arXiv:2303.00546v1 [math.CO] 1 Mar 2023

定义于代数结构上的超图

Peter J. Cameron*数学学院圣安德鲁斯大学法夫，英国

Aparna Lakshmanan S.†和 Midhuna V. Ajith‡数学系科钦科技大学科钦-22，喀拉拉邦，印度。

2023年2月

摘要

在过去二十年中，人们对定义于代数结构上的图进行了大量研究。本文开始探索定义于代数结构（尤其是群）上的超图，以研究这种方法能否带来新的视角。

关键词： 交换超图、幂超图、增强幂超图、生成超图

美国数学学会学科分类： 05C25,05C65

1 超图

一个无向超图 H 是一个由 $H = (V, E)$组成的二元组，其中 V 是一个由称为节点或顶点的元素构成的集合，而 E 是 $\mathcal{P}(V)$（V的幂集）的一个非空子集，称为超边。顶点 $v \in V$ 的度 是与其关联的超边数量。如果超图的所有顶点度数相同，则称其为正则 超图；如果每条超边的基数均为k，则称其为均匀 超图。

图1展示了一个超图。其度序列为 $\{1, 1, 2, 2, 0, 1, 2, 2\}$。

我们将遇到的一类重要超图是拟阵的基超图。拟阵的基是极大独立集。拟阵基的集合由以下两个性质刻画：

*电子邮件：pjc20@st-andrews.ac.uk

†电子邮箱：aparnals@cusat.ac.in、aparnaren@gmail.com

‡电子邮箱：midhunavajith@gmail.com

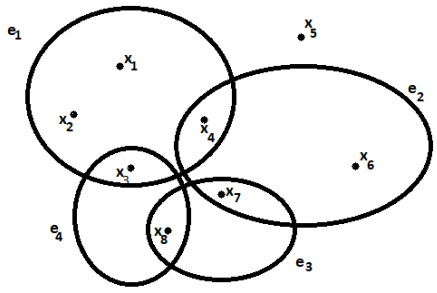

图 1：一个有 8 个顶点和 4 条超边的超图 H

- 至少存在一个基；
- （交换公理）：若 A，B 是基，且 $b \in B \setminus A$，那么存在 $a \in A \setminus B$，使得 $A \setminus \{a\} \cup \{b\}$ 是一个基。

由交换公理可知，任意两个基都含有相同数量的元素；也就是说，基超图是均匀的。

我们的代数结构大多是群。从群构造超图有三种自然（且彼此重叠）的方式：

- 我们可以取关于某种性质极大的集合（例如由两两可交换元素构成的极大集合），或关于某种性质极小的集合（例如极小生成集）。
- 我们可以将与 G 相关联的某个图中的极大团作为超图的超边。
- 我们可以取 G 的真子群族，或某种特定类型的子群（例如阿贝尔子群）。

我们将 给出这三种方法的例子。这里我们先做一个初等观察 .

定义 超图 H 中顶点 v 的开邻域 $N_H(v)$是所有满足 $u, v \in e$ 的顶点 $u \neq v$ 构成的集合，其中 e 是 G 中的一条超边。开邻域与顶点 v 合在一起称为超图 H 中顶点 v 的闭邻域 $N_H[v]$。

我们提醒读者，不要将 $N_H(v)$ 与群中某个子集或子群的正规化子 这一群论概念混淆。

命题 1.1. 若 Γ 是定义在有限代数结构上的图，且 H 是其超边为 Γ 中极大团的超图，那么 Γ 中任意顶点 v 在 H 中的邻域都与之相同。

这是因为有限图的任意超边都包含在某个极大团中。有关超图和拟阵的更多信息，请参阅 [7, 6]。

2 交换超图

设 S 是一个半群。 S 的交换超图 $\mathsf{Com}_H(S)$ 是一个无向超图，其顶点集为 S； $E \subseteq S$ 是一条超边，当且仅当

(a) 对每个 $a,\ b \in E$, $ab = ba$。

(b) 不存在满足 (a) 的 $E' \supset E$ 使得 E'。

因此， S 的交换图 中的超边是极大团（其顶点集为 S，且当且仅当 $xy = yx$时， x 和 y 相连）。所以根据命题 1.1，交换图和交换超图中一个顶点的邻域相同。

