arXiv:2303.00543v1 [math.DS] 1 Mar 2023

格的边界作用与 C^0 局部半刚性

CHRIS CONNELL[†]、MITUL ISLAM[‡]、THANG NGUYEN、RALF SPATZIER[‡†]

摘要。我们研究非紧型半单李群中的紧商格在其边界上的作用，其中边界是 G/Q Q 一个抛物群；这类作用称为标准作用。我们证明，同胚群中对标准作用的扰动，可通过一个接近恒等映射的半共轭连续地映射到原标准作用上。这推广了 Bowden、Mann、Manning 和 Weisman 在负曲率或 Gromov双曲群情形下的相关工作。最后，我们还构造了格在测地边界上的作用的扰动，它们与原作用并不 C^0 半共轭。

目录

1. 引言 1
2. 预备知识 I：重心 6
3. 标准作用与 Bowden-Mann 引理的推广 9
4. 预备知识 II：拓扑作用的一般结果 17
5. 预备知识 III：对称空间与富斯滕贝格边界 22
6. 对称空间的粗几何 28
7. C^0 格的边界作用的局部半刚性 30
8. 主定理的应用：可微与 Lipschitz局部刚性 42
9. 测地边界上的作用 43
附录 A. 重心与估计 45
附录 B. 关于叶状结构的一些引理 55
参考文献 58

1. 引言

过去几十年来，作用的局部刚性在动力系统中发挥了重要作用。对流形上的光滑作用，这一问题得到了最广泛的研究；所考虑的扰动与原作用在 C^1 或可能的 C^k 拓扑下足够接近。

经典研究中，人们关注结构稳定系统。这类系统的作用在 C^1 拓扑下受到充分小的扰动后，与未扰动的作用 C^0 共轭，或至少 C^0 轨道等价。动力系统中存在许多这样的系统，尤其是微分同胚和流。事实上，20 世纪 70 至 80 年代，人们曾投入大量精力来刻画后者。最简单的结构稳定微分同胚和流来自一致双曲动力系统，特别是 Anosov 系统，正如 Anosov 在 20 世纪 60 年代所证明的那样。这一类包括负截面曲率闭流形 M 的测地流。在此情形下，$\widetilde{\ }$ 基本群 $\pi_1 M$ 在测地紧化 ∂M 上也有一个自然作用。对于常曲率 -1 流形

2010 数学主题分类。 主要分类 53C24；次要分类 53C20、37D40。
† 部分研究经费由 Simons基金会资助（项目编号 #965245）。
‡ 部分研究经费由埃米·诺特项目 427903332（由德国研究联合会资助）提供。
‡† 部分研究经费由美国国家科学基金会项目 DMS 2003712 提供。

M，Sullivan 运用对偶性论证，通过测地流的结构稳定性证明了这些边界作用的局部刚性[Sul85]。此后，Ghys、Kanai、Katok-Spatzier，以及近来 Kapovich、Kim 和 Lee 相继开展了相关研究 [Ghy93，Kan96，KS97，KKL22]。后三项研究尤其考察了高秩半单李群中一致格的射影作用，这些课题长期以来都备受关注。

这些结果利用了双曲作用的结构稳定性，并要求扰动具有 C^1 动力学性质。最近，Bowden 和 Mann 研究了 C^0 负曲率单连通黎曼流形上等距变换的共紧群的边界作用的扰动 X [BM22]。特别地，这包括秩一半单李群的一致格在其 Furstenberg 边界上的作用。

值得注意的是，Bowden 和 Mann 证明了这些作用的 C^0 局部刚性结果，即在流形的同胚群中、相对于紧开拓扑足够接近的扰动下成立的结果。请注意，在这种一般性下，尽管边界 $\partial_\infty X$ 的 X 确是一个紧流形，事实上在拓扑上是一个球面，但它并不总是具有使边界作用 C^1可微 C^1的可微结构。因此，这类作用的 [局部刚性21]甚至没有意义。后来，Mann 和 Manning 将他们的工作推广到了作用于自身边界的 Gromov双曲群，假设后者同胚于一个球面 [MMW22]。再后来，Mann、Manning 和 Weisman 处理了 Gromov双曲群的一般情形 [MMW22]。在一项正在进行的工作中，他们进一步将这些结果推广到了相对双曲群作用于 Bowditch边界的情形。

本文的主要目标是为高秩半单李群中的一致格在其富斯滕贝格边界上的作用建立类似的结果（定理 1.1）。这些结果与研究高秩半单李群 G 及其格 Γ 在流形上的作用这一总体纲领相契合。这项探索由 R. Zimmer 于 20 世纪 80 年代发起，如今被称为 Zimmer 纲领 [Zim83, Zim84, Zim87]。这项工作源于他对 Margulis超刚性定理的卓越推广：将其从格到李群的同态推广到有限测度保持作用上的余循环（或 G 或 Γ作用上的余循环），例如紧流形上的保体积作用。自那以后已经取得了许多成果；参见 Fisher 的综述 [Fis20, Fis07]。特别是，Brown、Fisher 和 Hurtado 在 Zimmer 猜想方面取得了重大进展，该猜想认为格 Γ 不能在“低维”流形 [上作用 BFH22, BFH20, BFH21]。此前，Farb-Shalen、Polterovich 以及 Franks-Handel [FS99, Pol02, FH03]也分别获得了一些特殊结果。

目前，我们已经有许多此类群的作用实例，它们本身并非代数性质，尽管这些实例是通过爆破构造由代数作用构造而来的[KL96，Ben00，BF05，Fis07]。然而，分类问题依然存在，只是形式较为宽松；Zimmer 提出，作用在稠密开集上是齐性的。Labourie 在[Lab98] 中，以及后来 Margulis 在其为新世纪列出的问题中 [Mar00] 给出了精确表述。

人们也在积极探索如何在自然的动力学或几何假设下建立所需的分类。例如，我们现在对 G 的“双曲”作用已有了深入了解。比如，Brown、Rodriguez Hertz 和 Wang 对高秩格在环面和幂零流形上的作用进行了分类 [BRHW17]。最近，Damjanovic、Spatzier、Vinhage 和 Xu [DSVX22]证明了在任意紧流形上，具有多个 Anosov 元素的 G保体积作用具有代数性。

Zimmer 纲领主要讨论保体积作用。在 G 或Γ 对 G/Q， Q 抛物型子群的作用却无法保持任何概率测度。不过，它们是理解这些群在紧流形上的一般作用的重要构件。因此，我们希望了解它们的刚性性质，包括局部刚性和整体刚性。对于 $C^k(k \geq 1)$ 或一致格的 Lipschitz 作用，局部刚性已在 [Kan96、KS97、KKL22],

如上文所述。Brown、Rodriguez Hertz 和 Wang 甚至为某些群及抛物子群得到了全局刚性结果[BRHW]。

然而， C^0标准作用的局部刚性 Γ 在高秩情形下尚未得到研究。这正是我们在定理1.1 中针对一致格所取得的成果——也是本文的主要结果。这为 Zimmer 纲领开辟了一个新方向，即研究 G 和 Γ的连续作用。迄今为止，关于高秩格的已知成果中，最出色的仅涉及其在圆或实直线上的作用，这些成果由 Morris [Wit94] 针对 $SL(n, \mathbb{Z})$ 以及其他满 $\mathbb{Q}$秩格证明。Deroin 和 Hurtado[DH20]最近将这一结果完整地推广到了所有高秩格。这些工作延续了 Ghys、Burger-Monod 和 Navas 早先关于 C^1作用的研究[Ghy99，BM99，Nav02]。

自然地，我们现在可以探讨其他代数作用的 C^0 局部半刚性问题，例如保持仿射结构的作用。对于这些作用，在更高正则性假设下，已知其局部刚性性质。事实上，Fisher 和 Margulis 证明了 C^k 适当 k 的局部刚性，具体取决于作用的类型和流形的维数[FM03，FM05，FM09]。这些结果建立在 Margulis 和 Qian 早期工作的基础上 [MQ01]。这些作用是否具有 C^0局部半刚性？是否存在一般性的 C^0Zimmer 纲领？关于更多构造、结果、问题和猜想，请参阅 Weinberger 的综述[Wei11，FS00]。

我们注意到，这类作用通常并非 C^0 局部刚性。事实上，我们为可数群在具有稠密轨道的紧流形上的任意 C^1 作用，找到了一个构造 C^0 扰动的一般方法；参见构造 4.11。更进一步，在定理 1.4 中，我们构造了 C^∞ 新的作用： G 在其局部对称空间的无穷远球面上的边界作用，经变形后得到G 和 Γ 在球面上的作用。这些作用与未扰动的作用并不 C^0 半共轭。我们的构造还可进一步推广，参见注 9.1。还需指出，Uchida 和 Kuroki 构造了 $SL(3,\mathbb{R})$ 的其他C^0 作用，见 S^4 [Uch85、Kur05]。这些作用既不是我们所构造作用的变形，也不与之半共轭；事实上，它们只有有限多个轨道。最后，我们提及 Fisher 和 Melnick 最近的工作 [FM22]：他们构造了许多新的实解析作用实例，这些作用是 SL($n,\mathbb{R}$) 在维数为 n 的流形上的作用，且这些作用构成一个离散的 C^0 共轭类集合。然而，它们的实解析共轭类则构成一个连续统。

现在，我们将非正式地讨论本项工作的主要组成部分。正如本文开篇提及的局部刚性结果中那样，双曲性仍将发挥根本作用。虽然我们不再拥有简单的南北动力学，但单个双曲元素通过莫尔斯–斯梅尔微分同胚作用，这是双曲性更为复杂的一种表现。不过，真正将这一切巧妙联结起来的，是对称空间的测地边界，所有富斯滕贝格边界都自然地嵌于其中。无穷远处平坦的结构正是在此发挥作用。归根结底，我们将大量利用这样一个事实：高秩对称空间中的拟平坦接近有限个平坦的并（引理 6.1）。这一方法与 Bowden 和 Mann 的工作相呼应；他们的工作核心是运用拟测地线和莫尔斯引理技术。

据我们所知，这是拟等距刚性在高秩动力系统中的首次应用，这一关联长期以来一直备受期待。事实上，这似乎也是这些技术在粗几何领域之外的首次应用。

首先，让我们先给出局部半刚性的精确定义。给定一个拓扑空间F，赋予其同胚群 Homeo(F) 紧开拓扑。设 Γ 是一个有限生成群，其有限生成集为 Γ_0。设 ρ_0 是 Γ 在拓扑空间 F 上的一个同胚作用。

如果存在恒等映射 $\in$ Homeo(F) 的一个邻域 N，使得：若 $\rho\colon \Gamma \to$Homeo(F) 是 Γ 在 F 上的作用，并且对所有 $\gamma \in \Gamma_0$, $\rho(\gamma) \cdot \rho_0(\gamma)^{-1} \in N$ 都成立，那么就称其为 ρ_0 C^0-局部半刚性；此时存在连续满射 $f\colon F \to F$，使其交织 ρ 与 ρ_0（即 $f \circ \rho(\gamma) = \rho_0(\gamma) \circ f$

对所有 $\gamma \in \Gamma$ 都成立）。换句话说， ρ_0 是 ρ 的连续因子。这样的映射 f 也称为半共轭，更准确地说，是一个 (ρ, ρ_0)-半共轭。

获得半共轭通常是所能得到的最佳局部刚性结果，正如我们将在构造 C^0-扰动时所见4.11。在那里，我们改造著名的 Denjoy 构造，构造任意 C^0-扰动 C^1-作用 ρ_0 ： 可数群在具有稠密轨道的紧流形上的作用。这些扰动并不 C^0 共轭于 ρ_0。因此，在格对边界的作用这一背景下，下面的结果——我们的主定理——已是最佳可能结果。

定理 1.1 (定理 7.1)。 设 Γ 是连通线性半单李群 G 中的一致格，且该群没有紧因子。设 ρ_0 为 Γ 在 G/Q 上的左乘作用。那么，任何与 C^0-作用 ρ 足够接近的 Γ ，在 ρ_0 拓扑下 C^0 ，都半共轭于 ρ_0。此外，该半共轭在恒等映射 的$\mathrm{Homeo}(F)$中与其接近。

我们注意到，在秩一情形下，我们的结果是 Bowden 和 Mann 工作的特殊情形[BM22]。此外，我们的证明实质上简化为他们的论证。此外，由定理 7.1 可知，半共轭下各点的原像具有较小的直径，这表明 Denjoy 构造本质上是共轭的唯一障碍。我们指出，我们的证明不涵盖非一致格的情形。我们自然地猜想这些论断仍然成立。

根据我们的主定理，在第 8 节中，我们重新得到此前的局部刚性结果；在对扰动的正则性作出附加假设的情况下，这些结果可导出共轭。Kapovich、Kim 和 Lee[KKL22] 利用 Sullivan 风格的结构稳定性方法，证明了标准作用的 Lipschitz 扰动满足这一点。

推论 1.2。 [KKL22，定理 1。2] 设 $\Gamma < G$ 是一个连通的、无紧因子且高秩的线性半单李群 G 中的一致格。设 Q 是 G的一个抛物子群，并设 ρ_0 是 Γ 在 G/Q 上的左平移作用。则存在 U 的一个邻域 ρ_0 （关于 *Lipschitz* 拓扑），使得每个 $\rho \in U$ 都与 C^0半 ρ_0共轭。

对于光滑的 C^1 近扰动，Kanai 在更严格的假设下、Katok-Spatzier 在一般情形下，分别通过截然不同的证明得到了以下结果：

推论 1.3. [Kan96、KS97] 设 $\Gamma < G$ 是一个连通线性半单李群 G 中的一致格，该李群具有高秩且没有紧因子。设 Q 是 G的一个抛物子群，并设 ρ_0 是 Γ 通过左平移在 G/Q 上的作用。那么存在 U 的一个邻域 ρ_0 ，其中包含与 ρ_0 在 C^1-拓扑下足够接近的光滑作用，使得每个 $\rho \in U$ 都与 C^∞-共轭于 ρ_0。

在即将发表的工作中， [BRHW], Brown、Rodriguez Hertz 和 Wang 得到了推论1.3的一个 [BRHW, BRHW22]版本。值得注意的是，他们的工作甚至适用于非一致格。对于分裂单群的极小富斯滕贝格边界，他们还证明了一个全局刚性结果。

自然会有人问，格 $\Gamma \subset G$ 在其他类型的边界上的作用有多刚性。最自然的边界是测地边界。在高秩情形中，事实证明我们总能进行非平凡变形，而且这些变形可以做到任意光滑。对于 $k \geq 0$, 如果 ρ_0 在 C^k-作用中 并非局部半刚性的，我们就称之为这种情况：在 ρ_0 的作用空间中，任意充分小的邻域都包含一个与 ρ_0 不半共轭的作用。

定理 1.4。 （见第 *9* 节）设 Γ 是非紧型高秩对称空间的格 X，不一定是均匀格。那么， Γ 在 $\partial_\infty X$ 上的标准作用，在 C^k 作用中并非局部半刚性的，任意 $k \in [0, \infty]$ 均如此。

值得注意的是，Fisher 和 Melnick 也以类似的思路构造了 G 在射影空间上的圆丛上新的作用 [FM22]。他们甚至找到了实解析作用。然而，我们不知道定理 1.4 中的扰动能否构造成实解析的。

人们不禁会问，类似的结果在更一般的非正曲率情形下是否成立。更确切地说，考虑一个紧致非正曲率流形 M，其不含局部欧几里得德拉姆因子$\widetilde{\ }$，并考虑其基本群 $\pi_1(M)$ 在$\widetilde{\ }$万有覆盖 M 的测地边界 $\partial_\infty M$ 上的作用。这个作用 C^0 是否局部半刚性？我们猜想，局部半刚性适用于具有孤立平坦的流形，而我们认为局部半刚性在图流形上并不成立。要准确表述局部半刚性成立的条件，似乎相当困难。

论证概要：我们首先概述定理1.1的证明。考虑一致格 Γ 在 G/Q 上的标准作用，其中 Q是一个抛物子群。我们采用悬挂构造，得到一个韦伊室丛 $\Gamma\backslash G/M_Q$，它位于与Γ相关的局部对称空间之上。Weyl室流产生中心稳定流形和中心不稳定流形。在万有覆盖上的韦伊室丛中，它们各自都与和 G 相关的对称空间等距。给定 G/Q上的一个扰动作用，我们在韦伊室丛上构造一个新的叶状结构，它是中心稳定叶状结构的扰动。在光滑情形下，可以通过悬挂空间之间的微分同胚拉回适当的叶状结构来完成这一构造。该微分同胚通过使用隐函数定理求解某些余边界方程构造而成，参见例如[CNS22附录]。我们这里论证的一个关键要求是，扰动后的中心稳定叶状结构连续，但其叶 C^1 是 [CNS22] 上述光滑情形下的论证并不能保证这一点。本文采用的方法是从一个局部叶出发，通过延拓来构造万有覆盖上的韦伊室丛中叶状结构的每个叶。局部叶通过对有限多个中心稳定叶取重心构造而成，其中权重光滑变化。

下一步主要工作是建立弱形式的结构稳定性。每个中心不稳定叶与扰动后的中心稳定叶的交集都是一个光滑流形，其维数与韦伊室流的中心叶相同。局部而言，这个交集是中心叶的一个双Lipschitz像。我们可以进一步证明，它是中心叶的整体双Lipschitz像。随后，我们利用拟等距刚性证明，该交集影踪着韦伊室流的一条实际中心叶。首先，我们证明，当 L充分接近 1 时，L-双Lipschitz平坦（即某个平坦在 L-双Lipschitz映射下的像）与单个平坦之间的距离一致有界。整体影踪结论则由以下事实得出：不同的平坦并合后形成一个与中心叶等距的对称全测地子空间。

在大尺度上建立弱形式的结构稳定性之后，我们便可以开始构造半共轭。为此，我们利用中心不稳定叶与扰动后的中心稳定叶的交集和中心稳定叶之间通过影踪建立的对应关系。证明半共轭定义良好且连续的方法，与证明拟等距嵌入可延拓为边界上的连续映射的方法类似。

我们以概述定理1.4的证明来结束本节。首先注意，标准作用 ρ_0 在相关对称空间的测地边界上的 G 保留 Tits 度量。换言之，韦伊室在 G作用下等距映射为韦伊室。我们构造的扰动作用ρ 仍会像 ρ_0 那样将韦伊室映射为韦伊室。不过，我们会沿韦伊室方向移动，朝向室的中心或韦伊室面。

致谢。 我们感谢 Katie Mann、David Fisher、Zhiren Wang 和 Aaron Brown 的宝贵讨论与交流。在本项目进行期间，CC 和 TN 感谢密歇根大学的接待，CC 感谢海德堡大学的接待，CC 和 MI 感谢卡尔斯鲁厄理工学院的接待，CC 和 TN 感谢马克斯·普朗克数学研究所的接待。

2. 预备知识 I：重心

2.1. **重心的定义**。设 F 是一个 C^k 黎曼流形，其中 $k \geq 2$。若对于任意一对点 $K \subset F$，集合测地凸 或 全凸，意指存在一条 x、$y \in K$ 之间唯一的最短测地线段，且该线段位于 F 内，连接 x 与 y，并且这条线段包含于 K中。众所周知，黎曼流形中的正规邻域是测地凸的 [dC92]。

设 μ 是一个概率测度，且 $\mathrm{supp}(\mu) \subset K$，其中 K 是 F 的一个测地凸子集。考虑函数

$$x \mapsto \mathcal{B}_\mu(x) = \frac{1}{2}\int_F d(x,y)^2 d\mu(y).$$

μ 在 K 中的重心，记作 K 中的 $\mathrm{bar}(\mu)$，是 K 中使该函数取到最小值的唯一点。注意，最小值的存在性由 K 的紧致性保证，而唯一性则取决于 $\mathcal{B}_\mu$ 的严格凸性（因此也取决于 d 和 $\mathrm{supp}(\mu)$）。

注 2.1。设 μ 是一个概率测度，满足 $\mathrm{supp}(\mu) \subset B_\epsilon(x)$，其中 $B_\epsilon(x)$ 是半径为 ϵ （度量为 d）的度量球，并且该球是测地凸的。假设 $\mathrm{bar}(\mu)$ 存在。那么，

$$\mathrm{bar}(\mu) \in B_{2\epsilon}(x).$$

事实上，对于任意点 $y \notin B_{2\epsilon}(x)$ 和任意 $z \in B_\epsilon(x)$，由三角不等式可得

$$2\epsilon \leq d(y,x) \leq d(y,z) + d(z,x) < d(y,z) + \epsilon.$$

因此 $d(y,z) \geq \epsilon > d(x,z)$，从而 $\mathcal{B}_\mu(x) < \mathcal{B}_\mu(y)$。因此，$y$不可能是 μ的重心。

现在我们引入以下条件，它足以保证重心映射定义良好。

条件 $(\star)$：如果测度 μ 定义在 F 上满足条件 $(\star)$，则称其满足该条件：

- $\mathrm{supp}(\mu)$ 包含于 F的一个紧致测地凸子集 $K_\mu \subset K$ 中，
- $\mathcal{B}_\mu(x)$ 在 K_μ中有一个临界点，即存在 $x_0 \in K_\mu$ 使得

$$G(x_0,\mu) = \nabla_{x=x_0}\mathcal{B}_\mu(x) = \int_F d(x_0,y)\nabla_{x=x_0} d(x,y) d\mu(y) = 0, \tag{2.1}$$

- $D_x G$（x，μ）的海森矩阵 $\mathcal{B}_\mu$（x）存在，并且在 K_μ 上正定（参见注 2.2）。

注意，如果 μ 满足条件 $(\star)$，那么 $\mathrm{bar}(\mu)$ 在 K_μ 中定义良好。此外，满足该条件的测度在仿射微分同胚下表现良好。

注 2.2。由于 F 上的黎曼度量是 C^2，因此 $y \mapsto d$（x_0，y）^{2} 在 C^2 周围半径充分小的度量球上是 x_0 （参见引理 A.7）。因此，$\mathcal{B}_\mu$（x）的海森矩阵在 x的某个充分小的邻域上存在。因此，条件 （$\star$）中的最后一个条件由 μ满足，前提是 直径（K_μ）充分小。

引理 2.3。设 M，N 是 C^2-黎曼流形。设 f： $M \to N$ 是相应黎曼联络下的一个仿射微分同胚。如果 μ 和 $f_*\mu$ 是定义在 M和 N 上的测度，并且满足条件 $(\star)$，且 直径（K_μ）和 直径 $K_{f_*\mu}$ 充分小，则

$$\mathrm{bar}(f_*\mu) = f(\mathrm{bar}(\mu)).$$

证明。由注 2.2，$\mathcal{B}_\mu$ 和 $\mathcal{B}_{f_*\mu}$ 是 K_μ 和 $K_{f_*\mu}$上的 C^2 函数。注意，只需证明：若 $G(x,\mu) = 0$，则 $G(f($ $x)$ $f_*\mu) = 0$。事实上，由于 μ（分别为 $f_*\mu$）满足条件（$\star$），函数 $x \mapsto \mathcal{B}_\mu(x)$（分别为 $x \mapsto \mathcal{B}_{f_*\mu}(x)$）在 K_μ（分别为$K_{f_*\mu}$）上有唯一的极小点。我们只需证明 f 将一个临界点映射到另一个临界点。

为验证这一点，注意到 $d(z,y)\nabla_z d(z,y) = v_{z,\ y}$ 其中 $v_{z,\ y}$ 是测地线 σ 在 $z \in M$ 处的切向量，且 $\sigma(0) = z$ 、 $\sigma(1) = y$。那么 bar(μ) 是满足下式的唯一点

$$0 = G(\mathrm{bar}(\mu)) = \int_M v_{\mathrm{bar}(\mu),y} d\mu(y).$$

Then

$$\int_N v_{f(\mathrm{bar}(\mu)),y} d(f_*\mu)(y) = \int_M v_{f(\mathrm{bar}(\mu)),f(y)} d\mu(y) = \int_M df_{\mathrm{bar}(\mu)}(v_{\mathrm{bar}(\mu),y}) d\mu(y),$$

其中第二个等式利用了 f 是仿射映射（并且将测地线段映射为测地线段）这一事实，而第一个等式是变量替换公式。于是

$$\int_N v_{f(\mathrm{bar}(\mu)),y} d(f_*\mu)(y) = df\left(\int_M v_{\mathrm{bar}(\mu),y} d\mu(y)\right) = df(0) = 0.$$

因此 $G(f(\mathrm{bar}(\mu)),\ f_*\mu) = 0$。由 G 在 $K_{f_*(\mu)}$ 中的临界点的唯一性（见条件（$\star$）），

$$f(\mathrm{bar}(\mu)) = \mathrm{bar}(f_*\mu).$$

□

最后，我们来说明我们所关注的重心映射的以下特殊情形。设 $\mu = \mu_{z,w}$ 是点 $z = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset F$处狄拉克测度的有限加权和，其权重为$w = \{w_1, \ldots, w_n\} \in \mathbb{R}^n$。记 $G(x,w,z) := G(x,\mu_{z,w}) = \sum_{i=1}^n w_i d(x,z_i)\nabla_x d(x,z_i)$，则我们得到隐式方程 $G(\mathrm{bar}(\mu_{z,w}),\ z, w) = 0$。将 $x = \mathrm{bar}(\mu_{z,w})$ 处的协变导数记为D_x，我们得到 $\mathcal{B}_{\mu_{z,w}}$ 的海森矩阵，

$$D_x G(x,w,z) = \sum_{i=1}^n w_i \left(D_x d(x,z_i) \otimes \nabla_x d(x,z_i) + d(x,z_i) D_x \nabla_x d(x,z_i)\right). \tag{2.2}$$

在附录A中，我们将证明，如果 $\mathrm{diam}_F\{z_1, \ldots, z_n\}$ 足够小，那么 bar($\mu_{z,w}$) 有良好定义，并且在仿射微分同胚下表现良好。

注 2.4.

(1) 如果 diam $\{z_1, \ldots, z_n\}$ 的直径足够小，那么 $\mu_{z,w}$ 满足条件($\star$)，且 bar($\mu_{z,w}$) 有良好定义。

(2) 假设 F' 是另一个黎曼流形，且 $f\colon F \to F'$ 是一个仿射微分同胚。如果 diam $\{f(z_1) \ldots, f(z_n)\}$ 也足够小，那么 bar($f_*\mu_{z,w}$) =bar($\mu_{z,w}$)。

上述注释中所要求的直径小到何种程度是相当明确的，且仅取决于 F 和 F'上的黎曼度量。详情请参见引理A.3 和推论A.4 。

该注记的第 (1) 部分由引理 A.3 推出，因为该引理表明 $D_x G(x,w,z)$ 在 x =bar($\mu_{z,w}$) 的一个邻域内是正定的。为了证明该注记的第 (2) 部分，我们先将第 (1) 部分应用于 $f_*\mu_{z,w}$，然后应用引理 2.3。

2.2. $C^{1,2}$ **正则性**。接下来，我们将讨论当度量变化时重心映射的正则性。为此，度量族所需具备的适当正则性是我们现在定义的 $C^{1,2}$ 正则性。不过，我们先引入 $C^{\ell,2}$ 叶状结构和函数的概念。

定义 2.5。设 N 是一个光滑流形，且 $\mathcal{F}$ 是 N 的一个具有光滑叶的连续叶状结构。令 $\ell \geq 1$。

(1) 叶状结构 $\mathcal{F}$ 是 $C^{\ell,\ 2}$ 的，若 $\mathcal{F}$ 是一个 C^ℓ 叶状结构，且叶包含映射的叶向 *2*-喷流以 C^ℓ 方式横向变化。特别地，若 $p\colon N \to L$ 是一个纤维丛，且由纤维构成的 N 的叶状结构 $\mathcal{F} = \{p^{-1}(x)\colon\ x \in L\}$ 是 $C^{\ell,\ 2}$ 叶状结构，则 $p\colon\ N \to L$ 是一个 $C^{\ell,\ 2}$-纤维丛。

(2) 假设 $\mathcal{F}$ 是一个 C^{ℓ}, 2-叶状结构，且 $f\colon N\to\mathbb{R}$ 是一个连续函数。如果直到 *2* 阶的叶向导数存在，并以 C^{ℓ}方式横向变化（即直到 *2* 阶的切向导数横向可微至 ℓ 阶），那么 f 是一个 C^{ℓ}, 2-函数。

特别地，我们来说明在流形 F 上的 $C^{1,2}$ 度量族具体指什么。令$B(0,\epsilon_0)\subset\mathbb{R}^m$，并令 $\{g_s\colon s\in B(0,\epsilon_0)\}$ 为 F 上的一个 C^2 黎曼度量族。考虑 $F\times B(0,\epsilon_0)$ 的乘积叶状结构 $\mathcal{F}=\{F\times\{s\}\colon s\in B(0,\epsilon_0)\}$，它对任意 $\ell\geq 1$ 都是 $C^{\ell,2}$。

定义 2.6。若函数 $F\times B(0,\epsilon_0)\ni(x,s)\mapsto g_s(X_x,X_x)$ 对于任意定义在 F 上的光滑向量场 X 都是一个 $C^{1,2}$ 函数，则称度量族 $\{g_s\colon s\in B(0,\epsilon_0)\}$ 是一个 $C^{1,2}$ 度量族 。

拥有一个 C^1, 2 度量族的一个结果是距离函数具有如下正则性。证明见引理A.7 中“此外”部分。

引理*2.7*（引理 *A.7*）。设 $\{g_s\colon s\in B(0,\epsilon_0)\}$ 是紧流形 F 上的一个 $C^{1,2}$ 度量族，并且每个 $g_s\in[-a^2,b^2]$ 的截面曲率都满足 $a,b>0$ 为两个固定常数。那么，对于所有满足 $d_s(x,z)$ 足够小的 z 和 x， $d_s(x,z)^2$ 在 x 中关于 C^2 是 z, C^1 在 s 中，而 $\nabla^s_x d_s(x,z)^2$ 在 s 中关于 C^1 是。

2.3. **度量变化时重心映射的正则性**。在附录 A中，我们将证明若干关于黎曼度量变化时重心映射正则性的结果，其中黎曼度量定义在 F 上，测度则定义在 F 上。为方便读者，现摘录一些我们在本文后续部分将用到的附录A 中的关键结果。

固定常数 $\epsilon_0>0$、 a、 $b\geq 0$、 m、 $n\in\mathbb{N}$和 $k\geq 3$。令 F为一个光滑流形，并令 $B(0,\epsilon_0)\subset\mathbb{R}^m$。假设

(1) $B(0,\epsilon_0)\ni s\mapsto g_s$ 是 C^1, 2 族黎曼度量，定义在 F 上，其截面曲率为$\kappa_s\in[-a^2,b^2]$;
(2) 存在 C^1 个函数 $w_i\colon B(0,\epsilon_0)\to\mathbb{R}$ 以及 $z_i\colon B(0,\epsilon_0)\to F$，对于 $1\leq i\leq n$ 满足$\mu(s):=\sum_1^n w_i(s)\delta_{z_i(s)}$ 是 F 上的概率测度。

令 $r(s)=$直径 $\{z_1(s)\ldots, z_n(s)\}$。

命题 2.8。假设处于上述设定下。那么存在一个常数 $R>0$ （仅取决于 a、 b和单射性），使得当 $r(s_0)<R$时，$\mathrm{bar}_{s_0}(\mu(s_0))$ 存在，并且映射 $s\mapsto\mathrm{bar}_s(\mu(s))$ 是 C^1。

证明。这是命题 A.10。 □

下一个命题给出了当度量g_s 和测度 $\mu(s)$ 变化时，重心映射的导数的更精细估计。在下面的结果中，我们用 $d^{\mathrm{Gr}}_{(s,x)}$ 表示由黎曼度量 $ds^2+d^2_{g_s}$ 在 $B(0,\epsilon_0)\times F$上诱导的 $\mathrm{Gr}(T_{(s,x)}(B(0,\epsilon_0)\times F)$ 上的 Grassmann 流形距离。

命题 2.9。假设设定如上。假设在 $B(0,\epsilon_0)\times F$上存在连续叶状结构 $\mathcal{H}$，使得：

(a) $\mathcal{H}$ 具有 C^1 个叶，它们在叶内 C^1-拓扑下横截地连续变化；*(b)* 对每个 $\xi\in F$，存在一个 C^1 函数$\varphi_\xi\colon B(0,\epsilon_0)\to F$，满足$\varphi_\xi(0)=\xi$，且叶状结构 $\mathcal{H}$ 由下式给出

$$\mathcal{H}=\{(s,\varphi_\xi(s))\colon s\in B(0,\epsilon_0)\}_{\xi\in F},$$

(c) $\mathcal{H}$ 的切分布记为 $\mathcal{D}$。

固定 $\xi_1, \ldots, \xi_n \in F$。考虑 $z_i(s) := \varphi_{\xi_i}(s)$ 以及测度 $\mu(s) := \sum_{i=1}^n w_i(s)\delta_{z_i(s)}$。假设$\mathrm{b}: B(0,\epsilon_0) \to F$ 是重心映射

$$\mathrm{b}(s) := \mathrm{bar}_s(\mu(s)))$$

并令 $G = \{(s, \mathrm{b}(s)): \ s \in B(0, \ \epsilon_0)\}$ 为 b 的图。则：

(1) $D_{s=s_0}\mathrm{b}(s)$ 和 $T_{(s_0,\mathrm{b}(s_0))}G$ 在 s_0, ξ_1, ..., ξ_n中连续变化；*(2)* 对于每个 $\epsilon > 0$ 和 $c \in [0,1)$，存在 $\delta > 0$，具有以下性质：若 $s_0 \in B(0, \ c\epsilon_0)$且 $r(s_0) < \delta$，则

$$d^{\mathrm{Gr}}_{(s_0,\mathrm{b}(s_0))}\left(T_{(s_0,\mathrm{b}(s_0))}G, \mathcal{D}\left(s_0, \mathrm{b}(s_0)\right)\right) < \epsilon.$$

证明。 这是推论 A.13。 □

3. 标准作用与 Bowden-Mann 引理的推广

本节的主要目标是表述并证明 Bowden 和 Mann 的一个引理的推广 [BM22]。我们将针对一类称为标准作用的作用得到这一推广。

3.1. **标准作用**。 设 M 是一个紧致非正曲率黎曼流形。 那么 $\pi_1(M)$ 作用于万有覆盖 $\widetilde{M}$的 M 的测地边界，我们将其记作$\partial_\infty M$。此边界作用是标准作用的一个主要例子。注意， $\pi_1(M)$ 也通过 Sasaki 度量的等距变换作用于 $T^1\widetilde{M}$。这两个前述作用之间的关系，正是标准作用（定义 ）定义的动机（定义 3.1）。这个定义乍看之下或许有些奇怪，实际上是对这一情形的抽象；详情见引理 3.5。

现在我们将非正式地解释这种关系。设 $\widehat{\rho_0}$为 $\pi_1(M)$ 在 $\widetilde{M} \times \partial_\infty \widetilde{M}$, 其中 $\pi_1(M)$ 通过覆盖变换作用于 M，并通过边界作用作用于$\partial_\infty M$。考虑映射 $\Phi: T^1\widetilde{M} \to \widetilde{M} \times \partial_\infty \widetilde{M}$，它由到 $\widetilde{M}$ 的基点投影和到 $\partial_\infty M$ 中无穷远处的径向投影定义。映射 Φ将 T^1M 中的每个纤维同胚地映到 $\partial_\infty M$。最关键的一点是， Φ 是一个交织这两个作用的同胚。映射 Φ 还具有一定的正则性：对于任意 $\xi \in \partial_\infty \widetilde{M}$， $\Phi^{-1}(\widetilde{M} \times \{\xi\})$ 是 $T^1\widetilde{M}$ 中的一个 C^1-子流形。事实上，这些是 $T^1\widetilde{M}$ 中测地流的中心不稳定流形。在定义 3.1 中，乘积作用（作用于 $\widetilde{M} \times \partial_\infty \widetilde{M}$）与等距作用（作用于 $T^1\widetilde{M}$）的交织是第（3）部分的内容，而映射 Φ 的正则性则是第（2）部分的内容。注意，通常 $\Phi^{-1}(M \times \{\xi\})$ 在 ξ中仅连续；定义没有对这种“横向”正则性作进一步假设（见注 3.3）。

现在我们将精确定义标准作用。回顾第 C^ℓ 节中2 .2 对纤维丛的定义。我们将用 pr_{X_i} 表示自然的第 i 个坐标投影映射 $X_1 \times X_2 \to X_i$， 其中$i = 1, \ 2$。

定义 3.1。 设 F和 X 是可微（因而光滑）流形， $\Gamma \leq \mathrm{Isom}(X)$ 是一个离散子群，且 $\ell \geq 1$。如果作用 $\rho_0: \Gamma \to \mathrm{Homeo}(F)$ 是一个标准作用，则称其为标准作用，当且仅当存在一个 C^ℓ, 2- 纤维丛 $p: \ X_F \to X$，其纤维为 F，满足：

(1) 存在一族同胚 $\{\pi_x: \ F_x := p^{-1}(x) \ \to F \mid x \in X\}$；*(2)* 映射 $\Phi:$ $X_F \to X \times F$ 定义为

$$\Phi(z) := (p(z), \pi_{p(z)}(z))$$

是一个同胚，并且

$$(\mathrm{pr}_F \circ \Phi)^{-1}(\xi) = \Phi^{-1}(X \times \xi)$$

对于每个 $\xi \in F$，都是 X_F 的 C^ℓ-子流形，

(3) 存在~~2~~-黎曼度量 $\{g_x : x \in X\}$ 在 X_F 中的纤维 F_x 上，使得由下式定义的映射 γ_x：$(F_x, g_x) \to (F_{\gamma x}, g_{\gamma x})$

$$\gamma_x := \pi_{\gamma x}^{-1} \circ \rho_0(\gamma) \circ \pi_x$$

对于任意 $\gamma \in \Gamma$ 和 $x \in X$，相对于相应的黎曼联络，它是仿射的。如果 X_F、p、Φ、$\{\pi_x\}$、$\{g_x\}$、ℓ 如上所述，我们将 $\rho_0 : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(F)$ 称为具有相关数据 $(X_F$、p、Φ、$\{\pi_x\}$、$\{g_x\}$、$\ell)$的标准作用。

注 3.2。注意，度量 $\{g_x\}$由映射 $\{\pi_x\}$ 按以下意义确定。假设 $\{h_x\}$ 是另一个度量族，使得 $\gamma'_x := \pi_{\gamma x}^{-1} \circ \rho_0(\gamma)\pi_x$ 也是仿射的。那么 $\mathrm{id} := (\gamma'_x)^{-1} \circ \gamma_x : (F_x, g_x) \to (F_x, h_x)$ 是一个仿射映射。

在许多情况下，例如 $F = S^n$，这意味着 g_x 和 h_x 仅相差一个缩放因子。但并非总是如此。例如，若 $A \in SL(2, \mathbb{Z})$，且 g 是环面 $\mathbb{T}^2$上的欧几里得度量，那么 $\mathrm{id} : (\mathbb{T}^2, g) \to (\mathbb{T}^2, A^*g)$ 是一个仿射映射，但这两个度量并非彼此的倍数。

注 3.3. 请注意，对于 ξ 变化时的子流形 $(\mathrm{pr}_F \circ \Phi)^{-1}(\xi)$，我们并未对其正则性作出任何假设。

我们将在下一小节讨论例子。不过，首先介绍诱导作用的概念：给定一个标准作用 ρ_0，我们可以在纤维丛 X_F上诱导出一个作用 $\widehat{\rho}_0$。

定义 *3.4.* 设 X, F如上所述，且 $\rho_0 : \Gamma \to Homeo(F)$ 是一个标准作用，其关联数据为 $(X_F, p, \Phi, \{\pi_x\}, \{g_x\}, \ell)$。那么，在 X_F上的诱导作用（记作 $\widehat{\rho}_0$）是 $\Phi : X_F \to X \times F$ 对 Γ 在 $X \times F$ 上的作用的拉回，其中 X 上的作用由等距变换给出，而 F 上的作用由 ρ_0 给出（即 $\gamma \in \Gamma$ 通过 $\gamma \cdot (x, \xi) = (\gamma \cdot x, \rho_0(\gamma) \cdot \xi)$ 作用）。

用这种语言来说，若作用 $\widehat{\rho}_0$ 保持纤维，且沿纤维的作用相对于度量族 $\{g_x$ 是仿射的：$x \in X\}$，则称 ρ_0 是一个标准作用。

3.2. 标准作用的例子。本节中，我们讨论标准作用的几个例子。

3.2.1. **测地边界作用：**我们的第一个标准作用的例子将在一个球面上给出，它对于我们证明定理 1.1 至关重要，即单连通非正曲率黎曼流形的测地边界。

引理 3.5. 设 X 为一个单连通完备光滑黎曼流形，其截面曲率非正。设 $\Gamma \leq \mathrm{Isom}(X)$ 为任意子群。令 ρ_0 为 Γ在 X的测地边界 $\partial_\infty X$ 上的标准作用，该边界同胚于 $\mathbb{S}^{\dim(X)-1}$。则 ρ_0 是一个标准作用。

证明。令 $X_F = T^1X$ 和 $F = \partial_\infty X$。我们将证明标准作用的定义对 $\ell = 1$成立。标准基点投影 $p : T^1X \to X$赋予 T^1X光滑纤维丛结构。因此，对于任意 $\ell \geq 1$，该纤维丛是 $C^{\ell,\ 2}$（事实上是 $C^{\ell,\ \infty}$）。考虑由径向投影给出的同胚族 $\pi_x : T^1_x X \to \partial_\infty X$。于是，由 $\Phi(v) = (p(v), \pi_{p(v)}(v))$ 定义的 $\Phi : T^1X \to X \times \partial_\infty X$显然是一个同胚。对于任意 $\xi \in \partial_\infty X$，

$$(\mathrm{pr}_F \circ \Phi)^{-1}(\xi) = \Phi^{-1}(X \times \{\xi\}) = \left\{v \in T^1X : \pi_{p(v)}(v) = \xi\right\}$$

是 T^1X上测地流的中心稳定流形。我们断言，$(\mathrm{pr}_F \circ \Phi)^{-1}(\xi)$ 是一个 C^1- 子流形 X_F，对任意 $\xi \in F$均成立。事实上，每个中心稳定流形都是通过在 X的所有点处取布塞曼函数的梯度得到的。根据 [HIH77，命题 3, 1], 当 X 如本引理所述时，布塞曼函数的梯度是 C^1。因此，每个中心稳定流形都是 C^1。

设 h 是 X上的给定黎曼度量。对于每个 $x \in X$，设 g_x 是由 h诱导的$T^1_x X$上的黎曼度量。纤维$(T^1_x X, g_x)$与标准单位球面等距。事实上，这个度量是 T^1X上的Sasaki度量在纤维 $T^1_x X$上的限制。由于只要 h 光滑，Sasaki度量就是光滑的，因此 $x \mapsto g_x$ 也光滑变化（从而 C^ℓ, $^\infty$ 对任意 $\ell \geq 1$ 均成立）。若 $\gamma \in$ 属于Isom(X)，则 γ 通过Sasaki度量的等距变换作用。因此 γ_x 是等距变换。□

注意，一般而言，$(\mathrm{pr}_F \circ \Phi)^{-1}(\xi)$ 仅连续变化。但如上所述，弱稳定流形 $(\mathrm{pr}_F \circ \Phi)^{-1}(\xi)$ 缺乏横向正则性并不构成问题，因为定义并不要求这一点。

注3.6. 设 X 和 Γ 如上所述。若对每个 $\xi \in F$，$(\mathrm{pr}_F \circ \Phi)^{-1}(\xi)$ 都是 C^∞，则上述证明表明，ρ_0 实际上是一个具有 $\ell = \infty$. 的标准作用。特别地，我们提及三种值得关注的情形:

(1) 当 X/Γ 是具有负截面曲率的紧流形时。(2) 当 X 是具有严格凸边界的希尔伯特几何时，只要允许纤维配备非黎曼度量，类似的构造便可行。(3) 当 X 是黎曼对称空间时。

格 在本文后文将对我们特别重要，我们将在下文讨论它 .

