定理 1.2 （正如定理 1.1）在将遍历性和相同强度的假设放宽为 $\mathbb{E}[\xi([0,1])|\mathcal{I}] = \mathbb{E}[\eta([0,1])|\mathcal{I}]$, 时仍然成立，其中 $\mathcal{I}$ 表示由平移不变事件生成的 σ-代数（例如参见 [LT21，第 9]节）。

定理 1.2 的证明基于针对随机测度的最优输运技术，该技术由 [HS13] and [Hue16] 引入。下面简要说明这一论证。根据 [LT09, 定理 5.1], , 在我们的假设下，对于 ξ 和 η 存在某个等变耦合 q。应用 de la Vall´ee Poussin 引理，我们可以构造一个凹函数 ϑ，使得 q 关于 $c(x,y) = \vartheta(|x-y|)$ 具有有限的平均运输成本（参见 (2.2)）。如果 ξ 和 η 互相奇异，则 [Hue16, 定理 1.1] 蕴含存在一个等变耦合 $q^* = (id, T)_{\#}\xi$。特别地， T 就是所需的平衡因子分配。

对于一般情形，我们首先在互相奇异的测度 $(\xi-\eta)_+$ 和 $(\eta-\xi)_+$ 之间构造一个辅助因子分配 T。利用它，可以将 $\mathbb{R}^d$ 以等变方式划分为集合 $\{x\colon G(T(x)-x) \le t\}$ 和 $\{x\colon G(T(x)-x) > t\}$，其中 $G\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 是某个固定的确定性映射。事实证明，对于 $t = t_0$ 的某个特定选择，测度 $\mathbb{1}_{G(T(x)-x)\le t_0}\xi$ 和 $\mathbb{1}_{G(T(x)-x)>t_0}\eta$ 具有相同的强度（并且互相奇异）。因此，存在一个平衡因子分配T_1。类似地，我们在 $\mathbb{1}_{G(T(x)-x)>t_0}\xi$ 和 $\mathbb{1}_{G(T(x)-x)\le t_0}\eta$ 之间得到一个平衡因子分配 T_2。结合 T_1 和 T_2 即可证明定理 1.2。

人们对分配的兴趣源于它与随机测度及其 Palm 版本之间的平移耦合的联系。若源测度 ξ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的勒贝格测度，且 T 是平衡勒贝格测度与 η的一个分配，则移位后的测度 $\eta - T(0)$ 是 η的 Palm 版本；也就是说，二元组 $(\eta, \eta - T(0))$ 是 η 及其 Palm 版本的一个平移耦合（见 [HP05]）。特别是，若 T 是因子分配，则 η 的 Palm 版本是 η的函数。据我们所知，Liggett [Lig02]构造了点过程首个明确的非随机化（因子）平移耦合。这项工作与[HP05、HHP06] 共同开启了一系列通过构造因子分配来建立平移耦合的研究，例如 [HP05、CPPR10、LMT14、HS13]。例如， [LT09、LMT14、LTT18、Hue16]研究了两个一般随机测度 ξ 和 η 之间的分配以及等变耦合或运输。关于平移耦合的起源，我们还可参见 [AT93、Tho96] ；关于由一般随机测度之间的分配所导出的平移耦合结果，则可参见 [LT09] 和 [LT21，备注 2.2]

注 1.3。 作为前述段落和定理 1.2的一个具体推论，对于任意 η总是存在一个 η 与其 Palm 版本的（因子）平移耦合（根据 [Tho96] ，我们只能知道在一个可能扩大的概率空间上存在某个平移耦合）。

2. 设置与预备知识

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 是一个配备了可测流 θ_x 的概率空间：$\Omega \to \Omega$，$x \in \mathbb{R}^d$。也就是说，映射 $(x,\omega) \mapsto \theta_x\omega$ 是可测的，对所有 $x, y \in \mathbb{R}^d$ 都有 $\theta_y \circ \theta_x = \theta_{x+y}$，且 θ_0 是恒等映射。此外，设 $\mathbb{P}$ 关于该流 θ 是平稳的，即对所有 $x \in \mathbb{R}^d$， $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\theta_x(A))$。不变 σ-域 $\mathcal{I}$ 定义为 $\mathcal{I} = \{A \in \mathcal{F} \mid \forall x \in \mathbb{R}^d : A = \theta_x A\}$，并且我们假设 $\mathbb{P}$ 是遍历的，即对于所有 $A \in \mathcal{I}$，$\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$。

下文中，随机测度 ξ 是从 $(\Omega, \mathcal{F})$ 到 $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ 的局部有限转移核，其中局部有限是指，对 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\omega \in \Omega$，测度 $\xi(\omega, \cdot)$ 在有界可测集上取有限值。若对所有 $\omega \in \Omega$、 $x \in \mathbb{R}^d$ 和 $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$，均有

$$\xi(\omega, B) = \xi(\theta_x\omega, B - x).$$

分配是一个可测映射 $T\colon \Omega \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$，满足以下等变性质

$$T(\theta_x\omega, y) = T(\omega, y + x) - x \quad \forall \omega \in \Omega, x, y \in \mathbb{R}^d.$$

