arXiv:2303.00558v1 [math.RA] 1 Mar 2023

代数与几何性质： $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵和$\mathcal{L}_+^n$-半正锥

Aritra NarayanHisabia, Manideepa Saha*梅加拉亚邦国家理工学院数学系，印度西隆 *793003*

摘要

给定欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的一个真锥 K，若存在一个 $x \in K$ 使得 $Ax \in$int(K), 即 K 的拓扑内部，则称方阵 A 为K-半正矩阵。本文旨在研究K-半正矩阵的代数与几何性质，并特别关注自对偶真洛伦兹$_{n-1}$锥 $\mathcal{L}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0, \sum x_i^2 \leq x_n^2\}$。具体而言，我们讨论了$\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的若干必要代数条件及其他充分代数条件。此外，我们给出了对角和正交$\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的代数刻画。进一步地，给定一个方阵 A 和一个真锥K，我们根据其极射线讨论半正锥 $\mathcal{K}_{A,\ K} = \{x \in K : \ Ax \in K\}$ 以及 $\mathcal{S}_{A,\ K} = \{x: \ Ax \in K\}$ 的几何性质。由于 $\mathcal{L}_+^n$ 是一个椭球锥，最后我们得出了锥 $\mathcal{K}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 和 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 为椭球锥的结果。

关键词： 洛伦兹锥、真锥、半正矩阵、正交矩阵

*2020*年数学主题分类： 15B10; 15B48; 52A20

1. 引言

在全文中，我们用 $\mathbb{R}^{m\times n}$ 表示所有具有 $m \times n$ 阶且含实数元素的矩阵集合；用于向量/矩阵的不等号表示逐元素不等式。锥 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 具有以下性质：对于所有 $\alpha \geq 0$, $K + K \subseteq K$ 且 $\alpha K \subseteq K$。我们用 int(K) 表示欧几里得空间中锥 K 的拓扑内部。众所周知， $\mathbb{R}^n$ 中的集合如果包含其任意两点之间的线段，则称为凸集。真锥 K 是一个（凸）闭、尖（$K \cap (-K) = \{0\}$）且实（内部非空）的锥。 $\mathbb{R}^n$ 中的真锥 K 总能生成

*通讯作者电子邮箱： manideepa.saha@nitm.ac.in（Manideepa Saha）

一个 偏序，定义为

$$x \overset{K}{\leq} y \text{ if and only if } y - x \in K$$

锥 $K \in \mathbb{R}^n$ 的对偶记作 K^*，定义为

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \geq 0 \text{ for all } y \in K\}$$

其中 $\langle .,. \rangle$ 表示欧几里得空间中的标准内积。

给定 $\mathbb{R}^n$中的一个闭凸锥 K，若向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足： $0 \leq y \leq x$ 蕴含 $y = \alpha x$，其中某个 $\alpha \geq 0$存在，则称其为 K 的极射线K K。若 $\mathbb{R}^n$中的真锥 K有有限条极射线，则称其为多面锥；而恰有 n 条极射线的多面锥称为单纯锥。若 $Ax \in K$ 蕴含 $x \in K$，则称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为 K-单调 矩阵。特别地，若取 $K = \mathbb{R}^n_+$ （ $\mathbb{R}^n$的非负正交象限），则 $\mathbb{R}^+_n$-单调矩阵就是著名的单调矩阵 [1]。对于方阵 [4]，单调性与逆正性等价。单调矩阵的这一有趣刻画已推广到 K-单调矩阵，相关结果如下，并将在后文用于我们的结果。

定理 1.1。 [1] 矩阵 A 是 K-单调的，当且仅当 A 是非奇异的，且 $A^{-1} \in \pi(K) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \quad AK \subseteq K\}$，即保持 K 不变的 $n \times n$ 矩阵的集合。

如果存在一个 $x > (\geq)0$，使得 $Ax > 0$，则称矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为半正 矩阵；任何这样的向量 x 都称为矩阵 A的半正性向量 。半正矩阵的重要性体现在诸如线性互补问题、刻画可逆 M-矩阵、矩阵稳定性、博弈论、优化问题等各种问题中。半正矩阵最初由 Fielder 和 Pták 于 [6] 进行研究；在 [3, 5, 7, 9, 14, 18, 20]中可以找到半正矩阵的若干有趣且重要的性质，包括代数性质、几何性质和谱性质。半正矩阵的一个重要子类是极小半正矩阵，即删除任意一列所得的子矩阵都不是半正的。在 [9], 中证明了，具有非负左逆的半正矩阵是极小半正的，反之亦然，即极小半正矩阵具有非负左逆。对于方阵而言，这一表述等价于：方阵是极小半正的，当且仅当它是逆正的。半正矩阵 A 与真锥 $K_A = \{x \geq 0$ 相关联： $Ax \geq 0\}$，该锥称为半正锥。在 [14, 18] 中证明了半正锥是真多面锥，并进一步讨论了半正锥的自对偶性。关于半正锥的极射线的简要讨论可见于 [7]。半正矩阵与线性互补问题中相关的其他不同矩阵类之间的关系，在 [3]中进行了分析。

给定分别位于 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$中的两个真锥 K_1、 K_2，与这些锥相关的矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 的正性和半正性自 1970 年以来一直令许多研究者着迷，这些概念定义如下：

定义 1.1. 若矩阵 $A \in \mathbb{R}^n$ *s* 被称为

(i) 若 $A(K_1) \subseteq K_2$，则称其为(K_1, K_2)-负矩阵。所有(K_1, K_2)-负矩阵组成的集合记为 $\pi(K_1, K_2)$。*(ii)* 若 $A(K_1 \setminus \{0\}) \subseteq int(K_2)$，则称其为$(K_1, K_2)$-正矩阵。*(iii)* 若存在 $x \in K_1$，使得 $Ax \in int(K_2)$，则称其为(K_1, K_2)-半正矩阵；这等价于说，若存在一个$x \in int(K_1)$，使得 $Ax \in int(K_2)$，则称 A 为(K_1, K_2)-半正矩阵。这样的向量 x 称为关于锥 K_1 和 K_2的 A 的半正性向量。本文中，若上下文已明确锥，则简称 x 是 A的半正性向量。所有(K_1, K_2)-半正矩阵组成的集合记为$S(K_1, K_2)$。