3.2.2. **关于 G/Q 的边界作用：** 现在我们考虑半单李群中的格作用于 G/Q 边界的情形。这些边界是相应黎曼对称空间的测地边界的子集。关于本节所用的记号，请参见第 5 节。

引理 3.7. 设 G 是一个具有有限中心且无紧因子的连通半单李群，$Q < G$ 是一个抛物子群，$\Gamma < G$ 是一个离散子群。那么，Γ 通过左乘在 $F = G/Q$ 上的作用是标准作用。

证明。设 K 是 G的一个极大紧子群。那么，$X = G/K$配备左 G不变黎曼度量后，是一个黎曼对称空间，且 $\mathrm{Isom}(X)^0 = G$。这里 $F = G/Q$和 X_F 将是与 G/M_Q微分同胚的空间。在第 5 节中，我们将看到 G/M_Q 是韦伊室 Q-面丛。

我们采用如下记号：对任意 $v \in T^1X$，令 γ_v 为 X 中由 v确定的测地线。考虑单位切丛 Φ_0 的连续平凡化：$T^1X \to X \times S^{\dim(X)-1}$由 $\Phi_0(v) = (\pi(v)\ \gamma_v(\infty))$定义。回忆一下，$\Gamma$ 在 $\partial_\infty X$上的作用是标准作用。

固定 $\mathfrak{x} \in \partial_\infty X$ 使得 $Q = G_\mathfrak{x}$，从而 G/Q 与 $G \cdot \mathfrak{x} \subset \partial_\infty X$ 通过轨道映射 $gQ \mapsto g \cdot \mathfrak{x}$微分同胚。特别地，$G \cdot \mathfrak{x}$ 是 ∂X 的一个光滑子流形，因为 G 在 $\partial_\infty X$上光滑地作用[Bre72，定理 1.2，第 302]页。

Let

$$X_F := \left\{ v \in T^1X : \gamma_v(\infty) \in G \cdot \mathfrak{x} \right\}.$$

定义 Φ： $X_F \to X \times F$为 Φ_0在其限制下的映射，即

$$\Phi := \Phi_0|_{X_F}. \tag{3.1}$$

那么，Φ 是 X_F 的一个连续平凡化，它是以 X 为底空间、纤维为 $F = G/Q$的纤维丛。

我们断言，X_F 是 T^1X 的一个光滑子流形，且与 G/M_Q微分同胚。为证明该断言，固定满足 $\gamma_{v_0}(\infty) = \mathfrak{x}$的 $v_0 \in T^1_{eK}X$。考虑由 $g \mapsto g \cdot v_0$定义的轨道映射 $G \to X_F \subset T^1X$。注意，v_0 的稳定子是 $K \cap Q$，即 M_Q。此外，G 在 X_F上传递地作用。事实上，若 $v \in X_F$，则存在 $g \in G$，使得 $gv \in T_{eK}X$且 $\gamma_v(\infty) = g \cdot \gamma_{v_0}(\infty)$（因为$G$ 在 X 上传递地作用，并且 $\gamma_v(\infty) \in G \cdot \mathfrak{x}$）。因此，通过上述映射，$X_F$与 G/M_Q 微分同胚。由于 G 在 T^1X 上的作用是光滑的，且 X_F 是 v_0的 G-轨道，X_F 是一个浸入的

的子流形 T^1X（同样由 [Bre72，第VI章，定理12]可知）。但是，由于 G 在 T^1X 上的作用是适当不连续的，这意味着 X_F 是局部闭的，因而是 T^1X的一个嵌入子流形。

现在，我们通过将 T^1X 和 $\partial_\infty X$ 中的所有数据分别限制到光滑子丛 $X_F \subset T^1X$ 和 $F = G\cdot\mathfrak{X} \subset \partial_\infty X$，完成关于 G/Q 上的作用是标准作用的证明。注意，结合上述断言，显然 X_F 具有光滑纤维丛的结构，它以 $X = G/K$ 为底空间，纤维与 $G\cdot\mathfrak{X} \cong G/Q$ 同胚。设 $p\colon T^1X \to X$ 和 $\{\pi_x\colon x\in X\}$ 为引理 3.5 中的映射，并对所有 $x\in X$ 定义 $p' := p|_{X_F}$ 和 $\pi'_x := \pi_x|_{X_F}$。T^1X 上的 G-不变黎曼度量在 X_F 的纤维上诱导出度量族 $g'_x\colon x\in X$。于是，对于任意 $\ell \geq 1$，G/Q 上的 Γ 作用都是标准作用，其数据为 $(X_F, p', \Phi, \{\pi'_x\}, \{g'_x\}, \ell)$。□

注 3.8. 如上面的证明所示，X_F 与 G/M_Q微分同胚。因此，通过与这个微分同胚作前复合，也可以证明 Γ 在 G/M_Q 上具有标准作用，并配有适当的相关数据。事实上，这正是我们将在命题7.3中使用的相关数据。关于这一作用的进一步讨论，另见第5.6 节。

3.2.3. **因子作用：** 这是一个退化的例子。设 $X_F = X\times F$，其中 F 是任意一个紧黎曼流形，而 Γ 在 X 上按恒等映射作用，并通过一个等距作用 ρ_0 作用于 F倍数。更一般地，我们可以取 ρ_0 为 F 上关于 F上的列维-奇维塔联络的仿射作用。注意，此处 X 可以是任意光滑流形；特别地，也可以是一个点。

3.2.4. **拉回作用：** 将标准作用限制在闭的不变子流形 $F'\subset F$是得到新例子的另一种自然方式。这本质上是将引理3.7推广到更一般的不变子流形。不过，要使这种限制仍然是标准作用，必须仔细确保 X_F 中的相应子流形 C^ℓ 满足适当的 ℓ。

3.3. **广义 Bowden-Mann 引理。** 在本节中，我们将 [BM22，引理 3。1] 中 Bowden 和 Mann 的结果（后来由 Mann 和 Manning [MM21] 针对 Gromov双曲群作了改编）加以推广。我们用标准作用的语言表述这一推广。回顾标准作用的定义 ρ_0 （定义 3.1）以及诱导作用的定义 $\widehat{\rho_0}$ （定义 3.4）。

命题 *3.9*。（参见 [*BM22*，引理 *3.*1]）设 X 是一个黎曼流形，$\Gamma <$*Isom(X)* 是一个自由作用的离散子群，且 $\Gamma\backslash X$ 是紧致的，F 是一个光滑流形。设$\rho_0\colon \Gamma \to$ *Homeo(F)* 是一个标准作用，其关联数据为 $(X_F, p, \Phi, \{\pi_x\}, \{g_x\}, \ell)$，其中 $\ell\geq 1$。对于任意充分 C^0-接近 ρ_0 的 $\rho\colon \Gamma\to$ *Homeo(F)*，存在一个连续映射 $\widetilde{f}\colon X\times F \to X_F$，使得：

(1) $p(\widetilde{f}(x,\xi)) = x$ 且 $\widetilde{f}(\gamma\cdot x, \rho(\gamma)\xi) = \widehat{\rho_0}(\gamma)\widetilde{f}(x,\xi)$，

(2) 映射 $\widetilde{f}(,\xi)\colon X\to \widetilde{f}(X\times\{\xi\})$ 对每个 $\xi\in F$ 都是微分同胚。此外，对于任意 $(x_0,\xi_0)\in X\times F$，$(\rho, y, \xi)\mapsto D_y\widetilde{f}(y,\xi)$ 在 (ρ_0, x_0, ξ_0) 处关于所有三个变量连续；*(3)* 对每个 $\epsilon>0$ 以及每个 $x\in X$，存在 ρ_0 的一个邻域 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x,\epsilon)$，使得

$$\sup_{\rho\in\mathcal{U}}\ \sup_{\xi\in F} d_F(\pi_x(\widetilde{f}(x,\xi)),\xi) < \epsilon,$$

(4) 假设对于任意紧集 $\mathcal{K}\subset X$，存在仅依赖于 *diam(*$\mathcal{K}$*)* 的常数 c,α，使得对所有 $x,z\in\mathcal{K}$，$\pi_z^{-1}\circ\pi_x\colon F_x\to F_z$ 是霍尔德连续的，其霍尔德常数为 c 和 α。那么对于任意 $\epsilon, R>0$ 以及 $(x,\xi)\in X\times F$，存在 ρ_0 的一个邻域 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon, R, x, \xi)$，使得：若 $\rho\in\mathcal{U}$ 且 $\eta := \pi_x(\widetilde{f}(x,\xi))\in F$，则

$$\sup_{y\in B_R(x)} d_{F_y}\left(\widetilde{f}(y,\xi), (\mathrm{pr}_F\circ\Phi)^{-1}(\eta)\cap F_y\right) < \epsilon,$$

其中 d_{F_y} 是纤维 F_y 上的距离（由黎曼度量 g_y诱导）。

(5) 假设 h 是 X_F上的黎曼度量，满足 $\widehat{\rho_0}(\Gamma) < \mathrm{Isom}(X_F, h)$，并且对所有 $x \in X$都有 $h|_{F_x} = g_x$。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 ρ_0 的一个邻域 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon)$，使得

$$\sup_{\rho \in \mathcal{U}} \left(\sup_{(x,\xi) \in X \times F} d^{\mathrm{Gr}}_{\widetilde{f}(x,\xi)} \left(T_{\widetilde{f}(x,\xi)} \widetilde{f}(X \times \xi), T_{\widetilde{f}(x,\xi)} (\mathrm{pr}_F \circ \Phi)^{-1}(\eta_x) \right) \right) < \epsilon,$$

where $\eta_x := \pi_x(\widetilde{f}(x,\xi))$.

注3.10。该命题的第（4）部分在以下另一种假设下也成立。假设 X_F 带有黎曼度量 h'，使得 $h'|_{F_x} = g_x$ 且每个纤维 (F_x, g_x) 都是 (X_F, h') 的全测地子流形（甚至更一般地，存在 $0 < L < 1$，使得对于任意 $u, v, \in F_x$，$d_{X_F}(u,v) \geq L d_{F_x}(u,v)$）。

请注意，这两个假设并不相互蕴含。例如，考虑 $X = \widetilde{M}$ 是单连通黎曼流形且 $X_F = T^1\widetilde{M}$ 的情形。如果 X 带有负曲率度量，那么赫尔德假设（在第（4）部分中）以及全测地假设（在上文中提及）都成立。但如果 X 是非正曲率的，那么本注中所述的另一种假设成立，而赫尔德假设不成立。

证明。不失一般性，我们可以假设 $\ell = 1$。由于 $\rho_0 \colon \Gamma \to \mathrm{Homeo}(F)$ 是具有相关数据 $(X_F, p, \Phi, \{\pi_x\}, \{g_x\}, 1)$ 的标准作用，因此我们有：

(a) 一个 $C^{1,\,2}$ 纤维丛 $p \colon X_F \to X$，其纤维为 F；(b) 一族同胚 $\{\pi_x \colon x \in X\}$，其中 $\pi_x \colon F_x \to F$；(c) 一个同胚 $\Phi \colon X_F \to X \times F$，由 $\Phi(z) = (p(z), \pi_{p(z)}(z))$ 给出；(d) 对每个 $\xi \in F$，$(\mathrm{pr}_F \circ \Phi)^{-1}(\xi)$ 是 X_F 的一个 C^1-子流形；(e) 一族 $C^{1,\,2}$-光滑变化的黎曼度量 $\{g_x \colon x \in X\}$，定义在纤维 F_x 上，使得对于任意 $\gamma \in \Gamma$ 和 $x \in X$，$\gamma_x := \pi^{-1}_{\gamma x} \circ \rho_0(\gamma) \circ \pi_x$ 是仿射的。

此外，$\widehat{\rho_0}$ 表示由 ρ_0诱导的 X_F 上的作用。

构造 设 $D \subset X$ 是$\widetilde{\Gamma}$ 在 X上作用的一个预紧连通基本域。设 $p_\Gamma : X \to \Gamma\backslash X$ 是覆盖映射，并设 $\{\mathcal{O}_i\}$ 是由连通开集构成的 $\Gamma\backslash X$ 的一个有限覆盖。由于 Γ自由且适当不连续地作用，我们可以假设存在 X 的一个开覆盖 $\left\{\widetilde{\mathcal{O}}_j\right\}$，满足：对每个 j，都存在一个 i，使覆盖映射$\widetilde{\ }$ $p_\Gamma|_{\widetilde{\mathcal{O}_j}}$：$\mathcal{O}_j \to \Gamma\backslash X$ 限制后是到 $\mathcal{O}_i$上的等距变换。事实上，我们可以通过充分缩小 $\mathcal{O}_i$ 的直径，并取它们在覆盖映射下的原像，得到这样的覆盖。

设 $\mathcal{W} = \{\mathcal{W}_j : 1 \leq j \leq m'\}$ 是 $\left\{\widetilde{\mathcal{O}}_i\right\}$的有限子族，由与$\overline{D}$ 有非空交集的开集组成。设 $\{\sigma_i, \mathcal{O}_i\}$ 是 $\Gamma\backslash X$ 上的一个从属于开覆盖 $\{\mathcal{O}_i\}$的单位分解，并且设 $\widetilde{\sigma_i} : X \to \mathbb{R}$ 是 σ_i的提升。

Γ 对 $\left\{\widetilde{\mathcal{O}}_i\right\}$ 的作用在 $\mathcal{W}$ 上引入了等价关系 $\sim_\Gamma$，即 $\mathcal{W}_i \sim_\Gamma \mathcal{W}_j$ 当且仅当存在某个 $\gamma \in \Gamma$ 使得 $\mathcal{W}_i = \gamma\,\mathcal{W}_j$。现在，我们从 $\mathcal{W}$ 中的每个等价类选取一个代表元，并将它们记为 $\mathcal{U}_1$、……、$\mathcal{U}_{m''}$。注意，我们特意标记这些 $\mathcal{U}_i$，因为我们将在这些 $\mathcal{U}_i$ 上定义映射，并将其等变地延拓。

Fir因此，对于每个开集 $\mathcal{U}_1$、……、$\mathcal{U}_{m''}$，我们定义一个映射 $\psi_{\mathcal{U}_i} \colon \mathcal{U}_i \times F \to X_F$b y

$$\psi_{\mathcal{U}_i}(x, \xi) = \pi_x^{-1}(\xi).$$

也就是说，对于每个 $\xi \in F$，映射 $\psi_{\mathcal{U}_i}(\cdot, \xi)$ 是一个局部截面 $\mathcal{U}_i \to X_F$。

由于 $\mathcal{W}$ 是一个有限集合，因此存在一个有限子集 $S_{\mathcal{W}} \subset \Gamma$，使得：如果 $1 \leq j \leq m'$，那么对于某个 $\gamma \in S_{\mathcal{W}}$ 和 $1 \leq i \leq m''$，有 $\mathcal{W}_j = \gamma\mathcal{U}_i$。

那么对于 $1 \le j \le m'$，如果 $\mathcal{W}_j = \gamma \mathcal{U}_i$，我们定义 $\Psi_{\mathcal{W}_j}$： $\mathcal{W}_j \times F \to X_F$ 为

$$\Psi_{\mathcal{W}_j}(\gamma x, \rho(\gamma)\xi) = \widehat{\rho}_0(\gamma)\psi_{\mathcal{U}_i}(x,\xi),$$

其中 $(x,\xi) \in \mathcal{U}_i \times F$。注意，若 $\mathcal{W}_i = \gamma' \mathcal{W}_j$，则对于任意 $x \in \mathcal{W}_j$ 和任意 $\xi \in F$，有 $\Psi_{\mathcal{W}_i}(\gamma' x, \rho(\gamma')\xi) = \widehat{\rho}_0(\gamma')\Psi_{\mathcal{W}_j}(x,\xi)$。

我们考虑由以下条件定义的 $\overline{D}$ 的邻域 Ω： $x \in \Omega$ 满足 $\{\mathcal{O}_i : x \in \mathcal{O}_i\} \subset \mathcal{W}$，即所有包含 x 的开覆盖 $\{\mathcal{O}_i\}$ 的提升 $\mathcal{O}_i$ 均属于 $\mathcal{W}$。任取 $x \in \Omega$。现在定义映射 $f(x,\cdot)\sim$（见 (3.4)）。假设在可能对 $\mathcal{W}_i$ 重新编号后， $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_m$ 是所有包含 x 的 $\mathcal{W}_i$。根据上面的注释，每个 $\mathcal{W}_j$ 对应于满足以下条件的 $\gamma_j \in \mathcal{S}_{\mathcal{W}}$

$$\mathcal{W}_j = \gamma_j \mathcal{U}_i \tag{3.2}$$

对某个 $\mathcal{U}_i$。对于任意 $\xi \in F$，令

$$\xi_j := \rho_0(\gamma_j)\rho(\gamma_j^{-1})(\xi). \tag{3.3}$$

那么，

$$\Psi_{\mathcal{W}_j}(x,\xi) = \widehat{\rho}_0(\gamma_j)\Psi_{\mathcal{U}_i}(\gamma_j^{-1}x, \rho(\gamma_j)^{-1}\xi) = \pi_x^{-1}(\rho_0(\gamma_j)\rho(\gamma_j)^{-1}(\xi)) = \pi_x^{-1}(\xi_j).$$

对每个 $\xi \in F$，定义，

$$\widetilde{f}(x,\xi) := \mathrm{bar}_x\left(\sum_{j=1}^m \widetilde{\sigma_j}(x)\delta_{\pi_x^{-1}(\xi_j)}\right) = \mathrm{bar}_x\left(\sum_{j=1}^m \widetilde{\sigma}_j(x)\delta_{\Psi_{\mathcal{W}_j}(x,\xi)}\right), \tag{3.4}$$

其中 δ_z 是位于 z 处的狄拉克测度，而 bar_x 是纤维 F_x 上的重心运算。由于 x 属于一个紧集，当 ρ 充分接近 ρ_0 时， $\pi_x^{-1}(\xi_j)$ 就接近 $\pi_x^{-1}(\xi)$，因此重心定义良好。

为了扩展为一个 $(\widehat{\rho}, \widehat{\rho}_0)$-等变映射 f： $X \times F \to X_F$，我们需要验证定义在 $\Omega \times F$ 上的映射 f 是等变的。也就是说，若对于某个 $\gamma \in \Gamma$， x 和 γx 都属于 Ω，则对每个 $\xi \in F$，有 $\sim f(\gamma x, \rho(\gamma)\xi) = \widehat{\rho}_0(\gamma) f(x,\xi)$。事实上，若 $\mathcal{W}_1$、……、$\mathcal{W}_m$ 是包含 x 的开集，则 $\gamma\mathcal{W}_1$、……、$\gamma\mathcal{W}_m$ 是包含 γx 的开集。根据构造，

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(\gamma x, \rho(\gamma)\xi) &= \mathrm{bar}_{\gamma x}\left(\sum_{i=1}^m \widetilde{\sigma}_i(x)\delta_{\Psi_{\gamma\mathcal{W}_i}(\gamma x, \rho(\gamma)\xi)}\right) \\
&= \mathrm{bar}_{\gamma x}\left(\sum_{i=1}^m \widetilde{\sigma}_i(x)\delta_{\widehat{\rho}_0(\gamma)\Psi_{\mathcal{W}_i}(x,\xi)}\right) = \widehat{\rho}_0(\gamma)\left(\mathrm{bar}_x\left(\sum_{i=1}^m \widetilde{\sigma}_i(x)\delta_{\Psi_{\mathcal{W}_i}(x,\xi)}\right)\right) \\
&= \widehat{\rho}_0(\gamma)\widetilde{f}(x,\xi),
\end{aligned}$$

其中倒数第二个等式由纤维逐点重心构造是 $\widehat{\rho}_0$-等变的这一事实得到，因为 ρ_0 是标准作用（参见注 2.4）。因此，映射 f 在 上是等变的： $\Omega \times F$。由于 Ω 是 $\overline{D}$的一个开邻域， f 可延拓为映射 f： $X \times F \to X_F$ 该映射是$(\widehat{\rho}, \widehat{\rho}_0)$-等变的。这就完成了 f的构造。现在我们继续证明该命题的所有部分。

第（1）部分的证明：这由 f.的构造直接得到。

（2）的证明：取任意 $\xi \in F$。注意，根据定义， $p \circ f = \mathrm{id}$，因此 $f|_{X\times\{\xi\}}$ 是单射。于是，要证明（2），只需证明 $\widetilde{f}$ 沿水平叶 $X \times \{\xi\}$ 是 C^1。事实上，由于 f 覆盖恒等映射，这意味着 $f|_{X\times\{\xi\}}$ 是到其像 $f(X \times \{\xi\})$ 上的微分同胚。由于 f 是等变的，只需对每个 $\xi \in F$验证 $f(\cdot,\xi)$ 在 $\overline{D}$ 的邻域 Ω 上的正则性。

由于 $\widehat{\rho_0}(\Gamma)\backslash X_F$ 是一个 C^1,2-纤维丛，我们可以为 C^1选取一个由 $\{\mathcal{O}_i\}$,2-光滑局部平凡化构成的图册。如有必要，对开覆盖 $\{\mathcal{O}_i\}$ 进行细化后，我们可以假设 $\widehat{\rho_0}(\Gamma)\backslash X_F$的局部平凡化具有形式 $\{\mathcal{O}_i\times F\}$。令 $\{\mathcal{W}_i\times F\}$为相应局部平凡化构成的有限子集，定义见式（3.2）。对于 $\xi'\in F$，考虑映射 $\mathcal{W}_i\ni y\mapsto \phi_{\xi'}(y):=\pi_y^{-1}(\xi')$。根据标准作用的定义，每个 $\phi_{\xi'}$ 都是一个 C^1 映射。

每个局部平凡化都带有一个连续叶状结构 $\mathcal{H}$ ，其叶是对于每个$\xi'\in F$而言的图像 $\phi_{\xi'}$ ，即 $\{(y,\pi_y^{-1}(\xi')):\ y\in\mathcal{W}_i\}$且 $\xi'\in F$。权重 $\widetilde{\sigma}_i(y)$ 也在 y 中连续变化 C^1。在每个局部平凡化 $\mathcal{W}_i\times F$ 上，将 F_y 上的度量拉回到 F，即可得到一个 C^1,2-度量族$\{g_y:\ y\in\mathcal{W}_i\}$ 在 F 上。对于 $1\le i\le q$，令 $\xi_i:=\rho_0(\gamma_i)\rho(\gamma_i)^{-1}\xi$，如式（3.3）所示。于是，式（3.4）表明，在每个局部平凡化 $\mathcal{W}_i\times F$ 上，

$$\widetilde{f}(y,\xi)=\mathrm{bar}_y\left(\sum_{i=1}^{q}\widetilde{\sigma}_i(y)\delta_{\varphi_{\xi_i}(y)}\right), \tag{3.5}$$

其中 bar_y 是关于度量 g_y 的纤维逐点重心。

现在我们断言，$\widetilde{f}(X\times\xi)$ 是 X_F 的 C^1 子流形。该断言的证明应用了命题 2.8。每个 $\mathcal{W}_i$ 都可以通过坐标图视为某个欧氏空间中的开球。在此坐标图中，$f(y,\xi)$ 随后是关于度量 g_y 的 F_y 上的纤维逐点重心映射。于是，命题 2.8 蕴含，对于固定的 ξ，$\widetilde{f}(y,\xi)$ 关于基点 $y\in\mathcal{W}_i$ 以一种 C^1 的方式变化。在平凡化下推回到 X_F 后，同样的结论仍然成立。现在注意，对于任意 $y\in X$，存在 $\gamma\in\Gamma$ 和 $y_0\in\mathcal{W}_i$，使得 $\widehat{\rho_0}(\gamma)f(y_0,\xi)=f(y,\xi)$。最后，断言再次成立，因为 $\widehat{\rho_0}(\gamma)$ 通过光滑微分同胚作用。

现在证明第二个断言：若 $(x,\xi)\in X\times F$，则存在 (ρ_0,x,ξ)的一个邻域，使映射 $(\rho,y,\xi')\mapsto D_yf(y,\xi')$ 关于所有变量连续。证明是命题 2.9 的一个应用。由于 f 是 $\widehat{\rho_0}(\Gamma)$ 等变的，只需在局部平凡化图表$\sim\{\mathcal{W}_i\times F\}$上证明。根据命题 2.9，$D_yf(y,\xi)$ 关于 ξ_i连续变化。因此，$D_yf(y,\xi)$随着 $\rho\to\rho_0$或 ξ的连续变化而连续变化。此外，根据第（2）部分，$D_yf(y,\xi)$关于 y连续。因此，更进一步的结论在 $\{\mathcal{W}_i\times F\}$上成立。

第（3）部分的证明：根据第（2）部分，$(\rho,\ x,\ \xi)\mapsto f(x,\ \xi)$关于这三个变量连续。由于 π_x 也连续，结论得证。

第（4）部分的证明：由于 f 是$(\widehat{\rho},\ \widehat{\rho_0})$-等变，注意到只需证明该断言对 $x\in\overline{D}$成立。固定 $\epsilon,\ R>0$。令$x\in\overline{D}$和 $\xi\in F$。

令 $\epsilon'>0$。首先断言，存在 $\mathcal{U}=\mathcal{U}(\epsilon',R,x,\xi)$，使得

$$\sup_{\rho\in\mathcal{U}}\sup_{y\in B_R(x)}d_{F_y}\left(\pi_y^{-1}(\xi),\widetilde{f}(y,\xi)\right)<\epsilon', \tag{3.6}$$

若 ϵ' 足够小。现在证明这一断言。由第（3）部分的证明可知，$(\rho,y,\xi)\mapsto\widetilde{f}(y,\xi)$ 是一个连续映射。由于度量 $\{g_y\}$ 在纤维 F_y 上构成一个 C^1,2 度量族，当 $d_{F_y}(u,v)$ 足够小时，$d_{F_y}(u,v)$ 随 y 连续变化；见引理 2.7。于是，当 $d_{F_{x_0}}(\widetilde{f}(x_0,\xi)\pi_{x_0}^{-1}(\xi_0))$ 足够小时，$(\rho,y,\xi)\mapsto\widetilde{d}_{F_y}(\widetilde{f}(y,\xi)\ \pi_y^{-1}(\xi))$ 在 (ρ_0,x_0,ξ_0) 附近关于所有变量都是连续函数。

假设 $\epsilon'>0$ 足够小。令 $y\in B_R(x)$。于是，(3) 部分以及前一段中的讨论表明，存在 y 的一个邻域 $U_y\subset X$ ，以及 ρ_0 的一个邻域 $\mathcal{U}'=\mathcal{U}'(\epsilon',y,\xi)$，使得：

$$\sup_{\rho\in\mathcal{U}'}\sup_{z\in U_y}\left(\pi_y^{-1}(\xi),\widetilde{f}(y,\xi)\right)<\epsilon'.$$

现在，由于 $B_R(x)$ 是预紧的，我们可以找到 $\mathcal{U}=\mathcal{U}(\epsilon',R,x,\xi)$ 使得等式 (3.6) 成立，从而完成断言的证明。

设 $f(y,\xi)$ 由等式 (3.6)，$d_{F_x}(\pi_x^{-1}(\xi)\ \pi_x^{-1}(\eta))<\epsilon'$。此外，对任意 $y\in B_R(x)$，$(\mathrm{pr}_F\circ\Phi)^{-1}(\eta)\cap F_y=\pi_y^{-1}(\eta)$。现在我们断言，在细化 $\mathcal{U}$ 之后，

$$\sup_{\rho\in\mathcal{U}}\sup_{y\in B_R(x)} d_{F_y}\left(\widetilde{f}(y,\xi),\pi_y^{-1}(\eta)\right)<\epsilon. \tag{3.7}$$

为证明此断言，令 $\{s_1,\dots,s_d\}$ 为 Γ 关于紧基本域 $\overline{D}$所对应的固定有限生成集。对于任意 $y\in B_R(x)$，存在 $\gamma\in\Gamma$ 使得 $y\in\gamma\overline{D}$。令$K'=K'(y)$为 γ相对于此生成集的字长，即 $\gamma=s_{i_1}\cdots s_{i_{K'}}$。注意，$K_0:=\max_{y\in B_R(x)}K'(y)$ 存在，且仅依赖于 R 以及生成集的选取（即 $\overline{D}$ 的选取）。

根据第（4）部分中的假设，存在 $c>1$ 和 $0<\alpha\le 1$，使得对于任意 x、$z\in\gamma\cdot\overline{D}$ 和 u、$v\in F_x$，映射 $\pi_z^{-1}\circ\pi_x\colon\ F_x\to F_z$ 满足

$$d_{F_z}(\pi_z^{-1}\circ\pi_x(u),\pi_z^{-1}\circ\pi_x(v))<c\,d_{F_x}(u,v)^{\alpha}.$$

注意，根据假设，c、α 仅取决于 $\mathrm{diam}(\overline{D})$（因此与 Γ-平移后的 $\overline{D}$ 中点 x 和 z 位于哪一个无关）。于是

$$\begin{aligned}
d_{F_y}\left(\widetilde{f}(y,\xi),\pi_y^{-1}(\eta)\right)&\le d_{F_y}\left(\widetilde{f}(y,\xi),\pi_y^{-1}(\xi)\right)+d_{F_y}\left(\pi_y^{-1}(\xi),\pi_y^{-1}(\eta)\right)\\
&\le d_{F_y}\left(\widetilde{f}(y,\xi),\pi_y^{-1}(\xi)\right)+c^{1+\alpha+\cdots+\alpha^{K'-1}}d_{F_x}(\pi_x^{-1}(\xi),\pi_x^{-1}(\eta))^{\alpha^{K'}}\\
&\le \epsilon'+c^{1+\alpha+\cdots+\alpha^{K'-1}}(\epsilon')^{\alpha^{K'}}\ \le \epsilon'+c^{K'}(\epsilon')^{\alpha^{K'}}\\
&\le 2c^{K'}(\epsilon')^{\alpha^{K'}}.
\end{aligned}$$

回顾一下，$K_0=\max_{y\in B_R(x)}K'(y)$，并且 K_0 与 c、α 和 ϵ' 无关。对于固定的常数 c、α 和 K_0，函数 $M(\epsilon'):=\left(\max_{1\le K'\le K_0}c^{K'}(\epsilon')^{\alpha^{K'}}\right)$ 关于 ϵ' 连续，并且当 $\epsilon'\to 0$ 时趋于 0。因此，我们可以选择 $\epsilon':=\epsilon_0$ 足够小，使得 $M(\epsilon_0)<\frac{\epsilon}{2}$。随后，对于 $\epsilon'=\epsilon_0$，我们选择 ρ_0 的邻域 $\mathcal{U}$；见公式 (3.6)。于是对于每个 $\rho\in\mathcal{U}$，公式 (3.6) 均成立，因此上述讨论表明公式 (3.7) 成立。这就证明了该断言，并完成了第（4）部分的证明。

第（5）部分的证明 为证明（5），我们从与（2）的证明相同的设定出发。我们选取 $X_F/\widehat{\rho}_0(\Gamma)$ 的有限族 C^1,2-局部平凡化 $\{\mathcal{O}_i\times F\}$，并令 $\{\mathcal{W}_i\times F\}$ 为前面所述的局部平凡化图表。与（2）的证明一样，我们得到一族 $\{g_y\colon\ y\in\mathcal{W}_i\}$ 的 C^1,2 黎曼度量，这些度量由 $\mathcal{W}_i$ 参数化，而 $\mathcal{W}_i$ 同胚于某个 $\mathbb{R}^{\dim\mathcal{W}_i}$ 中的球。集合 $\mathcal{W}_i\times F$ 具有一个连续叶状结构 $\mathcal{H}=\{\mathcal{H}_{\xi'}\colon\ \xi'\in F\}$，其叶 $\mathcal{H}_{\xi'}:=\{(y,\pi_y^{-1}\xi')\colon\ y\in\mathcal{W}_i\}$ 是 C^1。与式（3.5）一样，对每个 $\xi\in F$ 和 $y\in\mathcal{W}_i$，我们有

$$\widetilde{f}(y,\xi)=\mathrm{bar}_y\left(\sum_{i=1}^{q}\widetilde{\sigma}_i(y)\delta_{\varphi_{\xi_i}(y)}\right),$$

其中 $\varphi_{\xi_i}(y)=\pi_y^{-1}(\xi_i)$ 且 $\xi_i=\rho_0(\gamma_i)\rho(\gamma_j^{-1})(\xi)$。当 $\rho\to\rho_0$ 时，ξ_i 收敛到 ξ，因而 $\varphi_{\xi_i}(y)$ 在 $\mathcal{W}_i$ 上局部一致收敛到 $\varphi_\xi(y)$。于是，对每个 $y\in\mathcal{W}_i$，直径 $\mathrm{diam}\{\varphi_{\xi_i}(y)\colon\ i=1,\dots,q\}$ 都趋于 0。现在我们处于可以应用命题 2.9 的设定中。

固定 $\epsilon>0$。令 δ 如命题 2.9所述。存在一个邻域 $\mathcal{U}$，它属于 ρ_0，使得若 $\rho\in\mathcal{U}$，则 $\left(\text{上确界}_{y\in\mathcal{W}_i}\text{直径}\ \{\varphi_{\xi_i}(y)\colon\ 1\le i\le q\}\right)<\delta$。于是，根据命题 2.9 对任意 $\rho\in\mathcal{U}$及 $y\in\mathcal{W}_i$，

$$d^{\mathrm{Gr}}_{\widetilde{f}(y,\xi)}\left(T_{\widetilde{f}(y,\xi)}\widetilde{f}(X\times\xi),T_{\widetilde{f}(y,\xi)}(\mathrm{pr}_F\circ\Phi)^{-1}(\eta_y)\right)<\epsilon. \tag{3.8}$$

