arXiv:2303.00545v1 [math.NT] 1 Mar 2023

接近螺旋线的格点

Jack Dalton 和 Ognian Trifonov 南卡罗来纳大学数学系，南卡罗来纳州哥伦比亚 29208jrdalton@math.sc.edu

trifonov@math.sc.edu

摘要

我们得到了下界：仿射格中任意三个不同点若接近一条曲率和挠率都很小的螺旋线，则这三点之间的最大距离至少为该下界。

1 引言

估计位于曲线上或接近曲线的格点数量，这个问题有着悠久的历史。1926年，Jarník [7] 证明，长度为 $L > 3$ 的严格凸闭曲线上的整数点数量不超过 $3(2\pi)^{-1/3}L^{2/3} + O\left(L^{1/3}\right)$，且首项的指数和常数都是最优的。在对曲线作出更高阶光滑性假设后，许多作者得到了更精确的估计，其中包括斯温纳顿-戴尔[9] 以及博姆别里和皮拉 [1]。

估计靠近曲线的格点数量是一个较新的课题。关于这一课题及其应用的成果综述，可参见 [3] 和 [4]。

1972 年，齐格蒙德发表了一篇关于二维傅里叶级数球面求和的论文，其中一个关键部分是以下定理。

定理 1.（申策尔）半径为 R 的圆上，长度为 $\sqrt[3]{2}R^{1/3}$ 的弧至多包含两个格点。

原始证明出自申策尔，以下这个简短的证明则由佩尔琴斯基给出。

证明。设 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$ 和 $C(x_3, y_3)$ 是半径为R的圆上的不同格点。

用 a、 b 和 c 表示 $\triangle ABC$各边的长度，并用 S表示其面积。由于圆是严格凸曲线，因此有 $S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right| \geq \frac{1}{2}$。

另一方面，根据归于亚历山大的海伦的一条公式，我们有 $S = \dfrac{abc}{4R}$。因此， $abc \geq 2R$。

□

在论文 [5] 中，Howard 与第二作者将申策尔的结果推广到了曲率有界的平面曲线以及靠近平面仿射格的格点情形（其中，平面仿射格是集合 $\{\mathbf{v}_0 + m\mathbf{v}_1 + n\mathbf{v}_2 : \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{Z}, \ \}$其中 $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,$，且平面向量满足$\mathbf{v}_1$ 且 $\mathbf{v}_2$ 线性无关）。

关于靠近三维曲线的格点这一主题，相关论文寥寥无几。

Huang [6]对靠近曲线伸缩的格点数量给出了估计，该曲线的参数化为（$x, f_1(x)\ f_2(x)$），$x \in [a, b]$。Huang 的估计取决于伸缩参数 q、格点与曲线之间距离的上界 δ，以及一个依赖于函数 f_1 和 f_2 的常数，而该常数并未明确计算。

在 Letendre 博士论文的第 4 章中，他还对靠近曲线伸缩的格点数量给出了估计，该曲线的参数化为 $(x, f_1(x)\ f_2(x))$， $x \in [a, b]$。他的结果只要求对涉及 f_1 和 f_2的导数的某些量作出界定。

我们将考虑曲线为螺旋线这一特殊情形，并给出一般格中任意三个不同点之间最大距离的下界，其中这些点靠近一条螺旋线。我们将三维空间中的格定义如下。

定义 2. 设 $v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量，其中 v_1, v_2 和 v_3 线性无关。那么，以 v_0 为原点、由 v_1, v_2 和 v_3 生成的仿射格为

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(v_0, v_1, v_2, v_3) = \{v_0 + mv_1 + nv_2 + pv_3 : m, n, p \in \mathbb{Z}\}.$$

我们将在第 2 节中证明，对于每个格 $\mathcal{L}$，都存在正常数 $\mathcal{D}_L$ 和 $\mathcal{A}_L$ （取决于 $\mathcal{L}$），使得若 A_0 和 A_1 是 $\mathcal{L}$ 中两个不同的格点，则$|A_0A_1| \geq \mathcal{D}_L$；此外，若 A_0, A_1 和 A_2 是 $\mathcal{L}$ 中三个不共线格点，则 Area($\triangle A_0A_1A_2$) $\geq \mathcal{A}_L$。

我们的主要结果是

定理 3. 设 $\mathcal{H}$ 是一条曲率为 $\kappa > 0$、挠率为 $\tau > 0$ 的螺旋线，并设

$$0 \leq \delta \leq \min\left(\frac{\mathcal{D}_L}{4}, \frac{{\mathcal{D}_L}^2}{11\pi^3}(\kappa^2 + \tau^2), \frac{2\mathcal{A}_L}{11\pi}(\kappa^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}\right).$$

设 $\mathcal{L}$ 是仿射格，且 $\mathcal{L}$ 中的 A_0、 A_1和 A_2 是三个不同点，它们到螺旋线 $\mathcal{H}$ 的距离均在 δ 以内。那么， A_0、 A_1和 A_2 之间的最大距离至少为

$$\min\left(1.2{\mathcal{A}_L}^{\frac{1}{3}}\kappa^{-\frac{1}{3}} - 2\delta, \frac{\pi\tau}{\kappa^2 + \tau^2} - 2\delta\right).$$

The 上述定理将 Schinzel 的结果推广到了螺旋线的情形 .