如果在上述定义中 $K_1 = K_2 = K$，我们分别简写为 A 是 K-负，或 K-正，或 K-半正，并分别用 $\pi(K)$和 $S(K)$表示$\pi(K_1, K_2)$和 $S(K_1, K_2)$。值得一提的是，上段定义的半正矩阵就是 $\mathbb{R}^n_+$-半正矩阵。在 [12], 中证明了 $\pi(K_1, K_2)$是真锥。此外，可以看出，int($\pi(K_1, K_2)$)是所有(K_1, K_2)-正矩阵的集合。关于锥 $\pi(K_1, K_2)$的各种性质，可参见 [2, 12, 17, 19], 及其中的参考文献。

现在我们陈述一个与(K_1, K_2)-半正矩阵相关的著名结果，它是择一性定理 [11]的推广。

定理 1.2。 [1] 设 K_1 和 K_2 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 中的两个真锥，并设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$，则以下两种情况恰有一种成立。

(i) A 是(K_1, K_2)-半正的。(ii) 存在一个 $x(\neq 0) \in -K_2^*$，使得 $A^T x \in K_1^*$。

2018年，文献 [2] 重新研究了有限维实希尔伯特空间上的 (K_1, K_2)-半正矩阵类，并给出了许多有趣的结果，包括对 K-半正线性算子（矩阵）的刻画。现陈述以下由 [2] 得出的结果，这一结果对我们的进一步研究尤为重要。

定理 1.3。 [2] 设 K_1 和 K_2 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 中的两个真锥，并设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$。那么，$A \in S(K_1, K_2)$ 当且仅当存在一个$\tilde{}$可逆矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$，该矩阵是 K_1- 正的，且 $Y \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 是 (K_1, K_2)-$\tilde{}$ $\tilde{}$ 正的，其中 $A = YX^{-1}$。

上述定理推广了 [18], 的定理 3.1，该定理指出，任意半正矩阵 A 都可以分解为 YX^{-1}，其中 X 和 Y 是某些正矩阵。

椭球锥是另一类重要的凸锥，具有简单的结构和悠久的数学历史。这些锥涉及

物理学、统计学、优化等多个领域的应用。椭球锥是至少具有一个椭球截面（与超平面的交集）的真锥。文献中有多种关于椭球锥的定义，并且，在 [13] 中可以找到对这些不同方法的综述及其联系。 $\mathbb{R}^n$ 中的椭球 是 $\mathbb{R}^n$ 中闭单位球在 $\mathbb{R}^n$上的一个可逆仿射变换下的像。现在我们给出椭球锥的一个数学定义，该定义由 Stern 和 Wolkowicz 在 [15]中提出。

定义 1.2. [8, 15, 13] 若存在非零向量 $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ，使得截面 $S(K, y_0) := \{x \in K : x^T y = 1\}$ 是超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : x^T y_0 = 1\}$中的椭球，则真锥 K 在 $\mathbb{R}^n$ 中称为椭球锥。

Stern 和 Wolkowicz [15] 给出了椭球锥的刻画，具体如下列结果所示。

定理 1.4. [15] 真锥 K 是椭球锥，当且仅当 K具有如下表示：

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : x^T Q x \leq 0 : u^T x \geq 0\}$$

其中， Q 是惯性为$(n-1,0,1)$ 的对称非奇异矩阵， u 是 Q 对应于唯一负特征值 λ 的特征向量。

取非奇异对称矩阵 $Q = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1)$，并在上述定理中考虑唯一的负特征值 $\lambda = -1$ 及其对应的特征向量$u = [0, 0, \ldots, 1]^T$，则相应的椭球锥具有如下形式：

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq x_n^2 \right\}$$

这种特殊的椭球锥称为洛伦兹锥，记作 $\mathcal{L}_+^n$。事实上，任何椭球锥都可以用自对偶洛伦兹锥来刻画，后者如下所示：

定理 1.5。 [8] 对于真锥 K，以下陈述等价：

(a) K 是椭球锥。(b) K 与 $\mathcal{L}_+^n$同构。(c) 对偶锥 K^* 是椭球锥。

定理 1.6。 [16] 真锥 K 是椭球锥，当且仅当对于某个可逆矩阵 X，有 $K = X(\mathcal{L}_+^n)$。

文献中，“洛伦兹锥也称为冰淇淋锥或二阶锥”。然而，除正交变换外，洛伦兹锥是唯一的自对偶旋转锥。这类锥出现在二阶锥规划（SOCP）问题中。二阶锥规划问题的应用包括

各种工程问题，例如桁架设计、滤波器设计、天线阵列权重设计，以及机器人学中的抓取力优化等。 [10]。在[2], Chandrashekaran 等人用半正矩阵刻画了 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵。特别地，他们证明了每个 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵都可通过一个 $\left(\mathbb{R}_+^n, \mathcal{L}_+^n\right)$-负矩阵与一个半正矩阵相似。下面给出这些结果的正式表述。

定理 1.7。 [2]若 $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ 是半正矩阵，则 TAT^{-1} 是 $\mathcal{L}_+^2$-半正的，其中 $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$。反之，若 C 是 $\mathcal{L}_+^2$-半正的，则存在半正矩阵 A，使得 $C = TAT^{-1}$。

定理 1.8。 [2] 设 $n \geq 3$。若 A 是半正矩阵，则对某个可逆矩阵$S \in \pi\left(\mathbb{R}_+^n, \mathcal{L}_+^n\right)$，$SAS^{-1}$是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。反之，若 C 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的，则存在半正矩阵 A，使得$C = \left(S^T\right)^{-1} AS^T$。

由于相似变换保持许多代数性质和谱性质，因此要研究$\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的这些性质，只需研究半正矩阵的相同性质。本文给出了若干关于 K-半正矩阵和 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的结果，而这些结果在相似变换下未必保持不变。本文旨在研究各种真锥 K下的K-半正矩阵。我们重点分析 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的性质，并将正交和三角 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵作为特例进行研究。

