arXiv:2303.00560v2 [math.CO] 9 Jul 2024

超纳布拉算子

FRANC.OIS BERGERON、JIM HAGLUND、ALESSANDRO IRACI 和 MARINO ROMERO

Abstract. 我们在此考察一种称为“超 nabla”的新算子，并证明它是这样一类算子中的通用算子：修正麦克唐纳多项式是这些算子的共同特征函数。所有此前已知的 Macdonald 特征算子都可以直接由超 nabla 得到，包括通常的 nabla 算子、Delta 算子，以及文献中出现过的其他算子。因此，超 nabla 算子为这一类算子提供了一个统一的整体视角，也开辟了新的可能性。我们证明了若干由特化参数 q 和 t 所得的新恒等式；这些参数参与了上述算子的定义，同时我们也统一了相关的组合解释。

Contents

1. 引言 1
2. 组合定义 5
3. 对称函数运算 7
4. 不同权重 14
5. 多重标记戴克路径 23
6. 关于幂和 29
7. 进一步方向 41
致谢 42
参考文献 42

Ke关键词：Macdonald 算子；Catalan 组合学；对称函数。

2020年数学主题分类：05A17；05E10；05E05

1. Introduction

近年来，关于由一类算子构造的代数的研究成果日益丰富；对于这些算子而言，麦克唐纳多项式构成其共同特征函数基。相关主题涉及代数组合学、统计力学、表示论、代数几何以及链环同调等诸多领域，此处仅举数例。~本文考察麦克唐纳多项式的修正版，记为 $H_\mu(\boldsymbol{x},\ q\,t)$，其中 μ 遍历所有整数分拆。除具有许多优良性质外，众所周知，它们还

Date：2024年7月10日。

在舒尔函数基下展开时，其系数属于 $\mathbb{N}[q,t]$ （见 [12]）。例如，

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_3(\boldsymbol{x};q,t) &= s_3(\boldsymbol{x}) + (q+q^2)s_{21}(\boldsymbol{x}) + q^3 s_{111}(\boldsymbol{x}),\\ \widetilde{H}_{21}(\boldsymbol{x};q,t) &= s_3(\boldsymbol{x}) + (q+t)s_{21}(\boldsymbol{x}) + qt\, s_{111}(\boldsymbol{x}),\\ \widetilde{H}_{111}(\boldsymbol{x};q,t) &= s_3(\boldsymbol{x}) + (t+t^2)s_{21}(\boldsymbol{x}) + t^3 s_{111}(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

通常我们通过称它们具有舒尔正性[1]来表达这一事实。这种舒尔正性~已通过如下方式得到自然解释（参见 [8]）： $H_\mu(\boldsymbol{x};q,t)$ 是一个双分次 $\mathbb{S}_n$-模 $\mathcal{H}_\mu$的弗罗贝尼乌斯特征，其中参数 q 和 t 用于编码分次，而舒尔函数则编码 $\mathbb{S}_n$-不可约表示。这些*Garsia-Haiman* 模$\mathcal{H}_\mu$是对角调和多项式空间中的子模，

$$\mathrm{DH}_n = \left\{ P \in \mathbb{C}[u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n] \mid \sum_{i=1}^{n} \partial_{u_i}^r \partial_{v_i}^s P = 0, \text{ whenever } r+s>0 \right\},$$

在 $\mathbb{S}_n$-作用下，对角地置换两组变量，即 $\sigma \cdot u_i = u_{\sigma(i)}$ 和$\sigma \cdot v_i = v_{\sigma(i)}$。

回顾一下，双分次 $\mathbb{S}_n$-模 $\mathcal{W} = \bigoplus_{(r,s)} \mathcal{W}^{(r,s)}$ 的弗罗贝尼乌斯特征是对称函数（以变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ 表示）

$$\mathcal{F}(\mathcal{W})(\boldsymbol{x};q,t) = \sum_{(r,s)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} q^r t^s \sum_{\lambda\vdash n} n_\lambda^{(r,s)} s_\lambda(\boldsymbol{x}),$$

假设每个分量 $\mathcal{W}^{(r,s)}$ 作为 $\mathbb{S}_n$-模分解为

$$\mathcal{W}^{(r,s)} \simeq \bigoplus_{\lambda\vdash n} n_\lambda^{(r,s)} V^\lambda,$$

其中 V^λ 表示由 λ标记的杨不可约模（的代表），而 $n_\lambda^{(r,s)}$ 表示它在 $\mathcal{W}^{(r,s)}$中的重数。换言之，$\mathcal{F}(\mathcal{W})(\boldsymbol{x};\ q,\ t)$ 中舒尔函数 $s_\lambda(\boldsymbol{x})$ 的系数，是不可约模 V^λ 在 $\mathcal{W}$中出现次数的分次希尔伯特级数。

[8], 中的一个主要猜想由 Haiman 于 [12], 证明，其内容为

$$\mathcal{F}\left(\mathrm{DH}_n\right)(\boldsymbol{x};q,t) = \nabla(e_n(\boldsymbol{x})), \tag{1.1}$$

其中， $e_n(\boldsymbol{x})$表示次数为 n 的初等对称函数，而 ∇ 是 [1] 上的纳布拉~ ~算子，其特征函数为（修正的）麦克唐纳多项式 $\mathrm{H}_\mu(\boldsymbol{x}) = \mathrm{H}_\mu(\boldsymbol{x};q,\ t)$，对应的特征值为

$$\nabla \widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x}) = \Big(\prod_{(i,j)\in\mu} q^i t^j \Big) \widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x}).$$

[1]其系数为具有正整数系数的 $(q,\ t)$-多项式。

这里，$(i,\ j)$遍历单元格集合 μ （见第2节）。此外，还有其他类似定义的算子：

$$\Delta_{e_1}\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x})=\Big(\sum_{(i,j)\in\mu}q^it^j\Big)\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x}),\quad\text{and}\quad\Pi\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x})=\Big(\prod_{\substack{(i,j)\in\mu\\(i,j)\neq(0,0)}}(1-q^it^j)\Big)\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x}).\tag{1.2}$$

本工作的主要贡献涉及对 ∇ 的以下扩展，它既统一了许多先前的结果，也开辟了令人耳目一新的可能性。

定义 1.1. 我们定义 $\nabla_*\colon\ \Lambda\to\Lambda\otimes\Lambda$ 为

$$\nabla_*\widetilde{\mathrm{H}}_\mu:=\widetilde{\mathrm{H}}_\mu\otimes\widetilde{\mathrm{H}}_\mu\,.\tag{1.3}$$

或者，若考虑第二组变量 $\boldsymbol{y}$，我们只需令

$$\nabla_{\boldsymbol{y}}\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x}):=\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{y})\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x}).\tag{1.4}$$

从现在起，我们将张量积视为不同变量组中的对称函数的乘法。

对于任意对称函数 F，将多变量霍尔内积扩展为可作用于算子（就像它作用于对称函数一样）很有用。这样，我们将 $\langle F,\ \nabla_*\rangle$记作将 H_μ 映射为

$$\langle F,\nabla_*\rangle\widetilde{\mathrm{H}}_\mu:=\langle F,\widetilde{\mathrm{H}}_\mu\rangle\widetilde{\mathrm{H}}_\mu,\tag{1.5}$$

其中 $\langle F,\ \mathrm{H}_\mu\rangle$ 表示通常版本的霍尔标量积。采用这一记号，我们得到以下恒等式。

命题 1.2。 对于任意次数为 n 的齐次对称函数 $F(\boldsymbol{x})$ ，

$$\langle p_n,\nabla_*\rangle F=\Pi F\qquad\qquad and\qquad\qquad\langle e_kh_{n-k},\nabla_*\rangle F=\Delta_{e_k}F.\tag{1.6}$$