~其中 $\eta_y = \pi_y(f(y, \xi))$。

现在我们解释如何对任意点 (y, ξ)得到这一结论。由于 $\widehat{\rho_0}(\Gamma)$ 在 (X_F, h)上通过等距变换作用，上述格拉斯曼距离在 $\rho_0(\Gamma)$ 作用下保持不变。由于 $X_F/\widehat{\rho_0}(\Gamma)$ 是紧致的，我们可以选取有限个局部平凡化将其覆盖；正如（2）的证明开头所述。按照上面的做法，我们现在对这有限个局部平凡化分别应用命题 2.9，并得出存在一个 $\mathcal{U}$ 的邻域 ρ_0，使得等式（3.8）成立。□

4. 预备知识 II：拓扑作用的一般结果

本节的主要目的是证明：如果局部半刚性对于无挠格成立，那么它对于一般的一致格也成立。如果读者希望假设这些格是无挠的，可以跳过本节。

本节中，我们将在一个非常一般的框架下开展讨论：群通过同胚（有一处则通过双 Lipschitz 同胚）作用于紧度量空间。稍后我们会在本文中应用这些一般结果，导出两个重要应用：首先，讨论相近作用之间半共轭的唯一性性质；其次，将有限指数子群上的半共轭推广到整个群。特别是，这将使我们能够证明主定理中半共轭的局部唯一性，并绕过格中的挠元。

在介绍这些结果之前，我们先来看一些初等例子，以说明处理半共轭时会遇到的一些微妙之处。首先，作用之间的半共轭（甚至共轭）未必唯一。此外，人们可能会认为，如果 $\rho \to \rho_0$，那么任意一族半共轭 $\{\phi_\rho\}$ 都必定收敛到恒等映射。然而，事实也未必如此。

例 4.1. 考虑 $SO(n+1)$ 在 S^n 上的作用。通过恒等映射和 $-\mathrm{id}$，该作用都与自身共轭。若要考虑离散群作用，我们可以将一个格嵌入 $SO(n+1)$，并考虑这个格在 S^n 上的作用。

更一般地，我们有：

例 4.2. 考虑群 G 在流形 M 上的一个作用 ρ，并假设 $\Gamma < G$ 是一个具有非平凡中心化子 $Z(\Gamma) < G$ 的子群。那么，若 ρ_0 是该作用在 Γ 上的限制，则对于任意 $\sigma \in Z(\Gamma)$，ρ_0 都通过 $\rho(\sigma)$ 与自身共轭。然而，对于 $\sigma \neq 1$，同胚 $\rho(\sigma)$ 未必接近恒等映射。

不过，我们将在第 4.2 节和第 4.3节中证明一些结果，以便在某些附加假设下控制半共轭的行为。

4.1. 一些定义。 在本节中，我们假设（F, d_F）是一个紧度量空间。我们在 $C^0(F, F)$ 上赋予距离 $d_0(f, g) = \sup_{x \in F} d_F(f(x), g(x))$。这里的 $C^0(F, F)$ 表示从 F 到其自身的连续函数空间。我们将用 $\mathcal{B}_r(f)$ 表示（$C^0(F, F)$, d_0）中以 f 为中心、半径为 r 的开球。我们关注的是群 $\mathrm{Homeo}(F)$，即 F 的同胚群，并在其上赋予紧开拓扑，即由基本开集 $\{f \in \mathrm{Homeo}(F) : f(K) \subset U\}$ 生成的拓扑，其中 $K \subset F$ 是紧集，$U \subset F$ 是开集。

这里，Γ 始终表示一个有限生成群。我们假设 Γ 通过同胚作用于 F 上。Γ 在 F 上的忠实 C^0-作用是一个单同态 $\rho : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(F)$。空间 $\mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{Homeo}(F))$ 是 Γ 通过同胚作用于 F 上的忠实作用空间。我们在其上赋予紧开拓扑。

定义 4.3. 设 ρ, $\rho_0 : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(F)$ 是 Γ 的两个作用。连续满射$\phi : F \to F$是群 $H < \Gamma$ 的$(\rho|_H, \rho_0|_H)$-半共轭，当且仅当

$$\rho_0(h) \circ \phi = \phi \circ \rho(h) \ \textit{for all}\ h \in H.$$

若 $H=\Gamma$，我们将简记为 (ρ,ρ_0) 半共轭。

定义 4.4. 设 $\lambda>1$。

(1) 我们称 $f\in \mathrm{Homeo}(F)$ 在开子集 $U\subset F$ 上是 λ-膨胀的，如果：对于所有 $x',x''\in U$，

$$d_F(f\cdot x', f\cdot x'')\geq \lambda\cdot d_F(x',x'').$$

(2) 若 $\mathcal{U}$ 是 F 的一个开覆盖，则称 $\rho:\ \Gamma\to \mathrm{Homeo}(F)$ 是 F 上的一个 $(\lambda,\mathcal{U})$ 一致膨胀作用，如果：对于每个 $x\in F$，都存在 $U_x\in\mathcal{U}$ 和 $g_x\in\Gamma$，使得 $\rho(g_x)$ 在 U_x 上是 λ-膨胀的。

4.2. **半共轭的唯一性**。如上面的例子所示，作用之间的半共轭甚至共轭并不总是唯一的。然而，在附加假设下，只要作用彼此足够接近，且（半）共轭足够接近恒等映射，它们便是唯一的。本小节将给出这样的条件。

引理 4.5。设 $\rho_0\colon \Gamma\to\mathrm{Homeo}(F)$ 是一个 $(\lambda,\mathcal{U})$-一致膨胀作用，其中 $\lambda>1$ 和 $\mathcal{U}$ 是 F 的一个开覆盖。那么存在 $\epsilon>0$，使得：若 $\rho:\ \Gamma\to\mathrm{Homeo}(F)$ 是另一个作用，且 $\phi,\phi'\colon F\to F$ 是满足 $d_0(\phi,\phi')<\epsilon$ 的 (ρ,ρ_0) 半共轭，则 $\phi=\phi'$。

证明。由 F 的紧致性，我们可以取出 $\mathcal{U}$ 的一个有限子覆盖，使得 ρ_0 是（λ，$\{U_1,\dots,U_k\}$）-一致膨胀的。令 ϵ 为 F 的子覆盖 $\{U_1,\dots,U_k\}$ 的勒贝格数，也就是说，若 $d_F(x,y)<\epsilon$，则存在某个 $1\leq i\leq k$，使得 $x,y\in U_i$。设 ϕ,ϕ' 是满足 $d_0(\phi',\phi)<\epsilon$ 的（ρ，ρ_0）-半共轭。只需证明，对所有 $p\in F$，$\phi^{-1}(p)=(\phi')^{-1}(p)$。

为证明这一点，固定 $p\in F$。设 $x\in\phi^{-1}(p)$ 和 $y\in(\phi')^{-1}(p)$，即 $\phi(x)=\phi'(y)=p$。我们将证明 $y\in\phi^{-1}(p)$，即 $\phi(y)=\phi(x)$。注意，由对称性可知，这将推出 $x\in(\phi')^{-1}(p)$，从而完成证明。

反设 $\phi(x)\neq\phi(y)$。但是 $d_F(\phi(x)\ \phi(y))=d_F(\phi'(y)\ \phi(y))<\epsilon$。于是存在包含 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 的 U_i。根据 $(\lambda,\{U_1,\dots,U_k\})$-一致膨胀假设，存在 $\gamma\in\Gamma$，使得

$$d_F(\rho_0(\gamma)\phi(x),\rho_0(\gamma)\phi(y))>\lambda d_F(\phi(x),\phi(y)). \tag{4.1}$$

设 $\gamma_1,\dots,\gamma_k$ 为 Γ 的元素，且 γ_i 是 (λ,U_i)-膨胀的。

于是存在 $i_1\in\{1,\dots,k\}$，使得 $\phi(x)$ 和 $\phi(y)$ 属于 U_{i_1}。根据 (λ,U_{i_1})-展开假设，

$$d_F(\phi'(\rho(\gamma_{i_1}y)),\phi(\rho(\gamma_{i_1}x)))=d_F(\rho_0(\gamma_{i_1})\phi(x),\rho_0(\gamma_{i_1})\phi(y))>\lambda d_F(\phi(x),\phi(y)). \tag{4.2}$$

若 $d_F(\phi(\rho(\gamma_{i_1}x)\ \phi(\rho(\gamma_{i_1}y)))<\epsilon$，则存在 $i_2\in\{1,\dots,k\}$，使得 $\phi(\rho(\gamma_{i_1}x))\ \phi(\rho(\gamma_{i_1}y))\in U_{i_2}$。对 $\rho_0(\gamma_{i_2})$ 施加作用，得到

$$d_F(\rho_0(\gamma_{i_2})\phi(\rho(\gamma_{i_1}x),\rho_0(\gamma_{i_2})\phi(\rho(\gamma_{i_1})y))>\lambda d_F(\phi(\rho(\gamma_{i_1})x),\phi(\rho(\gamma_{i_1})y))>\lambda^2 d_F(\phi(x),\phi(y)). \tag{4.3}$$

若 $d_F(\phi(\rho(\gamma_{i_2}\gamma_{i_1})x)\ \phi(\rho(\gamma_{i_2}\gamma_{i_1})y))<\epsilon$，我们便通过归纳法继续上述过程。由于 $\lambda>1$，存在 $m\in\mathbb{N}$，使得

$$d_F(\phi(\rho(\gamma_{i_m}\cdots\gamma_{i_1})x),\phi(\rho(\gamma_{i_m}\cdots\gamma_{i_1})y))<\epsilon,$$

but

$$d_F(\phi(\rho(\gamma_{i_{m+1}}\cdots\gamma_{i_1})x),\phi(\rho(\gamma_{i_{m+1}}\cdots\gamma_{i_1})y))\geq\epsilon.$$

另一方面，

$$d_F(\phi'(\rho(\gamma_{i_{m+1}}\cdots\gamma_{i_1})y),\phi(\rho(\gamma_{i_{n+1}}\cdots\gamma_{i_1})y))=d_F(\phi(\rho(\gamma_{i_{m+1}}\cdots\gamma_{i_1})x),\phi(\rho(\gamma_{i_{m+1}}\cdots\gamma_{i_1})y))\geq\epsilon.$$

这与假设 $d_0(\phi,\phi')<\epsilon$ 相矛盾。

因此，我们必有 $\phi(x)=\phi(y)$，证明至此完成。 □

4.3. 约化到正规子群。 现在，我们将应用上一小节的判据：假设对适当的正规子群存在作用的半共轭，从而得到群的作用之间的半共轭。

引理 4.6. 设 $\Gamma_0 < \Gamma$ 是一个正规子群，且 Γ/Γ_0 是有限生成的。假设对于任意 $\epsilon > 0$ ，都存在 $U = U$的一个邻域(ϵ) ，使得若 $\rho \in U$，则 ρ 要么不与 ρ_0半共轭，要么在 $\mathcal{B}_\epsilon$(恒等映射) 中恰有一个$(\rho|_{\Gamma_0}, \rho_0|_{\Gamma_0})$-半共轭，记作 ϕ_ρ。那么存在 ρ_0 的一个足够小的邻域 U_0 ，使得对于任意 $\rho \in U_0$ ，若$\rho|_{\Gamma_0}$与 $\rho_0|_{\Gamma_0}$半共轭，则 ϕ_ρ是一个(ρ, ρ_0)-半共轭（即针对整个群 Γ的作用）。

证明。 固定 Γ/Γ_0的一个有限生成集 $\{a_1 \ldots, a_n\}$。固定一个 $\epsilon > 0$，并令 U为满足假设的邻域。对于 $1 \le i \le n$，定义 $\phi_i := \rho_0(a_i^{-1}) \circ \phi_\rho \circ \rho(a_i)$。我们只需证明，能够找到一个更小的开子集 $U_0 \subset U$ ，使得对于满足以下条件的 $\rho \in U_0$： $\rho|_{\Gamma_0}$ 通过 ϕ_ρ与$\rho_0|_{\Gamma_0}$ 半共轭，均有 $\phi_i = \phi_\rho$ 对 $1 \le i \le n$成立。

由于 Γ_0 是 Γ 的正规子群，很容易验证 ϕ_i 是一个（$\rho|_{\Gamma_0}$， $\rho_0|_{\Gamma_0}$）-半共轭。我们断言，只要 ρ 足够接近 ρ_0，那么对所有 $i = 1$，....., n，都有，

$$\begin{aligned} d(\phi_i, \mathrm{id}) &\le d(\rho_0(a_i^{-1})\phi_\rho\rho(a_i), \rho(a_i)^{-1}\phi_\rho\rho(a_i)) + d(\rho(a_i)^{-1}\phi_\rho\rho(a_i), \mathrm{id}) \\ &\le d(\rho(a_i^{-1}), \rho_0(a_i^{-1})) + d(\rho(a_i)^{-1}\phi_\rho\rho(a_i), \mathrm{id}) \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

事实上，对于第一项，我们可以选取足够小的 U_0，使得 $\max_{1\le i\le n} d(\rho_0(a_i^{-1})\ \rho(a_i^{-1})) < \epsilon/2$。第二个 $\frac{\epsilon}{2}$ 估计可以通过进一步缩小 U_0 来实现，具体如下。注意，Homeo(F) 在自身上的共轭作用是连续的。因此，存在 $\delta \ge 0$ 使得

$$d(\rho(a_i)^{-1}\varphi\rho(a_i), \mathrm{id}) < \frac{\epsilon}{2},$$

对每个 $\varphi \in B_\delta$（恒等映射）都成立。现在令 $U_0 = U(\delta)$ 为将假设应用于常数 δ 后得到的 ρ_0 的邻域。由此可得 $d(\rho(a_i)^{-1}\phi_\rho\rho(a_i),$ 恒等映射$) < \frac{\epsilon}{2}$。

因此， $\phi_i \in \mathcal{B}_\epsilon$(id) 是一个（$\rho|_{\Gamma_0}, \rho_0|_{\Gamma_0}$）-半共轭。然后根据关于 U_0 的假设， $\phi_i = \phi_\rho$。 □

推论 *4.7*。设 $\Gamma_0 < \Gamma$ 是一个正规子群， Γ/Γ_0 是有限生成的，且 ρ_0 : $\Gamma \to$*Homeo(F)* 满足：$\rho_0|_{\Gamma_0}$ 是 F 上关于某个开覆盖 $\mathcal{U}$ 的（λ,$\mathcal{U}$）-一致膨胀作用。假设对于任意 $\epsilon > 0$ ，存在 $U = U(\epsilon)$ 的一个邻域，使得如果 $\rho \in U$ 且 $\rho|_{\Gamma_0}$ 与 $\rho_0|_{\Gamma_0}$ 半共轭，则在 $\mathcal{B}_\epsilon$*(id)* 中存在一个（$\rho|_{\Gamma_0}, \rho_0|_{\Gamma_0}$）-半共轭。那么存在 $\epsilon_0 > 0$ 以及 $U_0 = U(\epsilon_0)$ 的一个邻域，使得：如果 $\rho \in U_0$ 且 $\rho|_{\Gamma_0}$ 与 $\rho_0|_{\Gamma_0}$ 半共轭，则 ρ 与 ρ_0 半共轭。此外，存在一个（ρ, ρ_0）-半共轭 ϕ_ρ，使得 $d_0(\phi_\rho,$ *id)* $< \epsilon_0$。

证明。令 ϵ 为将引理 4.5 应用于作用 $\rho_0|_{\Gamma_0}$ 和开覆盖 $\mathcal{U}$ 所得到的常数。设 $\epsilon_0 := \epsilon/2$，以及 $U_0 := U(\epsilon_0)$。假设 $\rho \in U_0$ 使得 $\rho|_{\Gamma_0}$ 半共轭于 $\rho_0|_{\Gamma_0}$。根据假设，存在一个半共轭 ϕ_ρ，使得 $d_0(\phi_\rho,$ 恒等映射$) < \epsilon_0$。如果 ϕ' 是 $\mathcal{B}_{\epsilon_0}$(恒等映射) 中的另一个此类半共轭，那么引理 4.5 蕴含 $\phi' = \phi_\rho$。因此，$\mathcal{B}_{\epsilon_0}$(恒等映射) 恰好包含一个半共轭。于是引理 4.6 蕴含 ϕ_ρ 是一个 (ρ， ρ_0)-半共轭。□

4.4. 将半共轭提升为共轭。 令 BiLip(F) 表示 F 的双Lipschitz 同胚空间。 $f \in$ BiLip(F) 与恒等映射 id 之间的 Lipschitz 距离定义为 $d_{\mathrm{Lip}}(f,$ id$) :=\sup_{x\in F} {}^{d_F}(f(x)\ f(y))\, d_F(x, y)$ 。我们考虑对 f, $g \in$ BiLip~~(F) 定义的~~距离函数 d_L，其定义为

$$d_L(f, g) = d_{\mathrm{Lip}}(f \circ g^{-1}, \mathrm{id}) + d_{\mathrm{Lip}}(g \circ f^{-1}, \mathrm{id}).$$

如果 f 是 λ-Lipschitz 的，那么 $d_{\mathrm{Lip}}(g \circ f^{-1}, \mathrm{id}) < \epsilon$ 意味着 g 是 $\lambda\epsilon$-Lipschitz 的。因此，如果 $f \in \mathrm{BiLip}(F)$ 是 λ-双Lipschitz 的，那么 d_L 度量中以 f 为中心的 ϵ-球内每一点都是 $(\lambda\epsilon)$-双Lipschitz 的。

假设 Γ 是一个有限生成群，并固定一个生成集 S。若两个作用$\rho, \rho_0 \colon \Gamma \to \mathrm{BiLip}(F)$满足 $\max_{s\in S} d_L(\rho(s)\ \rho_0(s)) < \epsilon$，则称它们 ϵ-接近。若存在 $\epsilon > 0$，使得任何与 ρ_0 ϵ-接近的作用 $\rho : \Gamma \to \mathrm{BiLip}(F)$都与 ρ_0 C^0-共轭，则称作用 ρ_0 是 Lipschitz 局部刚性的。

现在我们证明一个非常一般的结果：当这些作用具有一致膨胀性质时，如何将等变的 C^0 半共轭提升为共轭。

命题 4.8. 假设 $\rho_0 \colon \Gamma \to \mathrm{BiLip}(F) \subset \mathrm{Homeo}(F)$ 是一个$(\lambda, \mathcal{U})$一致膨胀作用。那么存在 $\epsilon_0 > 0$ 以及 ρ_0 在 $\mathrm{BiLip}(F)$ 中的一个邻域 V_0，使得：若 $\rho \in V_0$ 且存在一个(ρ, ρ_0) 半共轭 ϕ_ρ，满足 $\mathcal{B}_{\epsilon_0}(\mathrm{id})$，则 ϕ_ρ 是一个同胚（即共轭）。

证明。由 F 的紧致性，我们可以取出 $\mathcal{U}$ 的一个有限子覆盖 $\{U_i\}_{i=1}^k$，其对应的膨胀群元素为 $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$。令 ϵ 为该有限覆盖的勒贝格数（即每个半径为 ϵ 的球都完全包含在至少一个 U_i 中）。设 $\epsilon_0 := \frac{\epsilon}{2}$。

固定某个满足 $\lambda > \lambda' > 1$ 的 λ'。考虑 ρ_0 的邻域，其定义如下：

$$V_0 := \left\{ \rho \in \mathrm{Hom}(\Gamma, \mathrm{BiLip}(F)) : \max_{1\le i\le k} d_L(\rho(\gamma_i), \rho_0(\gamma_i)) < \frac{\lambda'}{\lambda} \right\}$$

那么，对于任意 $\rho \in V_0$，$\rho(\gamma_i)$ 在 U_i 上对 $1 \le i \le k$ 是 λ'-膨胀的。

我们将证明，该命题的结论对这个 V_0 和 ϵ_0 成立。假设 $\rho \in V_0$，且 ϕ_ρ 是 $\mathcal{B}_{\epsilon_0}(\mathrm{id})$ 中的一个 (ρ, ρ_0) 半共轭。为了证明这一结果，只需证明 ϕ_ρ 是双射。

我们首先证明 ϕ_ρ是单射。注意，若 $d_F(x, y) \ge \epsilon$，则 $\phi_\rho(x) \ne \phi_\rho(y)$。事实上，若$\phi_\rho(x) = \phi_\rho(y)$，则

$$d_F(x, y) \le d_F(x, \phi_\rho(x)) + d_F(\phi_\rho(y), y) < 2\epsilon_0 = \epsilon,$$

其中，最后一个不等式由 $d_0(\phi_\rho, \text{恒等映射}) < \epsilon_0$得出。

假设存在 $\xi, \zeta \in F$使得 $\phi_\rho(\xi) = \phi_\rho(\zeta)$。那么 $d_F(\xi, \zeta) < \epsilon$，且这两个点都位于某个 U_i中。假设

$$\frac{\epsilon}{\lambda'} \le d_F(\xi, \zeta) < \epsilon$$

由于 $\phi_\rho(\xi) = \phi_\rho(\zeta)$,

$$\phi_\rho(\rho(\gamma_i)(\xi)) = \rho_0(\gamma_i)\phi_\rho(\xi) = \rho_0(\gamma_i)\phi_\rho(\zeta) = \phi_\rho(\rho(\gamma_i)(\zeta)).$$

然而这是不可能的，因为

$$d_F(\rho(\gamma_i)\xi, \rho(\gamma_i)\zeta) \ge \lambda' d_F(\xi, \zeta) \ge \lambda' \cdot \frac{\epsilon}{\lambda'} = \epsilon.$$

按照引理 4.5 证明中的方法继续归纳，我们得出，对于任意 $n \ge 1$，只要$\epsilon (\lambda')_n < d_F(\xi, \zeta) < \epsilon (\lambda')^{n-1}$，就有 $\phi_\rho(\xi) \ne \phi_\rho(\zeta)$。~~由于~~ $\lambda' > 1$，这意味着 ϕ_ρ 是单射。□

推论 4.9. 假设 $\rho_0 \colon \Gamma \to \mathrm{BiLip}(F)$ 是一个$(\lambda, \mathcal{U})$一致膨胀作用。进一步假设，对于每个充分小的 $\epsilon > 0$，都存在 ρ_0 在 $\mathrm{BiLip}(F)$ 中的一个邻域 $V = V(\epsilon)$，使得：若 $\rho \in V$，则存在一个在 B_ϵ 恒等映射中的(ρ, ρ_0) 半共轭。那么 ρ_0 是 *Lipschitz* 局部刚性。

证明。设 ϵ_0 和 V_0 如上一命题所述。令 $0 < \epsilon < \epsilon_0$ 和 $V = V(\epsilon)$如假设所述。那么 $V \cap V_0$ 是 ρ_0 的一个邻域，满足：只要 $\rho \in V \cap V_0$，ρ 就半共轭于 ρ_0。事实上，假设缢含存在一个 (ρ, ρ_0) 半共轭，定义在

$\mathcal{B}_\epsilon$(恒等映射) $\subset \mathcal{B}_{\epsilon_0}$(恒等映射)。于是，由上一命题可知 ϕ_ρ 是一个共轭映射。至此证明完毕。□

4.5. **广义 Denjoy 构造**。我们指出，有许多作用彼此半共轭，却并不同胚共轭。Bowden 和 Mann 在他们关于球面上的边界作用的研究中已经注意到这一点——参见 [BM22]的命题 4.1；该结果推广了 Denjoy 构造（[Den32]）。借助他们的主要论证，我们给出一个简单的推广，适用于任意可数群在具有稠密轨道的流形上的作用。

我们首先需要以下命题 4.10。它是 [BM22，命题 4.1] 的一个变体，也是 [dS22，命题 2.2]的推论。我们先回顾 [dS22，命题]。令 M^n_{n-1} 表示维数为 $n-1$的谢尔宾斯基空间，即 $M^n_{n-1} := S^n - \cup_{i\in\mathbb{N}} U_i$，其中 $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ 是 S^n 中一个由开球构成的稠密族，且对任意 $\epsilon > 0$，$\{i \in \mathbb{N} : \operatorname{diam}(U_i) < \epsilon\}$ 均为有限值。若 $A \subset S^n$ 有限，则令$M^n_{n-1}/\sim_A$ 为将每个 ∂U_i 压缩为一个点所得的空间，其中这些点满足 U_i 与 A不相交。[dS22] 的命题 2.2 指出，$M^n_{n-1}/\sim_A$ 同胚于 S^n 去掉一组#A 个互不相交的开驯球后所得的空间。若开球 $U \subset S^n$ 及其补集$\overline{U}$ 和 $S^n - U$ 均同胚于闭球，则称该开球为驯球。

注意，[dS22] 的命题 2.2 同样适用于所有维数 n，包括维数$n = 4$。这是因为 [dS22 的命题 2.2] 的证明源自分解定理（见 [dS22 的命题 1.11]），而分解定理又源自 Quinn 环带定理；这两个结果都适用于任意维数。因此，我们的命题 4.10 也适用于所有维数，包括$n = 4$。

命题 4.10。给定开 n-圆盘 B^n 的一个可数稠密子集 Z，存在一个满射连续映射 $h\colon \overline{B^n} \to \overline{B^n}$，它在边界 $\partial(B^n)$ 上是恒等映射，在 $h^{-1}(Z)$ 的补集上是单射，并且 Z 中每个点的原像都是一个闭球。

证明。令 B^n 的一点紧化为 $B^n \cup \{z_0\}$，因此它与 S^n 同胚。我们还将 $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ 编号。

我们首先注意到，[BM22] 的命题 4.1 的证明适用于任意可数集，而不只是某个轨道。接着将其应用于可数集 $Z' = Z \cup \{z_0\} \subset S^n$，得到连续满射 $f\colon S^n \to S^n$，它在 $f^{-1}(Z')$ 的补集上是单射，并且 $\left\{C_i := f^{-1}(z_i) : z_i \in Z'\right\}$ 是一族互不相交的闭球。如 BM22 的命题 4.1], 的证明所示，空间 $S^n - \bigcup_{z'\in Z'} \operatorname{int}\left(f^{-1}(z')\right)$ 是一个维数为 $n-1$ 的谢尔宾斯基（或门格尔）空间，记为 M^n_{n-1}。

令 $A = \{z_0\}$，并应用 [dS22 的命题 2.2]；参见该命题陈述前的备注。考虑商映射 $q_A\colon M^n_{n-1} \to M^n_{n-1}/\sim_A$，其中 $M^n_{n-1}/\sim_A$ 是通过将每个 ∂C_i 压缩为单点而得到的（对 $i \geq 1$）。根据该命题，$M^n_{n-1}/\sim_A$ 同胚于 S^n 中一个良性开球的补集，因此是一个闭球 $\overline{B^n}$，并且 q_A 在$M^n_{n-1} - (\cup_{i\geq 1}\partial C_i)$ 上是单射。考虑映射 $h'\colon M^n_{n-1} \cup (\cup_{i\geq 1} C_i) \to M^n_{n-1}/\sim_A$，使得 $h'|_{M^n_{n-1}} = q_A$，且 $h'|_{C_i}$ 将 C_i 压缩到点 $q_A(\partial C_i)$。现在注意到，$M^n_{n-1} \cup (\cup_{i\geq 1} C_i)$ 和 $M^n_{n-1}/\sim_A$ 都与 $\overline{B^n}$ 同胚。于是，稍微滥用记号，我们可以将 h' 看作从 $\overline{B^n}$ 到其自身的映射，它是连续满射，在 $h'^{-1}(Z)$ 的补集上为单射，并且对于任意 $z \in Z$，$(h')^{-1}(z)$ 是一个闭球。

考虑 $h'|_{\partial\overline{B^n}}$，它是一个从 $Z \cap \partial\overline{B^n} = \varnothing$ 到自身的同胚。将 $(h'|_{\partial\overline{B^n}})^{-1}$ 延拓为 B^n 的一个同胚 h''，例如通过将其锥化。然后令 $h := h' \circ h''$。□

这使我们能够给出一种非常一般的非共轭扰动构造。

构造 4.11。 考虑可数群 Γ 在紧致光滑流形 M 上的任意 C^1-作用 ρ_0 。如果 $\rho_0(\Gamma)$ 有一个稠密轨道，那么存在 Γ 在 M 上的一个 C^0 作用 ρ，它与 ρ_0 不共轭。此外，可以令 ρ 任意接近 ρ_0。

证明。 假设 $\Gamma\cdot x$ 是一个稠密轨道。接下来，我们将先把轨道 $\Gamma\cdot x$ 的一部分扩展成一个小的、互不相交的闭球 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{B}(\gamma x)$ 并由此构造一个新的 C^0-作用 ρ。如下文所述，闭球 $\overline{B}(\gamma x)$ 的半径可以选取得足够快地趋于零，使得所得流形 M' 仍与 M 同胚。

我们先在 M 上固定一个黎曼度量，并选取一个闭球 $\overline{B}(x_0,r_0)\subset M$，其中某个 $0<r_0<$ 满足 injrad(M)，且 $x_0\in\Gamma\cdot x$ 的边界不与轨道 $\Gamma\cdot x$ 相交。我们可以做到这一点，因为半径 r_0 有不可数多个选择，而轨道点只有可数多个。通过归纳法，假设已经选取了互不相交的球 $\overline{B}(x_0,r_0)$ $\overline{B}(x_1,r_1)$ $\ldots,\overline{B}(x_n,r_n)$，我们可以选取一个闭球 $\overline{B}(x_{n+1},r_{n+1})$，其中 $0<r_{n+1}<$ 满足 injrad(M)，并且该球包含在开集 $M\setminus\bigcup_{i=0}^{n}\overline{B}(x_i,r_i)$ 中；此开集以某个 $x_{n+1}\in\Gamma\cdot x$ 为中心，且其边界不与 $\Gamma\cdot x$ 相交。通过归纳法，我们可以找到可数多个球，使得 $M\setminus\bigcup_{i\geq 0}\overline{B}(x_i,r_i)$ 没有内部点且不包含任何轨道点。现在，对于每个闭球 $\overline{B}(x_i,r_i)$，我们应用命题 4.10，得到一个连续满射 $h_i:\overline{B}_i\to\overline{B}(x_i,r_i)$，它从一个光滑闭球 $\overline{B}_i$ 映出；每个轨道点 $\gamma x\in\overline{B}(x_i,r_i)$ 的原像都是一个闭球 $\overline{B}(\gamma x)$，并且该映射在这些圆盘的补集上是单射。由于 $\overline{B}(x_i,r_i)$ 两两不相交，且 h_i 在 $\overline{B}_i$ 上的限制是同胚，因此可以将这些映射组合成一个整体的连续满射 $h\colon M'\to M$，其中 M' 是通过从 M 中移除每个 $\overline{B}(x_i,r_i)$，再利用 $h_i|_{\partial\overline{B}_i}$ 将 $\overline{B}_i=h_i^{-1}(\overline{B}(^{x_i}|_{\partial\overline{B}_i},r_i))$ 粘接进去而得到的。映射 h 在 $h^{-1}(\Gamma\cdot x)$ 的补集上是单射。显然，M' 与 M 同胚，因为映射 $f'\colon M'\to M$ 由 $f'|_{B_i}=h_i$ 定义，且 $f'|_{M'-\cup_i B_i}=$id 是一个同胚。

由于 ρ_0 的作用是 C^1，它在每个轨道点附近都是局部线性的。对于每个 γ 和 $v\in\partial\overline{B}(\gamma x)\cong S^{n-1}$，沿着一列 z_i^v 的点取 $\rho_0(\gamma')z_i^v$ 的极限，其中这些点沿 v 方向径向趋近（相对于某个 C^1 图表），从而将每个 C^1 微分同胚 $\rho_0(\gamma')$ 延拓为 $M'-\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\overline{B}(\gamma x)\cong(M-\Gamma\cdot x)$ $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\partial\overline{B}(\gamma x)$。（这里我们假设 ϵ_γ 取得足够小。）这列点必然沿着径向方向 w 与 $\gamma'\gamma x$ 切向趋近，而我们将该方向认作 $\partial\overline{B}(\gamma'\gamma x)$ 中的唯一一点。由此将得到一个同胚 $\partial\overline{B}(\gamma x)\to\partial\overline{B}(\gamma'\gamma x)$。最后，我们通过锥化到 γx，将这个定义在 $\partial\overline{B}(\gamma x)$ 上的同胚延拓到整个 $\overline{B}(\gamma x,\epsilon\gamma)$，从而得到 $\rho(\gamma')\colon\overline{B}(\gamma x)\to\overline{B}(\gamma'\gamma x)$。这些同胚的相容性源于 ρ_0 是 M 上的一个 C^1 作用，因此我们在 $M\cong M'$ 上得到一个作用 ρ。（详情参见 [BM22] 中命题 4.1 的证明：尽管他们只考虑 S^n 上的作用，但其论证适用于我们这里的一般情形。）所需的半共轭将每个 $\overline{B}(\gamma x,\epsilon\gamma)$ 压缩到 γx。注意，根据构造，ρ 不可能有稠密轨道，因此也不可能与 ρ_0 C^0-共轭。□

5. 预备知识 III：对称空间与富斯滕贝格边界

这里我们回顾一些关于对称空间及其各种边界的众所周知的事实。这些内容可以在 [Ebe96，第 2 节7]中找到。

设 X 是一个无欧几里得因子的非紧型对称空间，且 $\mathrm{Isom}(X)^0=G$ 是一个半单李群。对于任意点 $p\in X$，$K:=\mathrm{Stab}_G(p)$ 是 G 的极大紧子群。点 p 的轨道自然地诱导出 X 与 G/K 之间的微分同胚。此外，X 带有一个左 G-不变的非正曲率度量。对于任意这样的度量，我们将 X 的（光滑）测地边界记为 ∂X。X 和 ∂X 的微分同胚类与所选度量无关。

定义 5.1。若存在 $\mathfrak{x} \in \partial X$ 使得 $Q = G_{\mathfrak{x}} := \{g \in G : \ g \cdot \mathfrak{x} = \mathfrak{x}\}$，则称子群 $Q < G$ 为抛物子群。

注意， $G_{\mathfrak{x}}$ 在对称空间 X上传递地作用。

固定 $o \in X$ 和 $\mathfrak{x} \in \partial X$。令 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ 为由 o确定的李代数 $\mathfrak{g}$ 的卡当分解。我们将的（实）秩，$\mathrm{rk}(G)$, 定义为 $\mathfrak{p}$的任一极大阿贝尔子代数的维数。我们固定 $\mathfrak{p}$ 的一个极大阿贝尔子代数，并将其记为 $\mathfrak{a}$。

注意， $\mathfrak{p}$ 可视为 X 在 o处的切空间。令 $v \in \mathfrak{p}$由$v := \gamma'_{o\mathfrak{x}}(0)$给出，其中 $\gamma_{o\mathfrak{x}}$ 是从 o 到 $\mathfrak{x}$的测地射线。考虑由 $T_{\mathfrak{x}} : G_{\mathfrak{x}} \to G$定义的同态

$$T_{\mathfrak{x}}(g) := \lim_{t\to+\infty} \exp(-tv)g\exp(tv),$$

其中该极限存在，见 [Ebe96，命题 2.17。3]。

令 $Z(v) := \{w \in \mathfrak{g} : \ [v, w] = 0\}$ 为李代数 $\mathfrak{g}$中 v 的中心化子。于是我们定义以下子集:

$$\begin{aligned} Z_{\mathfrak{x}} &:= \exp(Z(v)) = \{g \in G : \exp(-tv)g\exp(tv) = g \text{ for all } t \in \mathbb{R}\} \\ M_{\mathfrak{x}} &:= K \cap Z_{\mathfrak{x}} = K \cap G_{\mathfrak{x}} \\ N_{\mathfrak{x}} &:= \ker(T_{\mathfrak{x}}) \\ A_{\mathfrak{x}} &:= \exp\{Z(v) \cap \mathfrak{p}\}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

注意到， $Z_{\mathfrak{x}}$、 $M_{\mathfrak{x}}$和 $N_{\mathfrak{x}}$ 是 G的子群，而 $A_{\mathfrak{x}}$ 通常只是一个子集（除非$Z(v) \subset \mathfrak{p}$，即 v 是一个正则向量）。令 $Q = G_{\mathfrak{x}}$，我们还将使用记号 Z_Q、 M_Q、 N_Q、 A_Q分别表示 $Z_{\mathfrak{x}}$、 $M_{\mathfrak{x}}$、 $N_{\mathfrak{x}}$、 $A_{\mathfrak{x}}$ 。

本节列出一些与抛物子群 $Q = G_{\mathfrak{x}}$相关的几何事实。

5.1. **广义伊瓦萨瓦分解**。 根据 [Ebe96，命题 2.17.5(5)], ，我们得到广义伊瓦萨瓦分解

$$G = K \cdot A_Q \cdot N_Q.$$

G中元素的上述分解是唯一的。

根据[Ebe96，命题 2.17.5(4)], ，也存在类似的分解 Q:

$$Q = Z_Q \cdot N_Q = M_Q \cdot A_Q \cdot N_Q = N_Q \cdot A_Q \cdot M_Q = N_Q \cdot Z_Q. \tag{5.2}$$

同样， Q 中元素的上述分解是唯一的。

5.2. **平行集**。 本小节的参考文献为 [Ebe96，第 138]页。稍微滥用一下记号，令 $\gamma_{o\mathfrak{x}}$ 也表示从 o 到 $\mathfrak{x}$ 的测地射线的双无限测地线延拓。

的平行集 $F(\gamma_{o\mathfrak{x}})$，是所有与 $\gamma_{o\mathfrak{x}}$平行的双无限测地线的并集。我们也用记号 $F(v)$表示所有与初始向量为 v的测地线平行的测地线的并集。特别地， $F(\gamma_{o\mathfrak{x}}) = F(\gamma'_{o\mathfrak{x}}(0))$。集合 $F(\gamma_{o\mathfrak{x}})$是 X的全测地子流形，并且

$$F(\gamma_{o\mathfrak{x}}) = A_{\mathfrak{x}} \cdot o.$$

事实上，我们还有 $F(\gamma_{o\mathfrak{x}}) = Z_{\mathfrak{x}} \cdot o$.