本文的结构如下：第 2 节讨论 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的代数性质。具体而言，我们给出了 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的一些必要条件和其他充分条件。第 3 节重点讨论 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的特殊类型。更具体地说，我们研究了对角、正交和下三角 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的刻画。随后在第 4 节中，给定一个方阵A 和一个真锥 K，我们讨论了 K-半正锥$\mathcal{K}_{A,\ K} = \{x \in K :\ Ax \in K\}$ 以及锥$\mathcal{S}_{A,\ K} = \{x :\ Ax \in K\}$的几何性质。我们尤其重点关注锥 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$。最后，我们在第 5 节以总结性评论结束本文。

2. $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的代数性质

如上一节所述，矩阵半正性之所以引起研究者的兴趣，主要是因为它与线性互补问题的可解性有关。给定一个真锥 K，定理 1.3 通过将 $A = YX^{-1}$ 分解为某个 K_1-正矩阵 X 和 $\widetilde{(K_1, K_2)}$-正 Y [2], 给出了 K-半正矩阵 A 的刻画。该分解曾针对 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵在 [2], 中给出，陈述如下：

定理 2.1。 [2] $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的，当且仅当存在X，$Y \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且 X 可逆，X，Y是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的，使得 $A = YX^{-1}$。

受这项工作的启发，我们重新考察了 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵这一类，并介绍了此类矩阵的一些代数性质。

回顾： $\mathcal{L}_+^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0, \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 \leq x_n^2 \right\} = \left\{ x : \|x\| \leq \sqrt{2} x_n \right\}$,

其中 $\|.\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$中的欧几里得范数。结合柯西-施瓦茨不等式，可得以下结果:

引理 2.1. 对于 x， y， $z \in \mathcal{L}_n^+$有

(a) $\sum_{k=1}^{n-1} (x_k y_k) \leq x_n y_n$。当 x， $y \in \partial \mathcal{L}_n^+$共线时，等号成立。

(b) $\sum_{k=1}^{n} (x_k y_k z_k) \leq x_n y_n z_n$。当 x， y， $z \in \partial \mathcal{L}_n^+$共线时，等号成立。

对于任意正整数 l， $\mathcal{L}_n^+$ 包含向量 $x^{(l)}$，该向量由将 x的各元素提升至l次幂得到，即 $x^{(l)} = \left(x_1^l, \ x_2^l, \ \ldots, x_n^l\right) \in \mathcal{L}_n^+$。

关于 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的下一个结果是定义的直接推论，因此省略证明。

命题 2.1. 对于 $A = [\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$，有以下结果:

(i) 若 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的，则对于任意 $\alpha > 0$， αA也如此。(ii) 若 $\widetilde{a}_n \in \operatorname{int}(\mathcal{L}_+^n)$，则 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的，且 e_n 是其半正性向量。(iii) 对于任意满足 $p_{nn} = 1$的置换矩阵 $P = (p_{ij})$， A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的，当且仅当 PA 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。

(iv) 若 A 是形如以下形式的分块下三角矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

其中 $A_{22} \in \mathbb{R}^{k \times k}$，则 A_{22} 是 $\mathcal{L}_+^k$-半正的意味着 A 是$\mathcal{L}_+^n$-半正的。在这种情况下，若 x 是 A_{22}的半正性向量，则 $z = [0 \quad x]^T$ 是 A的半正性向量。

注 2.1。由上述结果可知， $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵类 $S\left(\mathcal{L}_+^n\right)$ 在非负数乘法下是闭的，但以下例子表明， $S\left(\mathcal{L}_+^n\right)$ 在 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 中不是一个锥。

例 2.1。矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 是 $\mathcal{L}_+^2$-半正矩阵，其半正性向量分别为 $[\frac{1}{2}, 1]^T$和 $[-\frac{1}{2}, 1]^T$。我们证明 $A + B$不是 $\mathcal{L}_+^2$-半正的。假设存在一个向量 $x \in \mathcal{L}_+^2$，使得

$$(A + B)x = \begin{bmatrix} 5x_1 + 7x_2 \\ 6x_1 + 5x_2 \end{bmatrix} \in \operatorname{int}(\mathcal{L}_+^2)$$

那么 $|x_1| \le x_2$ 和 $|(5x_1 + 7x_2)| < 6x_1 + 5x_2$，因此 $2x_2 < x_1$。由于 $x_2 \ge 0$，从而 $x_1 > 0$，$2x_2 < x_1$ 与不等式 $x_1 \le x_2$ 矛盾。

下一个定理给出了秩一 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的一个刻画。在证明以下结果的必要性部分时，采用了与 [2] 中定理 2.1 的情形 1 类似的论证。

定理 2.2. 设 $A = uv^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个非零秩一矩阵，且满足$u_n \ge 0$。那么，A 是一个 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵，当且仅当 $u \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$ 且$v \notin -\mathcal{L}_+^n$。

证明。设 A是一个 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵。取一个 $x \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$，使得 $Ax \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$。于是 $uv^Tx \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$，从而 $v^Tx \ne 0$。若 $v^Tx < 0$，则得到 $u \in -\mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$，这是不可能的，因为 $u_n \ge 0$。因此 $v^Tx > 0$，这意味着 $u \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$ 且 $v \notin -\mathcal{L}_+^n$。

反之，假设 $v \notin -\mathcal{L}_+^n$ 和 $u \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$。若 $v \in \mathcal{L}_+^n$，则任意$x \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$ 都是半正性向量。假设 $v \notin \mathcal{L}_+^n \cup -\mathcal{L}_+^n$。现在分以下两种情形讨论。

情形 I：令 $v_n \ge 0$。我们证明 $q = v + \|v\|e_n \in \mathcal{L}_+^n$ 是 A的半正性向量。注意，$q_n = v_n + \|v\| > 0$，因为 $v \ne 0$ 并且

$$\sum_{i=1}^{n-1} q_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 \le \|v\|^2 \le (v_n + \|v\|)^2 = q_n^2$$

因此 $q \in \mathcal{L}_+^n$。现在 $\langle q, v\rangle = \|v\|^2 + v_n > 0$，所以 $Aq = uv^Tq \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$，因为$u \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$。

情形 II：假设 $v_n < 0$。我们断言，向量 $p = (\|v\|^2 - \epsilon)e_n - v_nv$是 A的半正性向量，其中 $\epsilon > 0$取适当的值。注意

$$p_n = \|v\|^2 - v_n^2 - \epsilon, \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 = v_n^2 \sum_{i=1}^{n-1} v_i^2 = v_n^2(\|v\|^2 - v_n^2)$$