我们的主要目标之一是为形如 ∇_*^kF 的表达式给出组合模型，其中涉及有趣的对称函数 F。特别地，我们考虑[2]的情形

$$F=\Xi\,e_\lambda:=\Delta_{e_1}M\Pi\,e_\lambda(\boldsymbol{x}/M)$$

（如 [14]），对于这些情形，我们在 $t=1$ 处给出组合展开。

注意，这些 $\Xi\,e_\lambda$ 构成了 Λ的一组基，并且 $\Xi\,e_{\lambda,1}=\Delta_{e_1}\Theta_{e_\lambda}e_1$ 可用 Theta 算子表示（见 [4]）。事实上，我们将证明，只需理解情形$\lambda=(n)$（此时 $\Xi\,e_n=e_n$）即可；这意味着，对称函数 $\nabla_*^{k+1}e_n$ 包含了算子 ∇_*^k 作用于任意对称函数时所产生效果的全部信息。

[2]请记住，在这一领域，通常用 M 表示乘积 $(1-q)(1-t)$。

为方便起见，令 $\mathcal{X}_k = \boldsymbol{x}^{\otimes k}$（即 $\boldsymbol{x} \otimes \boldsymbol{x} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{x}$, k 次），其中若上下文清楚， k 可以省略；对于任意适当的元组的元组 $w = (w_1, \ldots, w_n)$，其中 $w_i = (w_{i1}, \ldots, w_{ik})$，令

$$\mathcal{X}^w = (x_{w_{11}} x_{w_{21}} \cdots x_{w_{n1}}) \otimes \cdots \otimes (x_{w_{1k}} x_{w_{2k}} \cdots x_{w_{nk}}).$$

在这项工作中，我们深入探讨了 t 取特化值 1 时的特殊情形，并得到了如下结果。

定理 1.3。 当 $t = 1$ 时，我们分别有如下单项式、初等函数和 *Schur* 函数展开：

$$\begin{aligned}
\nabla_*^k e_n\Big|_{t=1} &= \sum_{L \in \mathrm{LD}_{k^n}} q^{\mathrm{area}(L)} \mathcal{X}_{k+1}^L \\
&= \sum_{L \in \mathrm{LD}_{k^n}^k} q^{\mathrm{area}(L)} e_{\eta(L)} \otimes \mathcal{X}_k^L \\
&= \sum_{L \in \mathrm{LLD}_{k^n}^k} q^{\mathrm{area}(L)} e_{\eta(L)} \otimes s_{\lambda^1(w(L))} \otimes \cdots \otimes s_{\lambda^k(w(L))},
\end{aligned}$$

其中，前两个求和是对 $nk \times n$ 矩形中的多重标记戴克路径求和，其标记方式和相应的单项式各不相同；最后一个求和则是对格点多标记戴克路径求和。详情请参见第 5 节。

第 3 节介绍了两种得到这些展开式的方法，并详细讨论了一般的组合情形，由此推导出其他展开式。这涉及一些合理的统计量（见 定义 (定义 4.1），这些统计量对于第 *6* 节的方形情形展开式也很有用。

这个所谓的方形情形在 $F = \Delta_{m_\gamma}(-1)^{n-1} p_n$ 时给出类似结果（必要的定义见第 3 节）。特别地，若 $\gamma = 1^n$，则 $F = \nabla\omega(p_n)$，于是得到

定理 1.4。

$$\begin{aligned}
\nabla_*^k \nabla\omega(p_n)\Big|_{t=1} &= \sum_{L \in \mathrm{RLD}_{k^n}} q^{\mathrm{area}(L)} \mathcal{X}_{k+1}^L \\
&= \sum_{L \in \mathrm{RLD}_{k^n}^{1^n}} q^{\mathrm{area}(L)} \mathcal{X}_k^L \otimes e_{\eta(L)} \\
&= \sum_{\substack{P \in \mathrm{RLLD}_{k^n}^{1^n} \\ w = w(p)}} q^{\mathrm{area}(P)} s_{\lambda^1(w)} \otimes \cdots \otimes s_{\lambda^k(w)} \otimes e_{\eta(P)},
\end{aligned}$$

其中前两个求和是对带有标记回返的多重标号 k^n-戴克路径进行的，第三个求和则是对其标号构成格字的多重标号路径进行的。详情请见第*6*节。

2. Combinatorial definitions

和往常一样，我们可以用费雷尔图表示分拆（采用法式约定），因此第 k 行中的单元格数量就是 μ的第 k^{th} 部分的大小。单元格采用通常的笛卡尔坐标，因此第 k^{th} 行的单元格坐标为（i，$k-1$），其中$0 \le i < \mu_k$；当 c 是 μ的一个（图中）单元格时，我们记作 $c \in \mu$。对于分拆 μ 和单元格 $c \in \mu$，我们分别用 a（c）和 ℓ（c）表示单元格 c的臂和腿。它们分别是 μ 中严格位于 c 右侧的单元格数，以及严格位于 c上方的单元格数。图1给出了一个例子。

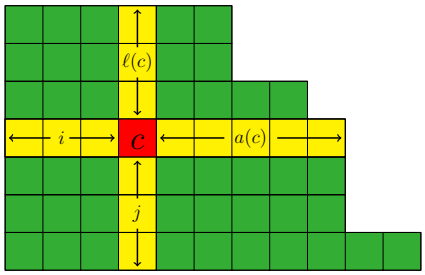


Figure 1. 单元格的臂 $a(c)$ 和腿 $\ell(c)$ $c = (i,\ j)$。

我们回顾一下，在此语境中使用以下记号：

$$B_\mu(q,t) := \sum_{(i,j)\in\mu} q^i t^j, \quad T_\mu(q,t) := \prod_{(i,j)\in\mu} q^i t^j, \quad \Pi_\mu(q,t) := \prod_{\substack{(i,j)\in\mu \\ (i,j)\neq(0,0)}} (1-q^i t^j), \tag{2.1}$$

并且，按照惯例，M 表示乘积 $(1-q)(1-t)$。

为避免混淆，我们对单词和元组作如下区分。我们将由序列 $w = (w_1, \ldots, w_n)$ 构成的对象称为单词，其中其字母 $w_i = (w_{i,1}, \ldots, w_{i,r_i}) \in \mathbb{N}^{r_i}$是由非负整数组成的元组。因此，$w_{i,j} = w_{ij}$ 是字母 w_i 的数字 j^{th}。对于任意单词或元组 α，我们用 $\ell(\alpha)$ 表示其字母数。因此，$\ell(w_1, \ldots, w_n) = n$和 $\ell(w_i) = r_i$。元组 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ 的大小由 $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r$ 给出。如果每个 α_i 都非零，则称 α 为组合，并记作 $\alpha \vDash |\alpha|$。如果 α 是一个各项弱递减的组合，则称 α 为分拆，记作 $\alpha \vdash |\alpha|$。举例来说，单词

$$w = (2113, 1133, 3131)$$

长度为 $\ell(w) = 3$。w 的首字母是组合 $w_1 = 2113$，其长度为$\ell(w_1) = 4$，大小为 $|w_1| = 7$。

回顾一下，整数元组 $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ 的下降集 和上升集 r分别定义为

$$\mathrm{Des}(\alpha) := \{1 \le i < r \mid \alpha_i > \alpha_{i+1}\} \qquad \text{and} \qquad \mathrm{Asc}(\alpha) := \{1 \le i < r \mid \alpha_i < \alpha_{i+1}\}.$$

