arXiv:2303.00547v1 [math.GN] 1 Mar 2023

序树的路径空间、射线空间与分支空间及无限图的端空间的刻画

MAX PITZ

摘要。我们研究树的路径空间、射线空间与分支空间——这些自然地与序理论中的树相关联的拓扑空间，并根据某些类型的（子）基的存在性，为这些空间提供拓扑刻画。我们的结果解决了Diestel于1992年提出的一个问题，确立了对于任意豪斯多夫空间 X，以下等价关系：

（1） X 同胚于某个图的端空间；（2） X 同胚于某个特殊序树的射线空间；（3） X 具有一个嵌套的开闭子基，该子基是诺特的、遗传完备的，并且 σ-不交。

1. 引言

端空间以一种标准意义出现，作为无限图的边界；这种意义推广了Freudenthal和Hopf于20世纪40年代针对无限群发展起来的Freudenthal边界理论 [12, 13,19]。尽管图论界数十年来已在Halin、Jung、Polat、Diestel等人的大量论文中研究端空间 [3, 8, 10, 17, 18, 21, 24, 25, 29–31, 33], 但我们仍然没有从拓扑术语出发对端空间进行刻画；Diestel于 1992 [7,问题5。1]中正式提出了这一问题。本文旨在提供这样的拓扑刻画，其表述基于某个特定子基的存在性。作为分析的副产品，我们还确立了所有端空间共有的若干进一步的新拓扑性质，例如每个端空间都包含一个稠密的完全可度量化子空间。

根据某些类型的（子）基的存在性来刻画拓扑空间，是一般拓扑学中最有用的结果之一。最为熟知的结果包括乌雷松度量化定理（具有可数（子）基的正则空间是可度量化的）、长田-斯米尔诺夫-宾度量化定理（具有 σ-离散（子）基的正则空间是可度量化的）、德格鲁特超度量化定理（具有 σ-离散开闭集（子）基的豪斯多夫空间是可超度量化的），以及亚历山大子基引理（对于由某个子基中的元素组成的每个覆盖都存在有限子覆盖的空间是紧致的）。关于拓扑学中其他“令人惊讶的基性质”，请读者参阅 Nyikos 的综述 [27]，有关子基刻画的更多例子，请参阅论文 [37] 及其中的参考文献。

关于无限图端空间的所有结果，都是通过考察与序论树自然关联的某些拓扑间接得出的；序论树由 Kurepa [22] 和 Todorcevic [36], [35,定理 9.14] 引入。树 是指一个偏序集 T，它有唯一的极小元，且任意元素 T 的前驱集都是良序的。若一棵树是可数多个反链的并，则称它为特殊 树。我们的树中可能存在不同的极限节点，它们具有相同的严格前驱集。 T中的一条路径 是一个向下闭链。没有极大元的路径称为射线，而按包含关系极大的路径称为分支。将路径与其示性函数对应起来后， 2^T中所有路径构成的集合 P(T) 是一个闭子空间，因而是紧致的。P(T) 是与 T 关联的路径空间 。射线空间 R(T) 和分支空间 B(T) 是它的子空间，分别由 T 的所有射线和分支组成。将 T 的节点 t 与最大元为 t 的路径对应起来，可得到一个稠密嵌入 $T \subseteq$ P(T)，因此我们可以将 P(T) 视为 T 的紧化。从这一角度看，这个紧化的边界 P(T) \ T 就是 T 的射线空间 R(T)。

特殊树的路径空间和射线空间尤为重要。Gruenhage 在 [16] 中证明，路径空间 $\mathcal{P}(T)$ 是 Eberlein紧空间，当且仅当 T 是特殊树。特殊树的射线空间之所以重要，是因为有以下结果；另见下文第2.4 节，其中将对此作更详细的讨论：

定理 命题 1.1 (Kurkofka 与 Pitz [23])。 以下对于拓扑空间 X等价：

(1) X 同胚于某个图的端空间；*(2)* X 同胚于某个特殊树的射线空间。

因此，要理解无限图的端空间，只需理解（特殊）树的射线空间的拓扑性质，而本文正是围绕这一研究纲领展开。

事实证明，树的射线空间比图的端空间容易分析得多，主要原因在于射线空间有一个规范的（子）基。举例来说，回想一下，在端空间的框架下，证明存在一个开闭集的嵌套集族，使端空间为豪斯多夫空间，是 Carmesin 的一项深刻成果 [3, 推论 5.17]。有关有限图和无限图的分离的嵌套集的更多应用，请参见 [9, 15] 。在射线空间的框架下，定义 $\mathrm{R}(T) \subseteq 2^T$ 清楚地表明，$\mathrm{R}(T)$ 的拓扑由如下子基生成：将所有形如 $[t] = \{x \in \mathrm{R}(T) \colon\ t \in x\}$ 的集合规定为开闭集。但现在显然，集族 $\mathcal{S} = \{[t] \colon\ t \in T\}$ 确实是嵌套 的，因为 $\mathcal{S}$ 中任意两个相交的元素，其中一个都包含于另一个。

作为一组结果，我们利用这个典范子基确立了射线空间的以下拓扑性质；这些性质对于端空间而言此前难以证明或尚不为人所知：[1]

(i) 每个射线空间（因而每个端空间）都是超旁紧的（命题2.15）。关于无限图的端空间是超旁紧的这一结论，直到最近才借助Jung的正规树理论得到证明 [25]。（ii）每个射线空间（因而每个端空间）都满足所有阿姆斯特丹完备性性质，因此是贝尔空间（命题2.13）。这一结果可视为对Diestel-Kühn方向定理关于无限图端的结论的重大强化 [10, 定理2。2]。（iii）每个射线空间（因而每个端空间）都是单调正规的（命题2.14）。（iv）每个特殊树的射线空间（因而每个端空间）都包含一个稠密的完全可度量化子空间（命题2.21）。（v）每个特殊树的紧射线空间（因而每个紧端空间）都是*Eberlein*紧空间（推论3.11）。

鉴于这样一个结果，应当看待这些性质：可度量化端空间恰好是完全超度量化空间（见下文定理3.1 ），因此，自然会想知道，后面这些性质在多大程度上适用于一般的不可度量化端空间。

我们的第二组结果给出了（特殊）树的路径空间、分支空间和射线空间（的子空间）的拓扑刻画。由于路径空间类恰好对应于紧射线空间类（定理 3.9），因此只需关注射线空间和分支空间。这里，我们的主要结果如下：

定理 1.2。 对于豪斯多夫空间 X，以下条件等价：

(1) X 同胚于一棵 [特殊] 树的射线空间；*(2)* X 具有一个嵌套的开闭子基，该子基是诺特的、遗传完备的，且 [σ不交]。

[1]对于任何未定义的拓扑术语，请读者参阅第 2.5 节和 3.1 节。

关键的新要素是找出恰当的完备性条件：事实上，分支空间和射线空间通常并非 Čech 完备（见例 2.4 和2.7 ）；因此，我们采用一种新的完备性（存在一个“遗传完备”的子基），其灵感来自 [1]的阿姆斯特丹完备性。

注意到定理 1.2(2) 中的所有刻画条件都是闭遗传的，因此我们得出结论：成为射线空间这一性质是闭遗传的。

省略定理 1.2(2) 中的完备性条件，恰好得到射线空间的子空间（详见定理 3.6 ）；将上述定理中的“子基”一词替换为“基”，则可得到分支空间的相应刻画（定理 3.12），从而回答了 P. Nyikos 提出的问题 [28, 第8]页。

定理 1.1 和 1.2 结合起来，给出了摘要中所述的无限图的端空间（及其子空间）这一类空间的拓扑刻画。

致谢。 我谨感谢 K.P. Hart 和 Stevo Todorcevic 使我注意到路径空间拓扑，并感谢 Will Brian 提出了一项建议，由此形成了本文以（子）基刻画射线空间的方法。

2. 射线空间的拓扑性质

2.1. 序树与射线空间。 设 T 是一棵序树。树的路径、射线和分支已在引言中定义。每个分支都继承自 T 的良序。T 的**高度** 是其各分支的序型上确界。图论树 是高度至多为 ω 的树。

用 $\lceil t\rceil = \{s \in T\colon\ s \leq t\}$ 表示节点 $t \in T$ 的前驱（复数）集合。点 $t \in T$ 的**高度** 是其严格前驱集合 $\lceil \mathring{t}\rceil := \lceil t\rceil \setminus \{t\}$ 的序型。对于一个序数 i，所有高度为 i 的点构成 T 的第 i 个**层**，记作 $T^{<i} := \bigcup \{T^j\colon\ j < i\}$。