推论 4. 设 $\mathcal{H}$ 是一条曲率为 $\kappa > 0$、挠率为 $\tau > 0$，且 $\tau\kappa^{\frac{1}{3}} \geq 0.4(\kappa^2+\tau^2)$ 的螺旋线。设 A_0、A_1 和 A_2 是 $\mathcal{H}$ 上三个互不相同的格点。那么，A_0、A_1 和 A_2 之间的最大距离至少为 $1.1\kappa^{-\frac{1}{3}}$。

本文的组织结构如下。我们在第 2 节证明一些辅助引理，在第 3 节证明主要结果。

我们预期，对于满足 $0 < c_1K < \kappa(s) < c_2K$ 且 $0 < c_3T < \tau(s) < c_4T$ 的曲线，也存在与主要结果类似的结论，其中 c_1、c_2、c_3 和 c_4 是正常数。

2 一些辅助结果

本节我们证明若干引理，这些引理将在定理 3 的证明中用到。

引理 5. 三维空间中顶点为不共线格点的三角形，其面积至少为 $1\ 2$。

证明。设 A、B 和 C 是 $\mathbb{R}^3$ 中的不共线格点。那么，$\triangle ABC$ 的面积等于 $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$。由于 A、B 和 C 是格点，向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 的分量都是整数。因此，叉积 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ 的分量也都是整数。于是，对于某个整数 n，$\text{Area}(\triangle ABC) = \frac{1}{2}\sqrt{n}$。由于点 A、B 和 C 不共线，$\text{Area}(\triangle ABC) \neq 0$，所以 $n \neq 0$。 □

接下来的两个引理在 $\mathbb{R}^2$ 情况下已于 [5] 中证明。这些引理很容易推广到 n 维情形。

引理6. 设 A、B、C和 C_1 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点，其中 $n \geq 2$。设 $\delta \geq 0$ 和 $|CC_1| \leq \delta$。记 S 为 $\triangle ABC$的面积，记 S_1 为 $\triangle ABC_1$的面积。则，

$$|S - S_1| \leq \frac{\delta|AB|}{2}.$$

证明. 设 h 为点 C 到直线 AB的距离，设 h_1 为点 C_1 到直线 AB的距离。则，$S = \frac{|AB|h}{2}$ 和 $S_1 = \frac{|AB|h_1}{2}$。

根据三角不等式，

$$h_1 \leq h + |CC_1| \leq h + \delta \quad \text{and} \quad h \leq h_1 + |CC_1| \leq h_1 + \delta.$$

因此，$|h - h_1| \leq \delta$，所以 $|S - S_1| = \frac{|AB||h - h_1|}{2} \leq \frac{\delta|AB|}{2}$。 □

引理7. 设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的三角形，其中 $n \geq 2$，其面积分别为 S 和 S_3。设 $\delta \geq 0$，并假设

$$|AA_1| \leq \delta,\ |BB_1| \leq \delta,\ and\ |CC_1| \leq \delta.$$

于是，

$$|S - S_3| \leq \frac{(|AB| + |AC| + |BC|)\delta}{2} + \frac{3\delta^2}{2}.$$

证明。令 S_1 为 $\triangle ABC_1$的面积，并令 S_2 为 $\triangle AB_1C_1$的面积。那么

$$\begin{aligned} |S - S_3| &= |S - S_1 + S_1 - S_2 + S_2 - S_3| \\ &\leq |S - S_1| + |S_1 - S_2| + |S_2 - S_3|. \end{aligned}$$

由引理6，$|S - S_1| \leq \frac{\delta|AB|}{2}$。将引理6 应用于点 A，C_1，B和 B_1，得到 $|S_1 - S_2| \leq \frac{\delta|AC_1|}{2}$。最后，将引理6 应用于点 B_1，C_1，A和 A_1，得到 $|S_2 - S_3| \leq \frac{\delta|B_1C_1|}{2}$。

因此，

$$|S - S_3| \leq \frac{\delta(|AB| + |AC_1| + |B_1C_1|)}{2}. \tag{1}$$

注意，三角不等式给出 $|AC_1| \leq |AC| + |CC_1| \leq |AC| + \delta$ 和 $|B_1C_1| \leq |B_1B| + |BC| + |CC_1| \leq |BC| + 2\delta$。利用 $|AC_1|$ 和 $|B_1C_1|$在（1）中的上界，可得到 $|S - S_3|$ 的所需上界。□

我们还需要以下这个简单的引理。

引理8. 对所有 x 属于区间 $(0, \pi)$，都有 $0 < \sin x - x\cos x < \frac{x^3}{3}$。此外，对所有 x属于区间 $(0, \pi/2]$，都有 $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$。

证明. 令 $f(x) = \sin x - x\cos x$。注意 $f(0) = 0$。考虑 $f'(x) = x\sin x$。显然，$f'(x) > 0$在 $(0, \pi)$ 上成立，因此我们得到了不等式的前半部分。

现在令 $g(x) = \sin x - x\cos x - \frac{x^3}{3}$。注意 $g'(x) = x(\sin x - x)$。如果 $x > 0$，$\sin x - x < 0$，因此 $g'(x) < 0$ 在这个区间上也成立。因此，由于 $g(0) = 0$ 且 g 在 $(0, \pi)$ 上递减，我们得到了所需的第二个不等式。为证明引理中的最后一个不等式，考虑函数 $h(x) = \frac{\sin x}{x}$。我们有 $h'(x) = \frac{x\cos x^2 \quad \sin}{}$。我们在上文证明了，对于 $x \in (0, \pi)$，$\sin x - x\cos x > 0$。因此，$h(x)$ 在 $(0, \pi/2]$ 上递减，其最小值为$h(\pi/2) = 2/\pi$。□

在此处以及本文最后部分，当 A 是点且 $\vec{v}$ 是向量时，方程 $A = \vec{v}$ 表示 $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$，其中 O 是坐标系的原点。

螺旋线是一种曲率和挠率均为常数的空间曲线。设 $A_0 < A_1, A_2$ 是螺旋线 $\mathcal{H}$上的三个点。在下一个引理中，我们将得到距离 $|A_0A_1|, |A_1A_2|, |A_0A_2|$以及三角形 $\triangle A_0A_1A_2$面积的公式。