与此相关的统计量如下:

$$\mathrm{maj}(\alpha) \coloneqq \sum_{i\in \mathrm{Des}(\alpha)} i, \qquad \mathrm{comaj}(\alpha) \coloneqq \sum_{i\in \mathrm{Des}(\alpha)} (n-i),$$
$$\mathrm{revmaj}(\alpha) \coloneqq \sum_{i\in \mathrm{Asc}(\alpha)} (n-i), \qquad \mathrm{revcomaj}(\alpha) \coloneqq \sum_{i\in \mathrm{Asc}(\alpha)} i.$$

注意，revmaj 和 revcomaj 实际上分别是该元组逆序后的 maj 和 comaj，因此得名。按照经典做法，对于每个 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ 的 n 的组合，我们可以关联到以下部分和集合:

$$\Sigma(\alpha) \coloneqq \{\Sigma_1(\alpha), \ldots, \Sigma_{\ell-1}(\alpha)\} \qquad \text{where} \qquad \Sigma_r(\alpha) \coloneqq \alpha_1 + \cdots + \alpha_r,$$

w这建立了组合与 $\{1, \cdots, n-1\}$ 的子集之间的双射 .

对于一个组合 $\alpha \vDash n$ 和元组 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$，令

$$\mathrm{revmaj}_\alpha(\beta) \coloneqq \sum_r \mathrm{revmaj}(\beta_{\Sigma_r(\alpha)+1}, \ldots, \beta_{\Sigma_{r+1}(\alpha)}).$$

给定一个元组词 $w = (w_1, \ldots, w_n)$，如果恰有 r 个指标 j 满足 $w_{i,\,j} > w_{i,\,j+1}$，我们称 i 是一个 r-下降。用 $w_{\star r} \coloneqq (w_{1r}, \ldots, w_{nr}) \in \mathbb{N}^n$ 表示由每个元组的 r^{th} 个数字组成的字，我们可以定义

$$\mathrm{revmaj}_\alpha(w) \coloneqq \sum_r \mathrm{revmaj}_\alpha(w_{\star r}).$$

例如，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{revmaj}_{(2,1)}(211, 113, 313) &= \mathrm{revmaj}_{(2,1)}(213) + \mathrm{revmaj}_{(2,1)}(111) + \mathrm{revmaj}_{(2,1)}(133)\\ &= 0 + 0 + 1.\end{aligned}$$

令 $m_i(\alpha)$ 表示满足 $\alpha_j = i$ 的指标 j 的个数；也就是说，$m_i(\alpha)$ 是 i 在 α 中的重数。我们将 α 的重数类型记作 $m(\alpha) \coloneqq 0^{m_0(\alpha)} 1^{m_1(\alpha)} 2^{m_2(\alpha)} \cdots$。

A 格字 是一个序列 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{N}_+^r$，满足对所有 $1 \le i, j \le r$ ，

$$m_{j+1}(\alpha_1, \ldots, \alpha_i) \le m_j(\alpha_1, \ldots, \alpha_i).$$

这意味着 α 是一个元组，其每个前缀中 1 的个数至少与 2 一样多，2 的个数至少与 3 一样多，依此类推。这样的字编码了一个标准杨表，其中 w_i 给出 i 所在的行。若所得杨表的形状为 λ，则称 w 是类型为 $\lambda = (m_1(\alpha)\ m_2(\alpha) \ldots)$ 的格字，并记作 $\lambda(w) = \lambda$。例如，1121321 是类型为 $\lambda(1121321) = (4,2,1)$ 的格字。

用 $R(\beta)$ 表示所有元组 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ 的集合，这些元组的各项经过重排后可得到 β，使得 $m(\alpha) = m(\beta)$。将元组序列 $w = (w_1, \ldots, w_r)$（其中 $w_i \in \mathbb{N}^k$）的重数汇总为一个重数字 $m(w) = (m(w_{\star 1}) \ldots, m(w_{\star k}))$ 很方便，我们称之为 w 的重数类型 。

我们定义大小为 、重排后得到 的分拆向量集合为

$$\mathrm{PR}(\alpha,\beta) \coloneqq \{\vec{w} = (w^1,\dots,w^{\ell(\vec{w})}) \mid w^i \vdash \beta_i \ \text{ and } \ w^1\cdots w^{\ell(w)} \in R(\alpha)\}.$$

这是由分拆序列组成的集合，各分拆的大小分别由 β 的各项给出，且这些分拆中所有部分合并后重新排列为 α。

3. Symmetric function manipulations

本节的目标是回顾一些对称函数运算，以便推导接下来的展开式。对于给定的对称函数 $F(\boldsymbol{x})$，我们将记作

$$\widehat{F}(\boldsymbol{x}) = F\left[\frac{\boldsymbol{x}}{1-q}\right]$$

这样，主特化 $F(1,q,q^2,\dots)$ 可写为 $\widehat{F}(1) = F\left[1/(1-q)\right]$。

3.1. **遗忘对称函数的组合学**。 对于 $\mu \vdash n$ 长度为 ℓ的分拆，遗忘对称函数 f_μ [7] 的组合公式为

$$f_\mu(\boldsymbol{x}) = (-1)^{n-\ell} \sum_{\alpha\in \mathrm{R}(\mu)} \sum_{i_1\le\cdots\le i_\ell} x_{i_1}^{\alpha_1}\cdots x_{i_\ell}^{\alpha_\ell}.$$

对 $\boldsymbol{x}$进行 $(1-q)^{-1}$ 的 plethystic 代换后，我们得到展开式

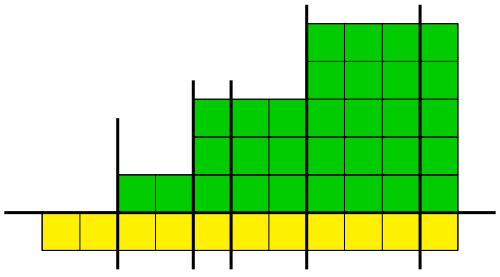
$$\widehat{f}_\mu(1) = (-1)^{n-\ell} \sum_{\alpha\in \mathrm{R}(\mu)} \sum_{0\le i_1\le\cdots\le i_\ell} \left(q^{i_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(q^{i_\ell}\right)^{\alpha_\ell}. \tag{3.1}$$

定义 3.1. 给定一个 n 的分拆 μ，类型为 μ 的列-组合表 是一个二元组 $C = (\alpha, c)$，其中 $\alpha \in \mathrm{R}(\mu)$ 是一个可重排为 μ 的组合，而 $c = (c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_n)$ 是一个满足以下条件的序列:

$$c_i < c_{i+1} \implies i \in \Sigma(\alpha).$$

我们用 CC^μ 表示类型为 μ 的列-组合表集合，用 CC^μ 表示满足 $c_1 = 0$ 的那些表所构成的子集。对于 $C \in \mathsf{CC}^\mu$，我们将 C 的长度 定义为 $\ell(C) = |\mu|$，并将 C 的大小 定义为 $|C| = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$。 当需要指定列组合表 C中列 i 的大小时，我们将 c_i 记作 $c_i(C)$。