由于 $v \notin \mathcal{L}_+^n \cup -\mathcal{L}_+^n$，因此 $v_n^2 < \|v\|^2 - v_n^2$，从而

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 < (\|v\|^2 - v_n^2)^2$$

选取足够小的 $\epsilon > 0$，使得

$$p_n = \|v\|^2 - v_n^2 - \epsilon > 0 \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^{n-1} p_i^2 < (\|v\|^2 - v_n^2 - \epsilon)^2 = p_n^2$$

于是 $p \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$。由于 $v_n < 0$，因此我们有

$$v^Tp = \langle p, v\rangle = \|v\|^2 v_n - v_n\|v\|^2 - \epsilon v_n = -\epsilon v_n > 0$$

由于 $u \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$，因此我们得到 $Ap = uv^Tp \in \mathrm{int}(\mathcal{L}_+^n)$。所以结论成立。 □

在命题 2.1(ii) 中，我们观察到，如果矩阵的末列属于 int($\mathcal{L}_+^n$)，那么该矩阵是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的，其半正性向量为 e_n。事实上，如果末列属于边界 $\partial\mathcal{L}_n^+$，那么在一定条件下，该矩阵也可以是 $\mathcal{L}_n^+$-半正的。具体细节将在下一个定理中给出。

定理 2.3. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为一个矩阵，使得 $\mathcal{L}_+^n$ 包含第 n 列。对于某个 $k \neq n$，如果 A 的第 k 列属于 内 $\left(\mathcal{L}_+^n\right)$，那么 A是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。

证明. 写作 $A = (a_{ij}) = [\widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_n]$。根据给定的假设，我们有

$$\|\widetilde{a}_k\| \leq \sqrt{2}a_{nk}, \quad \text{and } \|\widetilde{a}_n\| \leq \sqrt{2}a_{nn} \tag{1}$$

取 $0 < \alpha < 1$，并定义向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 如下

$$x_i = \begin{cases} \alpha & \text{if } i = k \\ 1 & \text{if } i = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

使得 $Ax = [a_{1k}\alpha + a_{1n}, a_{2k}\alpha + a_{2n}, \ldots, a_{nk}\alpha + a_{nn}]^T = \alpha\widetilde{a}_k + \widetilde{a}_n$。注意到 $(Ax)_n = a_{nk}\alpha + a_{nn} \geq 0$，且由 (1) 可得

$$\|Ax\| = \|\alpha\widetilde{a}_k + \widetilde{a}_n\| \leq \alpha\|\widetilde{a}_k\| + \|\widetilde{a}_n\| < \sqrt{2}(a_{nk}\alpha + a_{nn}) = \sqrt{2}(Ax)_n \tag{2}$$

因此结论得证。 □

定理 2.3 中的条件对于 $\mathcal{L}_+^n$ 上矩阵的半正性并非必要。下面的例子说明了这一点。

例 2.2。 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$是一个 $\mathcal{L}_+^2$-半正矩阵，其半正性向量为 $y = [\frac{1}{2}, 1]^T$，且末列不属于 $\mathcal{L}_+^2$。

事实上，下面的例子给出了一个没有任何列属于 $\mathcal{L}_+^n$ 的 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵。

例 2.3。 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 是一个 $\mathcal{L}_+^2$-半正矩阵，其半正性向量为 $y = [-\frac{1}{2}, 1]^T$，而其所有列均不属于 $\mathcal{L}_+^n$。

在注 2.1 中，我们注意到，两个 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的和不一定是一个 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵。在下面的定理中，我们给出一个具有这一性质的较弱矩阵类。

定理 2.4。 设 $D = \text{diag}(d_1, .., d_n)$ 是一个满足 $\|D\| = d_n$ 的对角矩阵。如果 A 是一个 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵，那么 $A + D$也是如此。

证明。 由于 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的，取一个向量 $x \in \in\mathcal{L}_+^n$，使得 $y = Ax \in \mathcal{L}_+^n$。注意到 $(y_n + d_n x_n) \geq 0$，并且如公式 (2) 所示， $A + D \in S(\mathcal{L}_+^n)$ 具有相同的半正性向量。 □

注记 2.2。 定理 2.4 对所有满足 $d = [d_1, \ldots, d_n]^T \in \mathcal{L}_+^n$ 的对角矩阵 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 均成立。

定理 2.3 给出了 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的一个充分条件。现在我们给出其必要条件。

定理 2.5. 如果 A 是一个 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵，那么 A 的第 n 行向量不属于 $-\mathcal{L}_+^n$。

证明. 由于 A 是一个 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵，存在 $x \in \text{int}(\mathcal{L}_+^n)$，使得 $\|Ax\| < \sqrt{2}(Ax)_n$ 且 $(Ax)_n > 0$，也就是说，$\langle a_n, x\rangle > 0$，其中 a_n 是 A 的第 n 行向量。如果 $a_n \in -\mathcal{L}_+^n$，那么 $-a_n, x \in \mathcal{L}_+^n$ 推出 $\langle -a_n, x\rangle \geq 0$，这与假设矛盾。 □

下面的例子说明，定理 2.5 的逆命题一般未必成立。

例 2.4. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 的第 3 行向量不属于 $-\mathcal{L}_3^+$。取向量 $y = (1, 1, -3)^T$，可以观察到 $y \in -\mathcal{L}_+^n$ 和 $A^T y \in \mathcal{L}_+^n$，因此根据定理 1.2，$A$ 不是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。

前面的例子表明，定理 2.5 中给出的条件不足以检验 $\mathcal{L}_+^n$ 上矩阵的半正性。我们通过给出一个充分条件来结束本节。

定理 2.6。 设 $A = [a_1^T, \ldots, a_n^T]^T$ 是一个满足以下条件的矩阵

$$\|a_1\|^2 + \ldots + \|a_{n-1}\|^2 < \frac{1}{2}\|a_n\|^2 \ and \ \ a_{nn} \geq 0. \tag{3}$$

则 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。

证明。 我们通过证明 $y = \dfrac{a_n}{\|a_n\|} + e_n$ 是 A 的半正性向量，来证明 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。

首先，我们证明 $y \in \mathcal{L}_+^n$。注意到 $y_n = \dfrac{a_{nn}}{\|a_n\|} + 1 \geq 1 > 0$。于是我们得到

$$\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_{ni}^2}{\|a_n\|^2} = 1 - \frac{a_{nn}^2}{\|a_n\|^2} \leq 1 \leq y_n^2$$