将树序直观地理解为表示高度的方式也将非正式地使用。例如，如果 $t \leq s$，我们说 s 位于 t 上方，并将 $\lfloor t\rfloor = \{s \in T\colon\ t \leq s\}$ 写作所有位于 t 上方的节点。如果 $t < t'$，我们写作$[t, t'] = \{x\colon\ t \leq x \leq t'\}$，并称该集合为 T 中的一个（闭）区间。（T 中的开区间和半开区间的定义类似。）T 的任何子集在由 T 诱导的序下都是一棵序树。若子集 $T' \subseteq T$ 与其中任意两个可比较点一起包含 T 中位于它们之间的区间，则称其为 T 的一个**子树**；如果它还包含 T 的根，则称其为**有根子树**。因此，路径就是 T 的不分叉有根子树。如果 $t < t'$，但 t 与 t' 之间不存在其他点，则称 t' 是 t 的**后继**，而 t 是 t' 的**前驱**（单数形式）。我们用 succ(t) 表示节点 $t \in T$ 的所有后继节点组成的集合。没有后继节点的节点称为**叶节点**。没有叶节点的树称为**修剪的**。如果 t 不是任何点的后继，则称其为**极限**。

$\mathring{}$序树中射线的一个**顶点** x T 是一个节点 $t \in T$，其满足 $\lceil t\rceil = x$。请注意，为使定理1.1 成立，我们明确允许一条射线 $x \subseteq T$ 可以有多个顶点，甚至可以有无限多个或不可数多个，如下文例2.3和2.4所示。

2.2. 射线空间与标准（子）基。如引言中所述，路径空间 P(T) $\subseteq 2^T$的拓扑由所有形如 $[t] = \{x \in \mathrm{P}(T)\colon\ t \in x\}$ 的开集及其补集 $[t]^{\complement} = \{x \in \mathrm{P}(T)\colon\ t \notin x\}$ 生成。事实上，请注意，集族 $\{[t]\colon\ t \in T\}$ 为分支空间 B(T) 诱导了一个基。对于射线空间 R(T)，这一般并不成立：

引理 2.1。对于射线空间，在某条射线 $x \in \mathcal{R}(T)$ 处的一个局部邻域基 $\mathscr{C}(x)$ 由如下形式的集合给出

$$[t, F] := [t] \setminus \bigcup_{s \in F} [s] = [t] \setminus [F]$$

其中， $t \in x$ 和 F 是 x的有限顶点集。

证明。 根据我们的子基的定义，每个包含 $x \in U \subseteq \mathrm{R}(T)$ 的开集 U 都包含一个形如以下形式的基本集 B

$$x \in B = \bigcap_{t \in E} [t] \cap \bigcap_{s \in F} [s]^{\complement} = \bigcap_{t \in E} [t] \setminus \bigcup_{s \in F} [s] \subseteq U$$

其中 $E, F \subset T$是有限集。取大小最小的 B和 $|E| + |F|$。由于 $x \in B$蕴含 $E \subset x$，我们可以用其最大元替换 E。因此， $|E| \leq 1$。接下来，我们声称，对于每个 $s \in F$，存在 x 的一个顶点 s'，使得$s' \leq s$。事实上，若假设 $\ulcorner s_0 \urcorner \cap x \subsetneq x,$，取 $t \in x \setminus (E \cup \ulcorner s_0 \urcorner)$，则得到

$$x \in [t] \setminus \bigcup_{s \in F_0} [s] \subseteq B$$

对于 $F_0 = F \setminus \{s_0\}$，这与 $|E| + 2|F|$的极小性矛盾。因此，对于每个 $s \in F$，存在 x的一个顶点 s'，使得 $s' \leq s$；令 $F\prime = \{s' \colon s \in F\}$，便得到

$$x \in [t, F'] \subseteq B \subseteq U \subseteq \mathcal{R}(T)$$

其中 $t \in x$ 和 F' 是 x 的一个有限顶点集，可按需要选取。 □

T的标准基 是由以下元素组成的集族

$$\mathscr{C} = \bigcup_{x \in \mathcal{R}(T)} \mathscr{C}(x) = \Big\{ [t, F] \colon t \in T,\ F \subset T \text{ finite set of limits, } t \in \ulcorner \mathring{s} \urcorner = \ulcorner \mathring{s'} \urcorner \text{ for all } s \neq s' \in F \Big\},$$

而 的元素将称为标准基本开集。在第2.5 节中，我们将进一步探讨标准基的性质。在此之前，我们先来看一些典型的射线空间例子。

2.3. **射线空间的例子**。

例 2.2。 康托尔集可以表示为满二叉树的射线空间 $2^{<\omega}$。更一般地，对于高度为 ω 的修剪树 T，有$\mathcal{R}(T)$ $= \mathcal{B}(T)$，而这些恰好是完全超度量化空间，参见例如[20]。

例 2.3。 大小为 κ 的不可数离散空间的一点紧化，可以表示为高度为 $\omega \cdot 2$ 的修剪树 T 的射线空间；该树的每个节点恰有一个后继，但T^{ω}， T 的第 ω 层有 κ 个节点。

证明。 事实上，由于 $|T^{\omega}| = \kappa$ 有 κ 个分支，且每个分支在 $\mathrm{R}(T)$ 中都是孤立的。现在考虑路径 $x = T^{<\omega}$。根据标准基的定义， x 处的局部基由以下集合给出

$$[t, F] := [t] \setminus \bigcup_{s \in F} [s] = [t] \setminus [F]$$

其中 $t \in x$和 $F \subset T^{\omega}$是 x的有限顶点集。因此， $[t, F]$ 包含除有限多个分支外的所有分支，所以 $\mathrm{R}(T)$ 同胚于大小为κ的不可数离散空间的一点紧化。□

例 2.4. 一种对大小为 κ 的不可数离散空间的一点紧化进行的细化，其中每个孤立点都被 $\mathbb{N}$的一个开闭副本所取代。该空间可以表示为高度为 $\omega\cdot 2$ 的修剪树 T 的射线空间，其中每个非极限节点恰有一个后继节点，每个极限节点有可数多个后继节点，而 T的第 ω 层 T^ω 的大小为 κ。

引理 2.5。 例 *2.4* 中的射线空间不是切赫完备的。特别地，图的端空间通常不是切赫完备的。

证明。 利用定理 [11, 3.9。2], 中的切赫完备性的内部刻画，只需证明：对于任意开覆盖序列 $\mathcal{U}_n$ $(n\in\mathbb{N})$（$\mathcal{R}(T)$）的覆盖，存在一个闭集滤子 $\mathcal{G}$，使得 $\mathcal{G}$小于 U_n 对所有 $n\in\mathbb{N}$ （这意味着存在 $G_n\in\mathcal{G}$ 和 $U_n\in\mathcal{U}_n$，满足 $G_n\subseteq U_n$），但 $\bigcap\mathcal{G}=\varnothing$。

记 $x=T^{<\omega}\in \mathrm{R}(T)$ 为 T 中唯一的非孤立射线。对于每个 $n\in\mathbb{N}$ 固定 $U_n\in \mathrm{U}_n$ 使得 $x\in U_n$，并选取一个标准基本开集 $x\in[t_n,F_n]\subseteq U_n$，其中 F_n 是 x 的有限顶点集。于是 $\bigcup F_n$ 是可数的。由于 $|T^\omega|$ 不可数，存在一个 s，它属于 x，且不包含在任何 F_n 中。注意， $[s]\cong\mathbb{N}$ 是包含于 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}U_n$ 中的可数离散空间的一个闭拷贝。但此时，由 $[s]$ 上的余有限滤子生成的滤子 G 小于 U_n 对所有 $n\in\mathbb{N}$ 都成立，但 $\bigcap\mathrm{G}=\varnothing$。□

例 2.6. 康托尔集的 *Alexandroff* 重复 可以表示为修剪树 $T\subset 2^{<\omega\cdot 2}$ 的射线空间，其中 $2^{\leq\omega}\subset T$，且高度为 $\geq\omega$ 的每个节点都恰有一个后继。

证明。 空间 X 的 Alexandroff 重复 $\mathrm{A}(X)$ 是定义在集合 $\{0,1\}\times X$ 上的空间，其中 $\{1\}\times X$中的每个点都是孤立点，而每个点 $(0,x)$ 都有形如 $(\{0,1\}\times U)\setminus\{(1,x)\}$ 的邻域基，其中 $x\in U\subseteq X$ 是空间 X中 x 的一个开邻域。为证明所讨论的射线 T空间与康托尔集的 Alexandroff 重复同胚，我们验证映射

$$f\colon \mathcal{A}(\mathcal{R}(2^{<\omega}))\to\mathcal{R}(T),\ (i,x)\mapsto\begin{cases}x & \text{if } i=0,\\ b\in\mathcal{B}(T),\ x\subsetneq b & \text{if } i=1\end{cases}$$

是一个同胚。显然它是双射；由紧致性，只需证明 f 连续，即子基本开闭集的原像是开集。设 $[t]\subset \mathrm{R}(T)$ 是任意一个子基本开闭集。若 $t\notin T^{<\omega}$，则 $[t]$ 由一个孤立分支 b 组成，且 $f^{-1}(b)=\{(1,x)\}$ 也是孤立的。否则，若 $t\in T^{<\omega}$，则 t 确定了康托尔集的一个基本开闭集 U，且 $f^{-1}([t])=\{0,1\}\times U$是开闭集。□