例 3.2。 CC^μ 的元素可以如下表示。



这里，我们有 $C=(\alpha,\ c)$，其中 $\alpha=221231$ 以及 $c=(0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 3,\ 3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 5,\ 5)$。事实上， $\mu=322211$（因此 $\alpha\in \mathrm{R}(\mu)$），$|C|=\sum_i c_i=31$ 是绿色单元格的数量，而 $\ell(W)=|\mu|=11$。由于 $c_1(C)=0$ （第一列中没有绿色单元格），我们有 $C\in \mathrm{CC}_{(3,2^3,1^2)}$ 。

定义 3.3。将类型为μ 的列-组合杨表的生成函数记为

$$\mathbf{CC}_\mu(q):=\sum_{C\in \mathrm{CC}_\mu} q^{|C|},\quad \text{and} \tag{3.2}$$

$$\overline{\mathbf{CC}}_\mu(q):=(1-q^{|\mu|})\mathbf{CC}_\mu(q)=\sum_{C\in \overline{\mathrm{CC}}_\mu} q^{|C|}. \tag{3.3}$$

根据构造，这些级数给出了遗忘基的主特化（见[14,命题 5。2]）。

命题 3.4。对于任意分拆 μ,

$$\widehat{f}_\mu(1)=(-1)^{|\mu|-\ell(\mu)}\,\mathbf{CC}_\mu(q),\quad \textit{and} \tag{3.4}$$

$$(1-q^{|\mu|})\widehat{f}_\mu(1)=(-1)^{|\mu|-\ell(\mu)}\overline{\mathbf{CC}}_\mu(q). \tag{3.5}$$

我们还有如下特化。类型为 (1^n) 的列组合杨表与最大部分不超过 n 的分拆之间存在双射。事实上，当 $f_{1^n}=h_n$ 时，该双射由下面的生成级数恒等式说明。

推论 3.5。对于任意 n,

$$\widehat{f}_{1^n}(1)=\widehat{h}_n(1)=\frac{1}{(1-q)\cdots(1-q^n)}.$$

3.2. **麦克唐纳多项式的经典性质**。 在 plethystic 记法中，经典的柯西（核）恒等式表明

命题 3.6。 对于任意 n，恒等式

$$h_n[\boldsymbol{xy}]=\sum_{\mu\vdash n} F_\mu(\boldsymbol{x})G_\mu(\boldsymbol{y}),\qquad \textit{or equivalently}\qquad e_n[\boldsymbol{xy}]=\sum_{\mu\vdash n} F_\mu(\boldsymbol{x})\,\omega\left(G_\mu(\boldsymbol{y})\right), \tag{3.6}$$

成立当且仅当 $\{F_\mu(\boldsymbol{x})\}_\mu$ 和 $\{G_\mu(\boldsymbol{x})\}_\mu$ 在对称函数的霍尔标量积下互为对偶基底 。

由 RSK 对应可知，Schur 基是自对偶的。这里， ω 表示一个线性且乘法的对合，它将 p_n 映射为 $(-1)^{n-1}p_n$ （并将 s_μ 映射为 $s_{\mu'}$）。

T修正麦克唐纳多项式满足以下 $(q,\ t)$-柯西恒等式

$$e_n^*\left[\boldsymbol{xy}\right]=\sum_{\mu\vdash n}\frac{\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x};q,t)\,\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{y};q,t)}{w_\mu(q,t)}, \tag{3.7}$$

其中，$F^*(\boldsymbol{x})$表示 $F\left[\boldsymbol{x}/M\right]=F\left[\frac{\boldsymbol{x}}{1-q}\underline{()(1-t)}\right]$，而$w_\mu=w_\mu(q,t)$是多项式

$$w_\mu(q,t):=\prod_{c\in\mu}\left(q^{a(c)}-t^{\ell(c)+1}\right)\left(t^{\ell(c)}-q^{a(c)+1}\right).$$

正如柯西恒等式与霍尔标量积相关，(q,t)-柯西恒等式与下面的标量积相关。

定义 3.7. (q,t)-标量积 $\langle F,G\rangle_*$ 在幂和对称函数的基底 $\{p_\mu\}_\mu$ 上定义如下：

$$\langle p_\mu,p_\lambda\rangle_*:=\delta_{\lambda\mu}(-1)^{n-\ell(\mu)}z_\mu\ p_\mu[(1-q)(1-t)] \tag{3.8}$$

其中，因子 $z_\mu=\langle p_\mu,p_\mu\rangle=1^{m_1(\mu)}m_1(\mu)!\ 2^{m_2(\mu)}m_2(\mu)!\ \cdots n^{m_n(\mu)}m_n(\mu)!$来自通常的霍尔标量积，其中 $m_i(\mu)$是 μ中部分 i 的重数。

由此可知，对于任意两个对称函数 F 和 G，有

$$\langle F,G\rangle_*=\langle F(X),\omega(G)[M\boldsymbol{x}]\rangle. \tag{3.9}$$

MacDonald 多项式关于此内积是正交的。事实上，

$$\langle\widetilde{\mathrm{H}}_\lambda,\widetilde{\mathrm{H}}_\mu\rangle_*=\delta_{\lambda\mu}w_\mu. \tag{3.10}$$

注意，方程（3.7）意味着我们有以下恒等式

$$e_n^*(\boldsymbol{x})=\sum_{\mu\vdash n}\frac{\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x};q,t)}{w_\mu(q,t)}\qquad\text{and}\qquad e_n^*\left[\boldsymbol{xy}\right]=\nabla_{\boldsymbol{y}}e_n\left[\boldsymbol{x}/M\right]. \tag{3.11}$$

此外，根据该求值结果

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\mu[M]=M\,B_\mu(q,t)\,\Pi_\mu(q,t), \tag{3.12}$$

以及方程（3.7），我们得到众所周知的展开式

$$e_n(\boldsymbol{x})=e_n\left[M\,\frac{\boldsymbol{x}}{M}\right]=\sum_{\mu\vdash n}\frac{M\,B_\mu\,\Pi_\mu}{w_\mu}\ \widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x};q,t). \tag{3.13}$$

等价地，用方程（1.2）中的算子表示，我们有

$$e_n(\boldsymbol{x})=M\Delta_{e_1}\Pi\,e_n^*(\boldsymbol{x}). \tag{3.14}$$

3.3. **特化**。 修正麦克唐纳多项式的一些最简单的（plethystic）特化如下：

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\mu[1] = 1, \qquad \widetilde{\mathrm{H}}_\mu[-1] = (-1)^{|\mu|} T_\mu, \text{ and } \qquad \widetilde{\mathrm{H}}_\mu[-\epsilon] = T_\mu,$$

其中，形式上将 ϵ 视为满足 $p_n(\epsilon) = (-1)^n$。因此，对于齐次次数为 n 的对称函数，算子 $\nabla_{\boldsymbol{y}}$ 特化为

$$\nabla_1 = \mathrm{Id}, \qquad \nabla_{-1} = (-1)^n \nabla, \text{ and } \qquad \nabla_{-\epsilon} = \nabla.$$

用额外变量 u 表示的一个更丰富的类似特化为

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\mu[1-u] = \prod_{(i,j)\in\mu} (1 - q^i t^j\, u), \quad \text{or equivalently} \quad \widetilde{\mathrm{H}}_\mu[1-\epsilon u] = \prod_{(i,j)\in\mu} (1 + q^i t^j\, u). \tag{3.15}$$

~在 $t = 1$ 处，麦克唐纳多项式 H_μ 特化为

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x}; q, 1) = \frac{\widehat{h}_\mu(\boldsymbol{x})}{\widehat{h}_\mu(1)}, \qquad \text{and thus} \qquad \widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x}; 0, 1) = h_\mu(\boldsymbol{x}), \tag{3.16}$$