引理 9. 设 $\mathcal{H}$ 是曲率为 $\kappa > 0$ 、挠率为 $\tau > 0$的螺旋线。设 A_0, A_1和 A_2 是螺旋线 $\mathcal{H}$ 上的三个不同点，它们到螺旋线原点的弧长分别为 s_0, s_1, s_2，其中 $s_0 < s_1 < s_2$。对 $i = 0$，定义 $a = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$, $b = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}$, $t_i = \frac{s_i}{\sqrt{a^2+b^2}}$，其中 $h_1 = t_1 - t_0$ $h_2 = t_2 - t_1$，且。那么，

(a) $|A_0A_1|^2 = 4a^2\text{正弦}^2\left(\frac{h_1}{2}\right) + b^2h_1^2$、 $|A_1A_2|^2 = 4a^2\text{正弦}^2\left(\frac{h_2}{2}\right) + b^2h_2^2$，以及 $|A_0A_2|^2 = 4a^2\text{正弦}^2\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right) + b^2(h_1+h_2)^2$;

(b) $(\triangle A_0A_1A_2\text{的面积})^2 = (T_1 + T_2 + T_3)/4$，其中

$T_1 := 16a^4\text{正弦}^2\frac{h_1}{2}\text{正弦}^2\frac{h_2}{2}\text{正弦}^2\frac{h_1+h_2}{2}$，

$T_2 := a^2b^2h_1^2h_2^2\left(\frac{\text{正弦}\frac{h_2}{2}}{\frac{h_2}{2}} - \frac{\text{正弦}\frac{h_1}{2}}{\frac{h_1}{2}}\right)$，并且

$T_3 := 16a^2b^2h_1h_2\text{正弦}\frac{h_1}{2}\text{正弦}\frac{h_2}{2}\text{正弦}^2\frac{h_1+h_2}{4}$。

证明。首先，我们考虑一条螺旋线 $\mathcal{H}(a, b)$，其参数化为

$$\vec{r}(t) = \langle a\cos t, a\sin t, bt\rangle. \tag{2}$$

容易验证，我们有 $\kappa = \dfrac{a}{a^2+b^2}$、 $\tau = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ 和 $\kappa^2 + \tau^2 = \dfrac{1}{a^2+b^2}$。由此可得 $a = \dfrac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$、 $b = \dfrac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}$。此外，对于自然参数 s，我们有 $s = t\sqrt{a^2+b^2}$。我们有

$$A_0 = (a\cos t_0, a\sin t_0, bt_0), A_1 = (a\cos t_1, a\sin t_1, bt_1), \text{ and } A_2 = (a\cos t_2, a\sin t_2, bt_2)$$

其中 $t_0 < t_1 < t_2$。

因此，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1A_0} &= \langle a(\cos t_0 - \cos t_1), a(\sin t_0 - \sin t_1), b(t_0 - t_1)\rangle, \text{ and}\\ \overrightarrow{A_1A_2} &= \langle a(\cos t_2 - \cos t_1), a(\sin t_2 - \sin t_1), b(t_2 - t_1)\rangle.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{A_1A_0}\right|^2 &= a^2(\cos t_0 - \cos t_1)^2 + a^2(\sin t_0 - \sin t_1)^2 + b^2(t_0 - t_1)^2\\ &= a^2(2 - 2\cos t_0\cos t_1 - 2\sin t_0\sin t_1) + b^2(t_0 - t_1)^2\\ &= a^2(2 - 2\cos(t_0 - t_1)) + b^2(t_0 - t_1)^2\\ &= a^2(2 - 2\cos h_1) + b^2h_1^2\\ &= 4a^2\sin^2\left(\frac{h_1}{2}\right) + b^2h_1^2.\end{aligned}$$

同样可以得到 $|A_1A_2|$ 和 $|A_0A_2|$ 的公式。

对于 $\triangle A_0A_1A_2$ 的面积，我们使用

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{A_1A_0}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}}{\left|\overrightarrow{A_1A_0}\right|\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|} \\
1-\sin^2\theta &= \frac{\left(\overrightarrow{A_1A_0}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}\right)^2}{\left|\overrightarrow{A_1A_0}\right|^2\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2} \\
\left|\overrightarrow{A_1A_0}\right|^2\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2-\left(\overrightarrow{A_1A_0}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}\right)^2 &= \left|\overrightarrow{A_1A_0}\right|^2\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|^2\sin^2\theta \\
&= 4\mathrm{Area}(\triangle A_0A_1A_2)^2,
\end{aligned}$$

其中， θ 是 $\overrightarrow{A_1A_0}$ 与 $\overrightarrow{A_1A_2}$之间的角。接下来我们计算点积:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A_1A_0}\cdot\overrightarrow{A_1A_2} &= a^2(\cos t_0-\cos t_1)(\cos t_2-\cos t_1) \\
&\quad + a^2(\sin t_0-\sin t_1)(\sin t_2-\sin t_1)+b^2(t_0-t_1)(t_2-t_1) \\
&= a^2(\cos t_0\cos t_2-\cos t_1\cos t_2-\cos t_0\cos t_1+\cos^2 t_1) \\
&\quad + a^2(\sin t_0\sin t_2-\sin t_1\sin t_2-\sin t_0\sin t_1+\sin^2 t_1)+b^2(t_0-t_1)(t_2-t_1) \\
&= a^2(\cos(h_2+h_1)-\cos h_2-\cos h_1+1)-b^2h_1h_2 \\
&= a^2((1-\cos h_2)(1-\cos h_1)-\sin h_2\sin h_1)-b^2h_1h_2 \\
&= 4a^2\sin\frac{h_1}{2}\sin\frac{h_2}{2}\left(\sin\frac{h_1}{2}\sin\frac{h_2}{2}-\cos\frac{h_1}{2}\cos\frac{h_2}{2}\right)-b^2h_1h_2 \\
&= -4a^2\sin\frac{h_1}{2}\sin\frac{h_2}{2}\cos\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)-b^2h_1h_2.
\end{aligned}$$