通过类似的构造，我们看到，每个完全可超度量化空间的 Alexandroff 重复都可以表示为一个射线空间。若二叉树的一条射线所对应的$0-1$-序列最终变为常数，则称该射线为有理的；否则称为无理的。

例 2.7. *Michael* 直线可以表示为前一个例子中树 T 的修剪子树 T' 的分支空间，其中删除 $2^{<\omega}$的一条有理射线上方的所有 T 元素。

引理 2.8. *Michael* 直线的分支空间是贝尔空间，但它包含一个非贝尔闭子空间，即 $\mathbb{Q}$的一个闭副本。

证明。 我们将在命题2.11 中证明，分支空间是贝尔空间。然而，序型为 ω 且属于$\mathcal{B}(T'$的所有分支构成一个稠密无孤立点的可数可度量化空间，因此根据 Sierpiński 的刻画，该空间中存在一个 $\mathbb{Q}$ 的副本 [32]。由于$\mathcal{B}(T'$中的其余分支都是孤立点，这个 $\mathbb{Q}$ 副本是闭集。□

2.4. **表示定理**。 我们的表示定理1.1 的表述与 [23]中的原始版本略有不同。为说明这两个版本等价，回顾一下：特殊树 τ_{seq} 上的$\mathcal{R}(T$的原始拓扑 T 是通过收敛序列来描述的，见引理 [23, 5.3]如下：设 x 和 x_n ($n \in \mathbb{N}$是特殊树 T中的射线。设 $A \subset \mathbb{N}$ 由所有满足 n 的数构成$x \subsetneq x_n,$，并令 $B\colon = \mathbb{N} \setminus A$。

(1) 当且仅当 A 是无限的，且对于 x 的每个顶点 t，满足 $t \in x_n$ 的 $n \in A$ 只有有限多个时，$x_n \to x$ 对 $n \in A$ 和 $n \to \infty$ 收敛。(2) 当且仅当 B 是无限的，且对于每个节点$t \in x$，满足 $x \cap x_n \subset \lceil t \rceil$ 的 $n \in B$ 只有有限多个时， $x_n \to x$ 对 $n \in B$ 和 $n \to \infty$ 收敛。

将本文定义的 R(T) $\subseteq 2^T$ 上的拓扑记为 τ。为了验证 τ 和 τ_{seq} 诱导相同的闭集，给定 $X \subseteq$ R(T)，我们需要证明：$x \in \overline{X}$ 关于 τ，当且仅当存在一个序列 $(x_n) \subseteq X$，使得 $x_n \to x$ 属于 τ_{seq}。

对于正向蕴含，假设 $x \in \overline{X} \setminus X$。如果存在无穷多个 x 的顶点 s_n ($n \in \mathbb{N}$) 满足 $[s_n] \cap X \neq \varnothing$，那么选取 $x_n \in [s_n] \in X$，并注意到根据 (1)， $x_n \to x$ 在 τ_{seq} 中收敛。因此，我们可以假设满足 $X \cap [s_i] \neq \varnothing$ 的 x 的顶点 $F = \{s_1, \ldots\ldots, s_k\}$ 只有有限多个。令$X' = X \setminus [F]$。由于 $[F] \not\ni x$ 是开闭集，因此可知 $x \in \overline{X'}$。令 t_n 为 x 中递增的余终序列（该序列存在，因为 T 是特殊的）。由于 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [t_n] \cap X' = \varnothing$，但 $[t_n] \cap X' \neq \varnothing$, 我们可以选取两两不同的 $x_n \in X' \cap [t_n]$，并且根据 (2)， $x_n \to x$ 在 τ_{seq} 中收敛。

对于反向蕴含，假设 $x_n \to x$ 属于 τ_{seq}。我们证明 $x \in \overline{X}$ 相对于 τ成立。令$[t, F]$ 为 x 的一个标准基本开邻域，其中 $t \in x$，且 F是 x的一个有限顶点集。如果根据（1）有 $x_n \to x$，那么集合{$x_n\colon\ n \in \mathbb{N}$}中只有有限多个元素位于 F之上，因此无限多个 x_n 属于 $[t, F]$。如果根据（2）有 $x_n \to x$，那么 x_n 中只有有限多个元素不包含 t，因此无限多个 x_n 属于 $[t, F]$。

2.5. **基底性质 I**。设 A 是任意集合族，例如某个拓扑空间的基、子基或覆盖。

- 若对于所有 A， $B \in$ A，且 $A \cap B \neq \varnothing$，都有 $A \subseteq B$ 或 $B \subseteq A$，则称 A 为嵌套的。在拓扑学文献中，嵌套集族也称为秩-*1*集族或非阿基米德集族[27, 28]，；而在组合学和计算机科学中，也使用层叠集族这一术语[4]。

- 如果 A 中任意一个 $\subsetneq$-递增的元素序列最终都恒定不变，则称 A 是诺特的。
- 如果 A 的任意有限子族都具有非空交集，则称 A具有有限交性质。
- 如果 A 的任意具有有限交性质的子族都具有非空交集，则称 A完备。我们指出，对于 X，存在由开闭集组成的完备基，这意味着它具有三种阿姆斯特丹完备性：余紧致性、基紧致性和子紧致性，见 [1]，；而这三者又都蕴含贝尔性质。

- 如果对每个闭子空间 $Y \subseteq X$，集族 A $\restriction Y = \{A \cap Y\colon\ A \in$ A$\}$ 都是完备的，则称 A 是遗传完备的。

- 如果一个空间具有完备基，则称它基完备。

在本节余下部分，我们将研究射线空间 R(T) 的标准基 $\mathscr{C}$ 的性质，并利用标准基本开集证明射线空间是单调正规空间。

引理 2.9。 对于任意射线 $x \in \mathcal{R}(T)$，其局部邻域基 $\mathscr{C}(x)$ 是诺特的。

证明。 我们证明， $\mathscr{C}(x)$ 中的每个标准基本开集递增序列最终都会恒定。反设

$$[t_0, F_0] \subsetneq [t_1, F_1] \subsetneq [t_2, F_2] \subseteq \cdots$$

是一列无限且严格递增的标准基本开集。使基本开集 $[t, F] \in \mathscr{C}(x)$ 严格变大的方法有两种：要么减小 t in $(T, \leq)$，要么取 F 的真子集（其中 F 是 x 的有限顶点集）。后一种方法只能有限次迭代，因此存在一个无限子序列 n_i ，使得

$$t_{n_0} > t_{n_1} > t_{n_2} > \cdots .$$

但这与 T 的良基性矛盾。 □

Pr命题 2.10. 在任意射线空间 $\mathcal{R}(T)$ 中，集族 $\mathcal{S} = \{[t]\colon\ t \in T\}$ 是诺特的 . □

命题 2.11. 分支空间是基完备的，因此是贝尔空间。

证明。 考虑任意分支空间 B(T)。我们证明标准基 S $= \{[t]\colon\ t \in T\}$ 是完备的。

令 A $\subseteq$S 为任意具有有限交性质的子集。每个 $A \in$ A 都具有 $A = [t_A]$ 的形式。由于 A 具有有限交性质，集合 $M = \{t_A\colon\ A \in$ A$\}$ 位于 T 的某条链上。令 x 为 T的任意分支，满足 $M \subseteq x$。则 $x \in \bigcap$A $\neq \varnothing$。□

命题 2.12. 射线空间是基完备的，因此是贝尔空间。

证明。 考虑一个射线空间 $\mathcal{R}(T)$。我们不妨假设 T 是修剪的。我们证明引理 2.1中的标准基是完备的。

令 A $\subseteq \mathscr{C}$ 为任意具有有限交性质的子集。每个 $A \in$ A 都具有 $A = [t_A, F_A]$ 的形式。由于 A 具有有限交性质，集合 $M = \{t_A\colon\ A \in$ A$\}$ 位于 T 的某条链上。

设 x 是 T 中具有 $M \subseteq x$的包含极小射线。我们断言 $x \in \bigcap$A。否则，存在$A = [t_A, F_A] \in$ A，使得 $x \notin [t_A, F_A]$。由于 $t_A \in M \subseteq x$，必然存在 $\ell \in F_A \cap x$。根据° °标准基的定义， ℓ 是一个极限，因此 $\lceil \ell \rceil$ 是一条射线。但 $\lceil \ell \rceil \subsetneq x,$ ，所以根据 x 的极小性，存在 $t_{A'} \in M$ 使得 $t_{A'} \geq \ell$。然而此时 $A \cap A' = \varnothing$，这与 A 具有有限交性质相矛盾。□