同样地，对于任意对称函数 $F = F(\boldsymbol{x})$，我们将 $\widehat{F}(\boldsymbol{x})$ 记作 $F\left[\frac{\boldsymbol{x}}{1-q}\right]$。此外，在 $t = 1/q$ 处，我们得到类似的表达式

$$\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x}; q, 1/q) = \frac{\widehat{s}_\mu(\boldsymbol{x})}{\widehat{s}_\mu(1)}. \tag{3.17}$$

值得回顾的是，[3]

$$\widehat{h}_n(1) = h_n\left[\tfrac{1}{1-q}\right] = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-q^i},$$

$$\widehat{e}_n(1) = e_n\left[\tfrac{1}{1-q}\right] = \prod_{i=1}^{n} \frac{q^{i-1}}{1-q^i},$$

更一般地，

$$\widehat{s}_\mu(1) = s_\mu\left[\tfrac{1}{1-q}\right] = s_\mu(1, q, q^2, \ldots) = \frac{q^{n(\mu)}}{\prod_{c\in\mu} 1 - q^{\mathrm{hook}(c)}},$$

其中 $\mathrm{hook}(c)$ 表示 μ 中 c 的钩长，而 $n(\mu) := \sum_{(i,\ j)\in\mu} (j-1)$。

著名算子可以通过对 $\nabla_{\boldsymbol{y}}$ 进行特化得到。回顾一下，对于任意给定的对称函数 F，我们考虑由下式定义的 Δ 算子 [2]

$$\Delta_F\, \widetilde{\mathrm{H}}_\mu := F[B_\mu(q,t)]\, \widetilde{\mathrm{H}}_\mu\,. \tag{3.18}$$

接下来我们观察到

$$\nabla_{1-\epsilon u} = \sum_{k\geq 0} u^k \Delta_{e_k}. \tag{3.19}$$

[3]显然，$\widehat{h}_n(1)$ 也等于 $1/(q;\, q)_n$，其中 $(q;\, t)_k = (1-q)(1-qt)\cdots(1-qt^{k-1})$ 表示 *Pochammer symbol*。我们有时将 $(q;\, q)_\mu$ 写作乘积 $(q;\, q)_{\mu_1}(q;\, q)_{\mu_2}\cdots(q;\, q)_{\mu_k}$。

对 ∇_*（分别）应用两次这样的特化，显然可得

$$\nabla_{1-\epsilon u}\nabla_{1-\epsilon v} = \sum_{k,j\geq 0} u^k v^j \Delta_{e_k e_j}, \tag{3.20}$$

通过迭代可知，我们可以得到任意一个算子 Δ_{e_λ}，方法是在算子的组合中取适当的系数 ∇_*。因此，任意一个算子 Δ_F 也可以通过对这些组合取适当的线性组合而得到。注意，对于非恒定对称函数，我们还可以通过特化 $\lim \Pi$得到算子$_{u\to 1}(1-u)^{-1}\nabla_{1-u}$。沿着这一思路，还有一个关于算子 Ξ [14]的有趣观察。

定义 3.8。定义线性算子 Ξ: $\Lambda \to \Lambda$，规定对于 $F \in \Lambda$,

$$\Xi F(\boldsymbol{x}) \coloneqq M\Delta_{e_1}\Pi F^*(\boldsymbol{x}).$$

正如我们现在将要证明的，对称函数 $\Xi(e_\lambda)$ 和 $\Xi(s_\lambda)$ 都可以用 $\nabla_* e_n$表示。事实上，由方程 (3.14) 首先注意到，我们有

$$\Xi\, e_n = \sum_{\mu\vdash n} \frac{MB_\mu\Pi_\mu}{w_\mu}\,\widetilde{\mathrm{H}}_\mu = e_n.$$

现在，对于任意 λ，我们可以写成

$$\begin{aligned}
\Xi\, e_\lambda &= \sum_{\mu\vdash n} \frac{MB_\mu\Pi_\mu}{w_\mu}\,\widetilde{\mathrm{H}}_\mu \langle e^*_\lambda, \widetilde{\mathrm{H}}_\mu\rangle_* \\
&= \sum_{\mu\vdash n} \frac{MB_\mu\Pi_\mu}{w_\mu}\,\widetilde{\mathrm{H}}_\mu \langle h_\lambda, \widetilde{\mathrm{H}}_\mu\rangle \\
&= \langle h_\lambda, \widetilde{\mathrm{H}}_\mu\rangle \sum_{\mu\vdash n} \frac{MB_\mu\Pi_\mu}{w_\mu}\,\widetilde{\mathrm{H}}_\mu \\
&= \langle h_\lambda, \nabla_*\rangle e_n
\end{aligned}$$

显然，对于任意 F，算子 $\langle F、\ \nabla_*\rangle$ 和 ∇_* 可交换。因此，利用线性性并应用 ∇_*^k，我们得到

命题 3.9。对于任意分拆 λ，我们有

$$\nabla_*^k\,\Xi\, e_\lambda = \langle h_\lambda, \nabla_*\rangle \nabla_*^k e_n, \qquad \textit{and} \qquad \nabla_*^k\,\Xi\, s_\lambda = \langle s_\lambda, \nabla_*\rangle \nabla_*^k e_n.$$

由此结果可知，为了计算 $\nabla_*^k\,\Xi\, e_\lambda$ 和 $\nabla_*^k\,\Xi\, s_\lambda$，只需计算 $\nabla_*^{k+1} e_n$ 并取标量积。

3.4. **令** $t=1$。 显然，上述计算可以在 $t=1$处进行特化。注意，应用方程（3.16）的特化，我们直接得到

$$\nabla_* \widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x};q,t)\Big|_{t=1} = \frac{\widehat{h}_\mu}{\widehat{h}_\mu(1)} \otimes \frac{\widehat{h}_\mu}{\widehat{h}_\mu(1)}.$$

因此，在 $t=1$ 处对算子 ∇_* 进行特化，可以将其视为一个算子本身。

^**定义 3.10**。我们定义 $\nabla_*\colon \Lambda_{\mathbb{Q}(q)} \to \Lambda_{\mathbb{Q}(q)} \otimes \Lambda_{\mathbb{Q}(q)}$，如下

$$\widehat{\nabla}_* \widehat{h}_\mu = \frac{1}{\widehat{h}_\mu(1)} \widehat{h}_\mu \otimes \widehat{h}_\mu. \tag{3.21}$$

现在显然，对于任意在 $t=1$处无极点的对称函数 F，我们有

$$(\nabla_* F)|_{t=1} = \widehat{\nabla}_* \left(F|_{t=1}\right). \tag{3.22}$$

应用柯西公式和对偶基对 (m_μ, h_ν)，得到

$$e_n(\boldsymbol{x}) = e_n\left[(1-q)\,\frac{\boldsymbol{x}}{1-q}\right] \tag{3.23}$$

$$= \sum_{\mu\vdash n} f_\mu[1-q]\, h_\mu\left[\frac{\boldsymbol{x}}{1-q}\right] \tag{3.24}$$

$$= \sum_{\mu\vdash n} f_\mu[1-q]\, \widehat{h}_\mu(\boldsymbol{x}), \tag{3.25}$$

因此

$$\widehat{\nabla}_*^k e_n = \sum_{\mu\vdash n} f_\mu[1-q]\ \widehat{h}(1)\ \left(\frac{\widehat{h}_\mu}{\widehat{h}(1)}\right)^{\otimes k+1} \tag{3.26}$$