因此，我们得到

$$
\begin{aligned}
4\mathrm{Area}(\triangle A_0A_1A_2)^2 &= \left(4a^2\sin^2\frac{h_1}{2}+b^2h_1^2\right)\left(4a^2\sin^2\frac{h_2}{2}+b^2h_2^2\right)\\
&\quad-\left(4a^2\sin\frac{h_1}{2}\sin\frac{h_2}{2}\cos\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)+b^2h_1h_2\right)^2\\
&= 16a^4\sin^2\frac{h_1}{2}\sin^2\frac{h_2}{2}\sin^2\frac{h_1+h_2}{2}+4a^2b^2\left(h_1^2\sin^2\frac{h_2}{2}+h_2^2\sin^2\frac{h_1}{2}\right)\\
&\quad-8a^2b^2h_1h_2\sin\frac{h_1}{2}\sin\frac{h_2}{2}\cos\frac{h_1+h_2}{2}\\
&= 16a^4\sin^2\frac{h_1}{2}\sin^2\frac{h_2}{2}\sin^2\frac{h_1+h_2}{2}+4a^2b^2\left(h_1\sin\frac{h_2}{2}-h_2\sin\frac{h_1}{2}\right)^2\\
&\quad+8a^2b^2h_1h_2\sin\frac{h_1}{2}\sin\frac{h_2}{2}\left(1-\cos\frac{h_1+h_2}{2}\right)\\
&= 16a^4\sin^2\frac{h_1}{2}\sin^2\frac{h_2}{2}\sin^2\frac{h_1+h_2}{2}+a^2b^2h_1^2h_2^2\left(\frac{\sin\frac{h_2}{2}}{\frac{h_2}{2}}-\frac{\sin\frac{h_1}{2}}{\frac{h_1}{2}}\right)^2\\
&\quad+16a^2b^2h_1h_2\sin\frac{h_1}{2}\sin\frac{h_2}{2}\sin^2\frac{h_1+h_2}{4}.
\end{aligned}
$$

我们已经证明了螺旋线 $\mathcal{H}(a,b)$ 这一情形下的引理，其参数化为 2.

现在，考虑一条处于一般位置的螺旋线 $\mathcal{H}'$，其曲率为 $\kappa>0$，挠率为 $\tau>0$。设 A_0、A_1 和 A_2 是螺旋线 $\mathcal{H}'$ 上的三个不同点，它们到螺旋线原点的弧长分别为 s_0、s_1、s_2，且 $0<s_0<s_1<s_2$。

这里我们用到曲线局部理论基本定理的唯一性部分（例如，参见 do Carmo [2] p.19）。该定理指出，若 α、$\alpha':I\to\mathbb{R}$ 是以 s 为自然参数的正则参数曲线，且对所有 s，它们具有相同的曲率 $\kappa(s)$ 和相同的挠率 $\tau(s)$，那么 α' 与 α 只相差一个刚性运动；也就是说，存在一个正行列式的 $\mathbb{R}^3$ 的正交线性映射 ρ，以及一个向量 c，使得 $\alpha'=\rho\circ\alpha+c$。

由于螺旋线 $\mathcal{H}'$ 与螺旋线 $\mathcal{H}(a,b)$具有相同的曲率 κ 和相同的挠率τ，因此存在一个刚性运动，将螺旋线 $\mathcal{H}'$ 映射到螺旋线 $\mathcal{H}(a,b)$；它还将点 A_0,A_1,A_2 分别映射到点 A_0',A_1',A_2'，这些点位于 $\mathcal{H}(a,b)$上，且对应的自然参数值为 s_0,s_1,s_2。

注意，刚性运动不会改变两点之间的距离，并且会保持三角形的面积不变。因此，$|A_0A_1|=|A_0'A_1'|$, $|A_1A_2|=|A_1'A_2'|$, $|A_0A_2|=|A_0'A_2'|$, Area($\triangle A_0A_1A_2$) = Area ($\triangle A_0'A_1'A_2'$)。此外，a,b, h_1和 h_2 由s_0, s_1, s_2, κ 和 τ唯一确定。因此，当螺旋线 $\mathcal{H}'$ 处于一般位置时，引理成立。

□

很容易估计项 T_1 和 T_3。要估计 T_2，我们使用以下引理。

Le理 10. 设 h_1 和 h_2 为实数，且都属于区间 $(0, 2\pi)$。 $en,$

$$\left(\frac{\sin\frac{h_2}{2}}{\frac{h_2}{2}} - \frac{\sin\frac{h_1}{2}}{\frac{h_1}{2}}\right)^2 \leq \frac{\max(h_1, h_2)^2}{144}(h_1 - h_2)^2.$$

证明。对函数 $\sin_x{}^x$ 应用中值定理，可知存在 ζ，位于 $\frac{h_1}{2}$ 和 $\frac{h_2}{2}$ 之间，使得

$$\left(\frac{\sin\frac{h_2}{2}}{\frac{h_2}{2}} - \frac{\sin\frac{h_1}{2}}{\frac{h_1}{2}}\right)^2 = \left(\frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}\right)^2 \left(\frac{\zeta\cos\zeta - \sin\zeta}{\zeta^2}\right)^2.$$

根据引理 8，我们得到 $0 < \sin\underline{x - x\cos}_{x^2}{}^x < \frac{x}{3}$ 对每个 $x \in (0, \pi)$。因此，

$$\left(\frac{\sin\frac{h_2}{2}}{\frac{h_2}{2}} - \frac{\sin\frac{h_1}{2}}{\frac{h_1}{2}}\right)^2 < \left(\frac{h_1}{2} - \frac{h_2}{2}\right)^2 \left(\frac{\zeta}{3}\right)^2 \leq \frac{\max(h_1, h_2)^2}{144}(h_1 - h_2)^2.$$