如果对于 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\omega \in \Omega$，映射 T^ω 将 ξ^ω推送至 η^ω，即 $\xi^\omega \circ (T^\omega)^{-1} = \eta^\omega$，则分配 T 平衡两个随机测度 ξ 和 η。如果 T关于$\sigma(\xi, \eta)$可测，我们称 T为因子分配；其中该σ-代数由 ξ 和 η生成。

半耦合 q由 ξ和 η构成，是从 (Ω,F) 到 $(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$,B($\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$)) 的转移核，满足对每个 $\omega \in$Ω，测度 $q(\omega)$ 都是 $\xi(\omega)$ 与 $\eta(\omega)$ 的半耦合，也就是说

$$(\pi_1)_\#(q(\omega)) \leq \xi(\omega) \text{ and } (\pi_2)_\#(q(\omega)) = \eta(\omega). \tag{2.1}$$

此处 π_i dentot es 表示到第 i 个坐标的投影。若半耦合 q 是等变的，则称其为 f

$$q(\omega, A \times B) = q(\theta_x\omega, (A - x) \times (B - x)) \quad \forall \omega \in \Omega, x \in \mathbb{R}^d, A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

对于等变随机测度 ξ 和 η，我们用 $\mathsf{Cpl}_{es}(\xi, \eta)$ 表示 ξ 与 η的所有等变半耦合构成的集合。给定函数 $\vartheta: [0, \infty) \to [0, \infty)$，我们定义平均运输成本为

$$\inf_{q \in \mathsf{Cpl}_{es}(\xi,\eta)} \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1 \times \mathbb{R}^d} \vartheta(|x - y|)q(dx, dy)\right]. \tag{2.2}$$

有限测度之间的半耦合最优输运问题也曾以部分最优传输问题之名得到研究，例如 [Fig10], 或不完全最优传输[AEdBCAM11]。我们将在下文引理 2.2 中，为有限测度之间的部分最优传输问题证明一个关于凹成本的特殊唯一性结果。这是以下定理证明中的一个重要组成部分：

定理 *2.1*（半耦合）。设 ξ 和 η 是两个等变随机测度，且几乎必然互相奇异。此外，假设几乎必然 ξ 不对小集赋予质量，即 ξ 不给予$(d-1)$-可求 *rectifiable* 集质量，并且 ξ 的强度大于或等于η的强度。设 ϑ 是一个严格递增的凹函数 $\vartheta: [0, \infty) \to [0, \infty)$，满足 $\lim_{x\to\infty} \vartheta(x) = \infty$ 且$\vartheta(0) = 0$。假设 ξ 和 η 关于 ϑ 的平均输运成本有限。那么存在 ξ和 η的等变半耦合 q，可表示为 $q = (Id, T)\#(f \cdot \xi)$，其中某个分配 T: *supp*$(\xi) \to$ *supp*(η)，且 $f: \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$仅依赖于 $\sigma(\xi, \eta)$，并且这种依赖是可测的。

此外，若 ξ 和 η 具有相同的强度，则该等变半耦合实际上是一个耦合。

定理 2.1 可以按照 [Hue16，定理 1，1] 的方式证明，只要我们先确立半耦合的以下唯一性结果，其中我们用 $\mathsf{Cpl}_s(\mu, \nu)$ 表示 μ与 ν之间的半耦合集。

引理 2.2。设 μ、ν 是 $\mathbb{R}^d$ 上的两个有限博雷尔测度，满足 $\mu(\mathbb{R}^d) \geq \nu(\mathbb{R}^d)$，$\mu$ 不对小集赋予正测度，且 μ 与 ν 互相奇异。设 $c(x, y) = \vartheta(|x - y|)$，其中 $\vartheta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个凹严格递增函数。那么存在唯一的最优解 $q*$，使得

$$\inf_{q \in \mathsf{Cpl}_s(\mu,\nu)} \int c(x, y)dq(x, y). \tag{2.3}$$

此外，$q* = (id, T)(1_B\mu)$，其中 B是一个可测集，T是一个映射。

证明。由 μ、ν支集的紧性可知，μ与 ν之间所有半耦合构成的集合是紧的。由于 c 连续且下有界，因此映射 $q \mapsto \int c(x.y)dq(x, y)$ 下半连续。于是，存在一个极小化解 $q*$，其边缘测度为 $f \cdot \mu$ 和 ν。此外，由于 $q*$ 是其边缘测度之间的最优解，根据 μ 与 ν 互相奇异可知，存在一个映射 T，使得 $q* = (id, T)(f \cdot \mu)$，[PSP15，定理 4.6]。