^.....的单项式展开 $h_\mu(\boldsymbol{x})$ 例如可以通过特化 Haglund、Haiman 和 Loehr 关于修正麦克唐纳多项式的公式来计算 [10]。

$$\langle \widetilde{\mathrm{H}}_\mu, h_\lambda\rangle\Big|_{t=1} = \frac{1}{\widehat{h}_\mu(1)}\langle \widehat{h}_\mu, h_\lambda\rangle = \sum_{m(\alpha)=1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots} q^{\mathrm{revmaj}_\mu(\alpha)}.$$

For 任意组合 $\beta \in \mathrm{R}(\mu)$，取上述公式的（$k+1$）阶张量，得到

$$\left(\frac{\widehat{h}_\mu}{\widehat{h}(1)}\right)^{\otimes k+1} = \sum_{w\in(\mathbb{N}_+^{k+1})^n} q^{\mathrm{revmaj}_\beta(w)} \mathcal{X}^w$$

其中，若 $w=(w_1,\ \ldots\ldots,\ w_n)$ 与 $w_i=(w_{i0},\ \ldots\ldots,\ w_{ik})\in\mathbb{N}_+^{k+1}$，

$$\mathrm{revmaj}_\beta(w)=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{revmaj}_\beta(w_{1i},\ldots,w_{ni}),$$

and

$$\mathcal{X}^w=\bigotimes_{i=0}^{k}\boldsymbol{x}^{w_{*i}}=\prod_{i=0}^{k}\prod_{j=1}^{n}x_{i,w_{ji}}\qquad\text{with}\qquad w_{*i}=(w_{1i},w_{2i},\ldots w_{ni}).$$

方程 (3.26) 中唯一尚未说明的项是特化 $f_\mu[1-q]$。为了解其含义，我们先来看

$$e_n=\sum_{\mu\vdash n}\left(\frac{MB_\mu\Pi_\mu}{w_\mu}\right)\Big|_{t=1}\frac{\widehat{h}_\mu}{\widehat{h}_\mu(1)}=\sum_{\mu\vdash n}f_\mu[1-q]\,\widehat{h}_\mu.$$

可以证明，正如 [14], 中所做的那样，在 $t=1$ 时有

$$\left(\frac{MB_\mu\Pi_\mu}{w_\mu}\right)\Big|_{t=1}=(-1)^{n-\ell(\mu)}\,\widehat{h}_\mu(1)\sum_{\alpha\in R(\mu)}(1-q^{\alpha_1})=\widehat{h}_\mu(1)\,f_\mu[1-q],$$

这意味着

$$f_\mu[1-q]=(-1)^{n-\ell(\mu)}\sum_{\alpha\in R(\mu)}(1-q^{\alpha_1}),\tag{3.27}$$

正如通过使用求和公式在 [13]中所见。

最后，由柯西恒等式可得

$$\widehat{h}_\mu=\sum_{\eta\vdash n}e_\eta\sum_{\vec{v}\in\mathrm{PR}(\eta,\mu)}\widehat{f}_{\vec{v}}(1),$$

为方便起见，我们设

$$f_{\vec{v}}=\prod_{i=1}^{\ell(\vec{\nu})}f_{\nu^i}.$$

现在可以将这些恒等式结合起来，得到初步展开式。

命题 3.11。对于任意 n,

$$\widehat{\nabla}_*^k e_n=\sum_{\eta\vdash n}e_\eta\otimes\left(\sum_{\mu\vdash n}(-1)^{n-\ell(\mu)}\sum_{\beta\in\mathrm{R}(\mu)}(1-q^{\beta_1})\sum_{w\in(\mathbb{N}^k)^n}q^{\mathrm{revmaj}_\beta(w)}\,\mathcal{X}^w\sum_{\vec{\nu}\in\mathrm{PR}(\eta,\mu)}\widehat{f}_{\vec{\nu}}\right)$$

其中

$$\mathcal{X}^w=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{k}x_{j,w_{ij}}.$$

定义 3.12。给定一个单词集合 W、一个函数 $\rho\colon\ W \to A[q]$（其中 A 是给定的某个环）以及一个组合 $\eta \vDash n$，我们定义有理函数

$$D^{\rho}_{\eta,W}(q) := \sum_{\mu\vdash n}(-1)^{n-\ell(\mu)} \sum_{\beta\in \mathrm{R}(\mu)} (1-q^{\beta_1}) \sum_{w\in W} \rho(w) \sum_{\vec{\nu}\in \mathrm{PR}(\eta,\mu)} f_{\vec{\nu}}[1/(1-q)].$$

在定义 4.3中，我们将考虑 ρ 的特定取值，并称其形式恰当。对于这些取值，我们将证明上述有理函数不仅是一个多项式，而且可由一类 ρ-相容的带标号平行四边形多格骨牌的面积枚举给出。

4. Different weights

本节将 [14, 第 7,10] 节的结果推广到更一般的权重。在本节中，我们固定一个由字 $W \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ 组成、取自字母表 X 的单词集合，并令 A 为某个固定的环。

定义 4.1. 设 X 为任意变量字母表，$W \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ 为字母表 X中的一个单词集合。设 A 为任意环。若存在一个权函数 $\mathrm{wt}: X \to A$和一个局部权函数 $\mathrm{lwt}\colon W\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$，使得函数 $\rho\colon W \to A[q]$ 形式恰当，则称该函数形式恰当

$$\rho(w) = \prod_{i=1}^{\ell(w)} q^{\mathrm{lwt}(w,i)(\ell(w)-i)}\,\mathrm{wt}(w_i) \in A[q],$$

其中，$\mathrm{lwt}(w,i)$ 仅取决于 w_i 和 w_{i+1}。

例如，如果 $X=\mathbb{N}^k$ 和 $W=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ 是所有字母属于 X的单词构成的集合，那么 revmaj 就是一个统计量，它与局部权函数 $\mathrm{lwt}(w,i) = r$ 相匹配，当且仅当 w 在 i处有一个r-下降。

备注 4.2。设 $S\colon W \to 2^{\mathbb{N}}$，使得 $S(w) \subseteq \{1,2,\dots,\ell(w)\}$ 是一个任意函数，它选取 w的指标的一个子集。对于 $X=\mathbb{N}$，$A=\mathbb{Z}$，$\mathrm{wt} = 1$，且 $\mathrm{lwt}(w,i) = 1$ 当 $i\in S(w)$ 时成立，否则为 0；在取 q-对数后，定义 4.1 化为 [14, 定义 10.1]。

从现在起，我们假设 W 配备了一个与之相匹配的函数 ρ。

定义 4.3。A 单词向量 $\vec{w}\in WV(W)$ 是一个单词序列（w^1，……，w^r），其拼接 $w^1\cdots w^r$ 属于 W。如果 $\ell(w^i) = \beta_i$，则记作 $\vec{w}\in \mathrm{WV}(W,\ \beta)$。如果 ρ 在 W中元素的子词上看起来是正确的，那么我们可以设

$$\rho(\vec{w}) = \prod_{i=1}^{r} \rho(w^i),$$

并称 ρ 在 $\mathrm{WV}(W)$ 上看起来是正确的。

例如，如果 $X = \mathbb{N}^3$，那么 $((142, 221, 421), (432), (212, 670)) \in \mathrm{WV}(W, (3, 1, 2))$ 是一个单词向量，其各项分别是长度为 3，1 和 2 的字；每个字中的字母都是长度为 3 的元组。这里，我们可以选择 W 为 $(\mathbb{N}^3)^6$。