图 2 展示了四元数群 Q_8的交换超图。顶点集为 $V = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$，边集为

$$E = \{e_1, e_2, e_3\} = \{\{1, -1, i, -i\}, \{1, -1, j, -j\}, \{1, -1, k, -k\}\}.$$

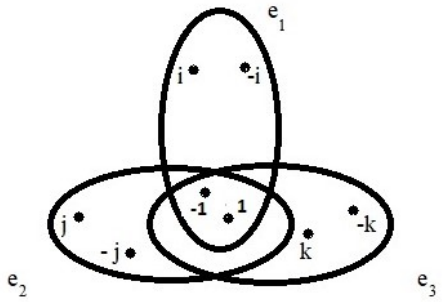

图 2：$\mathrm{Com}_H(Q_8)$

定理 2.1. 设 G 是一个群。$\mathrm{Com}_H(G)$ 的超边是 G的极大阿贝尔子群，其中极大性是相对于包含关系而言的。

证明。 设 G_e 是 G 中与超边 e的顶点相对应的元素所构成的子集。

设 $x,\ y \in G_e$。那么对每个 $z \in G_e,\ xz = zx$ 和 $yz = zy$。现在， $z(xy)$ $= (zx)y = (xz)y = x(zy) = x(yz) = (xy)z \implies xy \in G_e$。现在，令 $x \in G_e$。

对每个 $x \in e,\quad xz = zx \implies x^{-1}xzx^{-1} = x^{-1}zxx^{-1} \implies zx^{-1} = x^{-1}z \implies x^{-1} \in G_e$。

显然， $ze = ez$，对每个 $z \in e$ 都成立。因此 $e \in G_e$。于是 G_e 是一个阿贝尔群。

反过来，阿贝尔子群 A 的元素两两交换，因此 A 包含于某个超边中。阿贝尔群的极大性由 $\mathrm{Com}_H(G)$ 的超边定义中的第二个条件推出。

□

注记 令 $C(v)$ 表示半群 S 中元素 v 的中心化子。那么 $C(v) = N_H[v]$。（这可由命题 1.1 立即得出。）

注 对于任意超边 E，对所有 $v \in E$，都有 $E \subseteq C(v)$，事实上

$$E = \bigcap_{v \in E} C(v).$$

定理2.2。 设 S 是一个没有零因子的半群。那么，$\mathrm{Com}_H(S)$ 中顶点的度不可能为 *2*。

证明。 反设存在一个顶点 $z \in V(C_H)$，使得 $deg(z) = 2$。设 x, y 是与 z 相邻（即与 z可交换）的两个顶点，且它们彼此不可交换，也就是说， x 和 y 分别属于两个不同的超边 e_1 和 e_2，且这两个超边都包含 z。那么

$$z(xy) = (zx)y = (xz)y = x(zy) = x(yz) = (xy)z \implies xy \sim z.$$

若我们证明 xy 不属于超边 e_1 或 e_2，便会与$deg(z) = 2$矛盾。设 $xy \in e_1$，那么

$$xxy = xyx \implies xy = yx \quad \text{(Cancellation Law)}$$

但这与我们对 x 和 y的选取矛盾。情形 $xy \in e_2$ 的证明类似。 □

注： 定理2.2的证明不适用于含有零因子的半群。例如，考虑 $M_2(\mathbb{R})$。设 $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ 和 $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 4 & \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$。尽管$B$ 和 C 彼此不可交换， B 和 BC 却彼此可交换，因此BC 属于包含 B的超边。

3 增强幂超图

在讨论幂超图之前，我们先简要介绍增强幂超图；它与幂超图的关系，类似于增强幂图（定义见 [1]）与幂图（定义见 [2]）的关系。

设 S 是一个半群。 S 的增强幂超图 $\mathrm{EPow}_H(S)$ 是一个无向超图，其顶点集为 S，当且仅当 $E \subseteq S$ 是一条超边时，