我们断言，对于某个可测集 B，$f = 1_B$。这意味着唯一性。事实上，若 q_1 和 q_2 是两个可能不同的最优解，其密度分别为 1_{B_1} 和 1_{B_2}，那么根据线性性，$q_3 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$ 也是一个最优解，其密度必须满足 $1_{B_3} = \frac{1}{2}(1_{B_1} + 1_{B_2})$ $\mu - a.s.$因此，我们得到 $B_1 = B_2 = B_3$ $\mu - a.s.$，从而得到唯一性。

为了证明该断言，我们将采用反证法。假设 $\mu(\{f<1\})>0$，因此存在一个 $\varepsilon>0$，使得 $A=\{f\le 1-\varepsilon\}$ 具有正的 μ 测度。那么，$\tilde{q}=q_{|A\times\mathbb{R}^d}$ 在其边缘测度
$\tilde{}$ $\tilde{}$ 和 $f\mu$ 之间是最优的。为简化记号，我们可以假设 $\tilde{q}=q$ 和 $f=f\le 1-\varepsilon$。由于 μ 与 ν 具有互相奇异性，存在 y，使得

i) $\nu(B_r(y))>0$ 对所有 $r>0$均成立，即 $y\in$supp(ν) ii) li

$\mathrm{m}_{r\to 0}\frac{\mu(B_r(y))}{\nu(B_r(y))}=0$，由 μ 和 ν 的互相奇异性可得。

特别地，对于任意 $\delta>0$，存在 $r>0$ 使得 $\nu(B_r(y))>0$ 且 $\mu(B_r(y))\le\delta\nu(B_r(y))$，满足 $q(B_r(y)^c\times B_r(y))>0$。然而，由于 $f\le 1-\varepsilon$，我们可以更高效地利用 $T^{-1}(B_r(y))\setminus B_r(y)$ 内被运输至 $B_r(y)$ 的质量，从而构造出代价函数更低的耦合。在证明的剩余部分，我们将明确构造这样一个相对于 q 的竞争耦合。

令 $(x_0,y_0)\in\mathrm{supp}(q_{|B_r(y)^c\times B_r(y)})$，并选取充分小的 $r'>0$，例如 $r'<\sqrt{\frac{1}{2d}|x_0-y_0|}$即可。由于 $q(B_{r'}(x_0)\times B_{r'}(y_0))>0$，根据 [PSP15，引理 4.1]，存在一点 $x_1\in B_{r'}(x_0)$，具有以下性质

$$\forall\alpha>0,\forall\delta>0,\forall u\in\mathbb{S}^{d-1}: q((C(x_1,u,\delta,\alpha)\cap B_{r'}(x_0))\times B_{r'}(y_0))>0, \tag{2.4}$$

其中

$$C(x_1,u,\delta,\alpha)=\{z: u\cdot(z-x_1)\ge(1-\delta)|z-x_1|\}\cap\bar{B}_\alpha(x_1).$$

令 $u_-=\frac{x_1-y_0}{|x_1-y_0|}$和 $u_+=\frac{y_0-x_1}{|y_0-x_1|}$，并设 $C_-=C(x_1,u_-,\delta,\alpha)\setminus\{x_1\}$ 和 $C_+=C(x_1,u_+,\delta,\alpha)\setminus\{x_1\}$。那么，一个初等的几何论证表明，以下结论成立。对所有足够小的 $\delta,\alpha>0$

$$\forall z_-\in C_-,\forall z_+\in C_+,\forall\tilde{y}\in B_{r'}(y_0): |z_+-\tilde{y}|<|z_--\tilde{y}|. \tag{2.5}$$

在下文中固定这样的 $r',\delta,\alpha>0$。特别地，令 $r'>\alpha$ 使得式（2.4）中的交集化简为

$$C_+\cap B_{r'}(x_0)=C_+,$$

对 C_-也同理。对于 $0<s<1$，存在 $t=t(s)>1$ 使得

$$sq(C_-\times B_{r'}(y_0))+tq(C_+\times B_{r'}(y_0))=q((C_-\cup C_+)\times B_{r'}(y_0)).$$

令 π 为 $(t-1)\mathrm{pr}_1(q_{|C_+\times B_{r'}(y_0)})$ 和 $(1-s)\mathrm{pr}_2(q_{|C_-\times B_{r'}(y_0)})$ 的一个最优耦合。这些测度的总质量相同，因为

$sq(C_-\times B_{r'}(y_0))+tq(C_+\times B_{r'}(y_0))=q((C_-\cup C_+)\times B_{r'}(y_0))=q(C_-\times B_{r'}(y_0))+q(C_+\times B_{r'}(y_0))$。