因此，我们有 $y \in \mathcal{L}_+^n$。

接下来我们证明 $Ay \in \text{int}(\mathcal{L}_+^n)$。为此，我们计算项 $(Ay)_n$ 和 $(Ay)_1^2 + \ldots + (Ay)_{n-1}^2$。现在，

$$(Ay)_n = \langle a_n, y\rangle = \left\langle a_n, \frac{a_n}{\|a_n\|} + e_n \right\rangle = (\|a_n\| + a_{nn}) \geq 0$$

接下来，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1}(Ay)_i^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\langle a_i, y\rangle &\le \sum_{i=1}^{n-1}\|y\|^2\ \|a_i\|^2 \\ &\le \|y\|^2 \sum_{i=1}^{n-1}\|a_i\|^2 \\ &< 2y_n^2\frac{1}{2}\|a_n\|^2 \qquad [\text{ since } y \in \mathcal{L}_+^n \text{ and (3)}] \\ &= (\|a_n\| + a_{nn})^2 = (Ay)_n^2\end{aligned}$$

这表明 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。 □

3. $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的特殊类型

上一节中，我们给出了一个给定矩阵为 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的一些必要条件和其他一些充分条件，但并未讨论刻画 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的条件。不过， $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的一些刻画可见 [2]。本节主要关注 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵中特殊类的刻画。具体而言，我们研究对角、正交和下三角 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵。

我们从最简单的 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵子类开始，即对角 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵。注意，如果对角矩阵 D 的第 (n,n) 个元素为正，那么 D 是半正矩阵（其半正性向量为 e_n）。事实上，逆命题也可由定义推出，因此我们得到以下结果。

定理 3.1。对角矩阵 D 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的，当且仅当第$(n,\ n)$项为正。

为进一步讨论，我们使用以下记号：

(i) $H_+ := \{x\colon\ x_n \ge 0\}$， $\mathbb{R}^n$的（闭）上半空间。(ii) $H_- := \{x\colon\ x_n \le 0\}$， $\mathbb{R}^n$的（闭）下半空间。(iii) $H_0 := \{x :\ x_n = 0\}$， $\mathbb{R}^n$ 中的超平面，它将 H_+ 和 H_-分隔开。(iv) $\mathbb{S}^n = \{x :\ \|x\| = 1\}$， $\mathbb{R}^n$中的单位圆。(v) $L(x,y) = \{tx + (1-t)y :\quad 0 \le t \le 1\}$， $\mathbb{R}^n$中连接点 x 和 y的直线。

注意，超平面 H_0 仅在原点与 $\mathcal{L}_+^n$ 相交，并且 $\mathcal{L}_+^n$ 中任意两个向量之间的夹角小于或等于 $\pi/2$。接下来，我们给出正交 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的一个充要条件。为此，我们需要以下两个引理。

引理 3.1。 分别取自集合 H_0 和 $\partial\mathcal{L}_+^n$ 的任意两个非零向量之间的夹角至少为 $\pi/4$。

证明。 这等价于求 $\arccos\langle a,z\rangle, a \in H_0, z \in \partial\mathcal{L}_+^n$ 的最小值。为简便起见，我们假设 a,z 均为单位范数。因此，所求最小化问题的解与下述最大化问题的解相同：

$$\begin{array}{l}\max \ \langle a,z\rangle, \quad \text{subject to} \\ \left\{\begin{array}{l} z \in \partial\mathcal{L}_+^n \cap \mathbb{S}^n \\ a \in H_0 \cap \mathbb{S}^n \end{array}\right.\end{array}$$

由于 $z \in \partial\mathcal{L}_+^n \cap \mathbb{S}^n$，因此 $z_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$，而且 $a \in H_0$ 蕴含 $a_n = 0$。因此，上述最大化问题可以改写为更简单的形式：

$$\begin{array}{l}\max \ \ a_1z_1 + \ldots + a_{n-1}z_{n-1}, \quad \text{subject to} \\ \left\{\begin{array}{l} z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 = \frac{1}{2} \\ a_1^2 \ldots + a_{n-1}^2 = 1 \end{array}\right.\end{array} \tag{4}$$

用拉格朗日乘数法求解最大化问题 (4)，得到解为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$。这表明 $\arccos\langle a,z\rangle$, $a \in H_0, z \in \partial\mathcal{L}_+^n$ 的最小值为 $\pi/4$。

□

由前一个引理可知，$\arccos\langle a,z\rangle \leq \pi/4$, $\forall z \in \mathcal{L}_+^n$。

引理 3.2。 对于任意 $x = (x_1, .., x_n) \in \mathbb{S}^n$，存在一个向量 $z \in \text{int}(\mathcal{L}_+^n)$，使得 $\arccos\langle x,z\rangle < \pi/4$ 当且仅当 $x_n > 0$。

证明。 假设 $x_n > 0$。我们证明 $z = \frac{1}{2}(x + e_n)$ 是所需的向量。首先证明 $z \in \text{int}(\mathcal{L}_+^n)$。注意， $z_n = \frac{1}{2}(x_n + 1) > \frac{1}{2} > 0$。现在，

$$\begin{aligned}\|z\|^2 &= \frac{1}{4}\left[x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + (x_n+1)^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(\|x\|^2 + 2x_n + 1\right) \\ &= \frac{1}{2}(1 + x_n) = z_n < 2z_n^2\end{aligned}$$

由于 $\langle x,z\rangle = \frac{1}{2}(1 + x_n) = ||z||^2$，且 $x_n > 0$，我们有

$$\cos\theta = \frac{\langle x,z\rangle}{||z||} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + x_n} > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

其中 $\theta = \arccos\langle x,z\rangle$。这表明 $\arccos\langle x,z\rangle < \pi/4$

反过来，设存在一个 $z \in \text{int}(\mathcal{L}_+^n) \cap \mathbb{S}^n$，满足 $\arccos\langle x,z\rangle < \pi/4$。则 $\langle x,z\rangle > \frac{1}{\sqrt{2}}$。假设 $x_n \leq 0$。于是 $x \in H_-$，因此我们有