令 $E(\gamma_{o\mathfrak{x}})$为 X 中所有包含 $\gamma_{o\mathfrak{x}}$的极大平坦的交集。定义 e

$$E_{\mathfrak{x}} := \bigcap \{\mathfrak{u} \subset \mathfrak{p} : \mathfrak{u} \text{ is an abelian subspace containing } v\}.$$

Then

$$E(\gamma_{o\mathfrak{x}}) = \exp(E_{\mathfrak{x}}) \cdot o$$

并且 $E(\gamma_{o\mathfrak{x}})$是一个全 y 与 $\mathbb{R}^d$ 等距的测地子流形，其中 $1 \le d = \dim(E_{\mathfrak{x}}) \le \mathrm{rk}(G)$.

集合 $F(\gamma_{o\mathfrak{x}})$ 等距分解为 $\mathbb{R}^d\times CS(\gamma_{o\mathfrak{x}})$ 其中 $d=$维数 $E_{\mathfrak{x}}$ 且 $CS(\gamma_{o\mathfrak{x}})$ 是秩为$(\mathrm{rk}(G)-d)$ [Ebe96, 引理 2.20。9]。

平行集在对称空间上产生一个具有等距叶的全测地叶状结构。更确切地说， X 被全测地子空间 $\{F(\gamma_{q\mathfrak{x}}): q\in X\}$分叶。该叶状结构的叶空间可以自然地识别为 $N_{\mathfrak{x}}$ （因为 $F(\gamma_{o\mathfrak{x}})=Z_{\mathfrak{x}}\cdot o$和 $G_{\mathfrak{x}}=N_{\mathfrak{x}}Z_{\mathfrak{x}}$）。给定 o和q，其中 X，存在唯一的等距变换$H_{o,\ q}: F(\gamma_{o\mathfrak{x}})\to F(\gamma_{q\mathfrak{x}})$，使得对于 $F(\gamma_{o\mathfrak{x}})$中趋于 $\mathfrak{x}$的任意点序列(o_n)，距离 $d(o_n, H_{o,\ q}(o_n))$趋于0。

利用 上述叶状结构，我们可以定义一个收缩映射 $retr: X\to F(\gamma_{o\mathfrak{x}})$，使得 at

$$retr|_{F(\gamma_{q\mathfrak{x}})}=H_{q,o}$$

对每个 $q\in X$都成立。这个收缩映射是距离不扩张的。此外， $retr^{-1}(o)=N_{\mathfrak{x}}\cdot o$。特别地，对称空间 X 与乘积 $F(\gamma_{o\mathfrak{x}})N_{\mathfrak{x}}$微分同胚。

5.3. **Weyl 室 Q-无穷远处的面**。 与 $\mathfrak{x}$相关联的无穷远处的韦伊室面定义为 $\mathcal{C}(\mathfrak{x})=\{\Upsilon\in\partial_\infty X: G^0_\Upsilon=G^0_{\mathfrak{x}}\}$。

如果两个无穷远处的 Weyl 室 Q-面 $\mathcal{C}(\mathfrak{x})$ 和 $\mathcal{C}(\Upsilon)$ 满足：对于某个 $g\in G$，有 $\mathcal{C}(\Upsilon)=g\mathcal{C}(\mathfrak{x})$，那么我们称它们为同类型。于是， G 在所有与 $\mathcal{C}(\mathfrak{x})$ 同类型的无穷远处 Weyl 室 Q-面构成的集合上传递地作用，且 $\mathcal{C}(\mathfrak{x})$ 的稳定子等于 $G_{\mathfrak{x}}=Q$。因此，所有与 $\mathcal{C}(\mathfrak{x})$ 同类型的无穷远处 Weyl 室 Q-面构成的集合可与 G/Q 等同，并继承光滑流形的结构。此外，根据广义伊瓦萨瓦分解， G/Q 与 K/M_Q 微分同胚。利用这一等同，当 $Q_{\mathfrak{x}}$ 是某个 $\xi\in G/Q$的稳定子时，我们可以将无穷远处的 Weyl 室 Q-面 $\mathcal{C}(\mathfrak{x})$ 简记为 ξ。

5.4. **基于一点的韦伊室 Q面**。与基于 o的 $\mathfrak{x}$ 相关联的魏尔室面定义为 $\mathcal{C}_o(\mathfrak{x})=\exp\{tY: t\geq 0, Y(o)=\gamma'_{o\Upsilon}(0)\ \Upsilon\in\mathcal{C}(\mathfrak{x})\}\cdot o$。注意， $\mathcal{C}_o(\mathfrak{x})$ 由从 o 出发、指向无穷远处相应韦伊室 Q 面的测地射线的并组成 $\mathcal{C}(\mathfrak{x})$。 G 中 $\mathcal{C}_o(\mathfrak{x})$的稳定子为 $M_{\mathfrak{x}}=M_Q$。

给定无穷远处的一个韦伊室 Q面 $\xi\in G/Q$，令 $\mathcal{C}_o(\xi)$表示属于等价类 ξ、基于 o 的唯一韦伊室Q面。注意，若 $\mathfrak{x}\in\partial_\infty X$ 满足 $Q=G_{\mathfrak{x}}$，则 $\mathcal{C}_o(\xi)=\mathcal{C}_o(\mathfrak{x})$。

5.5. **相对的韦伊室 Q面**。给定一个基于 o的韦伊室 Q面，记作 $\mathcal{C}_o(\xi)$，令 $\mathcal{C}_o(\xi^*)$表示基于 o的相对韦伊室 Q面。具体而言，此面由下式给出：$\mathcal{C}_o(\xi^*)=\exp\{tY: t\geq 0, Y=-\gamma'_{o\Upsilon}(0)\ \Upsilon\in\mathcal{C}(\xi)\}\cdot o$。

类似地，我们称无穷远处的韦伊室 Q-面 $\xi\in G/Q$ 是与 $\eta\in G/Q$ 相对的韦伊室 Q-面，若存在一点 o，使得 $\mathcal{C}_o(\xi)$ 与 $\mathcal{C}_o(\eta)$ 相对。

5.6. **韦伊室 Q-面丛 G/M_Q**。设 Q 是一个抛物子群，其紧子群为 M_Q，如式（5.1）所示。韦伊室 Q-面丛在 X 是与 Q 相关、以点 $o\in X$为基点的韦伊室面空间（基点可任取）。注意， G 在此空间上传递地作用。换言之，它可识别为 $G\cdot\mathcal{C}_o$（$\mathfrak{x}$）$\cong G/M_Q$。

本节余下部分将讨论空间的几何性质

$$X_{G/Q}=G/M_Q.$$

自然映射 $p_Q: G/M_Q\to G/K$ 赋予 G/M_Q 一个光滑纤维丛结构，其基空间为G/K，纤维为 K/M_Q。点 $gK\in G/K$ 上方的纤维由 $F_{gK}=gK/M_Q$ 给出，并可识别为以 gK 为基点的所有韦伊室 Q-面的空间。现在我们说明映射$\pi_{gK}: F_{gK}\to K/M_Q$，它将每个纤维与 K/M_Q 识别起来。对于每个 $g\in G$，都存在唯一的

分解 $g = n_Q a_Q k$ 来自广义伊瓦萨瓦分解 $G \cong N_Q A_Q K$；参见第 5.1 节。然后定义映射 π_{gK}：$gK/M_Q \to K/M_Q$ 如下：

$$\pi_{gK}(gk'M_Q) = kk'M_Q.$$

最后，由于 G/K 是可缩的，因此该纤维丛在整体上是平凡的。不过，广义伊瓦萨瓦分解（第5.1节）给出了整体平凡化的显式描述。注意，存在一个自然的光滑丛同构（也是一个微分同胚）$\Phi: G/M_Q \to G/K \times K/M_Q \cong G/K \times G/Q$，它源于（反向）伊瓦萨瓦分解 $G \cong N_Q A_Q K$ 的光滑性，以及由此得到的微分同胚$G/K \cong N_Q A_Q$。特别地，如果$g = n_Q a_Q k = k' a'_Q n'_Q$ 由广义伊瓦萨瓦分解给出，那么

$$\Phi(gM_Q) = (n_Q a_Q K, k'M_Q).$$

注意，由广义伊瓦萨瓦分解得到的映射 $g \mapsto k'M_Q$ 是良定义的。这是因为 $M_Q A_Q N_Q = A_Q N_Q M_Q$，见公式（5.2）。因此，映射 Φ 是良定义的。此外，Φ显然是一个光滑函数。还要注意，Φ 的这个定义与引理3.7中的早先定义，即公式（3.1），一致。

5.7. 上的黎曼度量 G/M_Q。固定一点 $o = eK \in X$，考虑相应的卡当分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \tag{5.3}$$

其中 $\mathfrak{k} = T_e K$。取 $\mathfrak{p}$中的一个极大阿贝尔子代数 $\mathfrak{a}$。为 $\mathfrak{a}$选定一组正根 Λ^+，并令 Λ^{++} 表示正单根。然后固定一个以 o为基点的正韦伊室$\mathfrak{a}^+ \subset \mathfrak{p}$（相对于 Λ^{++}）。

设 α 是 G上的任意左 G不变且 K双不变度量。它在 G/M_Q上诱导出一个左 G不变度量。我们始终在 G/M_Q 上赋予这种度量。

注意，对于上述任意 α，$\mathfrak{p} = (T_e K)^\perp$。事实上，$\alpha$ 是 $\mathfrak{g}$上的一个 Ad(K)不变度量，而 Ad(K)保持卡当分解。此外，存在 $k_0 \in K$ 使得 Ad(k_0)($\mathfrak{a}^+$) $= -\mathfrak{a}^+$（即对合映射）。令 $v \in \mathfrak{a}^+$ 为 $\mathfrak{a}^+$中单位向量的重心。于是 Ad(k_0)$v = -v$。因此，对于任意 $v_1 \in \mathfrak{k}$,

$$\alpha(v_1, v) = \alpha(\mathrm{Ad}(k_0)v_1, \mathrm{Ad}(k_0)v) = \alpha(v_1, -v),$$

这意味着 $v \in \mathfrak{k}^\perp$。然后，α的 Ad(K)-不变性意味着 Ad(K)$v \subset \mathfrak{k}^\perp$。最后，Ad($K$)$v$ 张成 $\mathfrak{p}$。比较 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{k}$ 的维数可证明 $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp$。

此外，我们还注意到，这样的黎曼度量 α 还会使$T_e G$ 的所有单因子彼此正交。事实上，α 上述黎曼度量在李代数的每个单分量上除缩放外都是唯一的（见 [Ebe96]的第 2.3 节）。

引理 5.2。设 Q 为任意抛物子群，并假设 α 是如上所述的 G/M_Q上的黎曼度量。令 $\mathcal{E}_g = gA_Q N_Q \cdot M_Q \subset G/M_Q$，则：
(1) 每个纤维 $F_{g'}$ 都与 $\mathcal{E}_g$正交；*(2)* $\mathcal{E}_g$ 与黎曼全局对称空间 $(G/K, (p_Q)_*\alpha)$等距；*(3)* 每个纤维 F_g 都是全测地的。

证明。由 α的左 G-不变性和右 K-不变性，$dp_Q\alpha$ 是 G/K 上的左 G-不变黎曼度量，因此赋予 G/K 黎曼全局对称空间的结构。（事实上，由于 $T_e(G/K)$ 上的 Ad(K)-不变性，度量 $dp_Q\alpha$ 与一个固定的黎曼对称度量之间仅相差一个缩放因子，该因子对应于 G 的各个单因子。）回忆一下，$\mathcal{E}_g$ 是从 $p_Q : G/M_Q \to G/K$ 的一个截面的像。于是，左乘 g^{-1} 是 $\mathcal{E}_g$ 与 $\mathcal{E}_e := A_Q N_Q \cdot M_Q$ 之间的等距变换。由 α 的左 G-不变性，只需证明：

- $T_{eM_Q}(K/M_Q)$ 与 $T_e\mathcal{E}_e$ 正交，
- dp_Q： $T_{eM_Q}(G/M_Q) \to T_{eK}(G/K)$ 是一个黎曼浸没，
- 限制映射 $dp_Q|_{T_e\mathcal{E}_e}$： $T_e\mathcal{E}_e \to T_e(G/K)$ 是一个黎曼等距变换。

注意到 $T_e\mathcal{E}_e$ 与 $\mathfrak{p} = T_e(G/K)$有典范同一性，其中 $\mathfrak{p}$ 如式（5.3）所示。根据度量 α 的定义，$(T_{eM_Q}(K/M_Q))^\perp$ 与 $T_e(G/K)$有典范同一性。这证明了第一部分。接下来注意到 dp_Q 显然是一个浸没。此外，

$$\ker(dp_Q)^\perp = (T_{eM_Q}(K/M_Q))^\perp$$

它等于 $T_e\mathcal{E}_e = T_e(G/K)$，而 $(p_Q)_*\alpha$ 是 $\ker(dp_Q)^\perp$ 与 $T_e(G/K)$之间的等距变换。这证明了第一和第二部分。

要证明第三部分，只需证明 K 在 G中是全测地的。但这是显然的，因为子群 K 在 G/K 于 eK处的黎曼测地对称所诱导的 G 上的嘉当对合下保持不变。□

5.8. 作用于 G/M_Q上的魏尔室流。 令 A为 G 中李代数为 $\mathfrak{a}$的连通子群。考虑群 $A'_Q < A$，它是 A 中与 M_Q中元素对易的元素所组成的子群。 A'_Q 在 G/M_Q 上有一个自然作用，由右乘定义，即对于任意 $a \in A'_Q$ 和 $g \in G$，都有 $gM_Q \mapsto gaM_Q$ 。该作用是良定义的，因为 A'_Q 与 M_Q对易。这个作用称为与抛物子群 Q相关的魏尔室流 。

回忆一下， $\mathfrak{a}^+$ 是相对于某个正单根选取的正韦伊室，参见第 5.7节。将 A'_Q 的李代数与 $\mathfrak{a}^+$ 相交，可得正韦伊室面 $\mathfrak{a}^+_Q$。我们将 正韦尔室流 在 G/M_Q 上定义为 ${A'_Q}^+$ 的限制作用：$= \exp(\mathfrak{a}^+_Q) \subset A'_Q$。

5.9. **关于 G/M_Q的叶状结构。** 回顾第 Q节中基于一点和无穷远处的韦伊室5.3、5.4 以及5.5中关于面的概念，以及对向韦伊室的概念。

中心稳定叶状结构与中心不稳定叶状结构。 若两个基于一点的韦伊室 Q面 $\mathcal{C}_p(\xi)$和 $\mathcal{C}_q(\eta)$之间的豪斯多夫距离有界，则称它们渐近；等价地，若 $\xi = \eta$，它们也渐近。于是，渐近的基于一点的韦伊室 Q面的一个等价类，就是无穷远处的一个韦伊室 Q面。

对于 $\xi \in G/Q$，我们将 G/M_Q 中的中心稳定流形定义为

$$\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi) := \{\mathcal{C}_p(\mathfrak{x}) : p \in X\}.$$

它是所有与 $\mathcal{C}_o(\xi)$渐近的基于一点的韦伊室 Q面的集合。特别地，根据定义，它是 G中一个闭子群的轨道，因此是一个光滑流形。这与动力学定义一致：点 gM_Q 在 G/M_Q 中的中心稳定流形，由所有在正韦伊室流作用下，与 ${A'_Q}^+$ 轨道所确定的正韦伊室保持有界距离的点组成 gM_Q。

中心不稳定流形定义如下：

$$\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\xi) := \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi^*),$$

其中 ξ^* 是韦伊室 Q在无穷远处与 ξ相对的面；参见第5节。 5.

那么， $\{\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi) : \xi \in G/Q\}$ 和 $\{\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\xi) : \xi \in G/Q\}$ 是G/M_Q 上两种不同的连续叶状结构，其叶光滑。这些叶状结构的叶沿着魏尔室流的轨道相交。事实上， $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta) = \{\mathcal{C}_p(\xi) : p \in X,\ \mathcal{C}_p(\xi^*) \in \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\eta^*)\}$ 是与 ξ 正向渐近、与 η反向渐近的魏尔室 Q面集合。在映射p_Q：$G/M_Q \to G/K$下，该集合与 $F(\gamma)$微分同胚，其中 γ 是一个（任意一条）端点为

$\gamma(+\infty) \in \xi$ 和 $\gamma(-\infty) \in \eta$。因此，交集要么为空，要么是与$G_Q/K_Q \cong A_Q N_Q$同胚的光滑子流形；参见第5.2节。

令 $\Phi\colon G/M_Q \to G/K \times G/Q$ 为第 5.6 节中如上定义的映射。则 $\Phi^{-1}(p,\xi) = \mathcal{C}_p(\xi)$且 $\Phi^{-1}(X \times \xi) = \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi)$ 对任意 $\xi \in G/Q$ 均成立。

更细的叶状结构。 每个叶 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi)$ 都有更细的叶状结构。事实上，存在一个自然的同胚

$$\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi) \to F(\gamma_p \mathfrak{x}) N_{\mathfrak{x}}$$

其中， $F(\gamma_p \mathfrak{x})$ 与 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi)$ 中的一个中心叶相对应，而幂零子群 $N_{\mathfrak{x}}$ 与 (x,ξ) 的强不稳定叶相对应。根据先前在 G/M_Q 上定义的度量， $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi)$ 由 $\{F(\gamma_q \mathfrak{x}) : q \in X\}$ 构成的叶状结构与由 $N_{\mathfrak{x}}$ 的轨道构成的叶状结构垂直。（这是因为 K、 $A_{\mathfrak{x}}$ 和 $N_{\mathfrak{x}}$ 关于 α 均相互垂直。）对于 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\xi)$ 的每个叶，也可以定义类似的叶状结构。

5.10. **例**。 考虑对称空间 $X = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$，并令 $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 为 X 的等距群的连通分支。

我们考虑 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 的以下标准子群： $A_* = \left\{ \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$、$\left\{ N_* = \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \right.$

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$, $M_* = \{e\}$, and $P_* = M_* A_* N_* = \left\{ \begin{bmatrix} e^t & s \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}$.

令 $K \cong \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(2)$为 G 的极大紧子群，使得 $X \cong G/K$。考虑测地线 $\gamma(t) = (p, a_t \cdot p)$，其中 $p = eK_0 \in \mathbb{H}^2$ 是一个固定的基点。则 $\gamma|_{[0,\infty)}$ 是一条奇异测地射线，而抛物子群 $Q = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times P_2$ 是 $\mathfrak{x} = \gamma(\infty)$ 的稳定子。于是

$$Z_Q = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \times A_*, N_Q = N_* \times P_*, M_Q = \mathrm{SO}(2) \times \{e\}$$

$$A_Q = \exp\left(\left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} : x,y \in \mathbb{R} \right\} \right) \times A_*, \text{ and } A'_Q = \{e\} \times A_*$$

此外， $G/Q \cong \{[e]\} \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/P_* \cong \{\mathfrak{x}\} \times \partial_\infty \mathbb{H}^2 \subset \partial_\infty \mathbb{H}^2 \times \partial_\infty \mathbb{H}^2 \subset \partial_\infty X$。于是，韦伊室丛 $G/M_Q \cong \mathbb{H}^2 \times \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ 是对称空间 $X = \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ 上的一个光滑 S^1-丛。 A'_Q 在 G/M_Q 上的作用在第一个因子 $\mathbb{H}^2$ 上是平凡的，并通过右乘作用于第二个因子 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$。最后注意，对于上述测地射线 γ，我们有 $F(\gamma) \cong \mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$。

5.11. **例子**。考虑对称空间 $X = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(3)$，并令 $G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{R})$。考虑子群

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_1 s_2 \end{pmatrix} : s_i \in \{\pm 1\} \right\}, N = \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A = \left\{ \begin{pmatrix} e^{t_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{t_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t_1 - t_2} \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\},$$

以及 P=MAN。那么 P 在共轭意义下是唯一的极小抛物子群，并且有两个不同的真非极小抛物子群共轭类，分别由

不同的真非极小抛物子群共轭类，由 $Q_- =$ 给出 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$ 分别。注意，相应的富斯滕贝格边界对应于部分 $\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ 以及 $Q_+ :=$

旗流形，即 $G/Q_- \cong \mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$ 和 $G/Q_+ \cong \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$。注意，这两个边界通过从 $\mathrm{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$ 到 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ 的映射微分同胚，该映射将一个二维平面 V 映至等价类 $[V^\perp]$。然而，这两个边界不可能等变微分同胚。

考虑测地线 $\gamma(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \cdot K$。对于 X 上某个适当选取的对称度量（这些度量彼此仅相差一个比例因子），这是一条单位速度测地线。于是，$\mathfrak{x} = \gamma(\infty) \in \partial_\infty X$ 由 Q 稳定。

这些子群为：

$$Z_{Q_-} := \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, N_{Q_-} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, M_{Q_-} := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \det(A) \end{pmatrix} : A \in O(2) \right\},$$

$$A_{Q_-} := \left\{ \exp \begin{pmatrix} t_1 & s & 0 \\ s & t_2 & 0 \\ 0 & 0 & -t_1 - t_2 \end{pmatrix} : t_1, t_2, s \in \mathbb{R} \right\}, A'_{Q_-} = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

注意，A_{Q_-} 由 Z_{Q_-} 中所有对称正定的矩阵组成。

那么，$G/Q_- \cong K/M_{Q_-} \cong SO(3)/O(2)$与 S^2 在二重映射下的商微分同胚，也就是说，它是一个二维实射影空间。这与我们先前的评论相符：G/Q_-与 $\mathbf{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$ 规范同构，因此可识别为 $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{3*})$。

此外，$G/M_{Q_-} = PK/M_{Q_-} \cong P \times \mathbf{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$具有光滑 $\mathbf{Gr}_2(\mathbb{R}^3)$ 丛的结构，底空间为 $P \cong X$。

上述子群和空间也可以类似地为 Q_+ 确定，并且它们通过 $\mathbb{R}^3$ 与 $\mathbb{R}^{3*}$之间的对偶性相关联。

更一般地，考虑对称空间 $X = \mathbf{SL}_d(\mathbb{R})/\mathbf{SO}(d)$。正单根集合由 $\Delta = \{e_i^* - e_{i+1}^* \text{ 给出：} 1 \le i \le d-1\}$。对于任意 $\Theta \subset \Delta$，我们考虑典范平坦 A 中的魏尔室面 $\mathfrak{a}_\Theta^+$，它由对应于 Θ 中各根的根向量所张成的正锥给出。（这将是一个欧几里得 $|\Theta|$-单纯形。）对于某个 $\mathfrak{x} \in \partial_\infty X$，我们可以将 $\mathfrak{a}_\Theta^+$ 在 $p \in X$ 上的指数作用表示为 $\mathcal{C}_p(\mathfrak{x})$。定义 $Q = P_\Theta$ 为 G 中 $\mathfrak{x}$ 的稳定子。（任意抛物子群都与某个这样的 P_Θ 共轭。）那么，G/P_Θ 是部分旗簇，由 $\exp(\mathfrak{a}_\Theta^+)$ 的 G-轨道构成。用矩阵表示时，群 P_Θ 与这样一类矩阵共轭：在对应于 Θ 的坐标中，对角线下方的元素均为零。此时，M_Q 将是与 $SO(q)$ 同构的群，其中 $q = d - |\Theta|$ 在对应于 Θ 的坐标上作用为恒等映射。群 A_Q 由 P_Θ 中的对称矩阵构成，而 A'_Q 则是除 Θ 坐标外其余位置均为 1 的对角矩阵。

6. 对称空间的粗几何

固定一个黎曼对称空间 X，并令 $G = \mathbf{Isom}(X)^0$。

我们将 $\mathbb{R}^{\mathrm{rk}(G)}$ 到 X 的任意等距全测地嵌入称为一个（极大）平坦。两个平坦的交集称为一个（奇异）子平坦。半平坦 H 是平坦的一个子集，满足 ∂H 是一个维数为 $\mathbf{rk}(G) - 1$ 的子平坦。平坦的一个子集若是有限个半平坦的交集，则称为一个多胞体。

我们还定义奇异子平坦的平行集（参见第 5.2 节）。给定一个奇异子平坦 S，奇异子平坦 S 的平行集为

$$F(S) := \bigcup \{F : F \text{ is a flat such that } F \supset S\}. \tag{6.1}$$

我们将 $\mathbb{R}^{\mathrm{rk}(G)}$ 到 X 的任意 (L, C)-拟等距嵌入称为一个 (L, C)-拟平坦。特别地，除非另有说明，拟平坦的维数总是假定为 $\mathbf{rk}(G)$。

引理 6.1. [KL97，定理 1.2。5][EF97，定理 1。1] 对于每个 $L \ge 1$ 和 $C \ge 0$，都存在$k \in \mathbb{N}$ 和 $R \ge 0$，使得若 F 一个 (L, C)-拟平坦，那么 F 包含在某个 R-邻域内，该邻域围绕一个

个由 k 个平坦组成的并集，其中 X。此外，如果 L 足够接近 *1*（“足够接近”的程度取决于 G 的根系类型），那么 $k = 1$。

证明。 请参见 [KL97，定理 1.2。5] 及其后的段落。 □

定义 6.2。 设 $A, B \subset X$。如果存在一个常数$R = R(A, B)$ 使得 $d^{\mathrm{Haus}}(\mathrm{Nbhd}_R(A) \cap \mathrm{Nbhd}_R(B)\ D) < +\infty$，则称 A 与 B 在集合 D 中粗交。在这种情况下，我们称 D 是 A 与 B的粗交。

请注意，粗交的概念仅在有限豪斯多夫距离意义下定义良好。因此我们使用术语“粗交”。

事实： 对称空间中两个平坦的粗交是一个凸多胞体，且可能无界；例如参见 [Esk98，附录 B，引理 B。1]。

设 γ_{pz} 是 X中的一条测地射线。回忆一下， $F(\gamma_{pz})$ 是 γ_{pz}的平行集，参见第 5.2 节。设

$$F* := \bigcap \{F : F \text{ is a flat in } F(\gamma_{pz})\}.$$

注意到， $F*$ 实际上是包含射线 γ_{pz}的测地线延拓的唯一极小奇异子平坦。这里，极小意味着不存在包含 γ_{pz}且维数严格更低的奇异子平坦。于是，对称子空间 $F(\gamma_{pz})$ 就是 $F(F*)$，即 $F*$的平行集。

引理 6.3。 设 q^*： $F(\gamma_{pz}) \to X$ 是一个 *L-*双*Lipschitz*嵌入，并设 $F*$ 是 $F(\gamma_{pz})$中所有平坦的交集。假设存在一个常数 C，使得对于 $F(\gamma_{pz})$中的任意平坦 F，都存在一个属于 X 的平坦 F'，使得

$$d_{\mathrm{Haus}}(q^*(F), F') \le C.$$

(1) 设 F_1和 F_2是满足 $F_1 \cap F_2 = F*$的两个平坦。于是， F_1'与F_2'的粗交（记为 $\mathcal{S}(F_1', F_2')$）是一个维数为 $\dim(F*)$的奇异子平坦。此外，如果 F_1 与 F_2 之间的夹角以下述意义与 *0* 保持有界距离：

$$\mathrm{Nbhd}_R(F_1) \cap \mathrm{Nbhd}_R(F_2) \subset \mathrm{Nbhd}_{3R}(F*),$$

对于任意 $R \ge 0$。于是可以选择 $\mathcal{S}$（F_1'， F_2'）使得

$$d_{\mathrm{Haus}}(\mathcal{S}(F_1', F_2'), q^*(F*)) < C_0,$$

其中常数 C_0 是统一的，且仅取决于对称空间 X 以及常数 C 和 L。

（*2*）设 F_1， F_2， F_3 是平坦，满足 $F_i \cap F_j = F*$，其中 $1 \le i \ne j \le 3$。那么，粗交$\mathcal{S}$（F_1'，F_2'）与 $\mathcal{S}$（F_1'， F_3'）平行。

证明。（1）设 D 是 F_1' 与 F_2'的粗交。设 ω 是一个非主超滤子，并令 (r_n) 为任意一个趋于无穷远的序列。选择基点序列 $(o_n) = (o)$，其中 $o \in F*$。映射 q^* 诱导出一个双Lipschitz嵌入，记为 q^{**}，它将渐近锥$Cone(F(\gamma_{pz})\ \omega,\ r_n,\ o_n))$嵌入渐近锥 $Cone(X,\ \omega,\ r_n,\ q*(o_n))$。并集 $F_1 \cup F_2$ 的渐近锥微分同胚于 $F_1 \cup F_2$。映射 q^{**} 将此集合映到 $F_1' \cup F_2'$的渐近锥。另一方面， $F_1' \cup F_2'$的渐近锥是沿着 D的渐近锥连接的两个平坦之并。双Lipschitz映射 q^{**} 将 $F*$ （更准确地说，$F*$ 的渐近锥）映到 D的渐近锥。因此， D 的渐近锥与 $F*$等距。由此可知，可以选择 $\mathcal{S}(F_1', F - 2')$，即 F_1'与 F_2'的粗交，使得 $\mathcal{S}(F_1', F_2')$ 是维数为 $\dim(F*)$ 的奇异子平坦。

对于第二个断言，令 $D_1 \subset F_1'$ 为 F_1' 和 F_2' 的粗交。由于 $q^*(F*)$ 位于 F_1' 和 F_2' 的 C 邻域内，我们可以选择奇异子平坦 D_1，使其位于 F_2' 的 $2C$ 邻域内。由于 q^* 是 L-双Lipschitz的， $q^*(\mathrm{Nbhd}_{4LC}(F_i)) \supset \mathrm{Nbhd}_{2C}(F_i')$。根据关于

平坦 F_1 和 F_2 之间夹角的假设，我们得到

$$q^*(\mathrm{Nbhd}_{4LC}(F*)) \supset \mathrm{Nbhd}_{2C}(F_1') \cap \mathrm{Nbhd}_{2C}(F_2') \supset D_1.$$

因此，奇异子平坦 D_1 位于 $q^*(F*)$ 的 $4L^2C$-邻域内。

(2) 令 $D_1 \subset F_1'$ 和 $D_2 \subset F_1'$ 分别为 F_1' 与 F_2' 的粗交，以及 F_1' 与 F_3' 的粗交。根据粗交的定义，存在 $R > 0$ 使得

$$d^{\mathrm{Haus}}(D_1, \mathrm{Nbhd}_R(F_1') \cap \mathrm{Nbhd}_R(F_2')) < +\infty,$$

and

$$d^{\mathrm{Haus}}(D_2, \mathrm{Nbhd}_R(F_1') \cap \mathrm{Nbhd}_R(F_3')) < +\infty.$$

存在 R' 使得

$$d^{\mathrm{Haus}}(\mathrm{Nbhd}_{R'}(q^*(F_1)) \cap \mathrm{Nbhd}_{R'}(q^*(F_2)), \mathrm{Nbhd}_R(F_1') \cap \mathrm{Nbhd}_R(F_2')) < +\infty,$$

and

$$d^{\mathrm{Haus}}(\mathrm{Nbhd}_{R'}(q^*(F_1)) \cap \mathrm{Nbhd}_{R'}(q^*(F_3)), \mathrm{Nbhd}_R(F_1') \cap \mathrm{Nbhd}_R(F_3')) < +\infty.$$

另一方面， $q^*(F*)$ 与 $\mathrm{Nbhd}_{R'}(q^*(F_1)) \cap \mathrm{Nbhd}_{R'}(q^*(F_2))$ 以及 $\mathrm{Nbhd}_{R'}(q^*(F_1)) \cap \mathrm{Nbhd}_{R'}(q^*(F_3))$ 的豪斯多夫距离均有限。因此， D_1 和 D_2 的豪斯多夫距离有限。由于 D_1 和 D_2 是维数相同的奇异子平坦，豪斯多夫距离有限意味着它们平行。□

在 下一个结果中，我们将使用6.中奇异子平坦的平行集这一概念。 1.

命题 6.4. 设 $q^* : F(\gamma_{pz}) \to X$ 是一个 L-双*Lipschitz* 嵌入，并设 $F*$ 是 $F(\gamma_{pz})$ 中所有平坦的交集。假设存在常数 C ，使得 $F(\gamma_{pz})$ 中任意平坦的像到 X 中的某个平坦的豪斯多夫距离至多为 C 。那么存在一个奇异子平坦 D，其维数与 $\dim(F*)$ 相同，并且 $q^*(F(\gamma_{pz}))$ 包含于 D 的平行集 $F(D)$ 的某个有界邻域内。

证明。 首先，令 Y 为一个全测地对称子空间，使得 $F(\gamma_{pz})$ 等距分裂为 $Y \times F*$。注意，在这一分裂中，我们将 $F*$ 与 $\{o\} \times F*$ 等同，其中 o 是 Y 中的一个固定点。

我们选取有限多个平坦 $\{l_1, \ldots, l_k\}$ 中的 Y 经过 o 的平坦，使得对任意点 $y \in Y$ 和任意包含 l o 及 y 的平坦 l_i，在 Y 中存在一个平坦 $l \times F*$，使得 $l_i \times F*$ 在 $F*$ 处相交，且它们的夹角按引理6.3所述的意义与 0 保持正距离。根据引理6.3，这两个平坦的像分别包含于两个与奇异子平坦 D 平行的平坦的有界邻域中。此外， D 与 $q^*(F*)$ 的豪斯多夫距离有界

因此， $q^*(F(\gamma_{pz}))$ 包含于 $F(D)$ 的一个有界邻域中。 □

7. 格的边界作用的局部半刚性

本节中，我们研究非紧型半单李群中高秩格在 G G 的射影边界上的作用，并证明主定理。这类作用的性质远优于一般非正曲率流形的基本群在边界球面上的作用，并且颇似负曲率流形。我们认为，这是因为它们具有共同的良好性质：拟测地线和拟平坦的性质良好，而且弱稳定流形与不稳定流形具有一致横截性。

我们得到如下局部稳定性结果，它是定理1.1的一个稍微更详细的版本：

定理 7.1。设 G 是一个没有紧因子的连通线性半单李群，Γ 是 G 中的一致格，Q 是 G 的一个抛物子群，且 $\rho_0 : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(G/Q)$ 是边界作用（即左乘作用）。那么存在 ρ_0 的一个邻域 $\mathcal{U}_0$，以及连续映射空间 G/Q 中 恒等映射的一个邻域V_0，使得：对于每个 $\rho \in \mathcal{U}_0$，都存在唯一的(ρ, ρ_0)-半共轭 $\phi_\rho \in V_0$。此外，当 ρ 趋近于 ρ_0 时，ϕ_ρ 一致收敛于恒等映射。

注 7.2. 我们不一定要求 G 是线性的，而只要求 G是无紧因子的半单群，且 $\Gamma < G$ 具有一个无挠正规子群 $\Gamma_0 \lhd \Gamma$，使得 Γ/Γ_0是有限生成的，并且 Γ_0 同构于与 G相关联的非紧型对称空间 X 的等距变换群 $\mathrm{Isom}(X)^0$ 中的一个格。不过，为了使表述更简洁，我们采用上述形式陈述。

定理 7.1中，ϕ_ρ 在 V_0 中的唯一性是引理 4.5的一个应用。本节的目标是证明，对所有接近 ρ_0的扰动，都存在半共轭 ϕ_ρ；也就是说，证明 ρ_0的局部半刚性。半共轭 φ_ρ 的构造将在第7.1 节完成。随后，我们将在第 7.2 节证明 φ_ρ 是连续的，并且当 ρ 趋近于 ρ_0时，它一致收敛于恒等映射。

初步约化： 现在我们将说明，如何在定理 7.1中总能将问题约化到以下情形：G 是一个连通的无中心半单李群，且没有紧因子；Γ是 G中的无挠一致格。

由于 G 是线性的，塞尔伯格引理蕴含存在一个正规无挠有限指数子群$\Gamma_0 \lhd \Gamma$。根据推论 4.7，只需证明作用 $\rho|_{\Gamma_0}$ 在 Γ_0 上是 C^0-局部半刚性的，并且证明与 恒等映射 足够接近的半共轭是唯一的。

设 $Z(G)$ 为 G的中心，且 $h : G \to G/Z(G)$。那么 Γ_0 同构于 $h(\Gamma_0)$，其中 $h(\Gamma_0)$ 是 $h(G)$ 中的无挠一致格。此外，$h(G)$ 是一个连通的半单群，具有平凡中心且没有紧因子。最后，$h(Q)$ 是 $h(G)$ 的一个抛物子群，并且 G/Q 与 $h(G)/h(Q)$ 同胚。

设置： 在本节中，我们将使用以下假设和记号。设G为一个中心平凡且无紧因子的连通半单李群。设 X 为与 G相联系的黎曼对称空间，即 $G = \mathrm{Isom}(X)^0$。设 $Q < G$ 为一个抛物子群。我们固定 G中的一个无挠一致格 Γ。

- 设 $\mathfrak{x} \in \partial_\infty X$ 为满足 $Q = G_{\mathfrak{x}}$的点。
- 固定一个基点 $p \in X$ 并令 $\gamma_{p\mathfrak{x}}$ 为 X 中渐近于 $\mathfrak{x}$的测地线。我们将 $F(\gamma_{p\mathfrak{x}})$ 的平行集记为（见第 5.2节）。
- 空间 $X_{G/Q} := G/M_Q$ 是带有 Q不变黎曼度量的韦伊室 G-面丛，见第 5.7节。回顾一下，$p : X_{G/Q} \to X$ 是一个以 X 为基、纤维同胚于 $K/M_Q \cong G/Q$ 的纤维丛。映射 $\Phi : X_{G/Q} \to X \times G/Q$ 是第 5.6节中引入的微分同胚。
- 作用 $\rho_0 : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(G/Q)$ 始终表示 Γ在 G/Q 上通过左乘给出的代数作用。于是 ρ_0 是一个标准作用，其关联数据为 $(X_{G/Q}, p, \Phi, \{\pi_x\}, \{g_x\}, \ell)$其中 $\ell \geq 1$。标准作用的定义见第 3.1 节；本例中关联数据的说明见注 3.8；此事实的证明见第 3.2.2 节。
- 设 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}$ 分别为 G/M_Q 中韦伊室流的中心稳定流形和中心不稳定流形，如第 5.9节所述。
- 如果 $\rho : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(G/P)$，那么 $\widehat{\rho} : \Gamma \to \mathrm{Homeo}(X \times G/Q)$ 就是诱导作用（定义见 3.4）。

7.1. 等变映射的构造。 构造分几个步骤进行。由于整个论证相当复杂，我们先在此概述一下。为简单起见，假设

抛物型子群 Q 是极小的。最终，我们希望构造一个拟平坦集，它是未扰动的中心不稳定叶与“扰动后的中心稳定叶”的交集。这样就得到了未扰动作用的中心叶状结构的一种扰动，该扰动由平坦集构成。接下来，我们希望这些平坦集实际上是拟平坦集。然后，我们可以运用 Kleiner Leeb 和 Eskin Farb 关于拟平坦集的研究，从而得到命题 7.10中对“扰动后的中心叶”的影踪，并据此定义一个 $\rho-\rho_0$ 边界上的等变映射，见命题 7.18。为此，我们首先在命题 7.3 （Bowden-Mann 引理）中得到“扰动后的中心叶状结构”的局部双 Lipschitz 控制。由此，我们进一步在命题 7.7中推出全局双 Lipschitz 控制。从动力学的角度看，这相当于 Anosov 流扰动的轨道等价，即结构稳定性。

现在我们开始构造。首先，我们将关于标准作用的推广引理应用于这样的情形：在 Furstenberg 边界上对一致格的标准作用进行扰动。

命题 7.3。 若 $\rho:\Gamma\to \mathrm{Homeo}(F)$ 充分接近 ρ_0，则存在连续映射$\sim f: X\times G/Q\to X_{G/Q}$，满足：

$\sim$ $\sim$ $\sim$

(1) $p(f(x,\xi))=x$ 且 $f(\gamma\cdot x,\rho(\gamma)\xi)=\widehat{\rho_0}(\gamma)f(x,\xi)$ *(2)* 对每个 $\xi\in G/Q$，映射 $\widetilde{f}(\cdot,\xi): X\to \widetilde{f}(X\times\{\xi\})$ 都是微分同胚。此外，对于任意的$\sim(x_0,\xi_0)\in X\times F$，$(\rho,y,\xi)\mapsto D_y f(y,\xi)$ 在 (ρ_0,x_0,ξ_0) 处关于三个变量均连续。*(3)* 对每个 $\epsilon>0$ 以及每个 $x\in X$，都存在 ρ_0 的一个邻域 $\mathcal{U}=\mathcal{U}(x,\epsilon)$，使得

$$\sup_{\rho\in\mathcal{U}}\left(\sup_{\xi\in G/Q} d_{G/Q}(\pi_x(\widetilde{f}(x,\xi)),\xi)\right)<\epsilon.$$

(4) 对每个 ϵ，$R>0$，都存在 ρ_0 的一个邻域 $\mathcal{U}=\mathcal{U}(\epsilon,\ R)$，使得：若 $\rho\in\mathcal{U}$，$(x,\ \xi)\in \sim X\times G/Q$ 且 $\eta:=\pi_x(f(x,\ \xi))\in G/Q$，则

$$\sup_{y\in B_R(x)} d_{F_y}\left(\widetilde{f}(y,\xi),(\mathrm{pr}_F\circ\Phi)^{-1}(\eta)\cap F_y\right)<\epsilon,$$

其中 d_{F_y} 是纤维 F_y 上的距离（由黎曼度量 g_y 诱导）.