定义 4.4。设 η 是 n 的一个分拆，且 $W \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ 是字母表 X 中的一个单词集合。一个类型为 η 的 -带标记的列组合表序列 是一个带标记的列组合表的元组 $(C^i, w^i)_{1\le i\le r}$，满足：令 $\beta = (\beta_1, \ldots\ldots, \beta_r)$ 和 $\beta_i = \ell(C^i)$，有：

(1) 对于 $\overline{i > 1}$，$C^1 \in \mathrm{CC}_{\nu^1}$ 且 $C^i \in \mathrm{CC}_{\nu^i}$，其中 $\vec{\nu} \in \mathrm{PR}(\eta, \beta)$；
(2) $\vec{w} = (w^1, \ldots\ldots, w^r) \in \mathrm{WV}(W, \beta)$。

我们用 $\mathrm{LC}_{W,\eta}$ 表示类型为 η 的 W-带标记列组合表序列的集合。

换言之，一个 W-带标记的列组合表序列是一个列组合表元组，其大小为 β_1、……、β_r，且 $c_1(C^1) = 0$；在 C^i 的第 j 列下方放置 X, w^i_j 中的一个元素。从左到右读取时，该列下方的标记构成一个单词 $w^1 \cdots w^r \in W$。如果每个 C^i 中的竖线给出一个重排后为 ν^i 的组合，那么 ν^1、……、ν^r 的部分重排后为 η。图 2 给出了一个此类序列的例子，其中 $\beta = (2, 5, 2)$。

对于 $T = (T_i)_{1\le i\le r} \in \mathrm{LC}_{W,\ \eta}$，我们设定 $w(T_i) := w^i$。给定一个作用于来自 W 的单词向量的函数 ρ，其形式看起来合理；对于 $T \in \mathrm{LC}_{W,\ \eta}$，我们设定

$$\mathrm{weight}(T_i) := q^{|C^i|}\rho(w^i), \quad \mathrm{weight}(T) := \prod_{i=1}^{\ell(\eta)} \mathrm{weight}(T_i), \quad \text{and} \quad \mathrm{sign}(T) := (-1)^b,$$

其中 b 表示 C^1 中竖线的数量，$\ldots$，$C^{\ell(\eta)}$。图 2 给出了这种权重和符号计算的一个示例。

$S =$

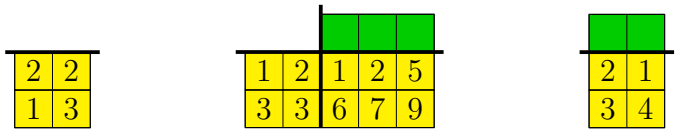


FIGURE 2. 一个 $S = (S_1, S_2, S_3) \in \mathrm{LC}_{W,\ \eta}$ 的例子，其中 W 是字母来自 $\mathbb{N}^2$ 的字的族，而 $\eta = (3, 2, 2)$。我们有 $\mathrm{sign}(S) = -1$。令 $\mathrm{lwt}(w, i)$ 表示第 i 列的上升数，并且 $wt((w_{i1}, w_{i2})) = y_{w_{i1}} z_{w_{i2}}$，则 $\mathrm{weight}(S_1) = q^0 \cdot q^1 y_2^2 z_1 z_3$、$\mathrm{weight}(S_2) = q^3 \cdot q^{7+6} y_1^2 y_2^2 y_5 z_3^2 z_6 z_7 z_9$，且 $\mathrm{weight}(S_3) = q^2 \cdot q^1 y_1 y_2 z_3 z_4$。

现在，对于固定的分拆 η，我们考虑有理函数

$$\begin{aligned} D_{W,\eta}(q) &:= \sum_{\beta \vDash n} \sum_{\vec{w} \in \mathrm{WV}(W,\beta)} \sum_{\vec{\nu} \in \mathrm{PR}(\eta,\beta)} \rho(\vec{w})(-1)^{n-\ell(\beta)}(1-q^{\beta_1}) f_{\vec{\nu}}[1/(1-q)] \\ &= \sum_{T \in \mathrm{LC}_{W,\eta}} \mathrm{sign}(T)\,\mathrm{weight}(T). \end{aligned}$$

我们有以下与 [14, 定义 7。1], 类似的结果，它在集合 LC 上生成一个反号对合W, η.

定义 4.5。 设 $S = (C, w)$ 是序列 $T \in \mathrm{LC}_{W,\eta}$ 中出现的一个可能的带标记的列组合表，并假设 S 至少有一条竖线。那么我们称 S 可以拆分，并定义 $\mathrm{split}(S) = (S^1, S^2)$，其中 $S^1 = (C^1, w^1)$ 是 S 中位于第一条竖线之前的部分，而 $S^2 = (C^2, w^2)$ 则由 S 中第一条竖线之后的部分构成，并向每一列添加 $\sum_{i=1}^{\ell(C^1)} \mathrm{lwt}(w, i)$ 个单元格。分裂映射保持权重且为变号映射。

命题 4.6。 若 $\mathrm{split}(S) = (S^1, S^2)$，则 $\mathrm{weight}(S) = \mathrm{weight}(S^1) \cdot \mathrm{weight}(S^2)$。

证明。设 $S = (C, w)$，其中 $\ell(C) = n$。假设 拆分$(S) = (S^1, S^2)$，其中 $S^1 = (C^1, w^1)$ 且 $S^2 = (C^2, w^2)$，并设 $v = \ell(C^1)$。

根据定义，权重有两个组成部分：一个来自总大小，另一个来自 ρ。令 $d = \sum_{i=1}^{v} \mathrm{lwt}(w, i)$。根据拆分的定义，位于$S^1$ 上方的单元格数量保持不变，而位于 S^2 上方的单元格数量增加了 $d \cdot \ell(C_2) = d(n-v)$，因此总权重的第一部分增加了 $q^{d(n-v)}$。根据 ρ 的定义，我们有

$$\begin{aligned} \rho(w) &= \prod_{i=1}^{n} q^{\mathrm{lwt}(w,i)(n-i)}\,\mathrm{wt}(w_i) \\ &= \prod_{i=1}^{v} q^{\mathrm{lwt}(w,i)(n-i)} \prod_{i=v+1}^{n} q^{\mathrm{lwt}(w,i)(n-i)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{wt}(w_i) \\ &= \prod_{i=1}^{v} q^{\mathrm{lwt}(w,i)(n-v+v-i)} \prod_{i=1}^{n-v} q^{\mathrm{lwt}(w^2,i)(n-v-i)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{wt}(w_i) \\ &= \prod_{i=1}^{v} q^{\mathrm{lwt}(w,i)(n-v)} \prod_{i=1}^{v} q^{\mathrm{lwt}(w^1,i)(v-i)} \prod_{i=1}^{n-v} q^{\mathrm{lwt}(w^2,i)(n-v-i)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{wt}(w_i) \\ &= \prod_{i=1}^{v} q^{\mathrm{lwt}(w,i)(n-v)} \rho(w^1)\rho(w^2) \\ &= q^{d(n-v)} \rho(w^1)\rho(w^2) \end{aligned}$$

因此，总权重的第二部分减少了 $q^{d(n-v)}$。这两个变化相互抵消，因此权重得以保持不变，正如所需。□

引理 4.7. 设 $S^1 = (C^1, w^1)$ 和 $S^2 = (C^2, w^2)$ 是两个带 W 标记的列组合表。存在一个 S，使得 拆分$(S) = (S^1, S^2)$ 当且仅当

$$c_1(S^2) \geq c_\ell(S^1) + \sum_{j=1}^{\ell(C^1)} \mathrm{lwt}(w^1 w^2, j) \tag{4.1}$$