□

接下来的两个引理将证明引言中提到的正常数 $\mathcal{D}_L$ 和 $\mathcal{A}_L$的存在性。

引理 11。设 v_1、 v_2和 v_3 是 $\mathbb{R}^3$中的线性无关向量。那么，存在一个常数 $c > 0$（取决于 v_1、 v_2 和 v_3），使得对于任意满足（m_1， m_2， m_3）$\neq (0, 0, 0)$的整数 m_1、 m_2和 m_3，均有 $||m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3|| \geq c$。

证明。我们有 $||m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3||^2 = (m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3) \cdot (m_1v_1 + m_2v_2 + m_3v_3) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(v_i \cdot v_j)m_im_j := Q(m_1, m_2, m_3).$

二次型 $Q(m_1, m_2, m_3)$ 是正定的，因为 v_1、 v_2 和 v_3 线性无关。记 $M(Q)$ 为二次型 $Q(m_1, m_2, m_3)$ 的矩阵。由于 $M(Q)$ 是对称的，且 $Q(m_1, m_2, m_3)$ 是正定的， $Q(M)$ 的特征值都是正实数，记为 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$。此外，根据实对称矩阵的谱定理，存在一组由向量 w_1、 w_2、 w_3 组成的 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基，其中 w_1、 w_2 和 w_3 是分别对应特征值 λ_1、 λ_2 和 λ_3 的特征向量。这意味着 $Q(m_1, m_2, m_3)$ 在单位球面上的最小值为 λ_1。因此，该引理在 $c = \sqrt{\lambda_1}$ 下成立。

□

引理 12. 考虑格 $\mathcal{L} = \mathcal{L}(v_0, v_1, v_2) = \{v_0 + mv_1 + nv_2 + pv_3 : \ m, n, p \in \mathbb{Z}\}$。存在正常数 $\mathcal{D}_L$ 和 $\mathcal{A}_L$（取决于 $\mathcal{L}$），使得：(i) 如果 A_0 和 A_1 是 $\mathcal{L}$ 中任意两个不同的格点，则 $|A_0A_1| \geq \mathcal{D}_L$；

and

(ii) 如果 A_0、 A_1 和 A_2 是 $\mathcal{L}$ 中任意三个不共线格点，则面积($\triangle A_0A_1A_2$) $\geq \mathcal{A}_L$。

证明。 若 A_0 和 A_1 是 $\mathcal{L}$中的两个不同格点，则 $\overrightarrow{A_0A_1} = m'v_1 + n'v_2 + p'v_3$ 其中m'， n'，p' 为整数，且 $(m', n', p') \neq (0, 0, 0)$。现在，(i) 由引理 11得证。

接下来，设 A_0、 A_1 和 A_2 是 $\mathcal{L}$ 中三个不共线格点。我们有，Area($\triangle A_0A_1A_2$) $= ||\overrightarrow{A_0A_1} \times \overrightarrow{A_0A_2}||/2$。

由于 $\overrightarrow{A_0A_2} \neq \vec{0}$ A_0 A_1 A_2 $\triangle A_0A_1A_2 \neq 0$ $\overrightarrow{A_0A_1}\times$、 和 不共线，因此 Area( )。所以，。

此外，由于 $\overrightarrow{A_0A_1} = m'v_1 + n'v_2 + p'v_3$ 对于某些整数 m'、 m''、 n'、 n''、 p' 和 p''成立，因此

$$\overrightarrow{A_0A_1} \times \overrightarrow{A_0A_2} = q(v_1 \times v_2) + r(v_2 \times v_3) + s(v_1 \times v_3),$$

其中 $q = m'n'' - m'n''$、 $r = n'p'' - n''p'$ 和 $s = m'p'' - m''p'$。

由于 $\overrightarrow{A_0A_1} \times \overrightarrow{A_0A_2} \neq \vec{0}$，我们有（$q$、 r、 s） $\neq$ （0, 0, 0）。

Mo此外，向量 $v_1 \times v_2$、 $v_2 \times v_3$ 和 $v_1 \times v_3$ 是线性无关的。

事实上，如果 c_1（$v_1 \times v_2$） $+ c_2$（$v_2 \times v_3$） $+ c_3$（$v_1 \times v_3$） $= 0$，那么将最后一个等式与 v_3 作点积，可得 c_1（（$v_1 \times v_2$） $\cdot v_3$） $= 0$。然而，三重积（$v_1 \times v_2$）$\cdot v_3 \neq 0$，因为向量 v_1、 v_2 和 v_3 是线性无关的。类似地，我们证明 $c_2 = 0$ 和 $c_3 = 0$。

因此，向量 $v_1 \times v_2$、 $v_2 \times v_3$ 和 $v_1 \times v_3$ 线性无关 .

现在，(ii) 可由引理 11得出。 □

3 主要结果的证明

首先，我们考虑格点位于螺旋线上的情形。

定理 13. 设 $\mathcal{H}$ 是一条曲率为 $\kappa > 0$ 、挠率为 $\tau > 0$ 的螺旋线。设 $\mathcal{L}$ =$\mathcal{L}$(v_0, v_1, v_2, v_3) 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一个仿射格，并设 A_0、 A_1 和 A_2 是 $\mathcal{L}$ 中三个不同的点，它们也位于螺旋线 $\mathcal{H}$ 上，且它们到螺旋线原点的弧长分别为 s_0、s_1、 s_2，其中 $s_0 < s_1 < s_2$。那么 $|A_0A_2| \geq \min\left(\frac{\pi\tau}{\kappa^2+\tau^2}, 1.5\mathcal{A}_L{}^{\frac{1}{3}}\kappa^{-\frac{1}{3}}\right)$，且弧 $\overset{\frown}{A_0A_2}$ 的长度至少为 $\min\left(\frac{\pi}{\sqrt{\kappa^2+\tau^2}}, 2.4\mathcal{A}_L{}^{\frac{1}{3}}\kappa^{-\frac{1}{3}}\right)$。