(5) 我们考虑第 $X_{G/Q}$ 节中构造的 5.7 上的黎曼度量。对任意 $\epsilon>0$，都存在 ρ_0 的一个邻域 $\mathcal{U}=\mathcal{U}(\epsilon)$，使得

$$\sup_{\rho\in\mathcal{U}}\left(\sup_{(x,\xi)\in X\times F} d^{\mathrm{Gr}}_{\widetilde{f}(x,\xi)}\left(T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\widetilde{f}(X\times\xi),T_{\widetilde{f}(x,\xi)}(\mathrm{pr}_F\circ\Phi)^{-1}(\eta_x)\right)\right)<\epsilon,$$

where $\eta_x:=\pi_x(\widetilde{f}(x,\xi))$.

证明。这本质上是将命题 3.9 应用于 Γ 在 G/Q 上的标准作用 ρ_0。但要从命题 3.9 推导出这一结果，需要一些我们现在将要指出的观察。注意，映射 $\pi_x:\ F_x\to F$ 实际上是光滑的，并且每个纤维 F_x 在G/M_Q中都是全测地的。令 g_x 表示 F_x 上诱导的黎曼度量。若 $x\in X$ 且 $\gamma\in\Gamma$，则映射$\gamma_x:(F_x,\ g_x)\to(F_{\gamma x},\ g_{\gamma x})$ 是一个等距变换（因此不只是仿射的）。

光滑性 π_x 意味着命题3.9 第（4）部分中的赫尔德假设得到满足。由于作用 $\widehat{\rho_0}$ 在 G/M_Q上是等距变换，注意到应用第（4）部分时，我们可以作出以下假设：假设 x 位于 X/Γ的基本域内。此外， F也是紧致的。因此，第（4）部分结论中的 $\mathcal{U}$ 关于 ρ_0 的邻域可以选择为不依赖于 x 或 ξ。

最后，由于命题 3.9的第（5）部分适用，这是因为 $\widehat{\rho_0}$ 通过等距变换作用于 G/M_Q；参见第5.7节。我们还要指出，在命题 7.3的最后一个断言中，由于 $\rho_0(\Gamma)\backslash X_{G/Q}$ 是一个闭流形，因此对于 $X_{G/Q}$ 上任意一个来自 $\rho_0(\Gamma)\backslash X_{G/Q}$上的黎曼度量的提升度量，该断言仍然成立。□

在本节余下部分中， $f: X \times G/Q \to X_{G/Q}$ 始终表示在命题7.3中得到的映射。在下一个命题中，我们将控制 $X \times \{\xi\}$ 在 f下的像。但首先我们先给出一个定义。

定义 7.4。对于任意 $\xi, \eta \in G/Q$，我们定义

$$\mathcal{Q}_{\xi,\eta} := \widetilde{f}(X \times \{\xi\}) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta).$$

注意，对于某些 ξ 和 η 的取值，$\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 可能是空集。

注记 7.5。注意， f 取决于 $\rho: \Gamma \to \mathrm{Homeo}(G/P)$。因此 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta} \equiv \mathcal{Q}_{\xi,\eta}(\rho)$。但为简洁起见，本小节中我们省略 ρ。此外，若 $\rho = \rho_0$，则

$$\mathcal{Q}_{\xi,\eta}(\rho_0) = \widetilde{f}_{\rho_0}(X \times \xi) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta) = \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta).$$

因此，非正式地说，我们应将 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta} \equiv \mathcal{Q}_{\xi,\eta}(\rho)$ 视为“扰动中心”流形，其中扰动来自将作用 ρ_0 扰动到 ρ。

7.1.1. $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 包含在中心流形的邻域中 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)$。本小节的主要结果是命题 7.10，它表明每个非空的“扰动中心”流形 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 都包含在中心流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)$ 的一个有界邻域中。在此过程中，我们将证明“扰动中心流形” $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 的若干性质。

在下述引理中， d_v^{Gr} 是由 G/M_Q 上的黎曼度量诱导的、$T_v(G/M_Q)$ 的线性子空间之间的格拉斯曼距离。

引理 7.6。对于任意 $\epsilon > 0$，存在 ρ_0 的一个邻域 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon)$，使得：对于任意 $\rho \in \mathcal{U}$，若 $\xi, \eta \in G/Q$ 和 $x \in X$ 满足 $f(x,\xi) \in \mathcal{Q}_{\xi,\eta}$，则

$$d^{\mathrm{Gr}}_{\widetilde{f}(x,\xi)}\left(T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\,\mathcal{Q}_{\xi,\eta}, T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\left(\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_0) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\right)\right) < \epsilon$$

其中 $\zeta_0 = \pi_x(f(x,\xi))$。

证明。任取 $\epsilon' > 0$，并令 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon')$ 为命题 7.3 第（5）部分给出的 ρ_0 的邻域。设 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta} \neq \emptyset$，$x \in X$ 以及 $\zeta_0 = \pi_x(f(x,\xi))$。根据命题 7.3 第（5）部分，切空间 $T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\widetilde{f}(X \times \{\xi\})$ 和 $T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_0)$ 在格拉斯曼距离 $d^{\mathrm{Gr}}_{\widetilde{f}(x,\xi)}$ 下是 ϵ'-接近的。另一方面，对于每个 $f(x,\xi) \in \mathcal{Q}_{\xi,\eta}$，

$$T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\mathcal{Q}_{\xi,\eta} = T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\widetilde{f}(X \times \{\xi\}) \cap T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta).$$

由于 $f(x,\xi) \in \mathcal{Q}_{\xi,\eta}$，$f(x,\xi) \in \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$。因此 $f(x,\xi) \in \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\pi_x(f(x,\xi))) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta) = \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_0) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$。由于 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_0)$ 和 $f(X \times \{\xi\})$ 与 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 的夹角至少为 $\frac{\pi}{2} - \epsilon'$，存在 $\epsilon = \epsilon(\epsilon')$ 使得

$$\begin{aligned} &d^{\mathrm{Gr}}_{\widetilde{f}(x,\xi)}\left(T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\,\mathcal{Q}_{\xi,\eta}, T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\left(\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_0) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\right)\right) \\ &= d^{\mathrm{Gr}}_{\widetilde{f}(x,\xi)}\left(T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\widetilde{f}(X \times \xi) \cap T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta), T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_0) \cap T_{\widetilde{f}(x,\xi)}\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\right) < \epsilon. \end{aligned}$$

此外，当 ϵ' 趋于 0 时， ϵ 也趋于 0。于是，取充分小的 ϵ'，即可得到该引理。□

接下来，我们将证明 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 的每个连通分支都与平行集 $F(\gamma_p\mathfrak{x})$ 双Lipschitz微分同胚。

命题 7.7。 设 $L > 1$。则存在 ρ_0 的一个邻域 $\mathcal{U}$，使得：若 $\rho \in \mathcal{U}$ 和 $\xi, \eta \in G/Q$ 满足 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta} \neq \varnothing$，那么对于 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 的每个连通分支 $\mathcal{Q}$，都存在一个映射 $\alpha_{\xi,\eta}: F(\gamma_p\mathfrak{x}) \to \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$，它是映 *onto* $\mathcal{Q}$ 的 L-双*Lipschitz*微分同胚，其中 $\mathcal{Q}$ 上的距离是 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 上距离的限制。

证明。 固定 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 的连通分支 $\mathcal{Q}$。

令 $\xi = gQ \in G/Q$，并令 $\gamma_p\mathfrak{x}'$ 为渐近于 $\mathfrak{x}' = g\mathfrak{x}$ 的测地线。我们可先将 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\xi)$ 与 X 认同，再将 X 与 $F(\gamma_p\mathfrak{x}')(gN_Qg^{-1})$ 认同，从而将 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\xi)$ 与 $F(\gamma_p\mathfrak{x}')(gN_Qg^{-1})$ 认同。整体认同可视为中心不稳定流形上的全局乘积结构，其中以中心流形和强不稳定流形来表述。

中心不稳定叶 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 由一族对称子空间 $\{F(\gamma_p\mathfrak{x}): p \in X\}$ 所分叶。该族中的每个子空间都与点 $\mathcal{C}_q(\eta) \in \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta) \subset X_{G/Q}$ 的一个中心流形认同。沿强不稳定叶的投影将每个中心叶等距地映射到一个固定的中心叶。

考虑映射 $retr: \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta) \to F(\gamma_p\mathfrak{x}')$，它是沿强不稳定叶投影得到的。令 $q_{\xi,\eta} := retr|_{\mathcal{Q}}$，即 $retr$ 到 $\mathcal{Q} \subset \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 的限制。

根据引理 7.6，$\mathcal{Q}$ 的切空间与 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 的切空间相距不超过 ϵ，其中 $\zeta = \pi_x(f(x,\xi))$。因此，如果 ϵ 足够小，映射 $q_{\xi,\eta}$ 就是局部 L-双Lipschitz 的。也就是说，对于每个 $f(x,\xi) \in \mathcal{Q}$，都存在 $f(x,\xi)$ 的一个邻域，使得 $q_{\xi,\eta}$ 是 L-双Lipschitz 的。接着注意到，$q_{\xi,\eta}$ 是整体 L-Lipschitz 的。

现在我们断言，$q_{\xi,\eta}$ 是一个微分同胚。这是附录中引理 B.2 的一个应用。应用该引理之前，我们首先需要选定一个合适的叶状结构图。注意，中心不稳定流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 具有由中心流形和强不稳定流形构成的全局乘积结构。这在 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 上给出了两个相互正交的叶状结构，并且 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 与 $\mathbb{R}^{\dim(X)}$ 同胚。最后，$\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 中一个完备连通的 C^1 子流形，其切空间与中心分布一致地相近（见引理 7.6）。因此，我们可以应用引理 B.2，并证明 $q_{\xi,\eta}$ 是一个微分同胚。

接着，我们通过令 $\alpha_{\xi,\eta} := q_{\xi\,\eta}^{-1}$，来定义 $\alpha_{\xi,\eta}: F(\gamma_p\mathfrak{x}) \to \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$。因此，$\alpha_{\xi,\eta}$ 是一个微分同胚，其像为 $\mathcal{Q}$。由于 $\alpha_{\xi,\eta} = q_{\xi\,\eta}^{-1}$，是局部 L-Lipschitz 的，这意味着 $\alpha_{\xi,\eta}$ 是整体 L-Lipschitz 的。又由于 $q_{\xi,\eta} = \alpha_{\xi\,\eta}^{-1}$，也是整体 L-Lipschitz 的，这意味着 $\alpha_{\xi,\eta}$ 是整体 L-双Lipschitz 的。□

接下来，我们证明 $\mathcal{Q}$ 的每个连通分支都包含于某个“中心”叶 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)$ 的一致有界邻域内，其中 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$。

引理 7.8。 设 ρ 与 ρ_0 充分接近，并假设 $\xi, \eta \in G/Q$ 满足 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 非空。那么，对 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 的每个连通分支 $\mathcal{Q}$，都存在唯一的 $\zeta \in G/Q$，使得 $\mathcal{Q}$ 包含于 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)$的一个一致有界邻域内。

证明。 根据命题 7.7，每个连通分支 $\mathcal{Q}$ 的 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 是 $F(\gamma_p\mathfrak{x})$在 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$中的双利普希茨像，且与对称空间 X等距。根据命题 6.4，存在一个奇异子平坦 D，使得 $\mathcal{Q}$ 位于 D的平行集的有界邻域内。作为 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$的子集，$D$ 的平行集是某个 $\zeta \in G/Q$的中心流形。

关于 ζ 的唯一性，假设 $\zeta' \in G/Q$ 使得 $\mathcal{Q}$ 包含在 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta') \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 的某个有界邻域内。设 F 是 $F(\gamma_p z)$ 中的一个极大平坦，它映射到 $q_{\xi\,\eta}^{-1}(F)$，且与 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 中的一个平坦 F' 的豪斯多夫距离有限。另一方面，如果某个平坦包含在一个中心流形的有界邻域内，那么该平坦本身就包含在该中心流形内。因此，由于平坦 F' 包含在两个中心 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 和 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta') \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$ 的有界邻域内，这两个中心有非空交集，故二者重合。因此，$\zeta = \zeta'$。□

注意，我们不知道 $\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta}$ 是否连通。因此，先验地说，前一个引理并不能推出 $\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta}$ 包含在“中心”叶 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)$ 的某个一致有界邻域内。我们将在命题 7.10 中证明这一点。但首先，我们需要以下引理，它是命题 7.3 的推论。

引理 7.9。对于任意 $R,\ D>0$，存在一个邻域 $\mathcal{U}'$，使得：假设 $\rho\in\mathcal{U}'$ 且 $\xi,\ \eta\in G/Q$ 满足 $\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta}$ 非空。那么，若 $f(x,\ \xi)\in\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta}$ 且 $\zeta:=\pi_x(f(x,\ \xi))$，则有

$$\mathcal{Q}_{\xi,\eta}\cap B_R(\widetilde{f}(x,\xi))\subset \mathrm{Nbhd}_D\left(\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap B_R(\widetilde{f}(x,\xi))\right).$$

证明。由命题 7.3 第（4）部分，对于任意 $\epsilon,\ R>0$，存在一个邻域 $\mathcal{U}$，使得对于任意 $\rho\in\mathcal{U}$，

$$\sup_{y\in B_R(x)} d_{F_y}(\widetilde{f}(y,\xi),\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)\cap F_y)<\epsilon.$$

注意到 $B_R(f(x,\xi))\cap f(X\times\xi)\subset f(B_R(x)\ \xi)$。由此可得

$$\mathcal{Q}_{\xi,\eta}\cap B_R(\widetilde{f}(x,\xi))\subset \mathcal{Q}_{\xi,\eta}\cap\widetilde{f}(B_R(x),\xi)\subset \mathrm{Nbhd}_\epsilon(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)).$$

因此，

$$\mathcal{Q}_{\xi,\eta}\cap B_R(\widetilde{f}(x,\xi))\subset \mathrm{Nbhd}_\epsilon(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)\cap B_R(\widetilde{f}(x,\xi)).$$

现在，给定任意 $R,D>0$，只需选择 $\epsilon=D$，即可立即得到该引理。 □

在下一个命题中，关键思想是，$\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 的任意两个连通分支都会“并肩同行”，而且各自都包含在某个中心叶的一致邻域内，因此这两个中心叶必定相同。

命题 7.10. 设 ρ 充分接近 ρ_0，并设 $\xi,\eta\in G/Q$ 满足$\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 非空。则存在唯一的 $\zeta\in G/Q$，使得 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 包含在 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)$的一致有界邻域内。

证明. 设 $\mathcal{Q}_1$ 和 $\mathcal{Q}_2$ 是$\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$的两个连通分支。由引理 7.9，存在 D_0，使得它们各自都包含在某个中心叶的 $\mathcal{Q}_i$ -邻域内。注意，D_0仅取决于 D_0 的邻域 ρ_0 以及对称空间 X。我们要证明这两个中心叶重合。

令 $\zeta_1,\zeta_2\in G/Q$ 满足 $\mathcal{Q}_i$ 包含在 D_0-邻域 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_i)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$内，其中$i=1$取 2。假设对 $\zeta_1\neq\zeta_2$成立。令 $y\in\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$满足：$y$ 到$\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_1)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$以及 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_2)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$的距离均不超过$\frac{D_0}{2}$，但 $\mathrm{Nbhd}^{10D_0}(B_R(y)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_i)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta))$不包含$B_R(y)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_{3-i})\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$，其中 $i=1$取 2，且常数 R 来自引理 7.9。此外，$\mathcal{Q}_i$ 中的任意一个 L-双Lipschitz平坦与 $B_R(y)$的交集，都不包含在$B_R(y)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_{3-i})\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$的 $8D_0$-邻域内。

我们假设 ρ 与 ρ_0 充分接近，使得 $D<D_0$ 和 $R>20D_0$。根据引理 7.9，$\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta}\cap B_R(y)$ 包含在某个中心叶的 D 邻域内。但这与上一段矛盾。□

7.1.2. 命题 7.10 中的 ζ 与 η 无关。根据命题 7.10，每个 $\mathcal{Q}_{\xi、\ \eta}$ 都包含在中心流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)$ 的有界邻域内。在本小节中，我们将证明，给定 ξ，这个 ζ 与 η 无关（前提是 $\mathcal{Q}_{\xi、\ \eta}$ 非空）。这就是引理 7.17 的内容，也是本小节的主要结果。随后，我们将应用该引理证明命题 7.18，并在 G/Q 上构造一个 $(\rho,\ \rho_0)$ 等变映射。

不过，我们首先需要一些预备引理。回忆一下第 G/Q 节中 5.5 的对跖点概念。

引理 7.11。若 α，β 属于 G/Q，则同时与 α 和 β 对跖的元素集合在 G/Q 中是开稠密的。

证明。与 α 相对的点集对应于一个开稠密的布鲁哈特胞腔。对 β也同样成立。因此，所需集合是若干开稠密集的交集。□

引理 7.12。假设 $\zeta_1 \neq \zeta_2 \in G/Q$ 和 η_1，$\eta_2 \in G/Q$ 都与 ζ_1相对。那么存在一个序列(γ_n) 属于 Γ，使得

$$\lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\zeta_1 \neq \lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\zeta_2$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\eta_1 = \lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\eta_2.$$

证明。我们先证明将 Γ替换为 G时该命题成立。

我们回顾一下，G/Q 中的每个元素 η 都对应于一个渐近有基点的韦伊室 Q-面的等价类。因此，η 可视为该等价类中某个有基点的韦伊室 Q-面的测地边界，因而可作为 X的无穷远测地边界中的一个闭子集。

我们令 $F*$ 为包含 η_1 和 ζ_1 的测地边界处的极小奇异子平坦（即边界中包含 η_1 和 ζ_1 的最小维数奇异子平坦）。

令 $g \in G$ 为一个元素，其轴是 $F*$ 的平行集（这里，g的轴指$\{x \in X\colon\ d_X(x, g\cdot x) = \inf_{y\in X} d_X(y, g\cdot y)\}$）。必要时通过换成 g^{-1}，我们可以假设ζ_1 是 g的源点，而 η_1 是其汇点。在迭代作用下，g 收缩至 η_1 中与 ζ_1相对的元素所构成的（开稠密）集合。

特别地，在迭代作用下，η_2 收敛到 η_1。此外，在迭代作用下，G/Q 中收敛到 ζ_1 的元素只有 ζ_1 本身。因此，在 g的迭代作用下，ζ_2 收敛到一个不同于 ζ_1 的点。

为了得到关于 Γ的断言，我们用格中的元素逼近 g 的迭代。事实上，写作 $g^n = c_n\gamma_n$，其中 c_n 位于一个紧基本域中。取一个子序列后，我们可以假设元素 c_n 收敛到一个固定元素 c。因此，用γ_n 代替 g^n即可得到结论。□

通过拉回“扰动后的中心稳定”叶$\mathcal{Q}_{\xi,\,\eta}$，我们现在引入$X \times G/Q$上的叶状结构 $\mathcal{F}(\xi,\eta)$。接下来的两个引理将阐述这一点。不过，首先让我们定义 $\mathcal{F}(\xi,\eta)$。令

$$\mathcal{V}_0 := \{(\xi,\eta) \in G/Q \times G/Q : \mathcal{Q}_{\xi,\eta} \neq \varnothing\}.$$

定义 7.13。对于$(\xi,\ \eta) \in \mathcal{V}_0$，我们令

$$\mathcal{F}(\xi,\eta) := \widetilde{f}^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)) \cap (X \times \{\xi\}) = \widetilde{f}^{-1}(\mathcal{Q}_{\xi,\eta}) \cap (X \times \{\xi\}).$$

注意，每个 $\mathcal{F}(\xi,\eta)$都是一个紧致流形。此外，所有此类 $\mathcal{F}(\xi,\eta)$的不交并是 $X \times G/Q$。叶的集合可与一个开子集 $\mathcal{V}_0 \subset G/Q \times G/Q$等同。注意，$X_{G/Q}$的不稳定叶状结构与 $\widetilde{f}(X \times \{\xi\})$的交集，在 C^1 ~ ~流形 $f(X \times \{\xi\})$上诱导出一个叶状结构。将其通过 f拉回后，我们得到 $X \times \{\xi\}$ 上的一个叶状结构，其叶为

$$\{\mathcal{F}(\xi,\eta) : \eta \in G/Q, (\xi,\eta) \in \mathcal{V}_0\}.$$

~那么，对于任意 $\gamma \in \Gamma$，$\{\widehat{\rho}(\gamma)\mathcal{F}(\xi,\eta) :\ \eta \in G/Q, (\xi,\eta) \in \mathcal{V}_0\}$是 $X \times \{\rho(\gamma)\xi\}$的叶状结构，因为 f是$(\widehat{\rho}, \widehat{\rho}_0)$-等变的。

现在我们将利用引理$\mathcal{Q}_{\xi,\,\eta}$和 $\mathcal{F}$（$\xi,\ \eta$）证明其连续性。B.3。

引理 7.14。映射 $\mathcal{V}_0 \ni (\xi,\ \eta) \mapsto \mathcal{Q}_{\xi,\,\eta}$ 关于带基点的豪斯多夫拓扑是连续的。

证明。 η 中的连续性显而易见，因为对于任意固定的 ξ，不稳定叶会在$\sim f(X \times \{\xi\})$上生成连续叶状结构。为证明 ξ中的连续性，固定 $(\xi_0, \eta) \in \mathcal{U}$，并考虑 $\mathcal{U}$中收敛到 (ξ_0, η) 的序列$\widetilde{}(\xi_n, \eta)$。对于 $n \geq 0$，将引理 B.3 应用于 $M_n = f(X \times \{\xi_n\})$，并$N = \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)$。□

引理 7.15. 映射 $\mathcal{V}_0 \ni (\xi, \eta) \mapsto \mathcal{F}(\xi, \eta)$ 关于带基点的豪斯多夫拓扑是连续的。

证明. η中的连续性是显然的，因为 $\{\mathcal{F}(\xi, \eta) : \eta \in G/Q$ 使得 $\mathcal{F}(\xi, \eta) \neq \varnothing\}$是 $X \times \{\xi\}$的连续叶状结构。

为证明 ξ中的连续性，设 (ξ_n) 是一个收敛到 $\xi_0 \in G/Q$的序列。注意，由于 $\widetilde{f}$在 X上覆盖恒等映射，

$$\mathcal{F}(\xi, \eta) = p((\widetilde{f}(X \times \{\xi\}) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)) \times \{\xi\} = p(\mathcal{Q}_{\xi,\eta}) \times \{\xi\}\,.$$

由于 $\xi_n \to \xi_0$，引理 7.14 推出 $\mathcal{Q}_{\xi_n,\eta} \to \mathcal{Q}_{\xi_0,\eta}$ 在带基点的豪斯多夫拓扑中收敛。于是$p(\mathcal{Q}_{\xi_n,\eta}) \to p(\mathcal{Q}_{\xi_0,\eta})$ 在带基点的豪斯多夫拓扑中收敛。证明完毕。□

注 7.16. 我们指出，前两个引理并不能从关于光滑叶状结构的叶所构成的连续叶状结构之叶的连续性的一般性结论中推出。

事实上，Bonatti 和 Franks [BF04, 定理 1.1] 甚至给出了定义在 $\mathbb{R}^2$ 上的赫尔德连续分布 E'，其切于一族连续统 $(\mathscr{F}_s)_{s\in(0,1)}$，其中包含两两不同的叶状结构。接着，考虑定义在 $\mathbb{R}^3$ 上的赫尔德连续分布 E，它在每个 $\{t\} \times \mathbb{R}^2$ 上都包含一份 E' 的副本。现在我们可以选取一个不连续映射 $\sigma : \mathbb{R} \to (0, 1)$，并对每个 $t \in \mathbb{R}$ 考虑 $\{t\} \times \mathbb{R}^2$ 上的 Bonatti-Franks 叶状结构$\mathscr{F}_{\sigma(t)}$。现在，这些 $\mathbb{R}^2$ 的叶状结构之并甚至不构成一个$\mathbb{R}^3$的 C^0 叶状结构。特别地，经过点 $(t, 0, 0)$ 的叶序列 ℓ_t 未必收敛到经过 $(0, 0, 0)$ 的叶 ℓ_0。

现在我们可以证明本小节的关键引理了。在开始证明之前，我们指出，下面的论证是 [BM22命题 3 中论证的高秩类比。8]不过，这一论证要复杂得多，因为叶的维数更高，而且 ρ_0-作用不再是收敛群作用。

引理 7.17。设 ξ，η_1，$\eta_2 \in G/Q$ 满足$\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta_1}$ 且$\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta_2}$ 均非空。对于 $i \in \{1, 2\}$，令 $\zeta_i \in G/Q$ 为唯一一点（由命题*7.10*）使得 $\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta_i}$ 包含在 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_i) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_i)$的一致邻域中。则 $\zeta_1 = \zeta_2$。

证明。假设当 η_1 和 η_2 都与 ζ_1相反时，引理在特殊情形下成立。我们先由特殊情形推出 η_2 可能不与 ζ_1 相反时的引理。在这种情况下，注意到 $\{\eta : \mathcal{Q}_{\xi,\ \eta} \neq \varnothing\}$ 是一个开集。还要注意，根据 ζ_1的定义，η_1 总是与 ζ_1 相反。于是，由引理7.11，我们可以选取 η_3，使得 η_3 同时与 ζ_1 和 ζ_2 相反，并且$\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta_3} \neq \varnothing$。令 ζ_3 满足$\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta_3}$ 包含在 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_3) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_3)$的一致邻域中。然后，对 η_i 和 η_3应用特殊情形，得到 $\zeta_i = \zeta_3$，其中 $i \in \{1, 2\}$。因此，只需证明特殊情形。

现在设我们处于特殊情形，即 η_1，η_2 都与 ζ_1相对。于是根据引理 7.12，存在一个序列 (γ_n)，使得 $\rho_0(\gamma_n)\zeta_1$ 和 $\rho_0(\gamma_n)\zeta_2$ 收敛到 G/Q中的两个不同的点，而 $\rho_0(\gamma_n)\eta_1$ 和 $\rho_0(\gamma_n)\eta_2$ 收敛到同一个点。

我们引入以下记号：若 $\eta \in G/Q$ 使得 $\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta}$ 非空，则令 $\zeta_{\xi,\ \eta} \in G/Q$ 为满足以下条件的点：$\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta}$ 包含在 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_{\xi,\ \eta})$ 的一个一致邻域中。注意，$\zeta_{\xi,\ \eta}$ 由命题 7.10 良好定义，并且对于 $i = 1$，有 $\zeta_i = \zeta_{\xi,\ \eta_i}$，其中 ζ_i 如引理陈述所述。

由于 G/Q 是紧致的，经过取子序列后，不妨设 $\xi_0 := \lim_{n\to\infty} \rho(\gamma_n)\xi$存在。令 $\eta_0 := \lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\eta_1$。我们将通过证明 $X \times \{\xi_0\}$ 中有两个不同的叶属于 $f^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0))$，从而导出矛盾。

令 $x_0 \in X$ 为一个点，它包含在极小奇异子平坦中，该子平坦的测地边界包含 η_0 和 $\lim_n \rho_0(\gamma_n)\zeta_{\xi,\ \eta_1}$。令 C 为一致常数，使得每当 $\mathcal{Q}_{\xi',\ \eta'} \neq \emptyset$、$\mathcal{Q}_{\xi',\ \eta'}$ 包含在半径为 C 的邻域 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_{\xi',\ \eta'}) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta')$ 中时，该条件均成立。令 D 为以 x_0 为中心、半径为 $7C$ 的球。

断言。 存在一个序列 $(\eta_n)_{n\geq 3}$，满足 $\eta_n \in G/Q$，使得：

(1) $\widetilde{f}^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_n)) \cap (X \times \{\rho(\gamma_n)\xi\})$ 与 $D \times \{\rho(\gamma_n)\xi\}$ 有非空交集；*(2)* $\lim_{n\to\infty} \zeta_{\rho(\gamma_n)\xi,\ \eta_n}$ 与 $\lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\zeta_{\xi,\ \eta_1}$ 不同；*(3)* 序列 (η_n) 收敛到 $\eta_0 = \lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\eta_1$。

We w我将把这一断言的证明推迟到完成引理 7.1 的证明之后 7.

对于后者，我们用反证法。由引理 7.15，C^1 流形 $\mathcal{F}(\rho(\gamma_n)\xi, \eta_n) = \widetilde{f}^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_n)) \cap (X \times \{\rho(\gamma_n)\xi\})$ 收敛到 $\mathcal{F}(\xi_0, \eta_0) = \widetilde{f}^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0)) \cap (X \times \{\xi_0\})$。~我们注意到，由于 f 覆盖恒等映射 $\mathrm{id} : X \to X$，

$$\mathcal{F}(\xi_0, \eta_0) = \widetilde{f}^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0)) \cap (X \times \{\xi_0\}) = p\left(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0) \cap \widetilde{f}(X \times \{\xi_0\})\right) \times \{\xi_0\}\,.$$

~根据 γ_n 的选取以及引理 7.8，$\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0) \cap f(X \times \{\xi_0\})$ 包含于 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\zeta_{\xi,\eta_1})$ 的一个有界邻域内。换言之，$p\left(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0) \cap \widetilde{f}(X \times \{\xi_0\})\right)$ 包含于 $p(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\zeta_{\xi,\eta_1}))$ 的一个有界邻域内。

另一方面，$\{\rho(\gamma_n)\xi\}$ 位于 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_n)$~$\cap$~$\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_{\rho(\gamma_n)\xi,\eta_n})$ 的有界邻域内。令 $\Upsilon := \lim_{n\to\infty} \zeta_{\rho(\gamma_n)\xi,\eta_n}$。那么，极限流形的像包含于 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\Upsilon)$ 的有界邻域内。因此，流形 $\mathcal{F}(\xi_0, \eta_0) = \lim_n \mathcal{F}(\rho(\gamma_n)\xi, \eta_n)$ 包含于 $p(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\Upsilon)) \times \{\xi_0\}$ 的有界邻域内。所以，$p(\mathcal{F}(\xi_0, \eta_0))$ 包含于 $p(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\Upsilon))$ 的有界邻域内。由于 $\Upsilon \neq \lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\zeta_{\xi,\eta_1}$，且每个纤维 $F_x \cong G/Q$ 都是紧致的，这与命题 7.10 矛盾。□

命题证明。 对于每个 n，我们令 U_n 为 η_0 的邻域，其定义如下

$$U_n = \{\eta \in G/Q : \widetilde{f}^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)) \cap (D \times \{\rho(\gamma_n)\xi\}) \neq \varnothing\}.$$

回忆一下，(γ_n) 是上述引理证明中的一个序列（即 $\lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\zeta_1 \neq \lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\zeta_2$，而 $\lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\eta_1 = \lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma_n)\eta_2$）。我们令 σ_n 为连接 $\rho_0(\gamma_n)\eta_1$ 与 $\rho_0(\gamma_n)\eta_2$ 的最短测地线段（相对于 G/Q 上一个固定的黎曼度量）。由于 $\rho_0(\gamma_n)\eta_1$ 和 $\rho_0(\gamma_n)\eta_2$ 收敛到同一点 η_0，线段 σ_n 收敛到 η_0。因此，当 n 充分大时，σ_n 完全包含在 U_n 中。我们将选取属于 ~σ_n 的 η_n，从而满足条件 (3)。注意，$f|_{X\times\{\rho(\gamma_n)\xi\}}$ 是到其像上的一个同胚。因此，$\{\mathcal{F}(\rho(\gamma_n)\xi, \nu) = \widetilde{f}^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\nu)) \cap (X \times \{\rho(\gamma_n)\xi\}) : \nu \in \sigma_n\}$ 是 $X \times \{\rho(\gamma_n)\xi\}$ 的一族连续的 C^1 子流形。我们选取 $\eta_n \in \sigma_n$ 为第一个点（沿着从 $\rho_0(\gamma_n)\eta_1$ 到 $\rho_0(\gamma_n)\eta_2$ 的方向），使得 $\widetilde{f}^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_n)) \cap (X \times \{\rho(\gamma_n)\xi\})$ 与 $B_{5C}(x_0) \times \{\rho(\gamma_n)\xi\}$ 不相交。如果在 σ_n 中不存在这样的点，那么我们可以选取 $\eta_n = \rho_0(\gamma_n)\eta_2$。

注意，按照对 η_n 部分的这种选择，断言的 (1) 和 (3) 立即成立，这是因为我们对 D 的选择。对于断言的第二项，在 $\eta_n = \rho_0(\gamma_n)\eta_2$ 的情形下，结论显然。因此，我们只需验证以下情形：η_n 是 σ_n 中第一个满足 $\widetilde{f}^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_n)) \cap (X \times \{\rho(\gamma_n)\xi\})$ 与 $B_{5C}(x_0) \times \{\rho(\gamma_n)\xi\}$ 不相交的点。回顾一下，流形 $\widetilde{f}^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_n)) \cap (X \times \{\rho(\gamma_n)\xi\})$ 位于 $p(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_n) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_{\rho(\gamma_n)\xi,\eta_n})) \times \{\rho(\gamma_n)\xi\}$ 的一个 C-邻域内，而流形 $\widetilde{f}^{-1}(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\rho_0(\gamma_n)\eta_1)) \cap$

$(X\times\{\rho(\gamma_n)\xi\})$ 位于 $p(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\rho_0(\gamma_n)\eta_1)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\rho_0(\gamma_n)\zeta_{\xi,\eta_1}))\times\{\rho(\gamma_n)\xi\}$ 的一个 C-邻域内。根据豪斯多夫伪距离的三角不等式,

$$d^{\mathrm{Haus}}(p(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_n)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_{\rho(\gamma_n)\xi,\eta_n}))\cap D, p(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\rho_0(\gamma_n)\eta_1)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\rho_0(\gamma_n)\zeta_{\xi,\eta_1}))\cap D)\geq 3C,$$

对每个 n均如此。因此，它们的极限彼此不同。 $p(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_n)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta_{\xi,\eta_n}))$的极限是流形 $p(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\lim_n\zeta_{\rho(\gamma_n)\xi,\eta_n})$。 $p(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\rho_0(\gamma_n)\eta_1)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\rho_0(\gamma_n)\zeta_{\xi,\eta_1}))$的极限是流形 $p(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_0)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\lim_n\rho_0(\gamma_n)\zeta_{\xi,\eta_1}))$。由于这两个极限流形不同，$\lim_{n\to\infty}\rho_0(\gamma_n)\zeta_{\xi,\eta_1}\neq\lim_{n\to\infty}\rho_0(\gamma_n)\zeta_{\xi,\eta_1}$。这就完成了断言的证明。□

利用前一个引理，现在当 ρ充分接近 ρ_0时，我们可以定义一个连续的(ρ,ρ_0)-等变映射。

命题 7.18。 假设 ρ 充分接近 ρ_0。则存在一个 $(\rho,\ \rho_0)$-等变映射$\varphi_\rho:\ G/Q\to G/Q$。

证明。映射 φ_ρ 定义如下。对于每个 $\xi\in G/Q$，令 $\eta\in G/Q$ 使得 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$非空。根据命题 7.10，存在唯一的 $\zeta\in G/Q$ ，使得 $\mathcal{Q}_{\xi,\eta}$ 包含于 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)$ 的一个有界邻域中。于是定义 $\varphi_\rho(\xi)=\zeta$。根据引理 7.17，此映射定义良好，因为 ζ 不依赖于 η的选择。

由于 $\widetilde{f}$ 是 $(\widehat{\rho},\widehat{\rho}_0)$-等变的,

$$\mathcal{Q}_{\rho(\gamma)\xi,\rho_0(\gamma)\eta}=\widetilde{f}(X\times\{\rho(\gamma)\xi\})\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\rho_0(\gamma)\eta)=\widehat{\rho}_0(\gamma)(\widetilde{f}(X\times\{\xi\})\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta))=\widehat{\rho}_0(\gamma)\mathcal{Q}_{\xi,\eta}.$$