然后定义

$$\hat{q}=sq_{|C_-\times B_{r'}(y_0)}+q_{|C_+\times B_{r'}(y_0)}+\pi.$$

由于 $\lim_{s\nearrow 1}t(s)=1$，根据 $f\le 1-\varepsilon$ 可知，当 $s<1$ 足够大时，$tf\le 1$ 成立。因此，$\hat{}q$定义了 $\mu_{|C_-\cup C_+}$ 与 $\mathrm{pr}_2(q_{|(C_-\cup C_+)\times B_{r'}(y_0)})$ 的一个半耦合。于是，$\hat{}q$ 是 $q_{|(C_-\cup C_+)\times B_{r'}(y_0)}$ 的一个可 admissible 竞争耦合。关于测度 $q_{|(C_-\cup C_+)\times B_{r'}(y_0)}$ 和 π 的第二个边缘测度进行解体，得到

$$\begin{aligned}
&\int_{(C_-\cup C_+)\times B_{r'}(y_0)}\vartheta(|x-y|)dq-\int_{(C_-\cup C_+)\times B_{r'}(y_0)}\vartheta(|x-y|)d\hat{q}\\
&=(1-s)\int_{C_-\times B_{r'}(y_0)}\vartheta(|x-y|)dq-\int_{C_+\times B_{r'}(y_0)}\vartheta(|x-y|)d\pi\\
&=(1-s)\int_{B_{r'}(y_0)}\mathrm{pr}_2(q_{|C_-\times B_{r'}(y_0)})(d\tilde{y})\left[\int_{C_-}dq_{\tilde{y}}(dx)\vartheta(|x-y|)-\int_{C_+}d\pi_{\tilde{y}}(dx)\vartheta(|x-y|)\right].
\end{aligned}$$

不等式 (2.5) 表明最后一行严格为正。也就是说，

$$\int\limits_{(C_-\cup C_+)\times B_{r'}(y_0)} \vartheta(|x-y|)dq > \int\limits_{(C_-\cup C_+)\times B_{r'}(y_0)} \vartheta(|x-y|)d\hat{q}.$$

然而，这与 q的最优性相矛盾。 □

我们非常简要地概述定理2.1的证明。

定理*2.1*的证明思路。最优半耦合的存在性可完全按照 [Hue16命题 3 的证明来证明。18]。

为了确立唯一性，我们引入局部最优性的概念。在我们的设定中，等变耦合 q 是局部最优的，当且仅当对 $\mathbb{P}$-几乎处处的 $\omega \in \Omega$，以下条件成立：

存在一个非负密度 ρ^ω 和一个 c-循环单调映射 $T^\omega : \{\rho^\omega > 0\} \to \mathbb{R}^d$，使得在$\{\rho^\omega > 0\}$上 $\times\, \mathbb{R}^d$

$$q^\omega = (Id, T^\omega)_\#(\rho^\omega \xi^\omega);$$

参见[Hue16]中的定义 5.3。正如 [HS13]中的命题 3.1 和定理 3.6 所示，最优半耦合的局部最优性可以得到证明。 [HS13中的命题 3.1] 的证明依赖于有界集上最优半耦合的唯一性；在我们的情形中，引理2.2给出了这一事实。

现在我们可以证明最优半耦合的唯一性。设 q_1， q_2 是两个最优半耦合。根据局部最优性，存在映射 T_i和密度 ρ_i， $i = 1$， 2，使得 $q_i^\omega = (Id,\ T_i^\omega)\#(\rho_i^\omega \xi^\omega)$。将 q_i 限制在有界集上，由最优性和引理 2.2可知，我们可以假设$\rho_i^\omega = {}_{\mathbb{I}^{A_i^\omega}}$，其中某个集合 $A_i^\omega \subset \mathbb{R}^d$是可测集。对最优半耦合$q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2)$应用同样的推理可得 $q_1 = q_2$。 □

最后，我们需要以下版本的 de la Vall´ee Poussin 引理。

引理 2.3. 设 $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 是勒贝格可积函数。则存在一个连续的凹函数 $\vartheta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$，满足 $\vartheta(0) = 0$，使得

$$\int\limits_0^\infty f(x)\vartheta(x)dx < \infty.$$

此外， ϑ可以 选为严格递增，在 $(0,\infty)$ 上光滑，并且满足 $\lim_{x\to\infty} \vartheta(x) = \infty$.

证明。 令 Φ 为将 [Lau15, 定理 2.8] 应用于函数$g(x) = x$ 和测度 ${}_{\mathbb{I}^{[1,\infty)}(x)\frac{f(x)}{x}dx}$所得的凸函数。也就是说， $\Phi \in C^\infty([0,\infty))$， $\Phi'(0) = \Phi(0) = 0$， Φ 关于 ${}_{\mathbb{I}^{[1,\infty)}(x)\frac{f(x)}{x}dx}$ 可积，且 Φ' 是凹函数。此外

$$\frac{\Phi(r)}{r} \xrightarrow{x\to\infty} \infty \text{ and } \Phi'(r) > 0 \quad \forall r > 0.$$

定义 $\vartheta(x) = {}^{\Phi}\!/_{(x)\,x}$ 对于 $x > 0$，并令 $\vartheta(0) = \Phi'(0) = 0$，从而将此函数连续延拓。注意，由于 Φ 是凸的， ϑ 是严格递增的。由 ϑ 的凹性可得[Lau15，命题 2。14]。最后， $f \cdot \vartheta$ 的可积性由