(a) 对于每个 a， $b \in E$，都存在 $c \in S$，使得 a 和 b 都是 c 的幂；

(b) 不存在满足条件 (a) 的 $E' \supset E$。

陈述第一个条件的另一种方式是， $\langle a, b \rangle$ 是一个循环（或单生成元）半群，因为循环半群的任意子半群都是循环半群。

引理 32] （见 [1, ）证明，若群中元素的一个有限集 X 满足其中任意两个元素都生成一个循环群，那么 X 生成一个循环群。我们尚不清楚半群中是否存在类似结果，因此本节余下部分只考虑群。由此可知，群 G 中任意两个元素都生成一个循环子群的极大元素集，是 G 的一个极大循环子群。因此，$\mathrm{EPow}_H(G)$ 的超边就是 G 的极大循环子群。特别地，$\mathrm{EPow}_H(G)$ 存在一条包含所有顶点的超边，当且仅当 G 是一个循环群。

4 幂超图

设 S 是一个半群。S 的幂超图 $\mathrm{Pow}_H(S)$ 是一个无向超图，其顶点集为 S，且 $E \subseteq S$ 是一条超边，当且仅当

(a) 对于每个 a，$b \in E$、$a^m = b$ 或 $b^n = a$，存在某个 m，$n \in \mathbb{N}$。(b) 不存在满足 (a) 的 $E' \supset E$，使得 E'

.

例 设 S 是在加法下的 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$（$+_2$，$+_3$）。$S$的幂超图的顶点集为 $V = \{(0,\ 0),\ (0,\ 1),\ (0,\ 2),\ (1,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 2)\}$，边集为

$$E = \{\{(0,0),(1,1),(1,2),(0,1),(0,2)\},\{(0,0),(1,1),(1,2),(1,0)\}\}.$$

这如图 3 所示。

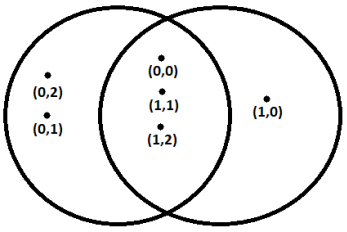

图 3：$\mathrm{Pow}_H(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3)$

注： $\mathrm{Pow}_H(G)$ 中的每条超边都是 $\mathrm{Pow}(G)$ 中的一个团（极大完全图），并且包含于增强幂图的一个团中，即 G 的一个极大循环子群中。因此，为了理解任意群上的 $\mathrm{Pow}_H(G)$，我们必须先研究循环群上的情形。此外，在 [7], 中，图 G 的团超图被定义为一个超图：其顶点集与 G 的顶点集相同，边集则是图 G 中所有极大团的顶点集所组成的族。因此，幂超图也可以看作 G 的幂图的团超图。（类似地，交换超图可以看作 G 的交换图的团超图。）

循环群 G 的每个阶（只要整除 $|G|$）都有唯一的子群，且该子群本身也是循环群。因此，循环群 G 中的两个元素包含在 $\mathrm{Pow}_H(G)$ 的同一条超边中，当且仅当其中一个元素的阶整除另一个元素的阶。

设 $G = \mathbb{Z}_n$。G中元素的不同阶共有 $d(n)$ 个，其中 d 是约数函数（$d(n)$ 表示 n 的约数个数）。如果 m 整除 n，则阶为 m 的元素个数为 $\phi(m)$，其中 ϕ 是欧拉函数。

定理 4.1。设 $G = \mathbb{Z}_n$。那么，$\mathrm{Pow}_H(G)$ 的超边数等于 n的因子格中的极大链数；与链 $1 = n_0, n_1, \ldots, n_{r-1}, n_r = n$ 对应的超边的基数为 $\sum_{i=0}^{r} \phi(n_i)$。

如果 $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}$，那么极大链的数量等于多项式系数

$$\binom{a_1 + a_2 + \cdots + a_s}{a_1, a_2, \ldots, a_s} = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_s)!}{a_1! a_2! \cdots a_s!}.$$

证明。 我们只需确立该公式。注意到， n 的因子格中极大链的数量 $N(n)$ 满足如下递推关系，即

$$N(1) = 1, \quad N(n) = \sum_{p|n} N(n/p),$$

其中求和遍及 n 的所有不同素因子，因为这类链向下的第一步必定是从 n 到 n/p，其中某个 $p \mid n$。由此可知， $N(n)$ 不取决于 n 的素因子的具体取值，只取决于它们的个数及其指数。若设

$$f(a_1, \ldots, a_s) = N(p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_s^{a_s}),$$