因此，如果 $\mathcal{Q}_{\xi,\ \eta}$ 包含于 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta)$ 的一个一致邻域中，那么 $\mathcal{Q}_{\rho(\gamma)\xi,\ \rho_0(\gamma)\eta}$ 包含于 $\widehat{\rho}_0(\gamma)(\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\zeta))=\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\rho_0(\gamma)\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\rho_0(\gamma)\zeta)$ 的一个一致邻域中。由此可得 $\varphi_\rho(\rho(\gamma)\xi)=\rho_0(\gamma)\varphi_\rho(\xi)$。□

7.2. 局部半刚性与 φ_ρ 的连续性。

定理 7.1 的证明。 令 $\varphi_{\rho|\Gamma_0}:\ G/Q\to G/Q$ 为由命题 7.18 得到的映射。我们将在引理 7.19 和引理 7.20 中证明 $\varphi_{\rho|\Gamma_0}$ 是连续的，并且当 恒等映射 趋于 $\rho\to\rho_0$ 时成立。

的满射性$\varphi_{\rho|\Gamma_0}$随后由 $\rho_0|_{\Gamma_0}$ 作用的极小性、$(\rho|_{\Gamma_0},\rho_0|_{\Gamma_0})$-等变性以及 $\varphi_{\rho|\Gamma_0}$ 的连续性得出。由于 $\rho_0|_{\Gamma_0}$ 是一致膨胀作用，现在可以应用引理 4.5 证明 $\varphi_{\rho|\Gamma_0}$ 半共轭的唯一性，条件是它足够接近恒等映射 且 ρ 足够接近 ρ_0。 □

接下来的两个引理中，为简化记号，我们假设格 Γ 是无挠的。

引理 7.19. 假设 ρ 与 ρ_0足够接近。那么映射φ_ρ 是连续的。

证明. 设 $\xi_0\in G/Q$。我们选取 $\eta\in G/Q$，使得 $(\xi_0,\eta)\in\mathcal{U}$，或者等价地，$\mathcal{Q}_{\xi_0,\ \eta}\neq\varnothing$。如果 (ξ_n) 是一个收敛到 ξ_0 的序列，那么当 n 充分大时，$(\xi_n,\eta)\in\mathcal{U}$ ，因为 $\mathcal{U}$ 是一个开集。由引理 7.14，序列 $\mathcal{Q}_{\xi_n,\ \eta}$ 在带基点的豪斯多夫拓扑下收敛到 $\mathcal{Q}_{\xi_0,\ \eta}$ 。设$x_0\in\mathcal{Q}_{\xi_0,\ \eta}$。那么对每个 $\epsilon>0$ 和每个 $R>0$，都存在 n_0，使得对每个 $n>n_0$,

$$d^{\mathrm{Haus}}(\mathcal{Q}_{\xi_n,\eta}\cap B(x_0,R),\mathcal{Q}_{\xi_0,\eta}\cap B(x_0,R))<\epsilon.$$

另一方面，根据命题 7.10，存在 $C>0$，使得 $\mathcal{Q}_{\xi_n,\eta}$ 包含在 C-邻域 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\varphi(\xi_n))$ 内，而 $\mathcal{Q}_{\xi_0,\ \eta}$ 包含在 C-邻域 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\varphi(\xi_0))$ 内。在 $\mathcal{Q}_{\xi_n,\eta}$ 和 $\mathcal{Q}_{\xi_0,\eta}$中，我们选取两个双Lipschitz平坦 BF_n 和 BF_0 ，它们与 $B(x_0,R)$ 的交集豪斯多夫接近。根据引理 6.1 和命题 7.7，当 ρ 足够接近 ρ_0 ，使得那里给出的常数 L 足够接近 1 时，双Lipschitz平坦 BF_n 与 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\varphi(\xi_n))$ 中的一个平坦 F_n 豪斯多夫接近，而双Lipschitz平坦 BF_0 与 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta)\cap\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\varphi(\xi_0))$ 中的一个平坦 F_0 豪斯多夫接近。因此，平坦 F_n 和 F_0 与球 $B(x_0,R)$ 的交集是 $(C+\epsilon)$-豪斯多夫接近的。在

换言之，对于足够大的 n，中心流形 $\mathcal{W}^{cu}(\eta) \cap \mathcal{W}^{cs}(\varphi(\xi_n))$ 和 $\mathcal{W}^{cu}(\eta) \cap \mathcal{W}^{cs}(\varphi(\xi_0))$ 中包含的平坦在大球上均匀接近。由于两种情形下的后向端点都是 η，因此中心流形在带基点的豪斯多夫拓扑下接近。因此，$\varphi(\xi_n)$ 收敛到 $\varphi(\xi_0)$。这表明了 φ 的连续性。□

引理 7.20. 当 $\rho \to \rho_0$ 时，映射 φ_ρ 一致趋于 恒等映射 。

~证明。我们将用下标 ρ 表示 f 和 $\mathcal{Q}$ 对作用 ρ 的依赖。特别地，~ ~我们将使用记号 f_ρ 和 $\mathcal{Q}_{\rho,\ \xi,\ \eta} = f_\rho(X \times \xi) \cap \mathcal{W}^{cu}(\eta)$。注意，$\mathcal{Q}_{\rho_0,\ \xi,\ \eta} = \mathcal{W}^{cs}(\xi) \cap \mathcal{W}^{cu}(\eta)$ 以及 φ_{ρ_0} = 恒等映射。于是，对于任意序列 $\rho_n \to \rho_0$，我们有 φ_{ρ_n} 逐点收敛到 φ_{ρ_0}。事实上，若 $\rho_n \to \rho_0$，则引理 B.3 蕴含 $\varphi_{\rho_n}(\xi) \to \varphi_{\rho_0}(\xi) = \xi$。我们将证明该收敛关于 ρ 一致，即对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon)$ 的一个邻域 ρ_0，使得对任意 $\rho \in U$，$\sup_{\xi \in G/Q} d(\varphi_\rho(\xi)\ \xi) < \epsilon$。

~我们令 D 为构造 f_ρ 中所选取的基本域，该构造见命题7.3 和命题3.9。令 x_0 为 D中的一点。令 $d_{G/Q}$ 为 G/Q上的任意黎曼度量。由于 G/Q是紧致的，在 G/Q 上选择何种黎曼度量都不会影响论证。

对于每个 $\xi \in G/Q$，选取 $\eta_{x_0,\ \xi} \in G/Q$ 使得以 x_0为基点的韦伊室 Q-面 $\mathcal{C}_{x_0}(\eta_{x_0,\ \xi})$ 与以 x_0为基点的韦伊室 Q-面 $\mathcal{C}_{x_0}(\xi)$ 相对。注意到 $\mathcal{W}^{cs}(\xi) \cap \mathcal{W}^{cu}(\eta_{x_0,\ \xi}) \neq \varnothing$。

断言。存在常数 ϵ'，$d' > 0$ 使得对于每个 $\epsilon < \epsilon'$，都存在 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon)$ 的一个邻域 ρ_0，使得：对于每个 $\rho \in \mathcal{U}$，集合 $\mathcal{Q}_{\rho,\ \xi,\ \eta_{x_0,\ \xi}} \neq \varnothing$，并且包含一个到 $p^{-1}(x_0) \cap \mathcal{W}^{cs}(\xi)$ 的距离至多为 $d'\epsilon$ 的点。此外，常数 ϵ'、d' 以及邻域 $\mathcal{U}$ 均独立于 x_0 和 ξ。

命题证明。设 $\eta := \eta_{x_0,\ \xi}$。令 $\overline{x_0} \in \mathcal{W}^{cs}(\xi) \cap \mathcal{W}^{cu}(\eta)$ 满足 $p(\overline{x_0}) = x_0$。令 $m = \dim(X)$ 且 $k = \dim(G/Q)$。取一个光滑的局部平凡化 $\Psi_{\overline{x_0}} : U_{\overline{x_0}} \to (-1, 1)^m \times (-1, 1)^k$，其中 $U_{\overline{x_0}}$是 $\overline{x_0}$的一个邻域。我们可以假设 $\Psi_{\overline{x_0}}(x_0) = 0^{m+k}$。

在这个局部平凡化中，$\mathcal{W}^{cs}(\xi)$ 和 $\mathcal{W}^{cu}(\eta)$ 分别是定义在 $(-1, 1)^m$ 上的两个光滑函数的图 G_1 和 G_2。此外，G_1 和 G_2 沿着中心流形横截相交，其维数为 $m - k$。令 $\pi_k : (-1, 1)^m \to (-1, 1)^k$ 为到前 k 个坐标的投影。于是我们可以选取一个光滑的保纤维坐标变换，使得

$$G_1 = \{(v, -\pi_k(v)) : v \in (-1, 1)^m\}$$

and

$$G_2 = \{(v, \pi_k(v)) : v \in (-1, 1)^m\}.$$

那么 $G_1 \cap G_2 = \{(0^k, w, 0^k) : w \in (-1, 1)^{m-k}\}$。

注意，对于任意足够小的 ϵ_1，都存在 ϵ_1' 使得

$$\mathrm{Nbhd}_{\epsilon_1}(G_1) \cap \mathrm{Nbhd}_{\epsilon_1}(G_2) \subset \mathrm{Nbhd}_{\epsilon_1'}(G_1 \cap G_2).$$

现在假设 G_3 是定义在 $(-1, 1)^m$ 上的连续函数的图，并假设对于某个 $\epsilon_2 > 0$，G_3 与 G_1 的距离为 ϵ_2。特别地，这意味着 $G_3 = \{(v, -\pi_k(v) + q(v)) : v \in (-1, 1)^m\}$，其中 $q : (-1, 1)^m \to (-1, 1)^k$ 是一个连续函数，满足 $\|q(v)\| < \epsilon_2$。我们断言，存在 $\delta < \epsilon_1$，使得只要 $\epsilon_2 < \delta$，那么 $G_3 \cap G_2 \neq \varnothing$，且 $G_3 \cap G_2$ 中包含一点，在此平凡化下，该点与 $\overline{x_0}$ 的像相距 ϵ_1'。

为证明这一断言，注意到 $G_3 \cap G_2 \neq \emptyset$ 当且仅当对于某个 $v \in (-1, 1)^m$，有 $q(v) = 2\pi_k(v)$。假设这一断言不成立。那么存在一个映射 $h : (-1, 1)^m \to S^{k-1}(1)$ 到单位球面 $S^{k-1}(1)$，其定义为

$$h(v) = \frac{-q(v) + 2\pi_k(v)}{\|-q(v) + 2\pi_k(v)\|}.$$

将 h 限制到子集 $S := S^{k-1}(4\epsilon_2)\times 0^{m-k} \subset (-1,1)^m$ 上，该子集与 S^{k-1} 同胚。当 ϵ_2 足够小时，$h|_S$ 很接近，因此与 $\frac{1}{4\epsilon_2}$-位似映射 $S^{k-1}(4\epsilon_2) \to S^{k-1}(1)$ 同伦。

因此， $h|_S$ 的度为 1。这不可能，因为 h 可延拓为 $\mathbb{R}^k$ 中 $4\epsilon_2$-球到 S^{k-1}的映射，因此其度必为 0。这说明 $G_3 \cap G_2 \neq \varnothing$。

此外，上述论证还进一步表明，实际上存在 $(w, 0^{m-k}) \in (-1,1)^m$，使得$\|w\| < 4\epsilon_2$，且 $q(w, 0) = 2w$。特别地，这意味着 $G_3 \cap G_2$ 中存在一点，其到 0^{m+k}的距离至多为 $4\epsilon_2$。

现在我们将说明上述讨论如何证明该断言。取 ρ的一个充分小的~邻域 $\mathcal{U}'$。对于 $\rho \in \mathcal{U}'$，令 $G_3 = \Psi_{\overline{x_0}}(f_\rho(X \times \xi))$。令 $\epsilon' := \delta$。给定任意 $\epsilon < \epsilon'$，令$\epsilon_2 := \epsilon$。然后选取 ρ_0的一个邻域 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\epsilon) \subset \mathcal{U}'$，使得 G_3 与 G_1 足够接近。于是，$\Psi_{\overline{x_0}}(\mathcal{Q}_{\rho,\xi,\eta_{x_0,\xi}} \cap U_{\overline{x_0}}) = G_3 \cap G_2$ 非空，且包含一点，该点到$0 = \Psi_{\overline{x_0}}(\overline{x_0})$的距离至多为 $4\epsilon_2$。因此，$\mathcal{Q}_{\rho,\xi,\eta_{x_0,\xi}}$ 非空，且包含一点，该点到 $\overline{x_0}$的距离至多为 $d'\epsilon_2$，其中 $\epsilon = \epsilon_2 < \delta(= \epsilon')$，而 d' 是依赖于图册 Ψ_{x_0}的常数。由此，断言的第一部分成立。但由于 G通过等距变换在 $X_{G/Q}$ 上传递地作用，我们可以将这个固定图表 $\Psi_{\overline{x_0}}$ 与适当的等距变换复合，并假设常数 ϵ'、d' 以及邻域 $\mathcal{U}$均与 x_0 和 ξ无关。□

现在我们用该断言证明引理。首先固定如上文断言中所述的 ϵ'、d' .

命题 7.3 第（3）部分意味着，对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个开邻域 $U = U(x_0, \xi)$，使得对 ρ_0 中的每个 $\rho \in U$，都有

$$\sup_{\xi \in G/Q} d_{G/Q}(\pi_{x_0}(\widetilde{f}_\rho(x_0, \xi)), \xi) < \epsilon.$$

~ ~选择足够小的 $\epsilon < \epsilon'$，使得 $d_{G/Q}(\pi_{x_0}(f_\rho(x_0, \xi)\ \xi) < \epsilon$ 意味着 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi)$ 和 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\pi_{x_0}(f(x_0, \xi)))$ 在一个球上足够接近。更准确地说，对于每个 $R > 0$ 和 $\epsilon > 0$，都存在 ρ_0 的一个邻域U，使得对每个 $\rho \in U$，

$$\sup_{\xi \in G/Q} d_{\mathrm{Haus}}\left(\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi) \cap p^{-1}(B_R(x_0)), \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}\left(\pi_{x_0}(\widetilde{f}_\rho(x_0, \xi))\right) \cap p^{-1}(B_R(x_0))\right) < \epsilon.$$

另一方面，命题 7.3 第（4）部分意味着，对于任意 ϵ，$R > 0$，都存在一个邻域U，使得对每个 ρ_0 中的 $\rho \in U$，

$$\sup_{y \in \overline{B_R(x_0)}} \sup_{\xi \in G/Q} d\left(\widetilde{f}_\rho(y, \xi), \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}\left(\pi_{x_0}(\widetilde{f}_\rho(x_0, \xi))\right) \cap p^{-1}(y)\right) < \epsilon.$$

因此，根据三角不等式，对于任意 ϵ、$R > 0$，存在 ρ_0 的一个邻域 U，使得对于任意 $\rho \in U$，

$$\sup_{y \in \overline{B_R(x_0)}} \sup_{\xi \in G/Q} d\left(\widetilde{f}_\rho(y, \xi), \mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi) \cap p^{-1}(y)\right) < 2\epsilon < 2\epsilon'. \tag{7.1}$$

~由此可知，$f_\rho(\overline{B_R(x_0)}\ \xi) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_{x_0,}\ \xi)$ 包含于 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\xi) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_{x_0,}\ \xi)$ 的一个 2ϵ-邻域中。~另一方面，根据命题 7.10，$f_\rho(X \times \{\xi\}) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_{x_0,}\ \xi)$ 包含于 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\varphi_\rho(\xi)) \cap \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_{x_0,}\ \xi)$ 的一个 C-邻域中，其中，当 ρ 处于 ρ_0 的一个充分小的邻域内时，C 与 ρ 无关。

我们固定 $R > 4C$ 和 $\epsilon < \epsilon'$。令 U 为式（7.1）中所述的 ρ_0 的邻域。必要时进一步缩小 U，我们可以假设命题 7.7 中的 L 足够接近 1。我们将 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_{x_0,\xi})$ 与对称空间 X 等同起来。所有所考虑的集合和点都是 $\mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_{x_0,\xi})$ 的子集和点。因此，它们也可以视为 X 的子集和点。根据上面的断言，存在 $x_0' \in \mathcal{Q}_{\rho,\xi,\eta_{x_0,\xi}}$，其与 x_0 的距离至多为 $d'\epsilon$。因此，x_0 位于中心流形 $\mathcal{W}^{\mathrm{cs}}(\varphi_\rho(\xi))$ $\cap\, \mathcal{W}^{\mathrm{cu}}(\eta_{x_0,\xi})$ 的一个 $(C + d'\epsilon)$-邻域内。

我们将从 x_0 出发、沿韦伊室 Q-面ξ 的中心方向的测地射线记为 $\gamma_{x_0,\xi}$，其基点为 x_0。令 $y_R \in \gamma_{x_0,\xi}$ 为距 x_0 $\frac{R}{2}$ 的一个点。令 $z_R \in \mathcal{Q}_{\rho,\xi,\eta_{x_0,\xi}}$ 为距 y_R 至多 $d'\epsilon$ 的点。令 $BF \subset \mathcal{Q}_{\rho,\xi,\eta_{x_0,\xi}}$ 为包含 z_R 的一个 L- 双 Lipschitz 平坦。令 F 为 X 中唯一一个与 BF 的豪斯多夫距离至多为 C 的平坦，参见引理 6.1。平坦 F 与 $\eta_{x_0,\xi}$ 和 $\varphi_\rho(\xi)$ 渐近，后两者是相对的对向韦伊室 Q-面。

设 $w_R \in F$ 是距离 z_R 至多为 C 的一点。回想一下，$x_0' \in \mathcal{Q}_{\rho,\xi,\eta_{x_0,\xi}}$ 与 x_0 的距离至多为 $d'\epsilon$。设 $x_0'' \in F$ 是距离 x_0' 至多为 C 的一点。我们将分别以 x_0 和 x_0'' 为基点的韦伊室 Q-面 $\eta_{x_0,\xi}$ 沿中心方向的测地射线记为 $\gamma_{x_0,\eta_{x_0,\xi}}$ 和 $\gamma_{x_0'',\eta_{x_0,\xi}}$。注意，射线 $\gamma_{x_0,\eta_{x_0,\xi}}$ 与 $\gamma_{x_0'',\eta_{x_0,\xi}}$ 的豪斯多夫距离至多为 $C + d'\epsilon$。设 $\gamma_{w_R,\eta_{x_0,\xi}}$ 是从 w_R 出发、沿韦伊室 Q-面$\eta_{x_0,\xi}$ 的中心方向的测地射线。两条测地射线 $\gamma_{y_R,\eta_{x_0,\xi}}$ 和 $\gamma_{w_R,\eta_{x_0,\xi}}$ 豪斯多夫接近（$C + d'\epsilon$）。由此可知，在平坦 F 中，两条平行测地射线 $\gamma_{w_R,\eta_{x_0,\xi}}$ 和 $\gamma_{x_0'',\eta_{x_0,\xi}}$ 的距离至多为 $2(C + d'\epsilon)$。因此，测地线段 $[x_0'', w_R]$ 包含于从 x_0'' 出发、沿 $\varphi_\rho(\xi)$ 的中心方向的测地射线的 $2(C + d'\epsilon)$-邻域内。因此，以 x_0 为基点的韦伊室Q-面 ξ 与 $\varphi_\rho(\xi)$ 同半径为 $\frac{R}{3}$ 的球的交集，彼此豪斯多夫接近，误差至多为 $4(C + d'\epsilon)$。注意，R 与 ξ 无关。由于 $R > 4C$ 是任意的，当 ρ_0 的邻域 U 进一步缩小时，我们可以令 $R \to \infty$。因此，当 $\rho \to \rho_0$ 时，半共轭 φ_ρ 一致收敛到 $\varphi_{\rho_0} =$ 恒等映射。□

8. 应用　　主定理：可微与 Lipschitz 局部刚性

本节将简要介绍我们的主要结果在高秩一致格射影作用的局部刚性中的应用，分别讨论 Lipschitz 拓扑和 C^1-拓扑。这得出了 Kanai [Kan96] 和 Katok-Spatzier [KS97] 关于 C^1-拓扑的著名结果，以及 Kapovich-Kim-Lee [KKL22] 近期关于 Lipschitz 拓扑的结果。这些应用由定理 7.1 以及以下事实推出：ρ_0 在 Γ 上通过左乘定义的作用 G/Q 是一致膨胀作用。

我们先证明推论 1.2，并在此重述引言中的表述。该推论恢复了 [KKL22] 关于标准作用的 Lipschitz 邻域的结果。

推论 1.2。设 $\Gamma < G$ 是连通线性半单李群 G 中的一致格，该李群具有高秩且无紧因子。设 Q 是 G的一个抛物子群，并设 ρ_0 是 Γ 在 G/Q 上的左平移作用。则存在 U 的一个 ρ_0 *Lipschitz* 拓扑邻域，使得其中每个 $\rho \in U$ 都与 C^0共轭，且共轭映射属于 ρ_0。

证明。根据定理 7.1，存在 U 的一个邻域 ρ_0，使得对每个 $\rho \in U$，都存在一个半共轭 φ_ρ。命题 4.8 表明 φ_ρ 是一个共轭。□

如果将范围限制在 C^1 标准作用的邻域内，我们便得到以下推论。Katok 和 Spatzier [KS97，定理 17]，以及 Kanai 在附加假设下[Kan96]证明了这一推论。关于秩1半单李群，也曾有人猜想存在类似的结论，但这一问题仍未解决。

推论 1.3。设 $\Gamma < G$ 是连通线性半单李群 G 中的一致格，该群具有高秩且没有紧因子。设 Q 是 G的一个抛物子群，并设 ρ_0 为 Γ 在 G/Q 上的左平移作用。则存在 U 的一个邻域 ρ_0，其中包含在 ρ_0 的 C^1-拓扑下接近 $\rho \in U$ 的光滑作用，并且每个 C^∞都与 ρ_0共轭。

证明。根据定理 7.1，存在这样的邻域 U，使得 ρ_0 中的每个 $\rho \in U$ 都与 ρ_0半共轭。我们断言，这些半共轭映射实际上都是共轭。事实上，这可直接由命题 4.8得到。

现在应用 [GS18定理 1。2] 来 C^0 共轭，从而得出这些共轭是C^∞。□

9. 测地边界上的作用

在秩一对称空间中，测地边界与富斯滕贝格边界重合；而在高秩情形下，情况则有所不同。高秩对称空间的测地边界 X与球面微分同胚 $S^{\dim(X)-1}$，其维数也始终严格大于任何富斯滕贝格边界的维数。我们的定理 1.1 表明，富斯滕贝格边界上的标准作用具有局部半刚性。然而，我们现在证明定理 1.4 ，该定理表明，测地边界上的标准作用不具有局部半刚性。首先回顾一下该定理的陈述。

定理 1.4。 设 Γ 是非紧型高秩对称空间的一个格， X不一定是均匀格。那么， Γ 在 $\partial_\infty X$ 上的标准作用，在任意 C^k作用中都不是局部半刚性的 $k \in [0, \infty]$。

在开始构造那些不与标准作用半共轭的扰动作用之前，我们先说明高秩对称空间的测地边界结构。

X 的测地边界 $\partial_\infty X$ 具有球面建筑的结构。它是由维数为 $\mathrm{rk}(X) - 1$ 的闭魏尔室单形组成的，其中 $\mathrm{rk}(X)$ 是该对称空间的秩。魏尔室单形的集合可以与 Furstenberg 边界 G/P等同，其中 G 是与 X 相关联的半单李群，而 P 是 G的极小抛物子群。 $\partial_\infty X$ 上具有视觉拓扑和 Tits 度量。就 Tits 度量而言，所有魏尔室单形都是等距的。我们固定一个模型韦伊尔室 W。于是存在一个关于视觉拓扑连续的映射 $\phi\colon \partial_\infty X \to W$，使得 ϕ 在每个魏尔室单形上都是关于 Tits 度量的等距变换。如果将 W 与 $\partial_\infty X$ 中的一个魏尔室等同，并将$\partial_\infty X = \cup_{g\in G} gW$等同，那么映射 ϕ 就等同于利用 G的元素将 $\partial_\infty X$ 中的点平移到 W。事实上， G 传递地作用在魏尔室上，其稳定子为 P，而 P 自身在 W上的作用是恒等映射。

在 G/P 上，我们令 μ 为哈尔测度。 G 在 G/P 上的作用保留 μ 的测度类。因此，我们得到如下光滑拉东-尼科迪姆导数余循环 $c\colon\ G \times G/P \to \mathbb{R}$，定义为

$$c(g, x) = \frac{dg_*\mu}{d\mu}(x).$$

由于 G 在 G/P 上不保留概率测度，这个余循环并非平凡。另请注意，对于每个 $\alpha \in [0, +\infty)$， c^α 也是一个光滑余循环。

扰动作用的构造。 我们构造具有以下性质的新 G-作用：

(1) 每个 $g \in G$ 都通过同胚（分别为 C^k-微分同胚）将每个闭Weyl室单形映射到一个闭Weyl室单形；(2) 在 G/P 上的诱导作用是 G 在 G/P 上的标准作用 ρ_0。

因此，我们只需定义 G 如何作用于模型Weyl室单形 W。为此，我们先选取一个中心 $w \in \mathrm{int}(W)$，并取一个连续同胚 $\tau\colon W \to \mathbb{R}^{\mathrm{rk}(X)-1} \cup \partial_\infty \mathbb{R}^{\mathrm{rk}(X)-1}$，使得 $\tau(w) = 0$。对于每个 $\delta \neq 0$，令 $D_\delta\colon \mathbb{R}^{\mathrm{rk}(X)-1} \to \mathbb{R}^{\mathrm{rk}(X)-1}$ 为倍数为 δ 的线性伸缩。显然， D_δ 可延拓为 $\mathbb{R}^{\mathrm{rk}(X)-1} \cup \partial_\infty \mathbb{R}^{\mathrm{rk}(X)-1}$ 上的同胚，并逐点固定 $\partial_\infty \mathbb{R}^{\mathrm{rk}(X)-1}$。通过 τ 拉回，即映射 $\tau^* D_\delta = \tau^{-1} \circ D_\delta \circ \tau$，我们得到 W 上的一个同胚，它逐点固定 w 和 ∂W。由于 ∂W 上的点保持不动， $\tau^* D_\delta$ 可延拓为一个同胚，仍记为 $\tau^* D_\delta$，从 $W \cup \partial W$ 映到自身，并固定 ∂W 和 w 中的每个点。

现在令 $g \in G$ 和 $\mathcal{C} \subset \partial_\infty X$ 为一个韦伊室。我们定义同胚 $\kappa_g^\alpha\colon \mathcal{C} \to g\mathcal{C}$，使得

$$\phi \circ \kappa_g^\alpha = (\tau^* D_{c(g,\mathcal{C})^\alpha}) \circ \phi,$$

其中这里的 $\mathcal{C}$ 被视为 G/P的一个元素。换言之，从 $\mathcal{C}$ 到 $g\mathcal{C}$ 的 κ_g^α，就是通过模型映射 ϕ对 $\tau^* D_{c(g,\mathcal{C})^\alpha}$ 进行拉回。

具体而言，对于 $g \in G$，映射 κ_g^α：$\partial_\infty X \to \partial_\infty X$ 定义如下：若 $x \in hW$ 对于某个 $h \in G$，则

$$\kappa_g^\alpha(x) = gh \cdot (\tau^* D_{c(g,hW)^\alpha}(h^{-1} \cdot x)) = gh \cdot (\tau^* D_{c(g,hW)^\alpha}(\phi(x))).$$

要将 κ_g^α 扩展到 $\partial_\infty X$的全部范围，请注意，κ_g^α 在魏尔室面上与标准作用一致。事实上，映射 $\tau^* D_{c(g,hW)^\alpha}$在魏尔室面上是恒等映射。这一点很重要，因为余循环 $c(g, hW)$在面星形邻域上不是常数。由此很容易得出，κ_g^α是一个同胚。

对于任意固定的 $k \in [0, \infty]$，我们注意到，若恰当选择 τ，映射 $\tau^* D_\delta$ 甚至是 C^k，并且在 ∂W 上与标准作用的差异至多为 k阶。因此，作用 $g \mapsto \kappa_g^\alpha$ 也具有 C^k的性质。

注 9.1. 只要这些流在韦伊室面上是恒等映射，我们就可以使用模型韦伊尔室上除 D_δ 以外的其他流来定义 G 在 G/P 上的作用。我们猜想，这类流可能会产生更多的半共轭类。

定理 1.4 的证明。 固定 $k \in [0, \infty]$。上文构造的映射 ρ_α： $g \mapsto \kappa_g^\alpha \in$ 微分同胚$^k(\partial_\infty X)$ 定义了 G 在 $\partial_\infty X$ 上通过 C^k- 微分同胚的作用。此外，当 α 从 0 变化到 $+\infty$ 时，我们得到标准作用的连续变形。 Γ的作用只是将 G-作用限制到 Γ上。

我们证明，对于 $0 \neq \alpha$，作用 ρ_α 并非与 ρ_0 半共轭。反设存在一个连续满射 φ： $\partial_\infty X \to \partial_\infty X$ ，使得$\rho_0 \circ \varphi = \varphi \circ \rho_\alpha$。我们首先需要以下引理。

引理 9.2. 设 $\mathcal{C}$ 是一个韦伊室，且存在 $\gamma \in \Gamma$ 稳定 $\mathcal{C}$，满足 $c(\gamma, C) \neq 1$。那么 $\phi(\varphi(\mathcal{C})) = \{\phi(\varphi(c))\}$，其中 c 是 $\mathcal{C}$的中心。

证明。 设 $c \in \mathcal{C}$是中心，即满足 $\phi(c) = w \in W$的点。对所有 $\alpha \in [0, \infty)$，由构造可知，$\rho_\alpha(\gamma)$ 稳定 $\mathcal{C}$，因为它在 G/P 上的商作用与 ρ_0相同。此外，c 和$\partial\mathcal{C}$ 均被 $\rho_\alpha(\gamma)$ 和 $\rho_0(\gamma)$ 逐点固定。因此，对$n \in \mathbb{Z}$，同样的结论也适用于 $\rho_\alpha(\gamma^n)$。

对于任意其他点 $x \in$，属于$\mathcal{C}$的内部，交换 γ 和 γ^{-1}后（如有必要），我们有 $\lim_{n\to\infty} \rho_\alpha(\gamma^n)(x) = c$。因此，由连续性可得 $\varphi(c) = \lim_{n\to\infty} \varphi(\rho_\alpha(\gamma^n)x) = \lim_{n\to\infty} \rho_0(\gamma^n)\varphi(x)$。由此可得，

$$\phi \circ \varphi(c) = \lim_{n\to\infty} \phi \circ \rho_0(\gamma^n)\varphi(x) = \phi \circ \varphi(x),$$

对每个 $x \in \text{int}(\mathcal{C})$。由 $\phi \circ \varphi$ 的连续性，$\phi(\varphi(\mathcal{C})) = \{\phi(\varphi(c))\}$。 □

我们继续证明定理 1.4。设 $\mathcal{C}$ 是引理 9.2 中的一个韦伊室。这样的 $\mathcal{C}$ 及其对应的 γ 总是存在，这由 Prasad 和 Raghunathan 的工作 [PR72，定理 2。8]。于是，对每个$\delta \in \Gamma$， $\delta \cdot \mathcal{C}$ 也满足引理 9.2 的假设。由 Γ 对 G/P 的作用具有极小性，引理 9.2 对每个韦伊室都成立。

设 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是两个相邻韦伊室， c_1 和 c_2 是它们的中心。我们有 $\phi(\varphi(\mathcal{C}_1)) = \{\phi(\varphi(c_1))\}$ 以及 $\phi(\varphi(\mathcal{C}_2)) = \{\phi(\varphi(c_2))\}$。由于 $\varphi(\mathcal{C}_1)$ 和 $\varphi(\mathcal{C}_2)$ 的交集非空，点 $\phi(\varphi(c_1))$ 与 $\phi(\varphi(c_2))$ 重合。

注意，对于任意一对韦伊室，都存在一条从一个韦伊室到另一个韦伊室的链（廊道），使得链中任意两个相邻的室都相邻。由此可知，存在 $z \in W$，使得对于每个韦伊室 $\mathcal{C}$， $\phi(\varphi(\mathcal{C})) = \{z\}$。由于 φ 是满射，我们得到 $\phi(\partial_\infty X) = \phi(\cup_{\mathcal{C}}\varphi(\mathcal{C})) = \{z\}$，这就产生了矛盾。因此，作用 ρ_α 不半共轭于 ρ_0。 □

附录 A. 重心与估计

在本节余下部分，固定一个紧致连通的 C^k 流形 F，其中 $k \geq 3$。我们将研究当沿着一个参数化族改变 F 上的测度和黎曼度量时， F 上的重心映射如何变化。

A.1. 微分几何中的两个引理。 本节旨在建立两个基本引理，以便在下一节中用于估计重心映射的导数。本节中，假设 F 配备了黎曼度量 g，其对应的范数为 $\|\cdot\|$。我们将 ∇记为 F 上的黎曼联络，将 D 记为协变导数算子；也就是说，若 $z \in F$和 X、Y是 F上的光滑向量场，则 $D_z Y(X) = (\nabla_X Y)(z)$。此外，若 $f\colon F \to \mathbb{R}$ 是光滑函数，则 ∇f 是与 1-形式 Df对偶的向量场，即对任意$v \in T_z F$， $g(\nabla_z f, v) = D_z f(v)$。

引理 A.1. 假设 F 的截面曲率在 $a, b \geq 0$ 上由 $-a^2 \leq \kappa_F \leq b^2$ 控制。对于任意点 $z \in B(x_0, \frac{\pi}{2b})$，有

$$D_{x=x_0} d(x,z) \otimes \nabla_{x=x_0} d(x,z) + d(x_0,z) D_{x=x_0} \nabla_x d(x,z) = I + T,$$

其中 I 是恒等映射， T 是一个 $(1,1)$-张量，且 $\|T\| \leq$最大 $\left\{\frac{a^2}{3}, \frac{b^2}{2}\right\} d(x_0,z)^2$。

证明。 $(1,1)$-形式 $D_{x=x_0} d(x,z) \otimes \nabla_{x=x_0} d(x,z)$ 的范数至多为 1，因为其中一项是距离函数的梯度，另一项是其对偶。它恰在 x_0 处背离 z 的径向方向上取值 1，并且在正交子空间上为零。

由于点 z 属于以 x_0 为中心的凸球。因此，球面 $S(z, d(x_0,z))$ 在点 x_0 处的第二基本形式 $D_{x=x_0} \nabla_x d(x,z)$ 是半正定的，并且仅在径向方向 $\nabla_{x=x_0} d(x,z)$ 上为零。

事实上，$(1,1)$-张量 $d(x_0,z) D_{x=x_0} \nabla_x d(x,z)$ 在径向方向上为零，而在切向方向上为 $d(x_0,z) \cdot II(x_0)$，其中 $II(x_0)\colon T_{x_0} S(z, d(x_0,z)) \to T_{x_0} S(z, d(x_0,z))$ 是球面 $S(z, d(x_0,z))$ 在点 x_0 处的第二基本形式。

若截面曲率的上界为 b^2 对于 $b \geq 0$，那么根据比较几何（[Pet06，定理 27]），我们可以估计点 $II(y(t))$ 处 $S(z,t)$ 的第二基本形式 $y(t)$如下：

$$a \coth(at) I \geq II(y(t)) \geq b \cot(bt) I.$$

其中，不等式是指正定型意义下的比较，并且 $II(y(t))$ 对于 $t < \frac{\pi}{2b}$ 是正定的。我们有如下展开式

$$bt \cot(bt) = 1 - b^2 t^2/3 + O((bt)^4) \quad \text{and} \quad at \coth(at) = 1 + a^2 t^2/3 + O((at)^4).$$

此外，对于所有 $t > 0$, $at \coth(at) - 1 < \frac{a^2}{3} t^2$，以及所有 $0 < t < \frac{\pi}{2b}$，都有 $bt \cot(bt) - 1 > -\frac{b^2}{2} t^2$。取 $t = d(x_0,z)$，于是得到如下展开式，

$$d(x_0,z) \cdot II(x_0) = I + T'$$

其中$\|T'\| \leq$最大 $\left\{\frac{b^2}{2}, \frac{a^2}{3}\right\} d(x_0,z)^2$。结合这两项即可证明该引理。 □

如果 $x, z \in F$可由唯一的最短测地线连接，我们记 $\|_z^x\colon T_z F \to T_x F$沿该测地线的平行移动。当 $z \in B(x, \frac{\pi}{2b})$ 时，这一结论适用，其中 b 是 F的截面曲率上界。

引理 A.2. 假设 F 的截面曲率由 $-a^2 \leq \kappa_F \leq b^2$ 界定，其中 $a, b \geq 0$。对于任意点 $x_0 \in B(z_0, \frac{\pi}{2b})$，

$$D_{z=z_0} d(x_0,z) \otimes \|_{x_0}^{z_0} \nabla_{x=x_0} d(x,z_0) + d(x_0,z_0) \|_{x_0}^{z_0} D_{z=z_0} \nabla_{x=x_0} d(x,z) = -(I+S),$$

其中 S 是一个 $(1,1)$ 张量，满足 $||S|| \leq 2$最大值 $\{a^2, b^2\}\, d(x_0, z_0)^2$。

证明。 我们注意到，如果 $d(x,z) < \pi/2b$，那么

$$\nabla_x d(x,z) = -\|_z^x \nabla_z d(x,z).$$

这意味着

$$D_{z=z_0} d(x_0,z) \otimes \|_{x_0}^{z_0} \nabla_{x=x_0} d(x,z_0) = -D_{z=z_0} d(x_0,z) \otimes \nabla_{z=z_0} d(x_0,z).$$

由于 $x_0 \in B(z_0, \pi/2b)$，引理 A.1 以及前一个方程意味着：

$$D_{z=z_0} d(x_0,z) \otimes \|_{x_0}^{z_0} \nabla_{x=x_0} d(x,z_0) = -\left(I + T - d(x_0,z_0) D_{z=z_0} \nabla_z d(x_0,z)\right)$$

其中 $\|T\| \leq \max\left\{\frac{a^2}{3}, \frac{b^2}{2}\right\} d(z_0,x_0)^2$。于是

$$D_{z=z_0} d(x_0,z) \otimes \|_{x_0}^{z_0} \nabla_{x=x_0} d(x,z_0) + d(x_0,z_0) \|_{x_0}^{z_0} D_{z=z_0} \nabla_{x=x_0} d(x,z) = -(I+T) + T_1$$

其中

$$T_1 := d(x_0,z_0)(D_{z=z_0} \nabla_z d(x_0,z) + \|_{x_0}^{z_0} D_{z=z_0} \nabla_{x=x_0} d(x,z)).$$