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty f(x)\vartheta(x)dx &= \int\limits_0^1 f(x)\vartheta(x)dx + \int\limits_1^\infty f(x)\frac{\Phi(x)}{x}dx \\ &\le \sup_{x\in[0,1]} \vartheta(x) \int\limits_0^1 f(x)dx + \int\limits_1^\infty f(x)\frac{\Phi(x)}{x}dx < \infty.\end{aligned}$$

□

3. 定理 1.2的证明

从现在起，我们假设（ξ，η）是联合平稳且遍历的随机测度，并具有相同的有限强度。我们首先证明，存在一个凹、严格递增且趋于无穷的函数 ϑ，使得关于 2.2 的平均运输成本（ $c(x,\ y)\ =\vartheta($ $|x-y|)$ 有限。结合定理2.1 可知，当 ξ 和 η 互相奇异时，存在分配，见第 3.2小节。接下来，我们将在 ξ 和 η 均不赋予小集正测度的情形下证明主要结果，见第 3.3小节。最后，我们将在第 3.4小节证明一般情形下的结论。

3.1. 存在有限成本的等变耦合。

引理 3.1. 设 ξ 和 η 是具有相同有限强度的两个联合平稳且遍历的随机测度。存在 ξ和 η的一个等变耦合 q，以及一个凹函数 $\vartheta\colon [0,\infty)\to[0,\infty)$，使得

$$\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\times\mathbb{R}^d}\vartheta(|x-y|)q(dx,dy)\right]<\infty.$$

此外，函数 ϑ 可以选为连续且严格递增，并且满足$\vartheta(0)\ =0$ 以及 $\lim_{x\to\infty}\vartheta(x)\ =\infty$。

证明。 根据 [LT09，定理 5.1]，，由于二者的强度相同，存在一个等变耦合 q，它耦合了 ξ 和 η。我们将构造所需的函数 ϑ。由于 ξ 具有有限强度，我们可以写成

$$\mathbb{E}\left[\xi\left(\Lambda_1\right)\right]=\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\times\mathbb{R}^d}q(dx,dy)\right]=\sum_{n\geq0}\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\times\mathbb{R}^d}\mathbb{I}^{n\leq|x-y|<n+1}q(dx,dy)\right]=\sum_{n\geq0}a_n<\infty,$$

其中 $a_n\ =\ \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\times\mathbb{R}^d}\mathbb{I}^{n\leq|x-y|<n+1}q\ (dx,\ dy)\right]$。定义函数 $f\colon\ \ [0,\infty)\ \to\ [0,\infty)$ 为 $f\ =$ $\sum_{n\geq0}\mathbb{I}^{[n,n+1)}\ a_n$。根据构造，$f$ 是可积的。因此，由引理 2.3 可知，存在函数 ϑ ，其具有该引理陈述中所列的性质，在（0，∞）上光滑并满足

$$\sum_{n\geq0}a_n\int_n^{n+1}\vartheta(x)dx=\int_0^\infty\vartheta(x)f(x)dx<\infty.$$

Then

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\times\mathbb{R}^d}\vartheta(|x-y|)q(dx,dy)\right]&=\sum_{n\geq0}\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\times\mathbb{R}^d}\vartheta(|x-y|)_{\mathbb{I}^{n\leq|x-y|<n+1}}q(dx,dy)\right]\\&\leq\sum_{n\geq0}\vartheta(n+1)\,\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\times\mathbb{R}^d}\mathbb{I}^{n\leq|x-y|<n+1}q(dx,dy)\right]\\&=\sum_{n\geq0}\vartheta(n+1)a_n.\end{aligned}$$

对于 $n\geq1$，我们在最后一步利用 ϑ 的凹性进行估计

$$\vartheta(n+1)-\int_n^{n+1}\vartheta(x)dx=\int_n^{n+1}\vartheta(n+1)-\vartheta(x)dx\leq\sup_{x\in[1,\infty)}\vartheta'(x)=\vartheta'(1).$$

因此我们可以给出上界

$$\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\times\mathbb{R}^d}\vartheta(|x-y|)q(dx,dy)\right]\le a_0\vartheta(1)+\sum_{n\ge1}\vartheta(n+1)a_n$$
$$\le a_0\vartheta(1)+\sum_{n\ge1}a_n\left(\int_n^{n+1}\vartheta(x)dx+\vartheta'(1)\right)<\infty.$$

□

3.2. **互相奇异测度**。

推论 3.2. 设 ξ 和 η 是两个联合平稳且遍历的随机测度，它们具有相同的有限强度，并且 $a.s.$ 互相奇异。此外，假设 ξ 不对$(d-1)$-可求 *rectifiable* 集赋予质量。则存在一个因子分配。