则递推关系为

$$\begin{aligned} f(0, 0, \ldots, 0) &= 1, \\ f(a_1, a_2, \ldots, a_s) &= f(a_1 - 1, a_2, \ldots, a_s) + f(a_1, a_2 - 1, \ldots, a_s) + \cdots \\ &\quad \text{(a term is omitted if it involves a negative argument)} \end{aligned}$$

但这恰好就是多项式系数的递推关系；我们将其解释为给 1、……、 $a_1 + a_2 + \cdots + a_s$ 染色的方法数，使得对所有 i，颜色 i 都有 a_i 个。

□

值得指出两个特殊情形：

(a) 若 n 无平方因子，且有 s 个不同的素因子，则 $N(n)$ 为 $= s!$

(b) 若 $n = p^a q^b$，其中 p 和 q 是不同的素数，则 $N(n)$ 为 $= \binom{a+b}{a}$，即从原点到点 (a, b) 的格路径数，每一步只能向右或向上移动。

与链（$1 = n_0$、 n_1、……、 $n_t = n$）对应的超边的基数为

$$\sum_{i=0}^{t} \phi(n_i).$$

4.1 Pow_H（G）的哈密顿性

定义 [4] 超图 $H = (V, E)$ 中两个互异顶点 x_1 和x_k之间的路径 是一个序列 x_1、e_1、……、x_{k-1}、e_{k-1}、x_k，并满足以下性质：

(a) x_1、……、x_k是互异顶点。

(b) e_1、……、e_{k-1}是超边（不必互异）。

(c) x_j、$x_{j+1} \in e_j$对于 $j = 1$、2、……、$k - 1$。

若所选超边没有歧义，则此路径记作$P(x_1, x_2, \ldots, x_k)$。

定义 [4] 超图 $H=(V,\ E)$中的圈 是一个序列 $x_1,\ e_1,\ .....,\ x_k,\ e_k,\ x_1$，满足以下性质：

(a) $k\geq 3$ 是正整数。(b) x_1、e_1、.....、x_{k-1}、e_{k-1}、x_k 是从 x_1 到 x_k的一条路径。(c) e_1、.....、e_k 是超边（不一定互不相同）。(d) x_j、$x_{j+1}\in e_j$，其中 $j=1$、2、.....、k，下标的加法按模 k进行。

如果所选超边没有歧义，这个圈记作 $C(x_1、\ x_2、.....、\ x_k)$.

定义 若一个超图含有生成圈，则称其为哈密顿的。

定理 4.2. 循环群的幂超图是哈密顿的。

证明。 幂超图的超边是幂图的极大团。因此，只需证明幂图是哈密顿的，而这已在 [2] 中完成。

□

注： 超图的路径和圈还有一种定义方式 [7] ，其中序列中的所有超边互不相同。在超图 $H=(X,\ E)$ 中，一个交替序列

$$\mu=x_0e_0x_1e_1x_2\dots x_{t-1}e_{t-1}x_t$$

由互异顶点 $x_0,\ x_1,\ x_2,\ .....,\ x_{t-1}$和互异边 $e_0,\ e_1,\ e_2,\ \dots e_{t-1}$组成，并满足 $x_i,\ x_{i+1}\in e_i,\ i=0,\ 1,\ 2,\ .....,\ t-1$，称为连接顶点 x_0和 x_t的路径；若 $x_t=x_0$，则称为圈。

如果采用这种圈的定义来定义哈密顿超图，那么并非所有幂超图都是哈密顿的。有些超图的超边数少于顶点数。特别是，素数幂阶循环群的幂超图只有一条超边。使循环群的 n 阶幂超图中的边数大于 n 的最小 n 是 $n=2^9.3^6.5^3.7^2.11.13$。因此，不存在阶小于 $n=2^9.3^6.5^3.7^2.11.13$ 的哈密顿幂超图。然而，刻画问题仍未解决。

问题 刻画哈密顿幂超图。

4.2 $\mathrm{Pow}_H(G)$的连通性

设 S 是有限半群。若 $e^2=e$，则称元素 $e\in S$ 为幂等元。我们用 $E(S)$ 表示 S 中所有幂等元组成的集合。由于 S 是有限的，对于每个 $a\in S$，都存在 $m\in N$，使得 a^m 是幂等元。此外，若 $a^m=e$ 且 $a^n=f$，其中某个$e,\ f\in E(S)$，则 $e=a^{mn}=f$。定义 ρ 上的二元关系 S 如下：

$$a\rho b\iff a^m=b^m \tag{1}$$

对于某个 $m\in N$。

定理 4.3。 设 S 是一个有限半群，且 ρ 是由方程（*1*）定义的二元关系，则对于任意 $a,\ b\in S, a\rho b$，当且仅当 $a^{m_1}=b^{m_2}=e$ 对于某些 $m_1, m_2\in N, e\in E(S)$成立。