命题 2.13。 在任意射线空间 $\mathcal{R}(T)$中，集族 $\mathcal{S} = \{[t]\colon\ \ t \in T\}$ 是遗传完备的。

证明。 设 $Y \subseteq$ R(T) 是一个闭子空间，并令 A $\subseteq$ S 为任意集族，使得 A $\restriction Y$ 具有有限交性质。利用佐恩引理，我们可以假设 A 是这样的一个极大集族。A 中的每个 $A \in$ 都具有$A = [t_A]$的形式。由于 A 具有有限交性质，集合 $M = \{t_A\colon\ \ A \in$ A$\}$ 位于 T的一条链上，并且根据 A 的极大性，集合 M 是一条路径。

如果路径 M有一个极大元 m，那么显然 $\bigcap$A $\cap Y = [m] \cap Y \neq \varnothing$。

如果路径 M没有极大元，那么 $x = M \in$ R(T) 是一条射线。显然， $x \in \bigcap$A。还需证明 $x \in \overline{Y} = Y$。为此，设 $[t, F]$ 是 R(T) 中 x 的一个标准基本开邻域（即 $t \in x$ 以及所有 $s \in F$都是 T中 x 的顶点）。我们断言 $[t, F] \cap Y \neq \varnothing$。

如果 $[s] \cap Y \neq \varnothing$ 对某个 $s \in F$成立，那么我们可以将 $[s]$ 加入 A，而不破坏 A $\restriction Y$ 具有有限交性质这一条件，这与 A 的极大性矛盾。因此， $[F] \cap Y = \varnothing$。由于 $t \in x = M$，我们知道 $[t] \in$A，所以 $[t] \cap Y \neq \varnothing$。结合 $[F] \cap Y = \varnothing$ 这一事实，可得 $[t, F] \cap Y \neq \varnothing$，正如所需。□

拓扑空间 X 是单调正规的，如果对于每一对 hU， xi，其中 U是一个开集且 $x \in U$，都可以指定一个开集 U_x，使得 $x \in U_x \subseteq U$，并且 $U_x \cap V_y \neq \varnothing$ 蕴含 $x \in V$或 $y \in U$。

Pr命题 2.14. 射线空间是单调正规的，因此也是遗传正规的 $l.$

证明。给定任意射线 $x \in \mathrm{R}(T)$ 和开集 $U \ni x$，只需取一个标准基本开邻域 $U_x := [t_x, F_x]$，使得 $x \in [t_x, F_x] \subseteq U$。我们证明这些 U_x 满足所需条件。

因此，考虑满足 $x \notin V$ 和 $y \notin U$ 的成对对象 $x \in U$ 和 $y \in V$。

情形 1：射线 x 和 y 是可比较的，不妨设 $x \subsetneq y$。由于 $y \notin U \supseteq [t_x, F_x]$，必然存在 $s \in F_x$ 使得 $s \in y$。此外，由于 $x \notin V \supseteq [t_y, F_y]$，我们必须有 $x \subseteq \lceil t_y \rceil$。因此，$s \leq t_y$，从而 $[t_y] \subseteq [F_x]$，这意味着 $[t_x, F_x] \cap [t_y, F_y] = \varnothing$。

情形 2：射线 x 和 y 是不可比较的。由于 $y \notin U \supseteq [t_x, F_x]$ 和 $y \notin [F_x]$，我们必须有 $y \notin [t_x]$。同理，$x \notin [t_y]$。因此，t_x 和 t_y 是不可比较的，所以 $[t_x, F_x] \cap [t_y, F_y] \subseteq [t_x] \cap [t_y] = \varnothing$。□

2.6. **紧致性性质**。众所周知，而且很容易证明，所有分支空间都是遗传超旁紧的 [28]。更难证明的是，所有端空间也都是遗传超旁紧的 [25]，因此根据定理 1.1，所有特殊树的射线空间也都是如此。若 T 有不可数链，那么我们就能在 $\omega_1 + 1$ 中得到 $\mathcal{R}(T$的一个副本，因此它不再是遗传旁紧的，子空间 ω_1便可说明这一点。不过，我们仍能证明所有射线空间都是超旁紧的，而不论它们是否包含不可数分支。

命题 2.15。射线空间是超旁紧的：每个开覆盖都可以加细为由标准基本开集构成的开划分。

证明。设 $\mathscr{C}$ 是某个射线空间 $\mathrm{R}(T)$ 的标准基，且 U 是 $\mathrm{R}(T)$ 的一个开覆盖。要证明其超旁紧性，我们需要找到一个加细 U 的开划分 B。通过长度至多为 $\tau = |T|^+$ 的超限递归，我们将定义嵌套集族 $\mathrm{B}_i \subset \mathscr{C}$（其中 $i < \tau$），使得

(1) 对于任意 $i \leq j < \tau$，$\mathrm{B}_i \subseteq \mathrm{B}_j$；(2) 对所有 $i < \tau$，B_i 加细 U；(3) B_i 是向上封闭的，即若 $x, x' \in \mathrm{R}(T)$，且 $x \subseteq x'$ 和 $x \in \bigcup \mathrm{B}_i$，则 $x' \in \bigcup \mathrm{B}_i$ 也成立。

令 $\mathrm{B}_0 = \varnothing$。如果已经定义了加细 U 的集族 B_i，但它尚未覆盖 $\mathrm{R}(T)$，则令$x_i \in \mathrm{R}(T) \setminus \bigcup \mathrm{B}_i$为具有此性质的任意按包含关系极大的射线（也就是说，每条真包含x_i的射线都被 B_i覆盖）。这是可行的，因为 $\bigcup \mathrm{B}_i$ 是开集。选取 $U_i \in \mathrm{U}$，使得 $x_i \in U$，并令 $[t_i, F_i]$为 $x \in [t_i, F_i] \subset U$在 $\mathrm{R}(T)$ 中的任意标准基本开邻域（也就是说，其中 F_i是 x的顶点集），再令 $\mathrm{B}_{i+1} = \mathrm{B}_i \cup \{[t_i, F_i]\}$。显然，$\mathrm{B}_{i+1}$ 加细 U。为证明 B_{i+1} 仍然是嵌套的，考虑满足 $[t_j, F_j] \cap [t_i, F_i] \neq \varnothing$的任意元素$[t_j, F_j] \in \mathrm{B}_i$。那么 t_i和 t_j可比较。由性质 (1) 以及我们处理的是标准基本开集这一事实可知，必有 $t_i \leq t_j$ 和 $t_j \notin x$。特别地，当 $[t_i, F_i]$与先前选取的某个 $[t_j, F_j]$相交时，

$$t_i < t_j \quad \text{for all } j < i. \tag{$\star$}$$

现在，要么 $t_j \in \lfloor F_i \rfloor$，此时 $[t_j, F_j] \cap [t_i, F_i] = \varnothing$；否则 $[t_j, F_j] \subseteq [t_i, F_i]$。对于极限序数 ℓ，我们定义 $\mathrm{B}_\ell = \bigcup \{\mathrm{B}_i \colon i < \ell\}$；根据 (1) 以及嵌套性是有限性性质这一事实，它将继续保持嵌套。此定义也满足 (2) 和 (3)。至此，递归构造完成。

由于所有 t_i 都各不相同，该递归至多经过 $\tau = |T|^+$ 步后终止。令 $\mathrm{B}_\tau = \bigcup \{\mathrm{B}_i \colon i < \tau\}$ 为最终的嵌套集族。性质（$\star$）表明，B_τ 中每条 $\subseteq$-递增链都是有限的。令 $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{B}_\tau$ 为 $\subseteq$ 极大元的集族。由于 B_τ 是 $\mathrm{R}(T)$ 的一个覆盖，且 B_τ 的每个元素都包含于某个极大元中，因此 B 也是一个覆盖。又由于 B_τ 是嵌套的，显然 B_τ 的任意两个极大元要么不交，要么相等。因此，B 是 $\mathrm{R}(T)$ 的一个开划分。由于 $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{B}_\tau$ 且 B_τ 加细 U，因此 $\mathrm{R}(T)$ 是超旁紧的。□

空间的 林德洛夫数 是最小的基数 κ ，使得该空间的每个开覆盖 X 都有一个基数为 $<\kappa$ 的子覆盖。因此，当且仅当一个空间是紧致的时，它的林德洛夫数为 $\aleph_0$ ；当且仅当它按通常意义是林德勒夫空间（每个开覆盖都有一个可数子覆盖）时，它的林德洛夫数为 $\aleph_1$ 。

命题 2.16。 设 κ 为正则基数。修剪树 T 的射线空间 $\mathcal{R}(T)$ 的林德洛夫数为κ ，当且仅当 T 的每个节点都有 $<\kappa$ 个后继节点。