证明。 由引理 3.1 可得函数 ϑ，它具有有限的平均运输成本，并满足定理 2.1中列出的性质。定理 2.1 的其他假设也都满足。最后注意到，由于随机测度 ξ 和 η 具有相同的强度，最优半耦合就是一个耦合。因此，随机映射 T^ω 是 ξ 和 η的因子分配。 □

3.3. **不对小集赋予质量的测度**。 在本小节中，我们假设 ξ 和 η 都不对小集赋予质量。我们考虑分解 $\xi=(\xi\wedge\eta)+(\xi-\eta)_+$和 $\eta=(\xi\wedge\eta)+(\eta-\xi)_+$。这里，$(\xi-\eta)_+$表示 $\xi-\eta$的 Jordan 分解的正部，而测度 $(\eta-\xi)_+$也类似地定义。注意，测度 $(\xi-\eta)_+$ 和 $(\eta-\xi)_+$ 互相奇异，不对小集赋予质量，即不对$(d-1)$-可求 rectifiable 集赋予质量，并且具有相同的强度。

命题 3.3。 设 ξ 和 η 是两个联合平稳且遍历的随机测度，具有相同的有限强度。假设 ξ 和 η 不对小集赋予质量。则存在一个因子分配。

证明。 令 $T\colon \mathrm{supp}(\xi-\eta)_+\to\mathrm{supp}(\eta-\xi)_+$ 为互相奇异测度的因子分配，根据推论3.2，该分配存在。由于两个测度都不对小集赋予质量，也存在逆分配 $T^{-1}\colon\mathrm{supp}(\eta-\xi)_+\to\mathrm{supp}(\xi-\eta)_+$。我们定义（随机）函数 F在 $\mathbb{R}^d$上如下:

$$F(x)=\begin{cases}T(x) & x\in\mathrm{supp}(\xi-\eta)_+\\ x & \text{otherwise}\\ T^{-1}(x) & x\in\mathrm{supp}(\eta-\xi)_+\end{cases}$$

令 $G:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 为一个可测的双射函数，满足 $G(0)=0$。定义函数$I:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 如下:

$$I(t)=\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1}\mathbb{I}^{G(F(x)-x)\le t}\mathbb{I}^{F(x)-x\ne0}\xi(dx)\right].$$

此函数满足 $\lim_{t\to-\infty}I(t)=0$ 且 $\lim_{t\to\infty}I(t)=\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1}\mathbb{I}^{F(x)-x\ne0}\xi(dx)\right]>0$。我们证明它是连续的。由于它关于 t 递增，只需证明对于固定的 $t\in\mathbb{R}$

$$\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1}\mathbb{I}^{G(F(x)-x)=t}\mathbb{I}^{F(x)-x\ne0}\xi(dx)\right]=0.$$

这对 $t=0$ 成立，因此令 $t\neq 0$。于是

$$\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1} \mathbb{I}^{G(F(x)-x)=t}\,\mathbb{I}^{F(x)-x\neq 0}\xi(dx)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1} \mathbb{I}^{F(x)-x=G^{-1}(t)}\xi(dx)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\cap \mathrm{supp}(\xi-\eta)_+} \mathbb{I}^{T(x)-x=G^{-1}(t)}\xi(dx)\right] + \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\cap \mathrm{supp}(\eta-\xi)_+} \mathbb{I}^{T^{-1}(x)-x=G^{-1}(t)}\xi(dx)\right]. \tag{3.1}$$

现在考虑测度 $\mathbb{I}^{\Lambda_1\cap \mathrm{supp}(\xi-\eta)_+}\xi$ 及其对应的推前测度 $T_{\#}(\mathbb{I}^{\Lambda_1\cap \mathrm{supp}(\xi-\eta)_+}\xi)$ 的一个固定实现。根据 [Hue16, 定理 5.5]，可知 T 是关于代价函数 $c(x,y)=\vartheta(|x-y|)$ 的测度 $\mathbb{I}^{\Lambda_1\cap \mathrm{supp}(\xi-\eta)_+}\xi$ 和 $T_{\#}(\mathbb{I}^{\Lambda_1\cap \mathrm{supp}(\xi-\eta)_+}\xi)$ 的最优传输映射。应用 [PSP15, 命题 5.1]，由此可得，几乎必然地。

$$\xi\left(\{x\in\Lambda_1\cap \mathrm{supp}(\eta-\xi)_+ : T(x)-x=G^{-1}(t)\}\right)=0.$$

因此，第一个期望为零。由于我们将范围限制在集合 $\mathrm{supp}(\eta-\xi)_+$上，我们可以按以下方式从上方估计第二个期望 (3.1)

$$\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\cap \mathrm{supp}(\eta-\xi)_+} \mathbb{I}^{T^{-1}(x)-x=G^{-1}(t)}\xi(dx)\right] \leq \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\cap \mathrm{supp}(\eta-\xi)_+} \mathbb{I}^{T^{-1}(x)-x=G^{-1}(t)}\eta(dx)\right].$$