证明。定义 $a = \frac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$和 $b = \frac{\tau}{\kappa^2+\tau^2}$。回忆 $s = \sqrt{a^2+b^2}t$。令 $t_i = \frac{s_i}{\sqrt{a^2+b^2}}$，其中 $i = 0$, 1, 2。则 $0 < t_0 < t_1 < t_2$ 和 $A_i = \vec{r}(t_i)$，其中 $i = 0$，1，2。令 $h_1 = t_1 - t_0$ 和 $h_2 = t_2 - t_1$。

我们考虑两种情形。

情形 I: $h_1 + h_2 \geq \pi$。

那么这段弧的弧长 $\overset{\frown}{A_0A_2}$ 为

$$s_2 - s_0 = (h_1 + h_2)\sqrt{a^2 + b^2} \geq \pi\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\pi}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}}.$$

此外，根据引理 9(i)

$$|A_0A_2| \geq b(h_1 + h_2) \geq \pi b = \frac{\pi\tau}{\kappa^2 + \tau^2}.$$

注意，无法期望得到仅依赖于 κ 的 $|A_0A_2|$ 的非平凡下界。例如，考虑 a 是一个较大的整数，$b = \frac{1}{2\pi}$、 $t_0 = 0$、 $t_1 = 2\pi$，且 $t_2 = 4\pi$ 的情形。

情形 II: $h_1 + h_2 < \pi$。

记 S 为 $\triangle A_0A_1A_2$的面积。根据引理 9 (ii)，我们有 $4S^2 = T_1 + T_2 + T_3$，其中

$T_1 = 16a^4 \sin^2\frac{h_1}{2}\sin^2\frac{h_2}{2}\sin^2\frac{h_1+h_2}{2}$,

$T_2 = a^2b^2h_1^2h_2^2\left(\frac{\sin\frac{h_2}{2}}{\frac{h_2}{2}} - \frac{\sin\frac{h_1}{2}}{\frac{h_1}{2}}\right)^2$, and

$T_3 = 16a^2b^2h_1h_2\sin\frac{h_1}{2}\sin\frac{h_2}{2}\sin^2\frac{h_1+h_2}{4}$.

S由于 $0 < h_1 + h_2 < \pi$，我们有 $T_1 > 0$， $T_2 \geq 0$，以及 $T_3 > 0$。因此， $S > 0$，所以点 A_0、 A_1和 A_2 不共线。现在，根据引理 12 我们有 $S \geq \mathcal{A}_L > 0$。于是得到

$$4\mathcal{A}_L{}^2 \leq T_1 + T_2 + T_3. \tag{3}$$

接下来我们给出 T_1、 T_2 和 T_3 的界。

由于当 $x > 0$ 时， $0 < h_1 + h_2$ 且 $\sin x < x$，我们得到

$$T_1 \leq \frac{a^4h_1^2h^2(h_1 + h_2)^2}{4} \leq \frac{a^4(h_1 + h_2)^6}{64}. \tag{4}$$

（此处及下文中，我们使用不等式 $ab \leq (a + b)^2/4$。）

接下来，根据引理 10我们有

$$2\mathcal{A}_L{}^2 \leq T_2 \leq a^2b^2h_1^2h_2^2\frac{\max(h_1, h_2)^2}{144}(h_1 - h_2)^2 < a^2b^2\frac{(h_1 + h_2)^8}{2304}.$$

由于 $h_1 + h_2 < \pi$，我们得到，

$$T_2 < a^2b^2\frac{\pi^2(h_1 + h_2)^6}{2304}. \tag{5}$$

再次对 $six < x$ 使用 $x > 0$，我们再次得到

$$T_3 < a^2b^2h_1^2h_2^2\frac{(h_1 + h_2)^2}{4} \leq a^2b^2\frac{(h_1 + h_2)^6}{64}. \tag{6}$$

将方程（3）与界（4）、（5）和（6）结合起来，我们得到

$$4{\mathcal{A}_L}^2 \leq (h_1+h_2)^6 a^2 \left(\frac{a^2}{64}+b^2\left(\frac{1}{64}+\frac{\pi^2}{2304}\right)\right).$$

现在 $\frac{1}{64}+\frac{\pi^2}{2304}<0.02$。因此，

$$200{\mathcal{A}_L}^2 < (h_1+h_2)^6 a^2(a^2+b^2). \tag{7}$$

此外， $200^{1/6}>2.4$，所以

$$h_1+h_2 > 2.4{\mathcal{A}_L}^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{6}}, \tag{8}$$

在情形 2 中。

Recall that $s_2-s_0=(h_1+h_2)\sqrt{a^2+b^2}$, $a=\dfrac{\kappa}{\kappa^2+\tau^2}$, and $a^2+b^2=\dfrac{1}{\kappa^2+\tau^2}$.
We get,

$$s_2-s_0 > 2.4{\mathcal{A}_L}^{\frac{1}{3}}\kappa^{-\frac{1}{3}}, \tag{9}$$

从而完成了所述的关于.....弧长的下界 $\overset{\frown}{A_0A_2}$。

接下来，我们将得到 $|A_0A_2|$ 的一个下界。

在这种情况下，利用引理 8 可得 $\sin\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right) \geq \frac{1}{\pi}(h_1+h_2)$。由引理 9 (i)
$|A_0A_2|^2=4a^2\sin^2\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right)+b^2(h_1+h_2)^2$。因此，

$$|A_0A_2| \geq \frac{2}{\pi}(h_1+h_2)(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\pi}(s_2-s_0),$$