为了完成这个引理的证明，只需证明：

断言。$\|T_1\| \leq$最大值 $\{a^2, b^2\}\, d(x_0,z_0)^2$。

现在证明这个断言。注意，只需证明

$$\|D_{z=z_0} \nabla_z d(x_0,z) + \|_{x_0}^{z_0} D_{z=z_0} \nabla_{x=x_0} d(x,z)\| \leq \max\{a^2, b^2\}\, d(x_0,z_0).$$

设 $t_0 := d(x_0,z_0)$。对于 $0 \leq t \leq t_0$，令 $S(x_0,t) := \{z\colon\ d(x_0,z) = t\}$。那么，若 $z \in S(x_0,t)$，则$\nabla_z d(x_0,z)$是 $S(x_0,t)$在 z处的指向外的单位法向量，而 $\nabla_{x=x_0} d(x,z)$是 $S(x_0,t)$在 z处的指向内的单位法向量，沿连接 x_0 与 z的测地线平行移动至 x_0 处。

设 $v \in T_{z_0} F$，并令 $\gamma_v\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to F$为 $S(x_0,t_0)$上的一条曲线，使得 $\gamma_v(0) = z_0$且 $\dot\gamma_v(0) = v$。若 $v \in (T_{z_0} S(x_0,t_0))^\perp$，则 $T_1(v) = \|_{z_0}^{x_0} D_{\dot\gamma(t_0)}(-\dot\gamma)(t_0) + D_{\dot\gamma(0)}\, \dot\gamma(0) = 0$。因此现在假设$v \in T_{z_0} S(x_0, t_0)$，并考虑由 $p_v(s,t) := \exp_{x_0}(t \cdot \alpha_v(s))$给出的测地线变分，其中$\alpha_v(s) := \frac{1}{t_0} \exp_{x_0}^{-1}(\gamma_v(s))$。于是

$$D_{z=z_0} \nabla_z d(x_0,z)(v) = \frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=t_0} p_v(s,t)$$

$$\text{and } D_{z=z_0} \nabla_{x=x_0} d(x,z)(v) = -\frac{\partial}{\partial s}\Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} p_v(s,t).$$

由于映射 p_v 光滑，我们可以交换上述导数的顺序，从而得到

$$D_{z=z_0} \nabla_z d(x_0,z)(v) = J_v'(t_0) \quad \text{and} \quad D_{z=z_0} \nabla_{x=x_0} d(x,z)(v) = -J_v'(0)$$

其中 $J_v(t)\colon = \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0} p_v(s,\ t)$ 是沿测地线 $c(t)\colon = p_v(0,\ t)$ 与测地线变分 $p_v(s,\ )$ [dC92，第 2 节，命题 2。4]。另请注意 $J_v(t_0) = v$。因此

$$\|D_{z=z_0} \nabla_z d(x_0,z) + \|_{x_0}^{z_0} D_{z=z_0} \nabla_{x=x_0} d(x,z)\| = \sup_{||v||=1} \left\| J_v'(t_0) - \|_{c(0)}^{c(t_0)} J_v'(0) \right\|.$$

然而

$$\left\| J_v'(t_0) - \|_{c(0)}^{c(t_0)} J_v'(0) \right\| = \left\| \int_0^{t_0} \|_{c(t)}^{c(t_0)} J_v''(t) dt \right\| \leq \int_0^{t_0} \|J_v''(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^{t_0} \left\| R_{c(t)}\left(J_v(t), \dot c(t)\right) \dot c(t) \right\| dt \leq \int_0^{t_0} \|R_{c(t)}\|\, ||J_v(t)|| dt$$

$$\leq t_0 M = M d(x_0,z_0),$$

其中 $M := \sup_{x\in F} ||R_x|| \cdot \sup_{t\in[0,t_0]} ||J_v(t)||$。注意，$\sup_{x\in F} ||R_x|| \le \max\{a^2, b^2\}$。此外，根据广义 Rauch 比较定理（[Sak84] 的推论 2.19），对于 $t \le \frac{\pi}{2b}$, $\|J_v(t)\| \le \left\|J^b(t)\right\| \le 1$，我们有 $J^b(t)$，它是常曲率 $b^2 \ge 0$ 下满足条件 $J^b(0) = 0 \text{and} \left\|J^b(t_0)\right\| = 1 = \|J_v(t_0)\|$ 的任意雅可比场。因此 $M \le \max\{a^2, b^2\}$。

这就证明了该断言，从而证明了该引理。 □

A.2.**重心映射的导数**。本节的目标是证明命题 A.10。回顾一下，在整个附录中，我们固定了一个紧致、连通的 C^1（因而是光滑的）流形 F。

在本节的第一部分（引理 A.3 至引理 A.6）中，我们将作出以下约定的假设。

假设 A： 令 a、$b \ge 0$ 和 $n \in \mathbb{N}$ 为固定常数。设：
（*1*） F 赋有一个 C^2 黎曼度量 g，其截面曲率介于$-a^2 \le \kappa_F \le b^2$之间。（*2*） $\mu = \sum_{i=1}^n w_i \delta_{z_i}$ 是 F 上的概率测度，其中 $0 \le w_i \le 1$ 为权重，$\{z_1, \dots, z_n\} \subset F$为 μ的支撑集。（*3*）我们有 直径 $\{z_1, \dots, z_n\} <$最小值$\left\{\frac{\pi}{4b}, \frac{1}{2}$注入半径$_g(F)\right\}$，其中 注入半径$_g$（$F$）表示 （$F$、$g$）的注入半径。

我们注意到，任何半径小于 $\min\left\{\frac{\pi}{2b}, \frac{1}{2}\text{InjRad}_g(F)\right\}$ 的开球都是强测地凸的（参见[Cha06，定理 IX.6。1]）。

假设 A 的记号：我们为假设 A 统一以下记号。我们用 ∇ 表示 F 上的黎曼联络，用 $\|\cdot\|$ 表示与度量g相关联的范数。我们用 D 表示协变导数算子，即若 $z \in F$， X 是一个光滑向量场，且 Y 是 F上的一个向量场，则 $D_z Y(X) = (\nabla_X Y)(z)$。此外，若 $f\colon F \to \mathbb{R}$是一个光滑函数，则 ∇f 是与 1-形式 Df对偶的向量场。

在假设 A 下，式（ G ）中定义的函数（见式（2.1））变为

$$G(x, w, z) = \sum_{i=1}^n w_i d(x, z_i) \nabla_x d(x, z_i). \tag{A.1}$$

我们用 $\text{bar}(\mu)$ 表示 μ 的重心（定义为 F 中满足 $G(\text{bar}(\mu)\ w, z) = 0$的唯一点；详情见第 2 节）。该重心存在且定义良好（见第 2 节或[Cha06，命题 IX.7。1]）。

下面，我们定义一个 (1, 1)-张量 Q：

$$Q := \sum_{j=1}^n w_j \left(D_{x=\text{bar}(\mu)} d(x, z_j) \otimes \nabla_{x=\text{bar}(\mu)} d(x, z_j) + d(\text{bar}(\mu), z_j) D_{x=\text{bar}(\mu)} \nabla_x d(x, z_j) \right). \tag{A.2}$$

引理 **A.3.** 在 **假设 A**下，最大值$_{1\le i\le n}\, d(\text{bar}(\mu)\ z_i) \le 2$直径 $\{z_1, \dots, z_n\}$，并且

$$\begin{aligned} \|Q - I\| &\le \max\left\{\frac{a^2}{3}, \frac{b^2}{2}\right\} \max_{1\le i\le n} d(\text{bar}(\mu), z_i)^2 \\ &\le 2 \max\left\{a^2, b^2\right\} \text{diam}\left\{z_1, \dots, z_n\right\}^2. \end{aligned}$$

证明。由注记 2.1，最大值$_i\, d(\text{bar}(\mu)\ z_i) \le 2$直径 $\{z_1, \dots, z_n\}$。引理的第二个结论由引理 A.1 取 $x_0 = \text{bar}(\mu)$， $z = z_j$ 并注意到 $\sum_j w_j = 1$ (这意味着每个加项都接近恒等映射)。 □

注意到 Q 是一个对称张量，我们立即由引理 A.3 得到以下结论。

推论 A.4. 在 **假设 A**下，如果直径 $\{z_1,\dots,z_n\} < 3^{-1}$最大值$\{a,b\}$，那么 $\|Q-I\| \le \frac{1}{4}$和Q 是严格正定张量，因而可逆。此外，$\|Q^{-1}\| \le \frac{4}{3} < 2$。

注释 A.5. 我们允许在上述推论中取最大值 $\{a,b\} = 0$。在这种情况下 $Q = I$。

引理 A.6（重心关于测度的导数）. 假设满足**假设 A**。若直径 $\{z_1,\dots,z_n\} < 3^{-1}$最大值$\{a,b\}$，则映射 $(w_1,\dots,w_n,z_1,\dots,z_n) \mapsto \mathrm{bar}(\mu)$关于权重 w_i 的偏导数为

$$D_{w_i}\,\mathrm{bar}(\mu) = -Q^{-1}\left(d(\mathrm{bar}(\mu),z_i)\nabla_{x=\mathrm{bar}(\mu)}d(x,z_i)\right)$$

而关于 z_i 的偏导数为

$$D_{z_i}\mathrm{bar}(\mu) = -Q^{-1}\left(w_iD_{z_i}d(\mathrm{bar}(\mu),z_i)\otimes\nabla_{x=\mathrm{bar}(\mu)}d(x,z_i) + w_id(\mathrm{bar}(\mu),z_i)D_{z_i}\nabla_x d(x,z_i)\right).$$

证明。注意到 $0 = G(\mathrm{bar}(\mu),w,z)$，对其求导可得，

$$0 = D_{w_i}G(\mathrm{bar}(\mu),w,z) = D_{x=\mathrm{bar}(\mu)}G(x,w,z)\circ D_{w_i}\,\mathrm{bar}(\mu) + D_{w_i}G(x,w,z)|_{x=\mathrm{bar}(\mu)}. \tag{A.3}$$

我们已经从（2.2）看出

$$D_xG(x,w,z) = \sum_{j=1}^n w_j\left(D_xd(x,z_j)\otimes\nabla_xd(x,z_j) + d(x,z_j)D_x\nabla_xd(x,z_j)\right).$$

于是 $D_{x=\mathrm{bar}(\mu)}G(x,w,z) = Q$（参见方程（A.2））。由于直径 $\{z_1,\dots,z_n\} < 3^{-1}$最大值$\{a,b\}$，推论 A.4表明 Q 是严格正定的，因此可逆。此外，由方程（A.1），

$$D_{w_i}G(x,w,z)|_{x=\mathrm{bar}(\mu)} = d(\mathrm{bar}(\mu),z_i)\nabla_{x=\mathrm{bar}(\mu)}d(x,z_i).$$

于是我们可以求解方程（A.3），得到：

$$D_{w_i}\,\mathrm{bar}(\mu) = -Q^{-1}\left(d(\mathrm{bar}(\mu),z_i)\nabla_{x=\mathrm{bar}(\mu)}d(x,z_i)\right).$$

Th $D_{z_i}\,\mathrm{bar}(\mu)$ 的情形类似。对 $0 = G(\mathrm{bar}(\mu),w,z)$ 求导可得

$$0 = D_{z_i}G(\mathrm{bar}(\mu),w,z) = D_xG(x,w,z)\circ D_{z_i}\,\mathrm{bar}(\mu) + D_{z_i}G(x,w,z)|_{x=\mathrm{bar}(\mu)}.$$

对于第二项，我们注意到

$$D_{z_i}G(x,w,z)|_{x=\mathrm{bar}(\mu)} = D_{z_i}d(\mathrm{bar}(\mu),z_i)\otimes\nabla_{x=\mathrm{bar}(\mu)}d(x,z_i) + w_id(\mathrm{bar}(\mu),z_i)D_{z_i}\nabla_{x=\mathrm{bar}(\mu)}d(x,z_i). \tag{A.4}$$

由于直径 $\{z_1,\dots,z_n\} < \frac{\pi}{4b}$，引理 A.2 表明：$D_{z_i}G(x,w,z)|_{x=\mathrm{bar}(\mu)} = -\sum_{i=1}^n w_i\|_{z_i}^{\mathrm{bar}(\mu)}(I+S)$（其中 S 与引理 A.2 中相同）。因此，按照证明推论 A.4 的类似推理，我们看到：存在 r' 充分小（仅取决于常数 a 和 b），使得直径 $\{z_1,\dots,z_n\} < r'$ 意味着 $D_{z_i}G(x,w,z)$ 可逆。然后，由方程（A.4）解出 $D_{z_i}\mathrm{bar}(\mu)$，即可完成证明。□

在接下来的两个引理中，我们将考虑满足以下条件的度量族 g_s 于 F共同满足 **假设 A**。回顾 $C^{1,2}$ 度量族的定义，该定义见第 2.2 节。

我们将其精确表述如下：

假设 B： 令 $\epsilon_0 > 0$, $a,b \ge 0$和 $m,n \in \mathbb{N}$ 为固定常数。假设：

(1) $B(0,\epsilon_0) \ni s \mapsto g_s$ 是定义在 F 上的一族 $C^{1,2}$ 个黎曼度量，其中每个 g_s 都是一个具有截面曲率 $\kappa_s \in [-a^2,b^2]$ 的 C^2 黎曼度量。*(2)* 对于每个 s，存在一个概率测度 $\mu(s)$：$= \sum_{i=1}^n w_i(s)\delta_{z_i(s)}$，其中权重 $w_i(s)$ 和点 $z_i(s)$ 以一种 C^1 的方式依赖于参数 $s \in B(0,\epsilon_0)$。

(3) 我们有 直径$_s\{z_1(s)\ldots,\ z_n(s)\}<$最小值 $\left\{\frac{\pi}{4b},\ 1\,2\text{单射半径}_{g_s}(F),\ 1\,3\text{最大值}\{a,b\}}\right\}$，其中 单射半径$_{g_s}(F)$表示 $(F,\ g_s)$ 的单射半径。（当 $b=\overline{0}$ 时，我们将 $\frac{\pi}{4b}=\infty$ 解释为 $a=b=0$，而当 $a=b=0$ 时，将其解释为 $1\,3\text{最大值}\{a,b\}}=\infty$。*)*

假设 B 下的记号：我们还统一规定以下记号，以供后文使用。对于每个黎曼度量 g_s，我们用 ∇^s 表示对应的黎曼联络，用 d_s 表示距离函数，用 diam$_s$ 表示在 d_s 中测得的直径，用 bar$_s$ 表示重心映射，并用 D_x^s 表示协变导数算子（即，若 X、Y 是 F 和 $x\in F$ 上的光滑向量场，则 $D_x^sY(X)=\nabla_X^sY(x)$）。此外，令 ∇_x^sf 表示度量 g_s 下光滑函数 $f\colon F\to\mathbb{R}$ 的梯度（即对于任意 $v\in T_xF$，有 $\nabla_x^sf(v)=D_vf(x)$）。最后，D_s 是 $B(0,\epsilon_0)\subset\mathbb{R}^m$ 上通常的协变导数算子。

最后，对于每个 s，令 Q_s 表示与距离函数 (1,1) 张量 Q (参见式(A.2))相对应的 d_s，即

$$Q_s:=\sum_{i=1}^n w_i(s)\left(D^s_{x=x_s}d_s(x,z_i(s))\otimes\nabla^s_{x=x_s}d_s(x,z_i(s))+d_s(x,z_i(s))D^s_{x=x_s}\nabla^s_x d_s(x,z_i(s))\right). \tag{A.5}$$

其中 $x_s:=$bar$_s(\mu(s))$。

在接下来的三个引理中，我们将在上述假设 B 下计算映射 $s\mapsto$ bar$_s(\mu(s))$ 的导数。

引理 A.7。 假设 **假设 B 第（1）部分** 成立。则由 $E_x\colon\ T_xF\times B(s_0,\ \epsilon)\to F$定义的映射 $E_x(v,\ s)=\exp_x^{g_s}(v)$ 满足：

(a) 它在 C^1 中属于 x，并且 v，其一阶导数（关于 x 和 v）在 s 中为 C^1；*(b)* $D_sE_x(v,\ s)$ 关于 v 可微，且关于 s 和 v 的混合偏导数相等（即 $D_vD_sE_x(v,\ s)=D_sD_vE_x(v,\ s)$）。

此外，对于所有充分小的 z 和 x，满足 $d_s(x,\ z)$ 时，$d_s(x,\ z)^2$ 在 x 中为 C^2，且 z、C^1 属于 s，并且 $\nabla_x^s(d_s(x,\ z))^2$ 在 s 中为 C^1。

证明。根据假设，g_s 的克里斯托费尔符号在 x 和 s 中为 C^1，且其一阶及以下导数在 s中也为 C^1。常微分方程（即测地线方程）解的正则性意味着，$E_x(v,s)$在 x 和 v 中为 C^1，且其一阶及以下导数是关于 s的 C^1 函数。这就证明了(a)部分。(b)部分由[Rud76 的定理 9.41（第 236], 页）推出，因为 $E_x(v,s)$在(v,s)中为 C^1，而 $D_vE_x(v,s)$在 s中为 C^1。

根据隐函数定理，存在一个映射 $\alpha_x\colon B(s_0,\epsilon)\to T_xF$，其正则性与 E_x 相同（即 $\alpha_x(s)$在 x 和 s中均为 C^1），使得 $E_x(\alpha_x(s)\ s)=z$。然而，请注意

$$\alpha_x(s)=-d_s(x,z)\nabla_x^sd_s(x,z)=-\frac{1}{2}\nabla_x^s(d_s(x,z))^2.$$

因此，$d_s(x,z)^2$ 具有所述的正则性。 □

推论 A.8. 假设 **假设 B 第（1）部分** 成立，且 $s\mapsto z(s)$ 在 C^1 随着 s 在$B(0,\epsilon_0)$中变化时。则 $\nabla_x^sd_s(x,z(s))^2$ 在 C^1和 s 中均变化，且 x。

证明。我们将在 $B(s_0,\epsilon)$ 上证明这一点，并令 $g_0:=g_{s_0}$。令 $E_x(v,s)$ 如上所述，并定义$F_x(v,s):=(\exp_x^{g_0})^{-1}\circ E_x(v,s)-(\exp_x^{g_0})^{-1}(z(s))$。那么 $F_x(v,s)$ 在 x和 s 中均属于 C^1，并且，

$$D_vF_x(v,s)=D_{w=E_x(v,s)}(\exp_x^{g_0})^{-1}(w)\circ D_vE_x(v,s).$$

这意味着当 $\|v\|_{g_0}$ 充分小时，$D_vF_x(v,s)$可逆。于是，根据隐函数定理，存在一个函数 $\beta_x\colon B(s_0,\epsilon)\to F$，它关于 x 和 s 均为 C^1，使得

$F_x(\beta_x(s)\ s) = 0$。注意，$F_x(v,s) = 0$ 当且仅当 $E_x(v,s) = z(s)$。因此，$E_x(\beta_x(s)\ s) = z(s)$。于是

$$\beta_x(s) = -d_s(x, z(s))\nabla_x^s d_s(x, z(s)) = -\frac{1}{2}\nabla_x^s (d_s(x, z(s)))^2,$$

由此完成证明，因为 β_x is C^1 in $s$and x。 □

引理 A.9 (重心关于度量的导数)。 设 **假设 B**成立。假设 $w_i(s) = w_i$ 和 $z_i(s) = z_i$ 对于每个 $i \in \{1, \dots, n\}$ 和$\mu(s) \equiv \mu = \sum_{i=1}^n w_i \delta_{z_i}$都是常函数。那么映射 $s \mapsto$ 重心$_s(\mu)$ 关于参数s 在 $s = s_0$ 处的导数为：

$$D_{s=s_0} \operatorname{bar}_s(\mu) = -Q_{s_0}^{-1} \left(\sum_{i=1}^n w_i \left(D_{s=s_0} d_s(x_0, z_i) \otimes \nabla_{x=x_0}^{s_0} d_{s_0}(x, z_i) + d_{s_0}(x_0, z_i) D_{s=s_0} \nabla_{x=x_0}^s d_s(x, z_i) \right) \right)$$

其中 $x_0 :=$ 重心$_{s_0}(\mu)$。

证明。对于每个 s，我们定义函数 $G_s(x, w, z) = G(x, w, z, s)$，用于距离函数 d_s，如方程 A.1 所示。与引理 A.6 中一样，我们先对方程 $0 = G($重心$_s(\mu)\ w, z, s)$ 求导，得到

$$0 = D_{s=s_0} G(\operatorname{bar}_s(\mu), w, z, s) = D^{s_0}_{x=\operatorname{bar}_{s_0}(\mu)} G(x, w, z, s_0) \circ D_{s=s_0} \operatorname{bar}_s(\mu) + D_{s=s_0} G(x, w, z, s)\big|_{x=\operatorname{bar}_{s_0}(\mu)}.$$

由（2.2）可得

$$D_x^{s_0} G(x, w, z, s_0) = \sum_{i=1}^n w_i \left(D_x^{s_0} d_{s_0}(x, z_i) \otimes \nabla_x^{s_0} d_{s_0}(x, z_i) + d_{s_0}(x, z_i) D_x^{s_0} \nabla_x^{s_0} d_{s_0}(x, z_i) \right).$$

注意到 $D^{s_0}_{x=$平均值$_{s_0}(\mu)} G$（x，w，z，s_0）$= Q_{s_0}$，并且由于 直径 $\{z_1, \dots, z_n\} < 3$ ^{1}最大值 $_{\{a,b\}}$，推论 A.4表明 Q_{s_0} 是严格正定的（因而可逆的）张量。

此外，我们计算得，

$$\begin{aligned} D_{s=s_0} G(x, w, z, s)\big|_{x=\operatorname{bar}_{s_0}(\mu)} = &\sum_{i=1}^n w_i D_{s=s_0} d_s(\operatorname{bar}_{s_0}(\mu), z_i) \otimes \nabla^{s_0}_{x=\operatorname{bar}_{s_0}(\mu)} d_s(x, z_i(s)) \\ &+ w_i d_{s_0}(\operatorname{bar}_{s_0}(\mu), z_i) D_{s=s_0} \nabla^s_{x=\operatorname{bar}_{s_0}(\mu)} d_s(x, z_i). \end{aligned}$$

现在可以解出 $D_{s=s_0}$bar$_s(\mu)$，从而得到所述结果。 □

现在我们证明命题 2.8。

命题 A.10。 设**假设 B** 成立，并令 r（s）：$=$直径$_{(F,d_s)}$ $\{z_1$（s）...，z_n（s）$\}$。则 $s \mapsto$ 平均值$_s$（μ（s））为 C^1，且对于任意 $s_0 \in B$（0，ϵ_0），

$$\left\| D_{s=s_0} \operatorname{bar}_s(\mu(s)) - Q_{s_0}^{-1} \left(\sum_{i=1}^n w_i(s_0) \|^{\operatorname{bar}_{s_0}(\mu(s_0))}_{z_i(s_0)} D_s z_i(s) \right) \right\| \leq 32 \max\left\{a^2, b^2\right\} L(s_0) r(s_0)$$

其中

$$L(s) := \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \|D_s z_i(s)\|, \sum_{i=1}^n \|D_s w_i(s)\| \right\} + \|g_s\|_{C^{1,2}},$$

其中，$\|g_s\|_{C^{1,\ 2}}$ 表示在 s 处的 $s \in B$（0，ϵ_0）中，关于 g_0-指数坐标的 g_s 各分量的二阶导数的至多一阶导数的界。

备注 A.11。 在上述引理（以及下面的证明）中，每当一个向量（或张量）带有 s标记时，相应的范数 $\|\cdot\|$ 均应理解为关于黎曼度量 g_s所取的范数。例如，$\|T_s\|$、 $\|D_s w_i\ (s)\|$、 $\|D_s z_i\ (s)\|$等，都是关于度量 g_s所取的范数。我们避免使用更精确但较为繁琐的记号 $\|\cdot\|_s$。

证明。我们首先注意到，函数 $L(s)$ 定义良好。事实上， $w_i(s)$ 和 $z_i(s)$ 都随 C^1 in s 变化，并且 $(s,v) \to g_s(v, v)$ 至少为 C^2。此外，引理 A.7 和推论 A.8 表明，只要 $d_s(x, z_i(s))$ 足够小， $d_s(x, z_i(s))^2$ 在 C^2 in x 中且 C^1 in s，其梯度 $\nabla^s_x d_s(x, z_i(s))^2$ 在 C^1 in s 中。由隐函数定理可得， $s \mapsto \mathrm{bar}_s(\mu(s))$ 在 C^1 in s 中。

任取 $s_0 \in B(0, \epsilon_0)$，并令 $\mu := \mu(s_0)$、 $w_i := w_i(s_0)$、 $z_i := z_i(s_0)$ 及 $x_0 := \mathrm{bar}_{s_0}(\mu)$。考虑映射 $(t, s) \mapsto \mathrm{bar}_t(\mu(s))$，沿对角线求导可得，

$$D_{s=s_0}\left(\mathrm{bar}_s(\mu(s))\right) = D_{s=s_0}\,\mathrm{bar}_s(\mu) + D_{s=s_0}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu(s)). \tag{A.6}$$

我们将分别利用引理 A.9和A.6 来计算该等式右边的两项。

断言 1. $\|D_{s=s_0}\mathrm{bar}_s(\mu)\| \le 32 L(s_0) r(s_0)$。

断言 *1* 的证明： 为证明这一点，我们使用引理 $D_s\mathrm{bar}_s(\mu)$ 中的公式 A.9。由于$r(s_0) < \frac{1}{3}$最大值$\{a,b\}$，~~推论 A.4~~ 表明 $\left\|Q_{s_0}^{-1}\right\| < 2$。由于 $\left\|Q_{s_0}^{-1}\right\| < 2$ 且 $\sum w_i = 1$，只需证明

$$\left\|D_{s=s_0}\nabla^s_{x=x_0}(d_s(x, z_i))^2\right\| \le 16 L(s_0) r(s_0), \tag{A.7}$$

as

$$\begin{aligned}\|D_{s=s_0}\,\mathrm{bar}_s(\mu)\| &\le 2\max_{1\le i\le n}\left\|\left(D_{s=s_0}d_s(x_0, z_i)\otimes\nabla^{s_0}_{x=x_0}d_{s_0}(x, z_i) + d_{s_0}(x_0, z_i)D_{s=s_0}\nabla^s_{x=x_0}d_s(x, z_i)\right)\right\| \\ &= 2\max_{1\le i\le n}\left\|D_{s=s_0}\nabla^s_{x=x_0}(d_s(x, z_i))^2\right\|.\end{aligned}$$

为了证明不等式 (A.7)，只需证明

$$\|D_{s=s_0}\alpha(s)\| \le 8 L(s) r(s)$$

其中

$$\alpha(s) := -d_s(x_0, z_i)\nabla^s_{x=x_0}d_s(x, z_i) = -\frac{1}{2}\nabla^s_{x=x_0}(d_s(x, z_i))^2.$$

根据引理 A.7， $\alpha\colon B(s_0,\epsilon) \to F$是一个映射，满足对所有 $s \in B(s_0,\epsilon)$， $E(\alpha(s)\ s) = z_i$。这里，$E(v, s) \equiv E_{x_0}(v, s) = \exp^{g_s}_{x_0}(v)$ 是度量中的指数映射，其定义见引理 A.7。于是

$$D_s\alpha(s) = -(D_{v=\alpha(s)}E(v, s))^{-1}\circ D_s E(v, s)|_{v=\alpha(s)},$$

如 $0 = D_s E(\alpha(s)\ s) = D_{v=\alpha(s)}E(v, s)\circ D_s\alpha(s) + D_s E(v, s)|_{v=\alpha(s)}$.

对于充分小的邻域 $(0, s_0)$ 中的所有 $(v, s) \in T_{x_0}F \times B(s_0,\epsilon)$（其直径仅取决于 F 的曲率界 a 和 b）， $D_{v=0}E(v, s) = I\colon\ T_{x_0}F \to T_{x_0}F$和 $(D_v E(v, s))$ 均一致地远离 0。

由于 g_s 满足 **假设 B** 第 (1) 部分，引理 A.7 表明 $D_{s=s_0}E(v, s)$ 在 $v = 0$处可微，即：

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|D_{s=s_0}E(v, s) - D_{s=s_0}E(0, s) - D_{v=0}D_{s=s_0}E(v, s)(v)\|}{\|v\|} = 0.$$

由于 $D_{s=s_0}E(0,s) = 0$,

$$\|D_{s=s_0}E(v,s)\| \le (\|D_{v=0}D_{s=s_0}E(v,s)\| + h(v))\,\|v\|$$

对于某个函数，满足 $\lim_{v\to 0} h(v) = 0$。由于 $\|D_{v=0}D_{s=s_0}E(v,s)\| \le \|g_{s_0}\|_{1,\ 2} \le L(s_0)$,

$$\|D_{s=s_0}E(v,s)\| \le 2L(s_0)\,\|v\|$$

只要 $\|v\|$ 充分接近 0。由于在 $v = \alpha(s_0)$ 处，我们有 $\|\alpha(s_0)\| = d_{s_0}(x,z_i) < 2r(s_0)$，这意味着

$$\|D_{s=s_0}\alpha(s)\| \le 4L(s_0)r(s_0)\left\|(D_{v=\alpha(s_0)}E(v,s_0))^{-1}\right\|.$$

根据 [Cha06], $D_{v=\alpha(s_0)}E(v,s_0)(w) = \frac{1}{t_0}J(t_0)$，其中 $t_0 = \|\alpha(s_0)\|$，且 J是沿着 $t \to E(t\ ^{\alpha}(s_0)\|\alpha(s_0)\|, s_0)$ 的雅可比场，满足 $J(0) = 0$且 $J'(0) = w$。根据劳赫比较定理，$\|J(t)\| \ge \frac{\|w\|}{a}\sin(at)$。由于 $\sin(t)\ t$在 $[0,\pi]$上单调递减，且 $t_0 < \frac{1}{3a} < \frac{\pi}{2a}$，我们有 $\|D_vE(v,s_0)(w)\| \ge \frac{2}{\pi}\|w\|$。于是，$\|(D_{v=\alpha(s_0)}E(v,s_0))^{-1}\| \le \pi/2 < 2.$

Thus

$$\|D_{s=s_0}\alpha(s)\| \le 8L(s_0)r(s_0)$$

这就完成了断言 1的证明。 □

现在我们将通过证明以下内容，完成命题 A.10 的证明:

Claim 2. $\left\|D_{s=s_0}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu(s)) - Q_{s_0}^{-1}\circ\sum_{i=1}^{n} w_i\|_{z_i}^{\mathrm{bar}_{s_0}(\mu)} D_{s=s_0}z_i(s)\right\| \le 16\max\left\{1,a^2,b^2\right\}L(s_0)r(s_0).$

断言 *2* 的证明: 首先将项 $D_{s=s_0}\mathrm{bar}_{s_0}(\mu(s))$ 展开为:

$$D_{s=s_0}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu(s)) = \sum_{i=1}^{n} D_{w_i}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu)\circ D_{s=s_0}w_i(s) + \sum_{i=1}^{n} D_{z_i}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu)\circ D_{s=s_0}z_i(s). \tag{A.8}$$

现在我们将先证明以下内容，以此证明该断言:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} D_{w_i}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu)\circ D_{s=s_0}w_i(s)\right\| \le 4L(s_0)r(s_0) \tag{A.9}$$

然后证明:

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\left(D_{z_i}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu) - Q_{s_0}^{-1}\circ w_i\|_{z_i}^{\mathrm{bar}_{s_0}(\mu)}\right)\circ D_{s=s_0}z_i(s)\right\| \le 16\max\left\{a^2,b^2\right\}L(s_0)r(s_0). \tag{A.10}$$

我们先证明所述不等式 (A.9)。引理 A.6 的第一部分表明:

$$\|D_{w_i}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu)\| \le \left\|Q_{s_0}^{-1}\right\|\,|d_{s_0}(\mathrm{bar}_{s_0}(\mu),z_i)|\,\left\|\nabla_{x=\mathrm{bar}_{s_0}(\mu)}d_{s_0}(x,z_i)\right\|.$$

注意，$\nabla_{x=\mathrm{bar}_{s_0}(\mu)}\ d_{s_0}\ (x,\ z_i)$ 的范数至多为 1。由于 $r\ (s_0) < 3\frac{1}{\text{~~最大值~~}\{a,b\}}$，推论A.4推出 $\left\|Q_{s_0}^{-1}\right\| \le 2$。于是

$$\|D_{w_i}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu)\| \le 2d_{s_0}(\mathrm{bar}_{s_0}(\mu),z_i) \le 4r(s_0).$$

所声称的不等式（A.9）可由下式得到

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} D_{w_i}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu)\circ D_{s=s_0}w_i(s)\right\| \le 4r(s_0)\sum_{i=1}^{n}\|D_{s=s_0}w_i(s)\| \le 4L(s_0)r(s_0).$$

为证明所声称的不等式 (A.10)，先固定 $i\in\{1,\dots,n\}$。回想 $x_0 = \mathrm{bar}_{s_0}(\mu)$，我们得到

$$\left\|\left(D_{z_i}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu) - Q_{s_0}^{-1}\circ w_i\|_{z_i}^{x_0}\right)\circ D_{s=s_0}z_i(s)\right\| \le L(s_0)\left\|D_{z_i}\,\mathrm{bar}_{s_0}(\mu) - Q_{s_0}^{-1}\circ w_i\|_{z_i}^{x_0}\right\|.$$

现在我们将证明

$$\left\|D_{z_i}\operatorname{bar}_{s_0}(\mu)-Q_{s_0}^{-1}\circ w_i\|_{z_i}^{x_0}\right\|\leq 16w_i\max\left\{a^2,b^2\right\}r(s_0)^2.$$

事实上，引理 A.6 的第二部分给出了 $D_{z_i}\operatorname{bars}_0(\mu)$ 的公式，并且我们有：

$$\left\|\underbrace{-Q_{s_0}^{-1}\circ w_i\left(D_{z_i}d_{s_0}(x_0,z_i)\otimes\nabla_{x=x_0}d_{s_0}(x,z_i)+d_{s_0}(x_0,z_i)D_{z_i}\nabla_{x=x_0}d_{s_0}(x,z_i)\right)}_{\text{from Lemma A.6}}-Q_{s_0}^{-1}\circ w_i(\|_{z_i}^{x_0})\right\|.$$

由于 $r(s_0)<3\frac{1}{\max\{a,b\}}$，推论 A.4 表明 $\left\|Q_{s_0}^{-1}\right\|\leq 2$。那么，上述表达式至多为

$$2w_i\left\|\underbrace{D_{z_i}d_{s_0}(x_0,z_i)\otimes\nabla_{x=x_0}d_{s_0}(x,z_i)+d_{s_0}(x_0,z_i)D_{z_i}\nabla_{x=x_0}d_{s_0}(x,z_i)}+(\|_{z_i}^{x_0})\right\|.$$

由于 $d_{s_0}(x_0,\ z_i)\ <2r(s_0)\ <\pi/2b$，引理 A.2 表明下方大括号所标出的项等于$-\|_{z_i}^{x_0}(I+S_i)$ 其中 S_i 是一个 $(1,\ 1)$-张量，满足

$$\|S_i\|\leq 2\max\left\{a^2,b^2\right\}d_{s_0}(x_0,z_i)^2\leq 8\max\left\{a^2,b^2\right\}r(s_0)^2.$$

因此

$$\left\|D_{z_i}\operatorname{bar}_{s_0}(\mu)-Q_{s_0}^{-1}\circ w_i\|_{z_i}^{x_0}\right\|\leq 2w_i\left\|\left(-\|_{z_i}^{x_0}(I+S_i)\right)+\|_{z_i}^{x_0}\right\|\leq 16w_i\max\left\{a^2,b^2\right\}r(s_0)^2.$$

由于 $\sum_{i=1}^n w_i=1$ 和 $r(s_0)\leq 1$,

$$\left\|\sum_{i=1}^n\left(D_{z_i}\operatorname{bar}_{s_0}(\mu)-Q_{s_0}^{-1}\circ w_i\|_{z_i}^{x_0}\right)\circ D_{s=s_0}z_i(s)\right\|\leq 16\max\left\{a^2,b^2\right\}r(s_0)L(s_0).$$

这就证明了不等式 (A.10) 并完成了断言 2的证明。 □

现在，断言 1 和 2 与等式 (A.6结合起来，完成了命题 A.1的证明。 0. □

令 d^{Gr} 为格拉斯曼距离。由d^{Gr}的定义可直接得到以下结论。

引理 A.12。 设 $A,C\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^p$和 $B\colon\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^p$是线性映射，且 $W=\operatorname{Im}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m},A)$和 $W'=\operatorname{Im}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m},C+B\circ A)$。则 $d^{\mathrm{Gr}}(W,W')\leq\|C\|+\|B-I\|\,\|A\|$。

现在我们证明命题 2.9。

推论 A.13. 假设 **假设 B** 成立。设在 $\mathcal{H}$ 上存在一个连续叶状结构 $B(0,\epsilon_0)\times F$满足：

(a) $\mathcal{H}$ 具有 C^1 叶，这些叶在叶内 C^1拓扑下横截地连续变化；*(b)* 对每个 $\xi\in F$，存在一个 C^1 函数 $\varphi_\xi\colon B(0,\epsilon_0)\to F$满足 $\varphi_\xi(0)=\xi$，且叶状结构 $\mathcal{H}$ 由下式给出

$$\mathcal{H}=\{(s,\varphi_\xi(s)):s\in B(0,\epsilon_0)\}_{\xi\in F},$$

(c) $\mathcal{H}$ 的切分布记为 $\mathcal{D}$。

固定 $\xi_1,\ldots,\xi_n\in F$，取光滑权函数 $w_i\colon B(0,\epsilon_0)\to[0,1]$，并令 G 表示映射的图

$$B(0,\epsilon_0)\ni s\mapsto\operatorname{bar}_s(\mu(s))=\operatorname{bar}_s\left(\sum_{i=1}^n w_i(s)\delta_{\varphi_{\xi_i}(s)}\right).$$

那么，对于每个 $\epsilon>0$ 以及每个 $c\in[0,1)$，都存在 $\delta=\delta(\epsilon,c)>0$，使得对于每个 $s_0\in B(0,c\epsilon_0)$，若 $r(s_o)<\delta$，则

$$d^{Gr}(T_{(s_0,\operatorname{bar}_{s_0}\mu(s_0))}G,\mathcal{D}(s_0,\operatorname{bar}_{s_0}\mu(s_0)))<\epsilon.$$

此外，导数 $D_{s=s_0}\operatorname{bar}_s(\mu(s))$ 以及分布 $T_{(s_0,\operatorname{bar}_{s_0}\mu(s_0))}G$ 关于 $s_0,\xi_1,\dots,\xi_n$ 连续变化。