根据我们用于第一个期望的同一论证，可知上界等于零。因此，(3.1)中的两项均为零，连续性得以证明。我们将相应的函数 $J(t)$定义为

$$J(t)=\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1} \mathbb{I}^{G(F(x)-x)>t}\,\mathbb{I}^{F(x)-x\neq 0}\eta(dx)\right].$$

该函数也是连续的，并且有极限 $\lim_{t\to-\infty} J(t) = \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1} \mathbb{I}^{F(x)-x\neq 0}\eta(dx)\right] > 0$和 $\lim_{t\to\infty} J(t) = 0$。因此，存在一个 t_0，使得 $I(t_0)=J(t_0)$。

这意味着随机测度 $\mathbb{I}^{G(F(x)-x)\leq t_0}\,\mathbb{I}^{F(x)-x\neq 0}\xi$ 和 $\mathbb{I}^{G(F(x)-x)>t_0}\,\mathbb{I}^{F(x)-x\neq 0}\eta$ 具有相同的强度。由于它们互相奇异，我们可以应用推论 3.2 得到一个因子分配

$$S_1 : \mathrm{supp}(\mathbb{I}^{G(F(x)-x)\leq t_0}\,\mathbb{I}^{F(x)-x\neq 0}\xi) \to \mathrm{supp}(\mathbb{I}^{G(F(x)-x)>t_0}\,\mathbb{I}^{F(x)-x\neq 0}\eta).$$

类似的论证可得测度的因子分配 S_2

$$\mathbb{I}^{G(F(x)-x)>t_0}\,\mathbb{I}^{F(x)-x\neq 0}\xi \text{ and } \mathbb{I}^{G(F(x)-x)\leq t_0}\,\mathbb{I}^{F(x)-x\neq 0}\eta.$$

定义 S_3 $\mathbb{I}^{F\,x\,-x=0}\xi \to \mathbb{I}^{F\,x\,-x=0}\eta$ $T=S_1+$: supp(()) supp(()) 为恒等映射，我们 S_2+S_3 ξ η □

可见，这对于测度 和 也是一个因子分配。

3.4. **一般情况**。 结合推论3.2 和命题 3.3 我们证明最一般的情况 .

定理 3.4。 设 ξ 和 η 是两个具有相同有限强度的联合平稳遍历随机测度。假设 ξ 不对小集赋予正测度。那么存在一个因子分配。

证明。 根据勒贝格分解定理，我们可以将 $\eta=\eta^a+\eta^s$写成.....，其中 η^a 相对于 ξ绝对连续。测度 η^s 和 ξ 互相奇异。

由引理3.1 可知，存在一个函数 ϑ 以及一个 $\tilde{q}$ 和 ξ 与 η 的等变耦合，使得

$$\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1\times\mathbb{R}^d} \vartheta(|x-y|)\tilde{q}(dx,dy)\right] < \infty.$$

注意，将 $\tilde{q}$ 限制在（随机）集合 $\mathbb{R}^d \times \mathrm{supp}(\eta^s)$上，可得到 ξ 和 η^s的一个半耦合。由于代价函数由上述期望所界定，该半耦合关于函数 ϑ具有有限的平均运输成本。由于 ξ 和 η^s 互相奇异，定理2.1 给出了 q 和 ξ 与 η^s的一个等变半耦合。

~ ~记 ξ 为 q 的第一边缘测度，并记 f 为 ξ 相对于 ξ的密度。定理 2.1 还给出了一个~因子分配 T，它将 ξ推到 η^s上。注意，随机测度 $\mathbb{I}^{f>0}\xi$的强度大于或等于测度 $\mathbb{I}^{f>0}\tilde{\xi} = \tilde{\xi}$的强度，而后者与 η^s的强度一致。类似于前面的证明，利用相同的确定性函数 I定义（t） G如下：

$$I(t) = \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1} \mathbb{I}^{f(x)>0}\mathbb{I}^{G(T(x)-x)\le t}\xi(dx)\right].$$

我们看到 $\lim_{t\to-\infty} I(t) = 0$，并且 $\lim_{t\to\infty} I(t) = \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1} \mathbb{I}^{f(x)>0}\xi(dx)\right] \ge \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1} d\eta^s\right]$。

I 的连续性与前面的证明类似。令 $t \in \mathbb{R}$。则

$$\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1} \mathbb{I}^{f(x)>0}\mathbb{I}^{G(T(x)-x)=t}\xi(dx)\right] = \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1} \frac{1}{f(x)}\mathbb{I}^{G(T(x)-x)=t}\tilde{\xi}(dx)\right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1}\left(\frac{1}{f(x)} \wedge N\right)\mathbb{I}^{G(T(x)-x)=t}\tilde{\xi}(dx)\right] \le \lim_{N\to\infty} N\,\mathbb{E}\left[\int_{\Lambda_1} \mathbb{I}^{G(T(x)-x)=t}\tilde{\xi}(dx)\right].$$