注意，无需对 T 中一条射线的顶点数作任何条件要求，参见例 2.3。

证明。 如果某个节点 t 至少有 κ 个后继节点，那么

$$\{[t]^{\complement}\}\cup\{[s]\colon s \text{ a successor of } t\}$$

是 R(T) 的一个开划分，且不存在大小为 $<\kappa$ 的子覆盖。

现在反过来假设， T 的每个节点都有 $<\kappa$ 个后继节点。进一步，反设存在一个开覆盖$\mathcal{U}$ ，它没有大小为 $<\kappa$ 的子覆盖。根据命题2.15 ，不妨假设$\mathcal{U}=\{[t_i,F_i]\colon i\in I\}$ 是由非空标准基本开集构成的开划分，其中指标集为I ，且 $|I|\geq\kappa$。注意，不交性意味着 $t_i\neq t_j$ 对 $i\neq j\in I$均成立。令 $M=\{t_i\colon i\in I\}$。

令 $S=\{t\in T\colon |\lfloor t\rfloor\cap M|\geq\kappa\}\subseteq T$。显然， S是向下封闭且非空的；又根据 T 中每个节点都有 $<\kappa$ 个后继节点以及 κ 是正则的条件，可知 S 是 T 的一棵有根修剪子树。

现在令 x 为 S的一个分支；由于 S 是修剪的， $x\in$R(T)。令 $[t_*,F_*]$ 为包含 x 的 U 中的元素。由于 $t^*\in x\subseteq S$，存在 M 中位于 t^* 上方的 κ 个元素。由 U 中元素两两不交可知，这些 κ 个元素都属于 $\lfloor F^*\rfloor$。但由于 F^* 是有限的，某个 $s\in F^*$ 上方有 κ 多个元素，因此 $s\in S$。然而，这与 x 的极大性矛盾，因为 $x\subsetneq\lceil s\rceil\subseteq S$, 。□

推论 2.17。 修剪树 T 的射线空间 $\mathcal{R}(T)$ 是紧致的，当且仅当 T 的每个节点都只有有限多个后继节点 □

推论 2.18。 不可数修剪树 T 的射线空间 $\mathcal{R}(T)$ ，若其每个节点都只有可数多个后继节点，则永远不可度量化。

证明。 林德勒夫且可度量化意味着第二可数，但不可数修剪树 T 的射线空间具有不可数的权：为说明这一点，首先注意，若 T 有一个不可数的层 T^α，则 $\{[t]\colon t\in T^\alpha\}$ 表明 R(T) 的胞腔度不可数，因此其权也不可数。

否则，所有层都是可数的，因此 T 具有不可数的高度。考虑 $T\prime=T^{<\omega_1}$。若 R(T') 的权可数，则 R(T') 存在一个由标准基本开集 $\{[t_n,F_n]\colon n\in\mathbb{N}\}$ 构成的可数基 $\mathscr{C}$ 。令 $M=\{t_n\colon n\in\mathbb{N}\}\cup\bigcup\{F_n\colon n\in\mathbb{N}\}$。由于 M 可数，令 $\alpha<\omega_1$ 为 M 中节点高度的上确界，并选取一条射线 $x\in$R($T\prime$)，其序型为 $\alpha+\omega+\omega$。令 $x'=x\cap T^{<\alpha+\omega}$。于是 $\mathscr{C}$ 无法将 x 与 x' 分开，矛盾。□

2.7. **没有不可数分支的树中的良性稠密子空间**。回顾一下，空间 X 的非空开集族 Π 是一个 π-基，如果对于每个非空开集 $U\subseteq X$ ，都存在$P\in\Pi$ 使得 $P\subseteq U$。

命题 2.19. 集族 Π 由 $\mathcal{S}=\{[t]\colon t\in T\}$ 以及所有孤立点组成，是任意射线空间 $\mathcal{R}(T)$中的一个 π-基。

证明。 我们需要证明，每个非空标准开集 $U = [t, F] \in \mathscr{C}(x)$ 都包含 II 中的一个元素。如果 U 包含 T 的一个分支，那么取这样的分支 $b \in U \cap \mathrm{B}(T)$。注意，由于 S 在 b 处构成一个基，存在 $t \in T$ 满足 $[t] \subseteq U$，从而得到所需的包含于 U 中的 π-基元素。

为了完成证明，我们说明，若 $U \cap \mathrm{B}(T) = \varnothing$，则 U 包含一个孤立点。设 $y \subseteq x$ 为一条包含极小的射线，且满足 $t \in y$。我们断言， y 在 $\mathrm{R}(T)$ 中是孤立的。

情形 1： $y < x$。设 s 为 x中 y 的唯一顶点。于是 $[t,\{s\}]$ 证明了 y 是孤立的：对于 $[t,\{s\}]$ 中的任意另一条射线 z，它都会延伸为一个分支 $z' \in \mathrm{B}(T)$，且满足 $z' \in [t,\{s\}] \subseteq [t, F] \subseteq U$，矛盾。

情形 2： $y = x$。于是 $[t, F]$ 证明了 $y = x$ 是孤立的：对于 $[t, F]$ 中的任意另一条射线 z，它都会延伸为一个分支 $z' \in \mathrm{B}(T)$，且满足 $z' \in [t, F] \subseteq U$，矛盾。□

推论 2.20。 在任何没有不可数分支的树的射线空间中，具有第一可数性的点构成一个稠密子空间。

证明。 假设 T 没有不可数分支，则每个 $x \in \mathcal{B}(T)$ 在 $\mathcal{R}(T)$ 中都是第一可数的，因为 $\{[t]\colon\ t \in x\}$ 是 x的一个可数邻域基。现在，由于命题 π的 2.19 中的每个□

命题 2。 **21.** 每个特殊树的射线空间都包含一个稠密的完全可度量化子空间。

Todorcevic 的结果表明，每个特殊树的分支空间都包含一个稠密的可度量子空间，这一类似结果见 [34, 定理 4。2]事实上，如果 T 是特殊树，那么我们的 π命题 2.19 中的基将是σ-不交的；第一可数豪斯多夫空间具有稠密可度量子空间，当且仅当它具有一个 σ-不交的 π基 [38]。我们的构造还需要额外一步，因为我们还希望它是完备的。

证明。 对于两个子集 V， $W \subseteq T$，记 $V \leq W$为 $V \subseteq \lceil W \rceil_T$，即 V中的每个节点在W 中都有一个位于其上方的节点。该命题的结论对所有满足如下条件的树 T 都成立：存在一个（递增的）余终反链序列 $\{A_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$，其中的（极大）反链位于 T中，满足 $A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \ldots$，并且对每个 t，都存在 $a \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ 使得 $t \leq a$。具有这种反链序列的树在 [14]中称为半特殊。容易证明，每棵特殊树在此意义下都是半特殊的。

现在，给定一个由极大反链组成的递增余终序列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$，对每个 $n \in \mathbb{N}$，令

- $B_n = \{[t]\colon\ t \in A_n\}$
- $X_n = \bigcup B_n \subseteq \mathrm{R}(T)$
- $I_n = \{x$ 在 $\mathrm{R}(T)$ 中孤立$\colon\ x \notin X_n\}$
- $X'_n = X_n \cup I_n$
- $B'_n = B_n \cup \{\{x\}\colon\ x \in I_n\}$。

那么， B'_n 是集合 X'_n 的一个开划分，而 X'_n 在 $\mathrm{R}(T)$ 中是开集。下面证明 X'_n 也是稠密的。设$U \subset \mathrm{R}(T)$ 是非空开集。若 U包含 T 的一个分支，则还存在一个节点 $s \in T$使得$[s] \subset U$。若 $\lceil s]$ 与 A_n相交，则 $[s] \subset B_n$ 且 $X_n \cap U \neq \varnothing$。否则，由 A_n的极大性可知，存在 $t \in A_n \cap [s]$。但此时，对于某个 $t \in A_n$， $[t] \subseteq [s]$ 可作为 $X_n \cap U \neq \varnothing$的见证。否则， U 避开 $\mathrm{B}(T)$，因此根据命题 2.19 包含一个孤立点，所以若 $U \cap X_n = \varnothing$，则 $U \cap I_n \neq \varnothing$。

由于射线空间是贝尔空间，命题2.12表明， $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X'_n$ 是$\mathcal{R}(T)$的一个稠密子空间。此外，每个 B'_n 都诱导 X的一个开划分，并且 $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B'_n$ 构成 X的一个基。因此， B 是σ的一个σ-离散基，故 X 是可度量化的 [11, 定理4.4。8]。

最后，为了证明 X 是完全可度量化的，我们检验 X 是否由 B 见证为基完备。事实上，设 $\mathscr{C} \subseteq B$ 是一个无限的具有有限交性质的子集。那么 $\mathscr{C}$ 至多包含每个

B'_n 中的一个元素。如果其中有一个是孤立点，结论便成立。否则，每个 $C \in \mathscr{C}$ 都具有 $[t_C]$ 的形式，其中 $t_C \in T$，且由中心性可知，$\{t_C\colon\ C \in \mathscr{C}\}$ 中的所有元素两两可比较，因此都位于 T 的某条分支 x 上。接下来只需证明 $x \in X$。否则，存在一个避开 x 的反链 A_n。由于 $\mathscr{C}$ 是无限的，必定存在 $m > n$，使得某个 $t_C \in A_m$。然而，由于 $A_n \leq A_m$，上述观察表明，在 x 上，A_n 中必定有一个元素位于 t_C 之下，矛盾。因此，$x \in X$，所以 X 是可度量化且基完备的，因而是完全可度量化的 [6]。□

3. 路径、射线与分支空间的刻画

3.1. 基 性质 II. 设 (X, τ) 是一个拓扑空间，A 是 X 的一个子集集族 .