$z \in \text{int}(\mathcal{L}_+^n)$ 且 $x \notin \mathcal{L}_+^n$。这意味着存在一个向量 $p \in \partial\mathcal{L}_+^n \cap L(x,z)$。又因为 $z \in \text{int}(H_+)$ 且 $x \notin \text{int}(H_+)$，我们可以找到另一个向量 $q \in H_0 \cap L(x,z)$（若 $x_n = 0$，则取 $q = x$）。由引理 3.1，$\arccos\langle p,q\rangle \geq \pi/4$，因而 $\arccos\langle x,z\rangle \geq \pi/4$，因为 $p,q \in L(x,z)$，这就产生了矛盾。因此 $x_n > 0$。 □

现在我们陈述并证明主要结果。

定理 3.2. 正交矩阵 $A = (a_{ij})$ </style>是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的，当且仅当 $a_{nn} > 0$。

证明. 由于 A 是正交矩阵，我们可以假设 A 的任意半正性向量 z 都满足 $\|z\| = 1$，且必须满足 $z \in \text{int}(\mathcal{L}_+^n)$ 和 $1 = \|Az\| < \sqrt{2}(Az)_n$。因此，在 $\mathcal{L}_+^n$ 上为 A 寻找半正性向量，等价于寻找一个单位向量 z，使得

$$\langle a_n, z\rangle > \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{where } a_n^T \text{ is the } n\text{-th row of } A$$

若 θ 是 z 与 a_n之间的夹角，则 $\cos\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 当且仅当 $\theta < \pi/4$。因此，根据引理 3.2，z 是 A 的半正性向量，当且仅当 $a_{nn} > 0$。 □

在本节的讨论中，我们研究最后一类 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵，即下三角矩阵。对于下三角矩阵 A，$A(a_{nn}e_n) = a_{nn}^2 e_n$，因此以下结果显然成立。

命题 3.1。设 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为一个满足$a_{nn} > 0$的下三角矩阵，则 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。

命题 3.2。若 A 为一个满足 $a_{nn} \neq 0$的下三角矩阵，则存在$x \in \mathcal{L}_+^n \cup (-\mathcal{L}_+^n)$ 使得$Ax \in \mathcal{L}_+^n$。

本节最后给出下三角矩阵在 $\mathcal{L}_+^n$上的半正性的两个充分条件。

定理 3.3。设 $A = (a_{ij}) = [a_1^T, \ldots, a_n^T]^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为一个非零下$_{n-1}$三角矩阵，满足 $a_n \notin -\mathcal{L}_+^n$。令 $\beta = -a_{nn}$，$\gamma = \sum \|a_i\|^2$ 和$_{i=1}$ $\alpha_k = \sqrt{a_{1k}^2 + \ldots + a_{(n-1)k}^2}$，其中 $k = 1$，.. .，n。则有如下结论：

(i) 若 $\alpha_k + \beta < a_{nk}$，则对于 $k = 1, \ldots, n$，A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。

(ii) 若 $\gamma + 2\beta < \|a_n\|$，则 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。

证明。若 $a_{nn} > 0$，则结论由命题 2.1 显然成立。因此，我们假设 $a_{nn} \leq 0$。

(i) 令 $\alpha_k + \beta < a_{nk}$。我们总能找到一个实数 $c \in (0,1)$，使得$\alpha_k + \beta < ca_{nk}$。定义 $x \in \mathbb{R}^n$ 如下:

$$x_i = \begin{cases} c & \text{if } i = k \\ 1 & \text{if } i = n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

则 $x \in \text{int}\left(\mathcal{L}_+^n\right)$。我们证明， x 是 A在 $\mathcal{L}_+^n$上的所需半正性向量。注意到 $(Ax)_n = a_{nk}x_k + a_{nn} = a_{nk}c - \beta > \alpha_k \geq 0$。此外，

$$(Ax)_i = \langle a_i, x\rangle = \begin{cases} 0 & \text{if } \ 1 \leq i < k \\ a_{ik}c & \text{if } \ k \leq i \leq n-1 \\ a_{nk}c + a_{nn} & \text{if } \ i = n \end{cases}$$

因此我们有

$$\sum_{i=1}^{n-1}(Ax)_i^2 = \sum_{i=k}^{n-1} a_{ik}^2 c^2 = c^2\alpha_k^2 < \alpha_k^2 < (a_{nk}c - \beta)^2 = (Ax)_n^2$$

因此 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。

（ii）假设 $\gamma + 2\beta \leq \|a_n\|$。我们证明， $y = \dfrac{1}{3\|a_n\|}a_n + \dfrac{2}{3}e_n$是 A的半正性向量。

我们首先证明 $y \in \mathcal{L}_+^n$。注意到 $y_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{a_{nn}}{\|a_n\|} + 2\right) > \dfrac{1}{3} > 0$。再次，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 &= \frac{1}{9\|a_n\|^2}\sum_{i=1}^{n-1} a_{ni}^2 \\ &= \frac{1}{9}\left(1 - \frac{a_{nn}^2}{\|a_n\|^2}\right) < \frac{1}{9} < y_n^2 \end{aligned}$$

还需证明 $Ay \in$int$(\mathcal{L}_+^n)$。根据该假设，我们有，

$$(Ay)_n = \left\langle a_n, \frac{1}{3\|a_n\|}a_n + \frac{2}{3}e_n \right\rangle = \frac{1}{3}\|a_n n\| + \frac{2}{3}a_n = \frac{1}{3}(\|a_n\| - 2\beta) > \frac{\gamma}{3} \geq 0$$

and

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1}(Ay)_i^2 &= \frac{1}{9\|a_n\|^2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\langle a_i, a_n\rangle^2\right) \\ &\leq \frac{1}{9}\sum_{i=1}^{n-1}\|a_i\|^2 \\ &< \frac{1}{9}(\|a_n\| - 2\beta)^2 = (Ay)_n^2 \end{aligned}$$