在情形 2 中。利用（9）可得 $|A_0A_2| \geq \dfrac{4.8}{\pi}{\mathcal{A}_L}^{\frac{1}{3}}\kappa^{-\frac{1}{3}}$。

由于 $\frac{4.8}{\pi}>1.5$，我们得到 $|A_0A_2|$ 的上述界。

我们已经证明，对于螺旋线 $\mathcal{H}(a,b)$ 的情形，定理成立，其参数化为$\vec{r}(t)=\langle a\cos t, a\sin t, bt\rangle$。

□

接下来证明推论4。

证明。 首先，由引理 5 在 $\mathbb{R}^3$ 中的标准格情形下， $\mathcal{A}_L=\frac{1}{2}$。因此，条件 $\tau\kappa^{\frac{1}{3}}\geq 0.4(\kappa^2+\tau^2)$ 意味着 $\dfrac{\pi\tau}{\kappa^2+\tau^2} > 1.5{\mathcal{A}_L}^{\frac{1}{3}}\kappa^{-\frac{1}{3}}$在标准格 $\mathcal{L}$ 的情形下。注意到 $\frac{1.5}{\sqrt[3]{2}}>1.1$，即可得出推论。 □

.

最后，我们证明定理3。

证明。设

$$0 < \delta \leq \min\left(\frac{\mathcal{D}_L}{4}, \frac{{\mathcal{D}_L}^2}{11\pi^3}(a^2+b^2)^{-1}, \frac{2\mathcal{A}_L(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}}{11\pi}\right).$$

设 A_0'、 A_1' 和 A_2' 是距螺旋线 $\mathcal{H}$ 不超过 δ 的三个互不相同的格点。因此，螺旋线上存在点 A_0、 A_1 和 A_2 ，使得

$$|A_0A_0'| \leq \delta, \quad |A_1A_1'| \leq \delta, \quad \text{and } |A_2A_2'| \leq \delta.$$

由于 A_0'、 A_1'和 A_2' 都在 $\mathcal{L}$中，根据引理12 可得 $|A_0'A_1'| \geq \mathcal{D}_L$、 $|A_0'A_2'| \geq \mathcal{D}_L$和 $|A_1'A_2'| \geq \mathcal{D}_L$。由于 $\delta \leq \mathcal{D}_L/4$根据三角不等式，可得

$$|A_0A_2| \geq |A_0'A_2'| - |A_0A_0'| - |A_2A_2'| \geq \mathcal{D}_L - 2\delta \geq \mathcal{D}_L/2.$$

同理， $|A_0A_1| \geq \mathcal{D}_L/2$ 和 $|A_1A_2| \geq \mathcal{D}_L/2$ 。因此，点 A_0、 A_1 和 A_2 互不相同。与 A_0、 A_1 和 A_2 对应的自然参数值分别为 s_0、 s_1 和 s_2。不失一般性，我们可以假设 $s_0 < s_1 < s_2$ （否则重新标记A_0'、 A_1' 和 A_2'）。与前面一样，令 $t_i = s_i\ (a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$，其中 $i = 0$、1、2、 $h_1 = t_1 - t_0 > 0$ 和 $h_2 = t_2 - t_1 > 0$。

我们考虑两种情形。

情形 I: $h_1 + h_2 \geq \pi$。

在这 种情形中，与定理13的证明完全相同，我们得到

$$|A_0A_2| \geq \frac{\pi\tau}{\kappa^2+\tau^2}.$$

现在，根据三角不等式，我们得到

$$|A_0'A_2'| \geq |A_0A_2| - |A_0A_0'| - |A_2A_2'| \geq |A_0A_2| - 2\delta,$$

so

$$|A_0'A_2'| \geq \frac{\pi\tau}{\kappa^2+\tau^2} - 2\delta.$$

情形 II。 $h_1 + h_2 \leq \pi$。

这里，我们首先证明 A_0'、 A_1' 和 A_2' 不在同一直线上。

回忆 $|A_0A_1| \geq \mathcal{D}_L/2$。因此， $s_1 - s_0 \geq |A_0A_1| \geq \mathcal{D}_L/2$。由于 $s_1 - s_0 = h_1(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$，我们得到 $h_1 \geq \frac{\mathcal{D}_L}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$。类似地， $s_2 - s_1 \geq \mathcal{D}_L/2$ 和 $h_2 \geq \frac{\mathcal{D}_L}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$。

将 $\triangle A_0A_1A_2$ 的面积记为 S。

根据引理 9 （ii），我们有 $4S^2 = T_1 + T_2 + T_3$，其中 $T_1 = 16a^4\text{正弦}^2\frac{h_1}{2}\text{正弦}^2\frac{h_2}{2}\text{正弦}^2\frac{h_1+h_2}{2}$， $T_2 \geq 0$，以及 $T_3 > 0$。

由于 $h_1 + h_2 \leq \pi$，由引理8

$$T_1 \geq \frac{16}{\pi^6}h_1^2h_2^2(h_1+h_2)^2.$$

因此， $4S^2 \geq \frac{16}{\pi^6} h_1^2 h_2^2 (h_1+h_2)^2$。我们得到：

$$S \geq \frac{2}{\pi^3} h_1 h_2 (h_1+h_2). \tag{10}$$

将 $\triangle A_0' A_1' A_2'$ 的面积记为 S_3。
假设点 A_0'、 A_1' 和 A_2' 在一条直线上。那么， $S_3 = 0$。
应用引理7于 $\triangle A_0 A_1 A_2$ 和 $\triangle A_0' A_1' A_2'$ ，我们得到

$$|S - S_3| \leq \frac{\delta(|A_0A_1| + |A_1A_2| + |A_0A_2|)}{2} + \frac{3\delta^2}{2}. \tag{11}$$