- A 是 X 的闭开基 $\Big\}$ 如果 A 中的所有元素都是开闭集，并且 A 是 X 的基。
- $\mathsf{A}^{\complement} := \Big\{A^{\complement}\colon\ A \in \mathsf{A}\Big\}$,

- A 是 (X, τ) 的闭开子基，如果 τ 是 X 上包含 A 中所有元素作为开闭子集的最小拓扑。等价地，若 $\mathsf{A} \cup \mathsf{A}^{\complement}$ 是 X 的开子基，则 A 是闭开子基。
- A 是两两不交 的，如果 A 中所有元素两两不交。
- A 是离散 的，如果对于每个 $x \in X$，都存在 x 的一个开邻域，它至多与 A 中的一个元素相交。

- A 是局部有限 的，如果对于每个 $x \in X$，都存在 x 的一个开邻域，它只与 A 中有限多个元素相交。
- 当 A 是不交/离散/局部有限子集族的可数并时，A 是 σ-不交/ σ-离散/ σ-局部有限的。

3.2. **可度量化情形**。 由于端空间、分支空间和射线空间是基完备且超旁紧的（第 2.5 和 2.6节），因此这些空间类——在可度量化时——恰好描述了完全超度量化空间这一类，即下述性质（5）所述的空间类，而该性质可通过存在某些良好基从拓扑上刻画。

定理 3.1。 对于豪斯多夫空间 X，以下各项等价：

(1) X 同胚于某个（修剪的）图论树 T 的 $\Omega(T) = \mathcal{R}(T) = \mathcal{B}(T)$ 空间。*(2)* X 同胚于某个图的可度量化端空间。*(3)* X 同胚于某个可度量化射线空间。*(4)* X 同胚于某个可度量化分支空间。*(5)* X 是一个超旁紧、次紧的可度量化空间。*(6)* X 是完全超度量化的。*(7)* X 具有一个嵌套的诺特基，该基完备且 σ-离散。*(8)* X 具有一个嵌套基，该基完备且 σ-离散。*(9)* X 具有一个闭开基，该基完备且 σ-局部有限。

证明。我们首先证明 (1)–(6) 之间的度量等价关系。显然，(1) 推出 (2)、(3) 和 (4)。根据命题2.15 和 2.13，(2)、(3) 和 (4) 中的任一条件都推出 (5)。现在，每个基完备可度量化空间都是完全可度量化的 [6]，，并且任何完全可度量化的超旁紧空间都是强零维的，因此根据 [26, 推论 5]，它完全可超度量化。最后，每个完全可超度量化空间都能表示为某个图论树的端空间，这属于众所周知的结果，参见例如 [20]，从而得到 (6) ⇒(1)。

现在来看拓扑等价关系：为说明 (1) 推出 (7)，注意对于一个具有各层 T的图论树 $T^n\,(n\in\mathbb{N})$，集族 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{[t]\colon\ t\in T^n\}$ 构成了 (7) 所要求的一个基。(7) 到 (9) 的蕴含关系显然。最后，(9) 推出 $\Rightarrow$ (6) 是 de Groot 的结果 [5]。□

3.3. **由嵌套诺特子基得到的序树**。为研究任意（不可度量化）射线空间和分支空间的拓扑刻画，我们先考察一些在反向包含关系下构成树的开集族。

定义 3.2。设 S $\subset 2^X$ 是空间 X的一个子集集族。S-树 (T, f) 是一棵树 T，并带有一个满射 $f\colon\ T\to$ S，使得

(F1) 若 $t\le t'$，则 $f(t)\supseteq f(t')$；(F2) 若 $t,t'\in T$不可比较，则 $f(t)\cap f(t')=\varnothing$。

引理 3.3。设 $\mathcal{S}\subset 2^X$ 是 X 的一个嵌套诺特子集集族，满足 $X\in\mathcal{S}$ 但 $\varnothing\notin\mathcal{S}$。那么，将 $\mathcal{S}$ 按反向包含关系排序，可得到一棵有根树$(T_{\mathcal{S}},\le)=(\mathcal{S},\supseteq)$；当且仅当$\mathcal{S}$ 是 σ-不交时，这棵树是特殊的。

证明。由于 S 是诺特的，因此 (S $\supseteq$) 是一个良基偏序，且有唯一的极小元 X。因此，要证明 $T_{\mathcal{S}}$ 是一棵树，只需证明对于所有 $S\in T_{\mathcal{S}}$，$\uparrow S$ 都是一个链。于是考虑 S 中满足 $S',S''\supseteq S\neq\varnothing$ 的 S',S''。由于 S',S'' 相交，根据嵌套性可知，其中一个包含于另一个。

事实上，这个论证表明，$T_{\mathcal{S}}$ 中不可比元素实际上不交，这说明 $T_{\mathcal{S}}$ 是特殊的，当且仅当 S 是 σ-离散的。□

将树 $T_{\mathcal{S}}$ 视为一个抽象树 $(T_{\mathcal{S}},\trianglelefteq)$，并配以一个双射$f\colon\ T_{\mathcal{S}}\to$ S，记录 S 中的哪些集合对应树中的哪些节点，这样做会很方便。

引理 3.4。设 X 是一个豪斯多夫空间，$\mathcal{S}$ 是空间 X 的一个闭开子基。那么，对于每个 $\mathcal{S}$-树(T, f)，函数 $e\colon\ X\to\mathcal{P}(T)$ 定义如下

$$x\mapsto e(x):=\{t\in T\colon x\in f(t)\}$$

是到路径空间$\mathcal{P}(T)$中的一个嵌入。

证明。要说明 e 定义良好，注意到 (F2) 蕴含 $e(x)$是一条链，而 (F1) 蕴含 $e(x)$向下封闭。要说明 e连续，注意对每个节点 $t\in T$，都有 $e^{-1}([t])=f(t)\in$S 是 X中的（子基本）开闭集。

要说明 $e\colon\ X\to$P(T)是单射，考虑 $x\neq y\in X$。由于 X是豪斯多夫的，存在 $S\in$S，使得 $x\in S$和 $y\notin S$。由于 f是满射，存在 $t\in T$，满足 $f(t)=S$。于是 $t\in e(x)\setminus e(y)$，这表明 $e(x)$和 $e(y)$是 T中不同的路径。

要说明 $e\colon\ X\to$P(T)到其像上的开映射，考虑某个子基本开闭集 $S\in$S。我们需要证明 $e(S)$是 $e(X)\subseteq$P(T)中的开闭集。由于 f是满射，存在 $t\in T$，满足 $f(t)=S$。我们断言$e(S)=e(X)\cap[t]$。对于 $\subseteq$，注意对每个 $x\in S$，都有 $e(x)\ni t$，因此 $e(x)\in[t]$。对于 $\supseteq$，取 $x\in X$，使得$e(x)\in[t]$。根据 e的定义，这意味着 $x\in f(t)=S$。□

定理 3.5。拓扑空间 X 嵌入某个路径空间，当且仅当 X 是豪斯多夫的，且具有诺特的嵌套开闭子基。

证明。 对于充分性方向，结合引理 3.3 和 3.4。必要性方向将由下文的定理 3.9证明：每个路径空间都是射线空间，因此具有诺特的嵌套开闭子基（命题 2.10）。 □

3.4. **射线空间**。 现在我们证明引言中所述的射线空间（子空间）的刻画，为方便起见，将其合并为一个陈述。

定理 3.6。 对于豪斯多夫空间 X，以下条件等价：

(1) 存在一个 *{surjective}* 嵌入 $X \hookrightarrow \mathcal{R}(T)$ 将其映入某个 *[*特殊*]* 树 T 的射线空间；*(2)* X 具有一个*{*遗传完备*}*的嵌套开闭子基，该子基是诺特的 *[*且 σ不交*]*。

此定理应作如下理解：在断言 (1) 中加入方括号内的一个或两个条件时，也需要在断言 (2) 中加入相应方括号内的条件。

证明。 蕴含关系 (1) $\Rightarrow$ (2) 可由第 2.5 节的结果推出。

对于 (2) $\Rightarrow$(1)，设 $\mathcal{S}$ 是豪斯多夫空间 X 的一个嵌套诺特开闭子基，并考虑引理 $\mathcal{S}$-树 $T' = T_{\mathcal{S}}$，它由引理 3.3 给出，且带有嵌入

$$e' \colon X \to \mathcal{P}(T')$$

由引理 3.4 得到。我们的计划是将 $T\prime$ 修改为一个 S-树 T，使得由此得到的 $e\colon X \to \mathrm{P}(T)$ 成为从 X 到 $\mathrm{R}(T)$ 的嵌入；当 S 遗传完备时，该嵌入将是满射。