这表明 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-半正的。 □

4. $\mathcal{L}_{+}^{n}$-半正锥的几何性质

给定真锥 K 和矩阵 A， K-半正锥定义为$\mathcal{K}_{A}$，$_{K}=\{x\in K:\ Ax\in K\}$。近年来，许多研究者在半正锥$K_{A}=\mathcal{K}_{A}$，$_{\mathbb{R}_{+}^{n}}$的几何性质方面取得了令人瞩目的成果。特别是，在 [18], 中证明了，对于方阵 A，锥 K_{A} 是真多面锥；随后，这一结果在[14]中推广到了非方阵。受这些成果启发， [7]研究了锥 $S_{A}=\{x:$ $Ax\geq 0\}$。研究表明，对于可逆矩阵 A， S_{A} 是单纯锥，并且 S_{A} 的极射线性质也在 [7]中进行了讨论。这促使我们将锥 S_{A} 推广为$\mathcal{S}_{A}$，$_{K}=\{x:$ $Ax\in K\}=A^{-1}(K)$，即 K 在 A下的原像，并研究$\mathcal{S}_{A}$，$_{K}$的极射线性质。值得一提的是， A 是 K-半正的，当且仅当$\mathcal{S}_{A}$，$_{K}$ 与 K 的交集具有非空内部。此外，值得注意的是，对于任意 K-单调矩阵 A，锥$\mathcal{S}_{A}$，$_{K}$ 与$\mathcal{K}_{A}$，$_{K}$ 相同。由于洛伦兹锥是本文特别关注的研究对象，我们着重研究$\mathcal{S}_{A}$，$_{\mathcal{L}_{+}^{n}}$的几何性质。以下定义对后续研究至关重要。

定义 4.1。 [1, 7]由 $T\subseteq\mathbb{R}^{n}$ 生成的集合，是由 T中元素的所有有限个非负线性组合构成的集合，记为 T^{G}。若一个锥K 满足 $K=T^{G}$，其中 T为某个有限集，则称其为多面锥；若 $\mathbb{R}^{n}$ 中的多面锥是单纯的，则 T 恰好包含 n 条极射线。

必须注意，多面锥和单纯锥的生成元就是锥 [1]的极射线。现在我们陈述 S_{A} 相关的定理，该定理由[7] 提出，并将在本节中加以推广。

定理 4.1。 [7] 对于可逆矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$，单纯锥 S_{A} 的极射线具有形式 $\alpha_{i}A^{-1}e_{i}$，其中 $\alpha_{i}>0,\quad i=1,\ .....,\ n$。

由于 e_{i} 是单纯锥 $\mathbb{R}_{+}^{n}$ 的极射线，定理 4.1 提供了一种联系 K 与 $\mathcal{S}_{A,K}$ 的极射线的思路，下一定理将给出这一结果。

定理 4.2. 设 K 是一个真锥， $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ 是一个可逆矩阵。那么， x 是 K 的极射线，当且仅当 $A^{-1}x$ 是 $\mathcal{S}_{A,K}$ 的极射线。

证明。假设 x 是 K 的极射线。设 $0\overset{\mathcal{S}_{A}}{\leq}y\overset{K}{\leq}x$，$_{\mathcal{S}_{A,}}\leq^{K}A^{-1}x_{\circ}$ 记作 $x^{'}=A^{-1}x_{\circ}$ 由于 $y^{'}\in\mathcal{S}_{A,K}=A^{-1}K$，取 $y\in K$，使得 $y^{'}=A^{-1}y$，从而 $x^{'}-y^{'}=A^{-1}(x-y)$ $\in A^{-1}K$，即 $x-y\in K$，因此 $0\overset{K}{\leq}y\overset{K}{\leq}x_{\circ}$ 由于 x 是 K 的极射线， $x=\alpha y$，其中某个 $\alpha\geq 0_{\circ}$ 因此， $x^{'}=\alpha y^{'}_{\circ}$

反过来，假设 $x^{'}=A^{-1}x$ 是 $\mathcal{S}_{A,K}$ 的一条极射线。令 $0\overset{K}{\leq}y\overset{K}{\leq}x$，则 $y^{'}=A^{-1}y\in\mathcal{S}_{A,K}$，且 $x^{'}-y^{'}=A^{-1}(x-y)\in\mathcal{S}_{A,K_{\circ}}$ 因此 $0\overset{\mathcal{S}_{A}}{\leq}y^{'},\ _{\mathcal{S}_{A,}}\leq^{K}x^{'}$，于是对于某个 $\alpha\geq 0$，有 $x^{'}=\alpha y^{'}_{\circ}$ 故 $x=\alpha y_{\circ}$

□

在 [7], 的定理 3.6 和定理 3.10 中证明了，矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是极小半正的，当且仅当 $K_A = S_A$，且 K_A 是一个单纯锥。在这种情况下， K_A 的极射线是 A^{-1} 的列。以下两个推论将这两个结果推广到 K-单调矩阵，并由一个简单事实得出：如果 A 是 K-单调的，则 $\mathcal{K}_{A,K} = \mathcal{S}_{A,K}$。

推论 4.1. 设 K 是 $\mathbb{R}^n$中的一个真锥，且 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是一个 K-单调矩阵。则 x 是 K 的极射线，当且仅当 $A^{-1}x$ 是$\mathcal{K}_{A,\ K}$的极射线。

推论 4.2. 如果 K 是 $\mathbb{R}^n$中的单纯锥，那么$\mathcal{S}_{A,\ K}$也是单纯锥。

对于给定的真锥 K，下一个定理给出了一类 K-半正矩阵。更具体地说，若 K 是自对偶的，我们证明所有余正矩阵都是 K-半正的。为此，我们现在定义关于真锥 K的余正矩阵。

定义 4.2. [1] 给定一个真锥 K，若对所有 $x \in K$均有 $x^T Ax \geq 0$，则称对称矩阵 A 在 K 上余正。

如果 K 是自对偶锥且 A 不是半正的，则该结果由定理 1.2 推出。

命题 4.1。 若 K 是 $\mathbb{R}^n$中的任意自对偶正常锥，则 K 上的余正矩阵是 K-半正的。特别地，对于任意自对偶锥 K，对称正定矩阵都是 K-半正的。

最后，我们讨论 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 和 $\mathcal{K}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$的一些有趣性质。由于 $\mathcal{L}_+^n$ 是一个椭球锥，下面的定理给出了 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 和 $\mathcal{K}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 为椭球锥的条件。文献中众所周知，每个椭球锥都具有 $B\mathcal{L}_+^n$的形式，其中 B 是某个可逆矩阵，反之亦然。上述事实已用于描述前述锥的椭球性。