定理 4.4。 设 S 是一个有限半群，且 $a, b \in S$ 满足 $a\rho b$，则 a 和 b 在超图 幂集$_H(S)$ 中由一条路径连接，当且仅当 $a\rho b$。

定理 4.5. 图 $\mathrm{Pow}_H(S)$ 的连通分支恰好是

$$\{C_e | e \in E(S)\} = \{a \in S | a\rho e\} = \{a \in S | a^m = e\} \tag{2}$$

对某个 $m \in N$。每个连通分支 C_e 都包含唯一的幂等元 e。

证明。 我们注意到以下事实:

- Pow$_H$(S) 中的每个顶点都与 S 中唯一的一个幂等元相邻。
- 任意两个幂等元之间都不存在路径。
- Pow$_H$(S) 的每个连通分支都包含唯一的幂等元，该连通分支中的其他每个顶点都与它相邻。

□

以下结果及其证明与 [2]中的类似。

推论 4.6。 设 S 为有限半群，则 $\mathrm{Pow}_H(S)$ 连通，当且仅当 S包含唯一的幂等元。

推论 4.7。 若 G 为有限群，则 $\mathrm{Pow}_H(G)$ 总是连通的。

定理 4.8。 设 G 为群。则 $\mathrm{Pow}_H(G)$ 连通，当且仅当 G 中的每个元素都具有有限阶（即 G 是周期群）。

5 生成超图

设 S 为有限半群。 S 的生成超图 Gen$_H$(S) 是一个顶点集为 S 的无向超图，并且 $E \subseteq S$ 是超边，当且仅当 E 生成 S，且 E 的任何真子集都不生成 S。

关于生成图的研究已有很多，尤其是针对有限群的研究。当然，如果该群不能由两个元素生成，那么这个图就是空图；因此，研究重点集中在几乎单群上。（我们从有限单群分类中得知，任何有限单群都可以由两个元素生成。）Lucchini 及其合作者提出了一些适用于生成元数量较多情形的替代方案 [5, 3]。不过，在这种情况下，使用超图可能更为自然。

图4展示了克莱因四元群的生成超图 $G = \{e, a, b, c\}$。任何不包含单位元的二元素子集都是该超图的一条超边。

有限群可能有基数不同的极小生成集，因此生成超图通常并非均匀。不过，有一种特殊情形下它是均匀的:

定理5.1。 设 G 是一个阶为素数 p的幂的有限群。那么 G的生成超图是一个拟阵的基超图。

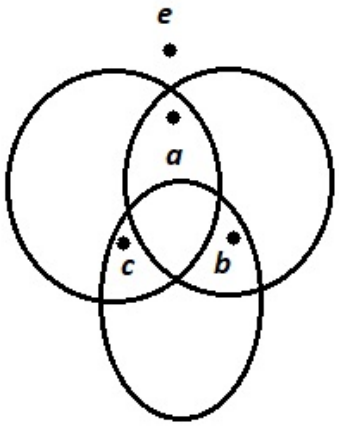

图4：克莱因四元群的生成超图

证明。 设 Φ(*G*)是 *G*的弗拉蒂尼子群。那么 $G/\Phi(G)$是一个初等阿贝尔p-群。根据伯恩赛德基定理， G 的子集 S 是极小生成集，当且仅当集合 $\{\Phi(G)s:\ s\in S\}$ 是 $G/\Phi(G)$的极小生成集。因此， G 的生成超图的超边可由 $G/\Phi(G)$的超边通过从相应的陪集中各选取一个元素得到。因此，只需证明初等阿贝尔 p-群的情形即可。

现在，正如上文所述， $G/\Phi(G)$是初等阿贝尔群，因此可以将其视为定义在含有 p 个元素的域上的向量空间。极小生成集恰好是该向量空间的基，而众所周知，这些基构成一个拟阵。于是，将该拟阵中的每个元素替换为 $|\Phi(G)|$ 个平行元素后，即可得到 G 的生成超图的超边。 □