回顾一下，偏序集族 $(P_t \colon t \in T)$ 按另一个偏序集 T 索引所得的字典序和 $\mathrm{L}(P_t \colon t \in T)$ 是集合

$$\{(t,p) \colon t \in T, p \in P_t\}$$

配备偏序

$$(t,p) \leq^* (t',p') \text{ if and only if } t < t', \text{ or } (t = t' \text{ and } p \leq p').$$

如果 T 是一棵树，且所有 P_t 都是良序的，那么 $\mathrm{L}(P_t \colon t \in T)$ 也是一棵树。

现在令 $(T\prime, \leq) = (\mathrm{S}, \supseteq)$，将其解释为一棵 S-树 $(T\prime, f')$。对于每个 $t \in T\prime$，若存在$x \in X$使得 $e'(x) = \lceil t \rceil$，则令 $P_t = \mathbb{N}$；否则令 $P_t = \{0\}$。将 $T = \mathrm{L}(P_t \colon t \in T')$ 视为一棵 S-树，其中$f((t,p)) = f'(t)$。直观地说，这相当于在 t 的某些节点上方插入一个 ω-节点序列，其中 T' 中 t 的所有后继节点 s，在 $T\prime$ 中都成为该 ω-序列在 T 中的顶点。

我们断言，关联的嵌入 $e\colon X \to \mathrm{P}(T)$（引理 3.4）满足 $e(X) \subseteq \mathrm{R}(T)$。事实上，若 $e'(x) \in \mathrm{R}(T\prime)$，则 $e(x) \in \mathrm{R}(T)$ 仍然成立。又若 $e'(x)$ 是一条路径，其最大元为 $t \in T\prime$，则根据构造，$\{(t,n) \colon n \in \mathbb{N}\}$ 在 $e(x)$ 中是共尾的，因此 $e(x)$ 是一条射线。

此外，如果 $\mathcal{S}$ 是 σ-不交的，那么 T' 根据引理 3.3 是特殊的，因此 T 也特殊。

为了完成证明，接下来只需证明：当 S 遗传完备时，嵌入 e 也满足 $e(X) \supseteq \mathrm{R}(T)$。首先，我们将论证：若 S 遗传完备，则 $\mathrm{R}(T')$ 包含于 e' 的像中。事实上，反设存在 $\varrho' \in \mathrm{R}(T\prime)$ 不在 e' 的像中。记 Z 为 T' 中 ϱ' 的顶点集族（可能为空），并令$U = \bigcup_{z \in Z} f\prime(z)$ 为 X 的一个开子集。那么 $U^{\complement}$ 是 X 的闭子空间。由于对所有$t < t' \in \varrho$， $f\prime(t) \subsetneq f\prime(t')$，该集族

$$\left\{ f'(t) \cap U^{\complement} \colon t \in \varrho' \right\}$$

具有有限交性质但交集为空，这与 S 是遗传完备的相矛盾。

但这样一来，R(T) 也包含在 e 的像中：事实上，给定一条射线 $\varrho \in \mathrm{R}(T)$，若 $\varrho' = \varrho \cap T'$是 T' 中的一条射线，那么满足 $e'(x) = \varrho'$ 的 $x \in X$ 也满足 $e(x) = \varrho$；或者，若 $\varrho' = \varrho \cap T'$ 具有 $\varrho' = \lceil t \rceil$的形式，那么 ϱ 的产生就是为了回应存在一个 $x \in X$ 满足 $e'(x) = \lceil t \rceil$这一事实。但这样一来， $e(x) = \varrho$ ，正如所需。□

注意到定理 3.6 中的所有刻画条件都是闭遗传的，我们得到：

推论 3.7。 射线空间的每个闭子空间本身都是射线空间。

推论 3.8。 射线空间类与分支空间类是不可比较的。

证明。 不可数离散空间的一点紧化，例 2.3，是一个不能表示为分支空间的射线空间（根据 Archangel'ski 的一个结果，每个紧致分支空间都是可度量化的 [2], 另见 Nyikos 的综述文章 [27, 定理1。3]）。

反之，例 $\mathcal{B}(T$中的 Michael 线型树的分支空间 2.7 根据推论3.7不是射线空间，因为其闭子空间 $\mathbb{Q}$ 根据定理 3.1不能表示为射线空间。□

3.5. **路径空间**。 关于路径空间的拓扑刻画，我们将证明路径空间类与紧射线空间类一致。借助定理 3.6，这就给出了（特殊）树的路径空间的纯拓扑刻画，即下文的推论 3.10 。

定理 3.9。 对于空间 X，以下各项等价：

(1) X 同胚于某棵 *[*特殊*]* 树的路径空间；*(2)* X 同胚于某棵 *[*特殊*]* 树的紧射线空间。

例如，R($2^{<\omega}$) 和 P($\omega^{<\omega}$) 都是稠密无孤立点的、零维的可度量化空间，因此同胚于康托尔集。

证明。 对于蕴含 (1) $\Rightarrow$ (2)，给定一棵树 $(T, \leq)$ 的路径空间 P(T)，考虑射线空间 R(T^*)，其中 $T^* = T \times \mathbb{N}$采用字典序 $\leq^*$，即我们有

$$(t, n) \leq^* (t', n') \text{ if and only if } t < t', \text{ or } (t = t' \text{ and } n \leq n').$$

直观地说，这对应于在 T 的每个节点 t 上方插入一个 ω 节点序列，其中 T 中的所有后继节点s t 都成为该 ω 序列的顶点。

我们断言

$$f \colon \mathcal{P}(T) \to \mathcal{R}(T^*),\ p \mapsto p \times \mathbb{N}$$

是一个同胚。显然，它是一个双射，因此由于定义域紧致且值域是豪斯多夫的，只需验证连续性。为此，我们证明子基本开闭集的原像是（子基本）开闭集。确实，考虑集合 $[(t, n)] \in \mathrm{R}(T^*)$。由于 $[(t, n)] = [(t, 0)]$，可得

$$f^{-1}([(t, n)]) = f^{-1}([(t, 0)]) = [t].$$

这说明 f 是一个同胚。此外，若 T 是特殊的，例如 $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ 对于反链 A_n 成立，那么 $T^* = \bigcup_{n, m \in \mathbb{N}} A_n \times \{m\}$ 也可表示为反链 $A_n \times \{m\}$ 的可数并，从而完成第一个蕴含方向的证明。

对于蕴含关系 (2) $\Rightarrow$ (1)，考虑一个紧射线空间 R(T)。我们可以假设 T 是修剪的。通过超限贪心构造，可以轻松地将 T 分解为一族两两不交的

区间，其位于 T 中且序型为 ω：每一步，选取树中尚未被此类区间覆盖的一个极小节点 t，由于 T 是修剪的，我们可以从 t开始贪心地选取一个递增的 ω 序列。

接着，将 $S=\{\min I\colon I\in \mathrm{I}\}\subset T$视为一棵树，其偏序由 T诱导。特别地，如果T 是特殊的，那么 S也是特殊的。我们声称

$$f\colon \mathcal{R}(T)\to \mathcal{P}(S),\ x\mapsto x\cap S$$

是一个同胚。映射 f 定义良好：如果 x 是 T中的向下闭链，那么 $x\cap S$ 是 S中的向下闭链，因此是一条路径。

映射 f 是单射：如果 $x\neq x'$ 是 T中不同的射线，那么要么设 $x\subseteq x'$，要么 x 与 x' 不可比较。在第一种情况下，固定 $t\in x'\setminus x$，并取 $I\in \mathrm{I}$，使得 $t\in I$。由于 I 是一个序型为 ω的区间，因此 $I\cap x=\varnothing$，所以 $\min I\in f(x')\setminus f(x)$ 可作为见证，表明 $f(x)\neq f(x')$。在第二种情况下，取 $t\in x\setminus x'$和 $I\in \mathrm{I}$，使得 $t\in I$。于是 $I\subset x$。如果 $I\cap x'=\varnothing$，则结论成立。否则，取 $t'\in x'\setminus x$，并取$I'\in \mathrm{I}$，使得 $t'\in I'$。由于 $I\cap I'=\varnothing$，我们有 $\min I'\in f(x')\setminus f(x)$ 可作为见证，表明 $f(x)\neq f(x')$。