定理 4.3。 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$。则有：

(i) $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 是椭球锥，当且仅当 A 是非奇异的。(ii) 设 K 是一个椭球锥。则存在可逆矩阵 A，使得 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n} = K$.(iii) 若 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-单调的，则$\mathcal{K}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 是一个椭球锥。

证明。 (i) 设 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$是一个椭球锥。若 A是奇异的，则存在 $x \neq 0$使得 $Ax = 0$，于是 $x, -x \in \mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$，这与$\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$的尖性矛盾。反之，设 A 是非奇异的。则 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n} = A^{-1}\mathcal{L}_+^n$，因此根据定理 1.6，只需证明 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 是真锥。

由于 A 是连续的，且 $\mathcal{L}_+^n$ 是闭的，因此 $A^{-1}\mathcal{L}_+^n = \mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 是闭的。另外，$A^{-1}\mathcal{L}_+^n$ 是凸的，因为 $\mathcal{L}_+^n$ 是凸的。

令 $x \in A^{-1}\mathcal{L}_+^n \cap \left(-A^{-1}\mathcal{L}_+^n\right) = A^{-1}\left(\mathcal{L}_+^n \cap -\mathcal{L}_+^n\right) = 0$。因此 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 是尖的。

此外， $\mathcal{L}_+^n$ 是实心的，这意味着$\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 是实心的。因此，$\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 是真锥。

(ii) 设 K 是一个椭球锥，则存在一个非奇异矩阵 T，使得 $K = T\mathcal{L}_+^n$。取 $A = T^{-1}$，我们有 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n} = K$。

(iii) 若 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-单调的，则由定理 1.1， A 是非奇异的，且 $A^{-1} \in \pi(\mathcal{L}_+^n)$，这意味着

$$\mathcal{K}_{A,\mathcal{L}_+^n} = \mathcal{L}_+^n \cap \mathcal{S}_{A,\mathcal{L}_+^n} = \mathcal{L}_+^n \cap A^{-1}\mathcal{L}_+^n = A^{-1}\mathcal{L}_+^n = \mathcal{S}_{A,\mathcal{L}_+^n}$$

因此 $\mathcal{K}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 是一个椭球锥。 □

推论 4.3。 A 是 $\mathcal{L}_+^n$-单调的，当且仅当 A 可逆且 $\mathcal{K}_{A,\ \mathcal{L}_+^n} = \mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 是一个椭球锥。

5. 结论

本文研究了 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的代数性质。研究发现， n行和 n列在给出关于 $\mathcal{L}_+^n$上矩阵半正性的必要（或充分）条件方面发挥着重要作用。我们进一步发现，矩阵的 (n, n) 项可以用于刻画对角和正交的 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵。此外，我们还得到了使下三角矩阵成为 $\mathcal{L}_+^n$-半正矩阵的充分条件。给定一个非奇异矩阵 A和一个真锥 K，我们根据各自的极射线考察了半正锥 $\mathcal{K}_{A,\ K}$ 以及锥 $\mathcal{S}_{A,\ K}$的几何性质。特别地，我们发现 K 和$\mathcal{S}_{A,\ K}$ 的极射线通过 A^{-1}相互关联。最后，我们得到了使两个特定的锥 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 和 $\mathcal{S}_{A,\ \mathcal{L}_+^n}$ 成为椭球锥的充分条件。

致谢

作者感谢匿名审稿人对本文提出的正面批评和宝贵建议，这些意见显著提升了论文的质量。

参考文献

[1] A. Berman 和 R. J. Plemmons。《数学科学中的非负矩阵》。SIAM 应用数学经典丛书，费城，1994年。[2] C. Arumugasamy、S. Jayaraman 和 V. N. Mer。有限维实希尔伯特空间中相对于真锥的线性映射的半正性。《电子线性代数杂志》，34:35–53，2018年。[3] P. N. Choudhury、R. M. Kannan 和 K. C. Sivakumar。半正矩阵与极小半正矩阵的新贡献。《电子线性代数杂志》，34:35–53，2018年。

[4] L. Collatz。单调性的任务。《数学档案》，3:366–376，1952年。[5] J. Dorsey、T. Gannon、C.R. Johnson 和 M. Turnansky。《关于半正矩阵的新结果》。《捷克斯洛伐克数学杂志》，66:621–632，2016年。[6] M. Fiedler 和 V. Pták。正定性与单调性的一些推广。《数值数学》，9:163-172，1966年。[7] A. N. Hisabia 和 M. Saha，关于半正锥与单纯锥的性质。《电子线性代数杂志》，36，764–772，2020年。[8] J. Jerónimo-Castro 和 T. B. Mcallister，椭球锥的两个刻画。《凸分析杂志》，20:1181–1187，2013年。[9] C. R. Johnson、M. K. Kerr 和 D. P. Stanford。矩阵的半正性。《线性与多重线性代数》，37:265–271，1994年。[10] M. S. Lobo、L. Vandenberghe、S. Boyd 和 H. Lebret。二阶锥规划的应用。《线性代数及其应用》，284:193–228，1998年。[11] O. L. Mangasarian。《非线性规划》。麦格劳-希尔，纽约，1969年。[12] H. Schneider 和 M. Vidyasagar。交叉正矩阵。《SIAM 数值分析杂志》，7:508–519，1970年。[13] A. Seeger 和 M. Torki。椭球锥。《凸分析杂志》，27(2):583–622，2020年。[14] K. C. Sivakumar 和 M. J. Tsatsomeros。半正矩阵及其半正锥。《正性》，22:379–398，2018 年。[15] R. J. Stern 和 H. Wolkowicz。不变椭球锥。《线性代数及其应用》，150:81–106，1991年。[16] R. J. Stern 和 H. Wolkowicz。冰淇淋锥上的指数非负性。《SIAM 数值分析杂志》，12(1):160–165，1991年。[17] B. S. Tam。正算子锥的结构。《线性代数及其应用》，167:65-85，1992年。[18] M. J. Tsatsomeros。半正矩阵的几何映射性质。《线性代数及其应用》，498:349–359，2016年。[19] J. S. Vandergraft。具有不变锥的矩阵的谱性质。《SIAM 应用数学杂志》，16(6):1208–1222，1968年。[20] H. J. Werner。极小半正性的刻画。《线性与多重线性代数》，37:273–278，1994年。