证明。令 $z_i(s):=\varphi_{\xi_i}(s)$，并令 $x_0:=\operatorname{bar}_{s_0}(\mu(s_0))$。现在

$$T_{(s_0,x_0)}G=\operatorname{Im}(\mathrm{id},D_{s=s_0}\operatorname{bar}_s\mu(s)).$$

我们首先解释为何该推论中最后的 moreover 陈述可直接由我们先前的结果推出。注意，由关于叶状结构 $\mathcal{H}$ 的假设，φ_{ξ_i} 在 s 中是 C^1，且对于每个 $i=1,\dots,n$，$D_sz_i(s)=D_s\varphi_{\xi_i}(s)$ 关于 ξ_i 和 s 都是连续的。

由 $D_{s=s_0}\operatorname{bar}_s(\mu(s))$ 在上文公式 (A.6) 和公式 (A.8) 中给出的公式，

$$D_{s=s_0}\operatorname{bar}_s(\mu(s))=D_{s=s_0}\operatorname{bar}_s(\mu(s_0))+\sum_{i=1}^n D_{w_i}\operatorname{bar}_{s_0}(\mu(s_0))\circ D_{s=s_0}w_i(s)+\sum_{i=1}^n D_{z_i}\operatorname{bar}_{s_0}(\mu(s_0))\circ D_{s=s_0}z_i(s).$$

根据引理 s_0 和 ξ_i，第一项关于 A.9 以及引理 A.7 是连续的（关于 Q_s 的连续性，见公式 (A.5) 和引理 A.7）。第二项和第三项关于 s_0 和 ξ_i的连续性由引理 A.6 以及上述 $D_s\phi_{\xi_i}$的正则性推出。

因此，$T_{(s_0,x_0)}G$ 关于 $s_0,\xi_1,\dots,\xi_n$连续变化。

现在证明其余结论。为此，我们可以固定 $\xi_1,\dots,\xi_n\in F$，并令 s 在$B(0,\epsilon_0)$中变化。由命题 A.10，

$$D_{s=s_0}\operatorname{bar}_s(\mu(s))=R_{s_0}+Q_{s_0}^{-1}\left(\sum_{i=1}^n w_i(s_0)\|_{z_i(s_0)}^{\operatorname{bar}_{s_0}(\mu(s_0))}D_{s=s_0}z_i(s)\right),$$

其中，对于任意 $s_0\in B(0,\epsilon_0)$，$\|R_{s_0}\|_{s_0}\le 32\max\left\{a^2,b^2\right\}L(s_0)r(s_0)$。

Let

$$W(s_0):=\operatorname{Im}(\mathrm{id},\sum_{i=1}^n w_i(s_0)\|_{z_i(s_0)}^{x_0}D_{s=s_0}\varphi_{\xi_i}(s)).$$

注意，$W(s)$关于 s连续。于是 $M':=\sup_{s_0\in B(0,\epsilon_0)}\max_{1\le i\le n}\|D_{s=s_0}\varphi_{\xi_i}(s)\|$ 存在。于是上述引理 A.12 蕴含

$$\begin{aligned}d^{Gr}(T_{(s_0,x_0)}G,W(s_0))&\le\|R_{s_0}\|+\left\|Q_{s_0}^{-1}-I\right\|\left\|\sum_{i=1}^n w_i(s_0)D_{s=s_0}\varphi_{\xi_i}(s)\right\|\\&\le\|R_{s_0}\|+\left\|Q_{s_0}^{-1}-I\right\|\left(\max_{1\le i\le n}\|D_{s=s_0}\varphi_{\xi_i}(s)\|\right)\\&\le 32\max\left\{a^2,b^2\right\}L(s_0)r(s_0)+2\max\left\{a^2,b^2\right\}M'r(s_0)^2\\&<Mr(s_0),\end{aligned}\tag{A.11}$$

对于一个与 s_0 无关的常数 M，当我们假设 $r(s_0)<1$ 时。

现在我们将证明，只要 $r(s_0)$ 足够小（其大小取决于 ϵ），就有 $d^{Gr}(W(s_0)\ \mathcal{D}(s_0,x_0))<\epsilon$。定义

$$\mathcal{D}_i(s,x)=\operatorname{Im}(\mathrm{id},\|_{z_i(s)}^{x}D_s\phi_{\xi_i}(s))$$

其中 $\|^{x}_{z_i(s)}$ 是沿 $\{\{s\}\times F$ 的平行移动：$s\in B(0$ $,\epsilon_0)\}$, 关于度量 g $_{s_0}$。首先注意到 $W(s_0)=\sum w_i(s_0)\ \mathcal{D}_i(s_0,x_0)$。任取 $\epsilon>0$ 和 $c\in[0,1)$。现在断言存在 $\delta'=\delta'(\epsilon,c)>0$，使得若 $s_0\in B(0,c\epsilon_0)$ 且 $r(s_0)<\delta'$，则

$$d^{Gr}(\mathcal{D}_i(s_0,x_0),\mathcal{D}(s_0,x_0))<\epsilon/2.$$

事实上，这由分布 $\mathcal{D}$ 的一致连续性以及平行移动映射 $\|^{(s,x)}_{(s,y)}$ 在 $B(0,c\epsilon_0)\times F$ 上的一致连续性得出。更确切地说，$\mathcal{D}$ 的一致连续性以及

平行移动意味着存在 $\delta' = \delta'(\epsilon, c)$，使得：若 $s \in B(0, c\epsilon_0)$， $d_s(x, y) < \delta'$ 且 $v \in T_y F$，则

$$d^{Gr}(\mathcal{D}(s,x), \mathcal{D}(s,y)) < \epsilon/2 \text{ and } d_s^{TF}(v, \|_{(s,y)}^{(s,x)} v) < \epsilon/2$$

（其中， d^{TF} 是由 g_s 在 F 的切丛上诱导的距离）。现在注意到，$(u, u') \in \mathcal{D}_i(s_0, x_0)$ 当且仅当 $u' = \|_{z_i(s_0)}^{x_0} v'$，其中 $v' \in \mathrm{Im}(D_{s=s_0}\varphi_{\xi_i}(s))$。由此可得，$(u, v') \in \mathcal{D}(s_0, z_i(s_0))$。事实上，我们有

$$\mathcal{D}(s_0, z_i(s_0)) = \mathrm{Span}\{(v, D_{s=s_0}\varphi_\xi(s)(v)) : v \in \mathbb{R}^m\} = \mathrm{Im}(\mathrm{id}, D_{s=s_0}\phi_{\xi_i}(s)).$$

This 完成了以下断言的证明：若 $r(s_0) < \delta'$，则 $d(\mathcal{D}_i(s_0, x_0)\ \mathcal{D}(s_0, x_0)) <$ ϵ.

现在设 $\delta' = \delta'(\epsilon, c)$ 如上。我们现在证明：若 $r(s_0) < \delta'$，则

$$d^{Gr}(\sum_{i=1}^{n} w_i(s_0)\, \mathcal{D}_i(s_0, x_0), \mathcal{D}(s_0, x_0)) < \epsilon. \tag{A.12}$$

事实上，若 $v \in \mathcal{D}(s_0, x_0)$，则存在 $v_i \in \mathcal{D}_i$ 使得 $\|v - v_i\| < \epsilon$.。于是 $\sum w_i(s_0) v_i \in W(s_0)$ 且 $\left\| v - \sum w_i(s_0) v_i \right\| \le \sum w_i(s_0) \|v - v_i\| < \epsilon$。反之，若 $v_i' \in \mathcal{D}_i$，则存在 $y_i' \in \mathcal{D}$ 使得 $\|y_i - v_i'\| < \epsilon$。于是 $\sum w_i y_i \in \mathcal{D}$ 且 $\left\| \sum v_i' - \sum y_i \right\| < \epsilon$。

根据式（A.11）和式（A.12），对于任意 $\epsilon > 0$ 和 $c \in [0, 1)$，存在 $\delta =$ 最小值 $\{\frac{\epsilon}{M}, 1, \delta'(\epsilon, c)\}$，使得：如果 $s_0 \in B(0, c\epsilon_0)$ 且 $r(s_0) < \delta$，那么

$$d^{Gr}(T_{(s_0,x_0)}G, \mathcal{D}(s_0, x_0)) < 2\epsilon.$$

□

附录 B. 关于叶状结构的引理

如果存在 $0 < \theta \le \frac{\pi}{2}$，使得在每个点 $p \in V$ 处， V 与穿过 p 的 $\mathcal{H}$ 的叶之间的夹角至少为 θ，则称流形 V 与黎曼流形的叶状结构 $\mathcal{H}$ 一致横截。

引理 B.1. 对于 $0 \le k \le n$，考虑 $\mathbb{R}^n$ 的乘积叶状结构 $\mathcal{H} = \{\mathbb{R}^k \times \{y\} : y \in \mathbb{R}^{n-k}\}$。设 V 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个完备连通 C^1 子流形，并且 V 与叶状结构 $\mathcal{H}$ 一致横截。那么， V 与 $\mathcal{H}$ 的任意叶的交集要么为空，要么道路连通。

我们注意到，一致横截性假设是必要的，简单的反例即可说明这一点（例如，函数 e^x 对应的旋转曲面）。不过，如果 V 的维数为 $n - k$，那么仅在横截性假设下，引理仍然成立。

证明。 开始证明之前，我们先做一些预备工作。设 H 是叶状结构 $\mathcal{H}$ 的一片叶，并定义 $f\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ 为 $f(x) := d(x, H)^2$。注意，只要 $f(x) > 0$， $\nabla_x f$ 就定义良好。于是，若 $x \in V$ 且 $f(x) > 0$

由于 V 与 $\mathcal{H}$ 一致横截，存在 $\theta > 0$，使得对每个 $x \in V$，都存在 $v \in T_x V$，其与和 $\mathcal{H}$ 相关联的分布的夹角至少为 θ。因此，每当 $f > 0$ 时，向量场 $-\nabla f$ 与 V 的切空间所成的角度至多为 $\frac{\pi}{2} - \theta$。令 $\mathcal{F}$ 为沿着 V 的向量场，它由将 $-\nabla f$ 投影到 V 的切空间上得到（只要 $f > 0$）。那么，对每个 $x \in V$，$\|\mathcal{F}(x)\| \ge \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)\ \|-\nabla f(x)\| = 2\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) d(x, H)$。由于 V 是一个 C^1 流形，且 ∇f 是光滑的（只要 ∇f 定义良好，即 $f > 0$），向量场 $\mathcal{F}$ 沿着 V 是 C^1。

令 F_t 为由 $\mathcal{F}$ 定义的流。流 F_t 对所有非负时间以及每个点 $x \in V$ 都有定义，因为 $\|\mathcal{F}(x)\| < 2d(x, H)$ 且 $d(x, H)$ 在该流下递减。对于任意 $x \in V$，令

$\phi(t,x) = d(F_t(x), H)$。那么 $\phi(0,x) = d(x,H)$。每当 $\phi(t,x) > 0$ 时， $\phi(t,x)$ 可微且

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) \leq -2\cos^2(\frac{\pi}{2} - \theta)\phi(t,x).$$

事实上，令 θ_y 为 $\mathcal{F}(y) \in T_yV$ 与 $-\nabla_y d(y,H)$ 之间的夹角。于是 $\langle \nabla_y d(y,H), \mathcal{F}(y)\rangle = -\cos(\theta_y) \|\mathcal{F}(y)\| \|\nabla_y d(y,H)\| = -2d(y,H)\cos^2\theta_y$。因此

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,x) = D_{y=F_t(x)}d(y,H)\left(\frac{\partial}{\partial t}F_t(x)\right) = \langle \nabla_y d(y,H), \mathcal{F}(y)\rangle|_{y=F_t(x)} = -2\cos^2(\theta_{F_t(x)})d(F_t(x),H)$$
$$\leq -2\cos^2(\frac{\pi}{2} - \theta)\phi(t,x).$$

由此可得 $\phi(t,x) \leq e^{-\epsilon_0 t}d(x,H)$，其中 $\epsilon_0 = 2\cos^2(\frac{\pi}{2} - \theta)$。

现在我们开始证明。反设 $V \cap H$ 不连通。令 x_1 和 x_2 是位于 $V \cap H$ 的两个不同连通分支上的点。我们令

$$r := \inf_{\{\sigma:[0,1]\to V, \sigma(0)=x_1, \sigma(1)=x_2\}} \max_{t\in[0,1]} d(\sigma(t), H).$$

现在我们考虑两种情况。

情况 *1*：假设 $r > 0$。令 σ 为一条路径，使得 σ 上离 H 最远的点到 H 的距离至多为 re^{ϵ_0}。然后考虑路径 $F_2(\sigma)$，它是将路径 σ 沿流 F_t 流动时间 2 得到的。这条位于 V 中的路径连续，并连接 x_1 和 x_2。这条路径上的点到 H 的最远距离至多为 $re^{\epsilon_0}e^{-2\epsilon_0} < r$。这与 r 的定义矛盾。

情形 *2*：设 $r = 0$。我们首先证明，对于每个 $x \in V$，极限 $\lim_{t\to+\infty} F_t(x)$ 存在。事实上，对于每个 $x \in V$，令 $\mathcal{G}(x)$ 为 $\mathcal{F}(x)$ 在与 $\mathcal{H}$ 相关的分布上的投影。那么， $\mathcal{G}$ 是一个 C^1 向量场，并且 $\|\mathcal{G}(x)\| \leq \frac{1}{2}\|-\nabla f(x)\| = d(x,H)$。由于 $F_t(x)$ 在正向时间下逐渐接近 H，集合 $\{F_t(x) : t \geq 0\}$ 包含于 H 的闭 $d(x,H)$-邻域中。此外，令 $proj : \mathbb{R}^n \to H$ 为正交投影。于是我们得到估计式

$$d(proj(F_{t_1}(x)), proj(F_{t_2}(x))) \leq \int_{t_1}^{t_2} \|\mathcal{G}(F_s(x))\| ds \leq \int_{t_1}^{t_2} \phi(s,x)ds$$
$$\leq \int_{t_1}^{t_2} d(x,H)e^{-\epsilon_0 s}ds = \epsilon_0^{-1}d(x,H)(e^{-\epsilon_0 t_1} - e^{-\epsilon_0 t_2}).$$

因此，集合 $\{F_t(x) : t \geq 0\}$ 包含于以 x 为中心、半径为 $2\epsilon_0^{-1}d(x,H)$ 的球中。由此可知，沿路径 σ 在正向时间下流动时，其轨迹被限制在一个紧集内。此外，该不等式表明，正向轨迹 $\{F_t(x) : t \geq 0\}$ 是一个柯西网。因此，$\lim_{t\to+\infty} F_t(x)$ 存在。

我们还有如下估计：对任意 $x \in V$ 和 $t \geq 0$,

$$d(x, F_t(x)) \leq (1 + \epsilon_0^{-1})d(x,H).$$

事实上， $d(x,F_t(x)) \leq (\phi(0,x) - \phi(t,x)) + d(proj(x), proj(F_t(x))) \leq d(x,H) + \epsilon_0^{-1}d(x,H)$。

设 σ 是一条连接 x_1 和 x_2的连续路径。我们断言，$\overline{\sigma}$：$[0,1] \to V$，由$\overline{\sigma}(s) = \lim_{t\to+\infty} F_t(\sigma(s))$ 对每个 $s \in [0,1]$定义，是连续的。由于上述提到的柯西性质，且 V 是完备的，该映射定义良好。事实上，首先注意到对每个 s， $\overline{\sigma}(s) \in H$。设 $s_0 \in [0,1]$，并设 $\epsilon > 0$。令 $T_0 = T_0(s_0, \epsilon) > 0$ 为一个时间，使得

$$d(F_{T_0}(\sigma(s_0)), \overline{\sigma}(s_0)) \leq \alpha\epsilon,$$

其中 $\alpha = \frac{1}{4+2\epsilon_0^{-1}}$。由于流 F_t 是连续的，路径 $F_{T_0}(\sigma)$ 连续。因此存在$\delta > 0$，使得对于 $s \in [s_0 - \delta, s_0 + \delta]$,

$$d(F_{T_0}(\sigma(s_0)), F_{T_0}(\sigma(s))) \leq \alpha\epsilon.$$

由此可得 $d(F_{T_0}(\sigma(s)),H) \le d(F_{T_0}(\sigma(s_0)),F_{T_0}(\sigma(s))) + d(F_{T_0}(\sigma(s_0)),\overline{\sigma}(s_0)) \le 2\alpha\epsilon$。因此，根据三角不等式，

$$\begin{aligned} d(\overline{\sigma}(s_0),\overline{\sigma}(s)) &\le d(\overline{\sigma}(s_0),F_{T_0}(\sigma(s_0))) + d(F_{T_0}(\sigma(s_0)),F_{T_0}(\sigma(s))) + d(F_{T_0}(\sigma(s)),\overline{\sigma}(s)) \\ &\le \alpha\epsilon + \alpha\epsilon + 2\alpha\epsilon(1+\epsilon_0^{-1}) \le \epsilon. \end{aligned}$$

因此， $\overline{\sigma}$ 在 s_0处连续。这证明了 $\overline{\sigma}$ 是一条连续路径。

另一方面，$\overline{\sigma}(s) \in H$，因为对于每个 $s \in [0,1]$， $d(\overline{\sigma}(s),H) = 0$。因此， $\overline{\sigma}$是$V \cap H$中的一条路径，连接 x_1 和 x_2。这就产生了矛盾。

因此， $V \cap H$ 是连通的。 □

对于同一个向量空间 Z 中的任意两个向量子空间 V、W，我们定义

$$\angle(V,W) = \min\left\{ \sup_{w\in W}\inf_{v\in V}\angle(v,w), \sup_{v\in V}\inf_{w\in W}\angle(v,w) \right\}$$

特别地，当且仅当 $V \subset W$或 $W \subset V$时，夹角为 0。当 $\dim V = \dim W$ 时，$\angle(V,W)$ 与 $d^{Gr}(V,W)$ 双Lipschitz。事实上，如果 $g \in O(\dim Z)$是 $O(\dim Z)$中将 V移动到 W且最接近恒等映射的元素，那么 $d(e,g)$至少为 $\angle(V,W)$，并且不超过 $\dim Z$ 乘以该夹角。

引理 B.2. 设 M 是一个 m维、完备、连通且无边界的 C^1 子流形。我们将 $\mathcal{V}$ 记为 $\mathbb{R}^n$ 中由垂直 $\mathbb{R}^k$ 空间构成的叶状结构。假设对每个 $p \in M$，都有 $\angle(T_pM, T_p(\mathcal{V}(p)) \le \epsilon$，其中 $\epsilon < \frac{\pi}{2}$ 为固定值。令 $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ 为 $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k}\times\mathbb{R}^k$ 到 $\mathbb{R}^k$ 倍数的投影。若 $m \ge k$，则 $\pi|_M$ 满射到 $\mathbb{R}^k$，特别地，当 $m = k$时，它是一个微分同胚。

证明。 横截性意味着 $\pi|_M$ 是浸没，因此是开映射。

接下来，我们通过证明 $\pi|_M$ 的像是闭集，来说明若 $m \ge k$，则 $\pi|_M$ 是满射。反设其像不是闭集。令 $z \in \pi(M)$，并令 $r\colon [0,1) \to \pi(M)$为包含于 $\pi(M)$ 中、从 z到某个 $w \in \partial\pi(M)$ 的有限线段。由于 $\pi|_M$是满射到其像上的浸没， ${\pi|_M}^{-1}(r)$ 是 $M \subset \mathbb{R}^n$的一个子流形。对每个 $t \in [0,1)$ 以及每个点 $q \in {\pi|_M}^{-1}(r(t))$，注意到 $\ker d_q(\pi|_M) = T_q{\pi|_M}^{-1}(r(t))$，此外， $d_q(\pi|_M)$ 在 T_qM 中该子空间的正交补上是一个同构，我们将其记为 $T_q^{\perp}{\pi|_M}^{-1}(r(t)) \subset T_qM$。因此，存在唯一的向量 $v_q \in T_q^{\perp}{\pi|_M}^{-1}(r(t))$，使得 $d\pi(v_q) = r'(t)$。这就在 ${\pi|_M}^{-1}(r)$ 上给出了一个向量场。

我们注意到，对于任意 $v \in T_qM$，都可以将其写成 $v = v_\perp + v_{\ker}$，其中 $v_\perp \in T_q^{\perp}{\pi|_M}^{-1}(r(t))$，且 $v_{\ker} \in \ker d_q\pi = (T_q\mathcal{V}(q))^{\perp}$。令 $w \in T_q\mathcal{V}(q)$。如果 $v_\perp = 0$，则 $\langle v, w\rangle = \langle v_\perp, w\rangle = 0$。因此，设 $v_\perp \ne 0$。由于 $\langle v, w\rangle = \langle v_\perp, w\rangle$ 以及 $\|v\| \ge \|v_\perp\|$，我们有 $\left\langle \frac{v}{\|v\|}, w \right\rangle \le \left\langle \frac{v_\perp}{\|v_\perp\|}, w \right\rangle$。于是，对于任意 $w \in T_q\mathcal{V}(q)$ 和 $v \in T_qM$，有 $\angle(v, w) \ge \angle(w, v_\perp)$。因此我们得到

$$\angle(T_q^{\perp}{\pi|_M}^{-1}(r(t)), T_q\mathcal{V}(q)) \le \angle(T_qM, T_q\mathcal{V}(q)) \le \epsilon.$$

因此 $\|r'(t)\| \le \|v_q\| \le \frac{1}{\cos(\epsilon)}\|r'(t)\|$，其中 $\epsilon < \frac{\pi}{2}$ 已固定。任取点 $q_0 \in {\pi|_M}^{-1}(z)$，并令 $\sigma\colon [0,1) \to M$ 为从 q_0 出发的向量场 $q \mapsto v_q$ 的积分曲线。于是 σ 投影到 r。此外，由于对于每个 $q \in {\pi|_M}^{-1}(r)$， $d\pi$ 的范数在 v_q 上有下界， σ 具有有限长度。由 M 的完备性可知，存在极限点 $\sigma(1) \in M$，该点必映射到 r 的端点 w。这与 w 不属于 $\pi(M)$ 的假设矛盾。

最后，我们证明当 $m = k$时， $\pi|_M$ 是到其像上的微分同胚。根据引理 B.1， M 与每个水平 $\mathbb{R}^{n-k}\times\{v\}$ 的交集对于每个 $v \in \mathbb{R}^k$都是道路连通的。但

根据横截性，每个交集都是零维流形。因此，对于每个$v \in \mathbb{R}^k$， M 与每个水平 $\mathbb{R}^{n-k} \times \{v\}$ 的交集至多包含一个点，因而恰好包含一个点。因此，$\pi|_M$ 是到其像上的微分同胚。□

最后，我们需要以下关于子流形横截交序列的豪斯多夫收敛的引理。

引理 B.3. 设 $\{M_n : n \geq 0\}$ 是流形 X_0 中的一列连通嵌入 C^1 子流形，满足 $M_n \to M_0$ 在带基点的豪斯多夫拓扑中收敛，且 $TM_n \to TM_0$ 逐点收敛。设 N 是 X_0 中的另一个连通嵌入 C^1 子流形，满足 $M_n \cap N \neq \varnothing$，并且对所有 $n \geq 0$，交集均为横截交。那么 $M_n \cap N \to M_0 \cap N$ 在带基点的豪斯多夫拓扑中收敛。

证明。 任取 $x \in M_0 \cap N$中的一点。注意，只需证明对于包含 x的预紧开子集 $U_x \subset X_0$，$M_n \cap N \cap U_x \to M_0 \cap N \cap U_x$ 在豪斯多夫拓扑中收敛。令$m = \dim(M_0)$， $m + k = \dim(X_0)$， $r = \dim(N)$。那么 $\dim(M_0 \cap N) = r - k \geq 0$。

选取坐标图 $\phi : U_x \to (-1, 1)^{m+k} \subset \mathbb{R}^{m+k}$，其中 $U_x \subset X_0$ 是预紧开集， $\phi(M_0 \cap U_x) = (-1, 1)^m \times \{0\}^k$ 且 $\phi(N \cap U_x) = \{0\}^{m+k-r} \times (-1, 1)^r$。我们需要证明 $\phi(M_n \cap U_x) \cap (\{0\}^{m+k-r} \times (-1, 1)^r)$ 在豪斯多夫拓扑下收敛到 $\phi(M_0 \cap U_x) \cap (\{0\}^{m+k-r} \times (-1, 1)^r) = \{0\}^{m+k-r} \times (-1, 1)^{r-k} \times \{0\}^k$。注意，由于 $\phi(M_n \cap U_x)$ 在带基点的豪斯多夫拓扑下收敛到$\phi(M_0 \cap U_x)$，且 U_x 是预紧的。因此，对于任意 $0 < \epsilon < 1$，存在足够大的 n，使得 $\phi(M_n \cap U_x)$ 包含于 $(-1, 1)^m \times (-\epsilon, \epsilon)^k$ 中。

由于 ϕ 是 C^1，且分布 TM_n 逐点收敛到 TM_0，当 n 充分大时， $M_n \cap U_x$ 与$\{0\}^{m+k-r} \times \mathbb{R}^r$ 横截。事实上，若 $\{y_n\}$ 是一个满足 $y_n \in \phi(M_n \cap U_x)$且$y_n \to y_0$的序列，那么$T_{y_n}\phi(M_n \cap U_x)$逐点收敛到 $T_y\phi(M_0 \cap U_x) = \mathbb{R}^m \times \{0\}^k$。因此，当 n 充分大时， $M_n \cap U_x$ 与 $\{0\}^{m+k-r} \times \mathbb{R}^r$横截。

现在假设 n 充分大。由于 $\phi(M_n \cap U_x)$的像的切空间处处不与 $0 \times \mathbb{R}^r$相切， $\phi(M_n \cap U_x)$的每个连通分支都是一个函数的图像，其定义域是$(-1, 1)^m \times \{0\}^k$的子集。我们现在断言，当 n充分大时， $\phi(M_n \cap U_x)$的每个连通分支都是一个函数的图像，其定义域为$(-1, 1)^m \times \{0\}^k$。由于 M_n 嵌入在 X_F中， $\phi(M_n \cap U_x)$是 $\phi(U_x)$的一个嵌入子流形。若该断言不成立，则存在 $\phi(M_n \cap U_x)$的一个连通分支 C_n 以及 $y_n \in (-1, 1)^m$，使得$(y_n, z_n) \in \partial C_n$。由于 C_n真嵌入在 $\phi(U_x)$中且 $\epsilon < 1$，(y_n, z_n)是 C_n 的内点，并且$T_{(y_n,z_n)}C_n$ 与 $\{0\} \times \mathbb{R}^r$横截。这与 $\phi(M_n \cap U_x) \subset (-1, 1)^m \times \{0\}^k$矛盾。因此，我们有$\partial(\phi(M_n \cap U_x)) \subset \partial((-1, 1)^m) \times [-\epsilon, \epsilon]^k$，并且 $\partial\pi_m(\phi(M_n) \cap U_x) \subset \partial((-1, 1)^m)$（其中 π_m是到 $\mathbb{R}^{m+k}$中前 m 个坐标的投影）。因此， $\phi(M_n \cap U_x)$的每个连通分支都是一个函数的图像，其定义域为整个$(-1, 1)^m \times \{0\}^k$。

令 $d_n = d^{\mathrm{Haus}}(\phi(M_n \cap N \cap U_x)\ \phi(M_0 \cap N \cap U_x))$。于是，当 $n \to \infty$时，我们有 $d_n \to 0$。对于 $\phi(M_n \cap U_x)$ 的每个连通分支，都存在一个函数 $\theta_n : (-1, 1)^m \to (-1, 1)^k$，使得该连通分支恰为图 $\{(x, \theta_n(x)) : x \in (-1, 1)^m\}$。由此可知，该连通分支与 N 的交集为集合 $S = \{(x, \theta_n(x)) : x \in \{0\}^{m+k-r} \times (-1, 1)^{r-k}\}$。显然，

$$d^{\mathrm{Haus}}(S, \{0\}^{m+k-r} \times (-1, 1)^{r-k} \times \{0\}^k) \leq d_n,$$

当 $n \to \infty$时，它趋于 0。这表明 $\phi(M_n \cap N \cap U_x)$ 在豪斯多夫拓扑中收敛到 $\phi(M_0 \cap N \cap U_x)$。□

参考文献

[Ben00] E. J. Benveniste. 紧黎曼流形上等距格作用的刚性。几何泛函分析，10(3):516–542，2000年。

[BF04] Christian Bonatti 和 John Franks. 与多个叶层相切的霍尔德连续向量场。载于《现代动力系统及其应用》，第 299–306 页。剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[BF05] E. Jerome Benveniste 和 David Fisher. 不变刚性结构与不变近刚性结构的不存在性。《分析与几何通讯》，13(1):89–111，2005年。[BFH20] Aaron Brown、David Fisher 和 Sebastian Hurtado. SL(m,$\mathbb{Z}$) 作用的 Zimmer 猜想。《数学发明》，221(3):1001–1060，2020年。[BFH21] Aaron Brown、David Fisher 和 Sebastian Hurtado. 非一致格的 Zimmer 猜想与质量逃逸，2021年。[BFH22] Aaron Brown、David Fisher 和 Sebastian Hurtado. Zimmer 猜想：次指数增长、测度刚性与强性质 (T)。《数学年刊》(2)，196(3):891–940，2022年。[BM99] M. Burger 和 N. Monod. 高秩李群中格的有界上同调。《欧洲数学学会杂志》(JEMS)，1(2):199–235，1999年。[BM22] Jonathan Bowden 和 Kathryn Mann. C^0 边界作用的稳定性与不等价的 Anosov 流。《高等科学研究所科学年报》(4)，55(4):1003–1046，2022年。[Bre72] Glen E. Bredon.《紧变换群导论》。纯粹与应用数学丛书，第 46 卷。学术出版社，纽约—伦敦，1972年。[BRHW] Aaron Brown、Federico Rodriguez Hertz 和 Zhiren Wang. 个人通信。[BRHW17] Aaron Brown、Federico Rodriguez Hertz 和 Zhiren Wang. 双曲格作用的整体光滑与拓扑刚性。《数学年刊》(2)，186(3):913–972，2017年。[BRHW22] Aaron Brown、Federico Rodriguez Hertz 和 Zhiren Wang. 高秩格在流形上作用的不变测度与可测射影因子。《数学年刊》(2)，196(3):941–981，2022年。[Cha06] Isaac Chavel.《黎曼几何》，剑桥高等数学研究丛书第 98 卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2006年。现代导论。[CNS22] Chris Connell、Thang Nguyen 和 Ralf Spatzier. Carnot 度量、动力学与局部刚性。《遍历理论与动力系统》，42(2):614–664，2022年。[dC92] Manfredo Perdigão do Carmo.《黎曼几何》。数学：理论与应用。Birkhäuser Boston, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1992年。由 Francis Flaherty 根据葡萄牙语第二版译出。[Den32] A. Denjoy. 关于环面曲面上微分方程所定义的曲线。《纯粹与应用数学杂志》，11:333–376，1932年。[DH20] Bertrand Deroin 和 Sebastian Hurtado. 高秩半单李群中格的不可左序性，2020年。[dS22] Lucas HR de Souza. 将 n维 Sierpiński 地毯刻画为闭球的逆极限 ($n \neq 3$)。arXiv 预印本 arXiv:2203.11282，2022年。[DSVX22] Danijela Damjanovic、Ralf Spatzier、Kurt Vinhage 和 Disheng Xu. Anosov 作用：分类与 Zimmer 纲领，2022年。[Ebe96] Patrick B. Eberlein.《非正曲率流形的几何》。芝加哥数学讲座。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1996年。[EF97] Alex Eskin 和 Benson Farb. 高秩对称空间中的拟平坦与刚性。《美国数学学会杂志》，10(3):653–692，1997年。[Esk98] Alex Eskin. 高秩对称空间中非一致格的拟等距刚性。《美国数学学会杂志》，11(2):321–361，1998年。[FH03] John Franks 和 Michael Handel. 曲面上的保面积群作用。《几何与拓扑》，7 771，2003 757: – 。[Fis07] David Fisher. 群作用的局部刚性：过去、现在与未来。载于《动力学、遍历理论与几何》，数学科学研究所出版物第 54 卷，第 45–97 页。剑桥大学出版社，剑桥，2007年。[Fis20] David Fisher. 流形上的群作用：围绕 Zimmer 纲领。载于《遍历理论、几何与拓扑中的群作用——精选论文》，第 609–683 页。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，2020年。[FM03] David Fisher 和 G. A. Margulis. 余循环的局部刚性。载于《微分几何综述》，第 VIII 卷（马萨诸塞州波士顿，2002年），《微分几何综述》第 8 卷，第 191–234 页。国际出版社，马萨诸塞州萨默维尔，2003年。[FM05] David Fisher 和 Gregory Margulis. 近等距作用、性质 (T) 与局部刚性。《数学发明》，162(1):19–80，2005年。[FM09] David Fisher 和 Gregory Margulis. 高秩群及其格的仿射作用的局部刚性。《数学年刊》(2)，170(1):67–122，2009年。

[FM22] David Fisher 和 Karin Melnick. 光滑且解析的 $SL(n, \mathrm{R})$ 和 $SL(n, \mathrm{Z})$ 作用于闭 n 维流形. 2022年. 即将在《京都数学杂志》发表.[FS99] Benson Farb 和 Peter Shalen. 格的实解析作用. 《数学发明》，135(2):273–296，1999年.[FS00] Benson Farb 和 Peter Shalen. 格作用、3维流形与同调. 《拓扑学》，39(3):573–587，2000年. [Ghy93] Étienne Ghys. 富克斯群的微分刚性. 高等科学研究所数学出版物，78(1):163–185，1993年. [Ghy99] Étienne Ghys. 网络在圆周上的作用. 《数学发明》，137(1):199–231，1999年.[GS18] Alexander Gorodnik 和 Ralf Spatzier. 高秩格的射影作用的光滑因子与刚性. 《几何与拓扑》，22(2):1227–1266，2018年.[HIH77] Ernst Heintze 和 Hans-Christoph Im Hof. horosphere 的几何. 《微分几何杂志》，12(4):481–491（1978年），1977年. [Kan96] M. Kanai. 离散群作用刚性的新方法. 《几何与泛函分析》，6 1056，1996 6 943( ): – .[KKL22] Michael Kapovich、Sungwoon Kim 和 Jaejeong Lee. 蜿蜒双曲群作用的结构稳定性. 《朱西厄数学研究所杂志》，第1–58页，2022年.[KL96] A. Katok 和 J. Lewis. 格在环面上作用的全局刚性结果及保体积作用的新例子. 《以色列数学杂志》，93:253–280，1996年.[KL97] Bruce Kleiner 和 Bernhard Leeb. 对称空间和欧几里得建筑上的拟等距映射的刚性. 《巴黎科学院院报》数学辑 I，324(6):639–643，1997年. [KS97] A. Katok 和 R. J. Spatzier. 高秩阿贝尔群的 Anosov 作用和代数格作用的微分刚性. 《斯捷克洛夫数学研究所汇刊》，216（动力系统及相关问题）：292–319，1997年. [Kur05] S. Kuroki. 关于 SL(3, $\mathbb{R}$) 在 4维球面上的作用. 《基础与应用数学》，11(5):99–105，2005年. [Lab98] François Labourie. 流形上的大群作用. 载于《国际数学家大会论文集》，第 II 卷（柏林，1998年），特刊第 II 卷，第371–380页，1998年. [Mar00] Gregory Margulis. 刚性理论中的问题与猜想. 载于《数学：前沿与展望》，第161–174页。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000年.[MM21] Kathryn Mann 和 Jason Fox Manning. 双曲群作用于边界球面的稳定性，2021年.[MMW22] Kathrynn Mann、Jason Fox Manning 和 Theodore Weisman. 双曲群作用于其边界的稳定性. arXiv 预印本 arXiv:2206.14914，2022年.[MQ01] Gregory A. Margulis 和 Nantian Qian. 高实秩半单李群及其格的弱双曲作用的刚性. 《遍历理论与动力系统》，21(1):121–164，2001年.[Nav02] Andrés Navas. Kazhdan 群在圆周上的作用. 《高等师范学校科学年刊》（第4辑），35(5):749–758，2002年.[Pet06] Peter Petersen. 《黎曼几何》，数学研究生教材第171卷. 施普林格，纽约，第二版，2006年.[Pol02] Leonid Polterovich. 映射增长、群中的畸变与辛几何. 《数学发明》，150(3):655–686，2002年.[PR72] Gopal Prasad 和 M. S. Raghunathan. 半单群中的嘉当子群与格. 《数学年刊》（第2辑），96:296–317，1972年. [Rud76] Walter Rudin. 《数学分析原理》. 国际纯粹与应用数学丛书. 麦格劳-希尔图书公司，纽约-奥克兰-杜塞尔多夫，1976年.[Sak84] Takashi Sakai. 黎曼几何中的比较定理与有限性定理. 载于《测地线几何及相关主题》（东京，1982年），纯粹数学进展研究第3卷，第125–181页. 北荷兰出版社，阿姆斯特丹，1984年.[Sul85] Dennis Sullivan. 拟共形同胚与动力系统 II：结构稳定性意味着克莱因群的双曲性. 《数学学报》，155(1):243–260，1985年. [Uch85] Fuichi Uchida. 构造一个在4维球面上的连续 SL(3, R) 作用. 《数学科学研究所出版物》，21(2):425–431，1985年. [Wei11] Shmuel Weinberger. 受 C^0 Zimmer 纲领启发的一些评论. 载于《几何、刚性与群作用》，芝加哥数学讲座丛书，第262–282页. 芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，2011年.[Wit94] Dave Witte. 高 Q 秩算术群不能作用于1维流形. 《美国数学会会刊》，122(2):333–340，1994年. [Zim83] Robert J. Zimmer. 作用于紧流形的算术群. 《美国数学会通报》（新辑），8(1):90–92，1983年.

[Zim84] 罗伯特·J. . Zimmer . 半单群中的格在紧流形上的保体积作用 .
高等科学研究所数学出版物，(59):5–33, 1984.[Zim87] Robert J. Zimmer. 半单群和离散子群的作用。载于国际数学家大会论文集，第*1*、*2*卷（加利福尼亚州伯克利，*1986*），第1247–1258页。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1987年。

印第安纳大学数学系，印第安纳州布卢明顿，邮编47405电子邮件地址：
connell@indiana.edu

海德堡大学数学研究所，Im Neuenheimer Feld 205，海德堡，邮编69120电子邮件地址：
mislam@mathi.uni-heidelberg.de

佛罗里达州立大学数学系，塔拉哈西，佛罗里达州 32304电子邮件地址：tqn22@fsu.edu

密歇根大学数学系，安娜堡，密歇根州 48109 .
电子邮件地址：spatzier@umich.edu