由于根据 [Hue16，定理 5.5] （局部最优性，参见定理 2.1 的证明概要）， T 是测度 $\mathbb{I}^{\Lambda_1}\mathbb{I}^{G(T(x)-x)=t}\xi$与 $T_{\#}(\mathbb{I}^{\Lambda_1}\mathbb{I}^{G(T(x)-x)=t}\xi)$之间运输的最优~ ~映射，我们可以再次应用 [PSP15，命题 5.1]。因此，对每个 N，最后一行期望中的积分几乎处处等于 0。这证明了连续性。

由介值定理，存在一个 $t_0 \in \mathbb{R}$，使得测度 $\mathbb{I}^{f>0}\mathbb{I}^{G(T(x)-x)\le t_0}\xi$ 与 η^s 具有相同的强度。定义随机集

$$A = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > 0\} \cap \{x \in \mathbb{R}^d : G(T(x) - x) \le t_0\}.$$

由于测度 $\mathbb{I}^A\xi$ 与 η^s 具有相同的强度且互相奇异，根据推论 S_1 3.2，存在一个因子分配 3.2。

注意，测度 $\mathbb{I}^{A^c}\xi$ 与 η^a 不对小集赋予正测度，因为 η^a 相对于 ξ绝对连续。因此，根据命题 3.3，存在一个因子分配 S_2，它将 $\mathbb{I}^{A^c}\xi$ 推送到 η^a上。映射 $T = S_1 + S_2$ 就是所需的因子分配。□

参考文献

[AEdBCAM11] P. C. ´Alvarez-Esteban、E. del Barrio、J. A. Cuesta-Albertos 和 C. Matr´an。《最优不完全运输方案的唯一性与近似计算》。*Annales de l'I.H.P. Probabilit´es et statistiques*，47(2):358–375，2011。

[在93] David J. Aldous 和 Hermann Thorisson. 移位耦合. 随机过程及其应用, 44(1):1–14, 1993. [CPPR10] Sourav Chatterjee、Ron Peled、Yuval Peres 和 Dan Romik. 泊松点的引力分配. 数学年刊 *(2)*, 172(1):617–671, 2010. [Fig10] Alessio Figalli. 最优部分输运问题. 《理性力学与分析档案》, 195(2):533–560, 2010. [HHP06] Christopher Hoffman、Alexander E. Holroyd 和 Yuval Peres. 泊松与勒贝格的稳定婚姻. 《概率年刊》, 34(4):1241–1272, 2006. [HMK16] Mir-Omid Haji-Mirsadeghi 和 Ali Khezeli. 平稳随机测度之间的稳定输运. 电子概率期刊, 21:第 51 号论文, 25, 2016.[HP05] Alexander E. Holroyd 和 Yuval Peres. 额外头部与不变分配. 《概率年刊》, 33 52, 2005 1 31( ): – .

[HS13] Martin Huesmann 和 Karl-Theodor Sturm. 从勒贝格到泊松的最优输运. 《概率年刊》, 41(4):2426–2478, 2013. [Hue16] Martin Huesmann. 随机测度之间的最优输运. Henri Poincar´e 概率统计研究所年刊, 52(1):196–232, 2016. [Lau15] Philippe Lauren¸cot. 弱紧性技术与凝聚方程. 载于《演化方程及其在自然科学中的应用》, 《数学讲义》第 2126 卷, 第 199–253 页。施普林格, 查姆, 2015 年。 [Lig02] Thomas M. Liggett. 标记粒子分布, 或如何随机选择一个头部. 载于《平衡与非平衡》（曼布卡巴, 2000）, 《概率进展》第 51 卷, 第 133–162 页。Birkh¨auser 波士顿, 波士顿, 马萨诸塞州, 2002 年。 [LMT14] G¨unter Last、Peter M¨orters 和 Hermann Thorisson. 布朗运动的无偏移位. 《概率年刊》, 42(2):431–463, 2014. [LT09] G¨unter Last 和 Hermann Thorisson. 平稳随机测度的不变输运与质量平稳性. 《概率年刊》, 37(2):790–813, 2009. [LT21] G¨unter Last 和 Hermann Thorisson. $\mathbb{R}^d$ 上弥散随机测度的运输. arXiv:2112.13053, 2021.[LTT18] G¨unter Last、Wenpin Tang 和 Hermann Thorisson. 直线上随机测度的运输以及将游程嵌入布朗运动. Henri Poincar´e 概率统计研究所年刊, 54 4 2286 2303, 2018. ( ): – .[PSP15] Paul Pegon、Filippo Santambrogio 和 Davide Piazzoli. 凹成本下最优输运计划的完整刻画. 《离散与连续动力系统》, 35(12):6113–6132, 2015. [Tho96] Hermann Thorisson. 随机元素变换与随机场移位. 《概率年刊》, 24(4):2057–2064, 1996.

M.H.: 明斯特大学, 德国电子邮箱地址:
martin.huesmann@uni-muenster.de

B.M.: 明斯特大学, 德国电子邮箱地址:
bastian.mueller@uni-muenster.de