现在， $|A_0A_1| < s_1 - s_0$、 $|A_1A_2| < s_2 - s_1$和 $|A_0A_2| < s_2 - s_0$，因此我们得到

$$S \leq \delta(s_2 - s_0) + \frac{3\delta^2}{2}.$$

由于， $s_2 - s_0 \geq |A_0A_1| + |A_1A_2| \geq \mathcal{D}_L$ 和 $\delta \leq \mathcal{D}_L/4$，我们有 $\delta \leq (s_2 - s_0)/4$，因此

$$S \leq \frac{11}{8}\delta(s_2 - s_0) = \frac{11}{8}\delta(h_1+h_2)(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}. \tag{12}$$

结合（12）和（10，我们得到

$$\frac{2}{\pi^3} h_1 h_2 (h_1+h_2) \leq S \leq \frac{11}{8}\delta(h_1+h_2)(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

因此，

$$\frac{4}{11\pi^3} h_1 h_2 \leq \delta.$$

现在， $h_1 = t_1 - t_0 = (s_1 - s_0)(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} > |A_0A_1|(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{\mathcal{D}_L}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$。类似地， $h_2 > \frac{\mathcal{D}_L}{2}(a^2+b^2)^{-\frac{1}{2}}$。因此，

$$\delta > \frac{{\mathcal{D}_L}^2}{11\pi^3}(a^2+b^2)^{-1},$$

这与 δ的上界矛盾，因此我们的假设不成立。于是，点 A_0'、 A_1' 和 A_2' 不在同一条直线上。由引理12 S_3， $\triangle A_0' A_1' A_2'$ 的面积至少为 $\mathcal{A}_L$。接下来，我们求 $\triangle A_0 A_1 A_2$面积的下界。利用（11）可得

$$S \geq \mathcal{A}_L - \frac{\delta(|A_0A_1| + |A_1A_2| + |A_0A_2|)}{2} - \frac{3\delta^2}{2}.$$

现在， $|A_0A_1| + |A_1A_2| + |A_0A_2| < 2(s_2 - s_0)$，并且我们已在上文证明 $\delta \leq (s_2 - s_0)/4$。因此，

$$S \geq \mathcal{A}_L - \frac{11\delta(s_2 - s_0)}{8}.$$

我们有 $s_2 - s_0 = 2(h_1 + h_2)(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \leq 2\pi(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$。
由此得到，

$$S \geq \mathcal{A}_L - \frac{11\delta\pi(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}{4}.$$

现在，根据 δ的上界，我们有

$$\frac{11\delta\pi(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}}{4} < \frac{\mathcal{A}_L}{2}.$$

因此，

$$S > \frac{\mathcal{A}_L}{2}. \tag{13}$$

现在，我们可以得到下界，其方法与情形 2 中定理 的证明里处理螺旋线上的格点时相同13。、 T_1和 T_2的上界与之前相同，估计式（4）、（5）和（6）仍然成立。

唯一的区别是，现在 $\triangle A_0A_1A_2$ 的面积下界为 $\mathcal{A}_L/2$ ，而不是 $\mathcal{A}_L$。

对应的方程（7）为

$$50{\mathcal{A}_L}^2 < (h_1 + h_2)^6 a^2(a^2 + b^2), \tag{14}$$

（不同之处在于，现在（14）左边是 $1/4$ （7）左边的部分）。此外， $50^{1/6} > 2.4$，所以

$$h_1 + h_2 > 1.9{\mathcal{A}_L}^{\frac{1}{3}} a^{-\frac{1}{3}}(a^2 + b^2)^{-\frac{1}{6}}. \tag{15}$$

使用引理 8我们得到 $\sin\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right) \geq \frac{1}{\pi}(h_1 + h_2)$。根据引理 9 (i) $|A_0A_2|^2 = 4a^2 \sin^2\left(\frac{h_1+h_2}{2}\right) + b^2(h_1 + h_2)^2$。因此，

$$|A_0A_2| \geq \frac{2}{\pi}(h_1 + h_2)(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}.$$

使用（15）和 $\kappa = \dfrac{a}{a^2 + b^2}$ 我们得到

$$|A_0A_2| \geq \frac{3.8}{\pi}{\mathcal{A}_L}^{\frac{1}{3}}\kappa^{-\frac{1}{3}}.$$

由于 $\frac{3.8}{\pi} > 1.2$，且 $|A_0'A_2'| \geq |A_0A_2| - 2\delta$ 我们得到 $|A_0'A_2'|$ 的所述界。

□

参考文献

[1] E. Bombieri 和J. Pila，《弧与椭圆上的整点数量》，Duke数学杂志 59（1989年），337—357。

[2] Manfredo do Carmo, 《曲线与曲面的微分几何》, Prentice-Hall, 新泽西州恩格尔伍德克利夫斯（1976年）。[3] M. Filaseta 和 O. Trifonov, 《小数部分的分布及其在数论间隔结果中的应用》, 伦敦数学会会刊 73（1996年）, 241–278。[4] M. Filaseta、S. Graham 和 O. Trifonov, 《从 k自由数之间的间隔谈起》, 国际数论杂志 11 （ 2015 年）, 1411–1435。[5] R. Howard 和 O. Trifonov, 《通过曲率和弧长界定曲线附近格点的数量》, Functiones et Approximatio（即将发表）, arXiv:2207.09532。[6] Jing-Jing Huang, 《空间曲线附近的整点》, 数学年刊 374（2019年）, 1987–2003。.[7] V. Jarn´ık, 《关于条件收敛级数》, 数学杂志 24（1926年）, 715–732。[8] P. Letendre, 《解析数论专题》, 博士论文, 拉瓦尔大学（2018年）。[9] H. P. F. Swinnerton-Dyer, 《凸曲线上的格点数量》, 数论杂志 6（1974年）, 128–135。