映射 f 是满射：设 $p\in \mathrm{P}(S)$。若 p 有一个最大元 s，考虑满足 $s\in I$ 的 $I\in \mathrm{I}$，并注意到 $x=\lceil I\rceil\subset T$ 是 T 中的一条射线，且 $f(x)=p$。若 p 没有极大元，则 $x=\lceil p\rceil\subset T$ 是 T中的一条射线，且 $f(x)=p$。

最后，由假设可知 $\mathrm{R}(T)$ 是紧致的，而 $\mathrm{P}(S)$ 是豪斯多夫的，因此只需验证连续性。为此，我们证明子基本开闭集的原像是（子基本）开闭集。事实上，考虑集合$U=[s]\subset \mathrm{P}(S)$。则 $s\in S\subset T$ 也导出一个子基本开闭集 $V=[s]\subset \mathrm{R}(T)$；又由于 I 中的元素是互不相交的区间，因此可得 $f^{-1}(U)=V$。证明完毕。□

推论 3.10. 一个拓扑空间同胚于某个路径空间，当且仅当它是紧豪斯多夫空间，并且具有一个诺特的、嵌套的开闭子基。□

推论 3.11. 对于豪斯多夫空间 X，以下条件等价：

(1) X 同胚于某个图的紧端空间，*(2)* X 同胚于某个特殊树的紧射线空间，*(3)* X 同胚于某个特殊树的路径空间，*(4)* X 同胚于某个埃伯莱因紧路径空间，*(5)* X 同胚于某个埃伯莱因紧射线空间，*(6)* X 是埃伯莱因紧空间，并且有一个嵌套的开闭诺特子基。

证明。 等价性 (1) $\Leftrightarrow$ (2) 可由定理 1.1 得出。等价性 (2) $\Leftrightarrow$ (3) 和 (4) $\Leftrightarrow$ (5) 可由定理 3.9 得出。等价性 (3) $\Leftrightarrow$(4) 已由 Gruenhage 在 [16] 中证明。最后，等价性 (5) $\Leftrightarrow$ (6) 可由定理 3.6 得出；注意，在紧空间中，任何开闭（子）基都是遗传完备的。□

3.6. **分支空间**。 本节将确立分支空间的以下刻画。

定理 3.12。 对于豪斯多夫空间 X，以下条件等价：

(1) 存在一个*{*满射*}*嵌入 $X\hookrightarrow \mathcal{B}(T)$，将其嵌入某个 *[*特殊*]* 树 T 的分支空间；*(2)* X 有一个*{*完备*}*的嵌套基 *[*，且该基是 σ-不交的*]*。

注意，嵌套基的元素必然是开闭集。

证明。 正向蕴含由分支空间 $\mathrm{B}(T)$ 的基 $\mathrm{S}=\{[t]\colon t\in T\}$ 给出。

关于分支空间子空间的断言式刻画，即豪斯多夫空间嵌入某棵树的分支空间当且仅当 X 具有嵌套基，是一个经典结果。P. Nyikos 在 [28, 定理 210]中给出了现代证明。由此得到定理 3.12 ，且无需括号中的任何额外性质。Nyikos 写道：“似乎没有对树的分支空间进行拓扑刻画的方便方法”，[28, 第8] 页——但要实现这样的刻画，所缺的不过是一个符合阿姆斯特丹性质精神的适当完备性假设。

事实上，在 [28, 定理 2.9 和 2.10] 中，Nyikos 从一个嵌套基 $\mathcal{S} \neq \varnothing$ 构造出一个基 $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ 和一个 $\mathcal{S}'$-树 T，使得 $t < t'$ 蕴含 $f(t) \supsetneq f(t')$，且相应的映射 $e\colon X \to \mathrm{B}(T)$ 定义如下：

$$e\colon X \to \mathcal{B}(T),\ x \mapsto e(x) := \{t \in T\colon x \in f(t)\}$$

是一个嵌入。现在只需注意，若 $\mathcal{S}$ 完备，则 $e\colon X \to \mathrm{B}(T)$ 是满射：对于任意分支$b \in \mathrm{B}(T)$，集族 $\{f(t)\colon t \in b\} \subseteq \mathcal{S}$ 具有有限交性质，且元素 $x \in \bigcap_{t\in b} f(t)$ 满足 $e(x) = b$。

最后，若 $\mathcal{S}$ 是 σ-不交的，那么由 $t < t'$ 蕴含 $f(t) \supsetneq f(t')$ 这一事实，可直接推出 T 是特殊的。□

参考文献

[1] J. Aarts 和 D. Lutzer，旨在识别贝尔空间的完备性性质，《数学论述》116（1974），1–45。[2] A. V. Archangel'skii，集合系统的秩与空间的维数（俄文），《数学基础》52（1963），第3期，257–275。[3] J. Carmesin，所有图都有展示其拓扑端的树分解，《组合数学》39（2019），第3期，545–596。[4] J. Cheriyan、T. Jordán 和 R. Ravi，关于层状族的2-覆盖与2-打包，《欧洲算法研讨会》，1999年，第510–520页。[5] J. De Groot，拓扑中的非阿基米德度量，《美国数学会会刊》7（1956），第5期，948–953。[6] ———, 次紧性与贝尔范畴定理，《荷兰数学学会会刊》22（1963），761–767。[7] R. Diestel，图的端结构：近期成果与未决问题，《离散数学》100（1992），第1–3期，313–327。[8] ———, 端空间与生成树，《组合理论杂志B辑》96（2006），第6期，846–854。[9] ———, 树集，《序》35（2018），第1期，171–192。[10] R. Diestel 和 D. Kühn，图论意义与拓扑意义下的图端，《组合理论杂志B辑》87（2003），第1期，197–206。[11] R. Engelking，《一般拓扑学——修订并补充版》，第6卷，Heldermann Verlag，柏林，1989。[12] H. Freudenthal，端理论的新构建，《数学年刊》43（1942），第2期，261–279。[13] ———, 离散空间与群的端，《瑞士数学评论》17（1944），第1期，1–38。[14] W. Funk 和 D. Lutzer，直线的分支空间表示，《拓扑及其应用》151（2005），第1–3期，187–214。[15] J P. Gollin 和 J. Kneip，无限树集的表示，《序》38（2021），第1期，79–96。[16] G. Gruenhage，关于 Todorčević 的 Corson 空间，《数学基础》126（1986），第3期，261–268。[17] R. Halin，关于图中的无限路径，《数学年刊》157（1964），125–137。[18] ———,无限图的单纯形分解，《图论进展》，《离散数学年刊》，1978。[19] H. Hopf，开空间的端与无限不连续群，《瑞士数学评论》16（1943），第1期，81–100。[20] B. Hughes，树与超度量空间：一种范畴等价，《数学进展》189（2004），第1期，148–191。[21] H. A. Jung，图中的有根树与边定向，《数学通讯》36（1968），第5–6期，351–359。[22] D. Kurepa，关于抽象距离，《数学、物理与天文学学报》11（1956），105–134。

[23] J. Kurkofka 和 M. Pitz，端空间表示定理，（2021）。已投稿。[24] J. Kurkofka 和 R. Melcher，可数决定端与图，《组合理论杂志B辑》156（2022），31–56。[25] J. Kurkofka、R. Melcher 和 M. Pitz，用正规树逼近无限图，《组合理论杂志B辑》148（2021），173–183。[26] A. Lemin，关于一般度量空间的超度量化，《美国数学会会刊》131（2003），第3期，979–989。[27] P. J. Nyikos，拓扑学中若干出人意料的基底性质，《拓扑学研究》，1975年，第427–450页。[28] ———，关于 Alexandroff 和 Urysohn 的若干非阿基米德空间，《拓扑及其应用》91（1999），第1期，1–23。[29] M. Pitz，正规生成树的统一存在定理，《组合理论杂志B辑》145（2020），466–469。[30] N. Polat，端与多端，I，《组合理论杂志B辑》67（1996），86–110。[31] ———，端与多端，II，《组合理论杂志B辑》68（1996），56–86。[32] W. Sierpiński，关于自稠密可数集的一个拓扑性质，《数学基础》1（1920），第1期，11–16。[33] P. Sprüssel，图的端空间是正规的，《组合理论杂志B辑》98（2008），第4期，798–804。[34] S. Todorčević，平稳集、树与连续统，《数学研究所出版物》（贝尔格莱德）（新系列）29（1981），第43期，249–262。[35] ———，树与线性有序集，《集合论拓扑学手册》，1984年，第235–293页。[36] ———，关于阿伦斯扎恩树的林德洛夫性质，《一般拓扑学及其与现代分析和代数的关系》第六卷（布拉格，1986），Heldermann，柏林（1988），577–588。[37] J. van Mill 和 A. Schrijver，紧拓扑空间的子基刻画，《一般拓扑及其应用》10（1979），第2期，183–201。[38] H. White，具有特殊伪基的第一可数空间，《加拿大数学通报》21（1978），第1期，103–104。

汉堡大学，数学系，联邦大街55号（Geomatikum），20146 汉堡，德国电子邮箱地址： max.pitz@uni-hamburg.de