这一性质不能刻画素数幂阶的群。

例 考虑阶为 6 的对称群 S_3 。除两个阶为 3 的元素外，任意一对非单位元都生成该群。因此，生成超图是由均匀拟阵$U_{2,\ 4}$ （其基为一个 4 元集的所有 2 元子集）添加一个环，并将一个非环元素替换为一对平行元素后得到的拟阵的基。

此外，即使将最小大小的生成集作为超边，它们也不一定构成一个拟阵的基。

例 设循环群 $\mathbb{Z}_6$ 由阶分别为 3 和 2 的元素 a 和 b 生成。取该群的两个副本的直积，其中因子分别由 $\{a_1,b_1\}$和 $\{a_2,b_2\}$生成。那么， $\{(a_1b_1,1),(1,a_2b_2)\}$和 $\{(a_1,b_2),(b_1,a_2)\}$都是 $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_6$的极小生成集。然而，如果将第一个生成集中的一个元素替换为第二个生成集中的元素，就无法得到该群的生成集。例如，由 $\{(a_1b_1,1),(a_1,b_2)\}$生成的群不包含 $(1,a_2)$。

问题 是否可以描述这样一些群：它们的生成超图是某个拟阵的基超图?

6 结语

本文将定义在代数结构上的图这一概念扩展到了四类超图。还有许多其他由代数结构定义的图，例如单位元图：若群 G中的$x.y = e$ 满足条件，则顶点 x 和 y 相邻，其中 e 是 G的单位元。这一概念可以扩展到幂超图，其中若满足 $x_1.x_2....x_n = e$，则 $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 是一个超边。所考虑的群必须是阿贝尔群，否则就会涉及元素运算顺序的问题。我们可以对超边 E施加极大性条件或极小性条件。若施加极大性条件，那么没有对合的群以及具有多个对合的群都只有一个超边 E，其中包含 G的所有顶点。因此，这一定义只对恰有一个对合的有限阿贝尔群有意义。例如，考虑群（Z_8，$+_8$），则极大单位元超图的超边为 $\{0,1,4,5,6\}$、$\{0,2,3,4,7\}$、$\{0,1,2,3,4,6\}$、$\{0,2,4,5,6,7\}$ 和 {0,1,2,3,5,6,7}。若对超边 E施加极小性条件，则 $\{e\}$ 将是一个超边；一个元素（非对合）与其逆元构成一个超边；其余超边则由群中存在的对合决定。同样，若考虑（Z_8，$+_8$），则极小单位元超图的超边为 $\{0\}$、$\{1,7\}$、$\{2,6\}$、$\{3,5\}$、$\{1,2,5\}$、$\{1,3,4\}$、$\{4,5,7\}$、$\{1,4,5,6\}$ 和 $\{2,3,4,7\}$。我们认为这一方向还有许多值得探索之处。

致谢： 作者感谢由科钦科技大学组织的 Research Discussion on Graphs and Groups (RDGG 2021)。本文提出的思想正是源于该研讨会；第一作者担任主讲人，第二作者担任组织者，第三作者则是参与者。

参考文献

[1] GhodratallahAalipour、Saieed Akbari、Peter J. Cameron、Reza Nikandish 和 Farzad Shaveisi，《群的幂图与增强幂图的结构》，*Electronic J. Combinatorics* **24(3) (2017)**，论文 3.16。[2] I. Chakrabarty、S. Ghosh 和 M. K. Sen，《半群的无向幂图》，*Semigroup Forum* **78 (2009)**，410–426。[3] Saul D. Freedman、Andrea Lucchini、Daniele Nemmi 和 Colva Roney-Dougal，《满足独立性条件的有限群》，准备中。[4] A. R. Dharmarajan 和 K. Kannan，《超路径与超圈》，*InternationalJournal of Pure and Applied Mathematics* **98(3) (2015)**，309–312。[5] A. Lucchini，《有限群的独立图》，*Monatsh. Math.* **193(2020)**，845–856。[6] James G. Oxley，拟阵理论，牛津大学出版社，牛津，1992。[7] Vitaly Voloshin，图与超图理论导论，Nova，纽约，2009。