如果这样的 S 存在，那么它是唯一的；我们称 S^1 可以与 S^2 合并，并定义 合并$(S^1, S^2) = S$。

证明。若这样的 S 存在，则由构造可知方程 (4.1) 成立。假设方程 (4.1) 成立。那么我们可以将 S 定义为这样一个带标记的列组合表：将 S^2 的每一列的大小减少 $\sum^{\ell(C^1)}{}_{j=1}$ $\mathrm{lwt}(w^1 w^2, j)$，然后将其连接到 S^1，并将它们的字也连接起来。方程 (4.1) 保证所得结果仍是一个列组合表。现在显然，拆分$(S) = (S^1, S^2)$，并且这样的 S 是唯一的。□

以下引理对于确保我们的变号、保持权重的对合定义良好至关重要。

引理 4.8。设 S^1、S 是两个 W-标记的列-组合表，并设 拆分$(S) =$(S^2、S^3)。则 S^1 能够与 S^2 合并，当且仅当它能够与 S 合并。

证明。根据构造，$c_1(S^2) = c_1(S)$，因此方程（4.1）对 S^1 和 S^2 成立，当且仅当它对 S^1 和 S成立。□

再次地，对于固定的单词集合 W 和分拆 η，我们现在可以如下定义我们的保持权重、变号的对合。

定义 4.9。给定 $T =$(T_1、……、T_r) $\in$ LC$_{W,\ \eta}$，通过以下过程定义 $\psi(T)$：

(1) 若 $r = 0$，则 $\psi(T) = T$；(2) 若 T_1 可以拆分，则 $\psi(T) =$(拆分(T_1) T_2、……、T_r)；(3) 若 T_1 无法拆分且 T_1 可以与 T_2 合并，则 $\psi(T) =$(合并(T_1、T_2) T_3、……、T_r)；(4) 否则，我们归纳地定义 $\psi(T) =$(T_1、ψ(T_2、……、T_r))。

示例请参见图3，其中展示了 S 在图2中的图像。

对于 $T \in$LC$_{W,\ \eta}$ 如果没有竖线，那么对任意 i，$c_j(T_i)$ 都不依赖于j，因为没有竖线意味着基底上方的单元格数恒定。我们在这种情况下记 $c(T_i) := c_j(T_i)$。注意，根据定义，c $(T_1) = 0$。我们有如下与 [14, 定理 7。8]类似的结果。

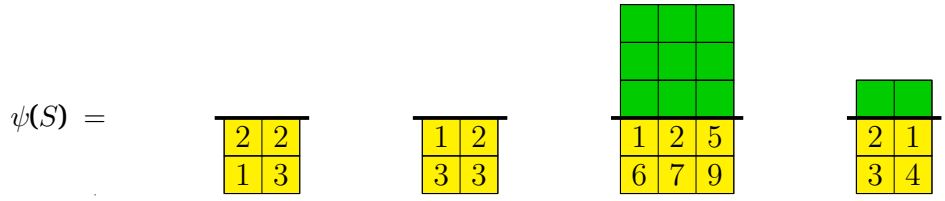


FIGURE 3. 一个 ψ（S）的示例，见图 S 2。

命题 4.10。 令$U_{W,\,\eta}$ 为满足以下条件的 $T \in \mathrm{LC}_{W,\,\eta}$ 集合： T 没有竖线，且对所有 i，

$$c(T_{i+1}) < c(T_i) + \sum_{j=1}^{\ell(C^i)} \mathrm{lwt}\left(w, \sum_{k=1}^{i-1} \ell(C^k) + j\right).$$

那么，$D_{W,\,\eta}$（q）由对$U_{W,\,\eta}$的权重求和给出：

$$D_{W,\eta}(q) = \sum_{T \in U_{W,\eta}} \mathrm{weight}(T).$$

证明。同 [14,定理 78]。 □

现在，我们可以用平行四边形多格骨牌来描述不动点。

定义 4.11。 对于整数 m 和 n，大小为 $m \times n$ 的平行四边形多格骨牌 是从 (0，0) 到 (m, n) 的一对格路径（P， Q），由单位北向步和向东步组成，并且满足： P （上路径）始终严格位于 Q（底部路径）之上，但端点处除外。

大小为 $m \times n$ 的平行四边形多格骨牌的面积 定义为

$$\mathrm{area}(P, Q) := (\#\text{ of lattice cells between } P \text{ and } Q) - (m + n - 1).$$

由于两条路径 P和 Q 在端点之间不相接， $m+n-1$是它们之间单位格的最小数量。还可以看出，area(P， Q) 计算的是 P 和 Q 之间不与 Q相接的格单元数量。

定义 4.12。 一个 $m \times n$、 W-标号平行四边形多格骨牌 是一个三元组（P， Q， w），其中（P, Q）是一个 $m \times n$ 平行四边形多格骨牌，并且 $w \in W \cap X^n$ 是 W 中的一个长度为 n的字。

定义 4.13。 给定 ρ： $W \to A[q]$ 看起来是正确的，因此

$$\rho(w) = \prod_{i=1}^{\ell(w)} q^{\mathrm{lwt}(w,i)(\ell(w)-i)}\,\mathrm{wt}(w^i) \in A[q]$$

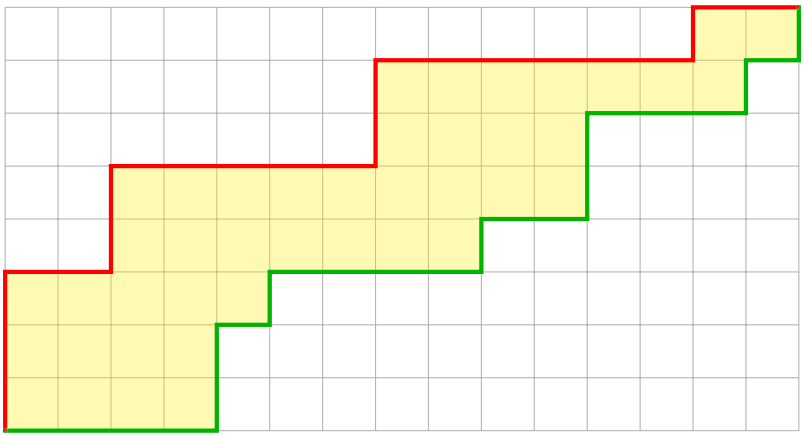


FIGURE 4. 面积为 20 的平行四边形多格骨牌。

对于某些适当的权重函数 wt 和 lwt，我们称一个平行四边形多格骨牌（P， Q， w）是 ρ-相容的，如果 Q 在直线 $y = i-1$ 上恰好包含 $\mathrm{lwt}(w,\ i)+\delta_{i,\ 1}$ 个向东步。

定义 4.14。 给定 $\eta \vdash n$，若一个带有 W 标号的平行四边形多格骨牌（P， Q， w）满足：P 中最长连续北向步段的长度构成一个组合$\alpha \in \mathrm{R}(\eta)$，则称其具有类型 η 。

令 $\mathcal{P}_{W,\ \eta}$ 为所有类型为 η 且与 ρ 相容的带有 W 标号的平行四边形多格骨牌的集合。我们有如下结论。

命题 4.15。 存在一个双射 φ: $U_{W,\ \eta} \leftrightarrow \mathcal{P}_{W,\ \eta}$，使得

$$\mathrm{weight}(T) = q^{\mathrm{area}(\varphi(T))} \prod_{i=1}^{\ell(w)} \mathrm{wt}(w_i).$$

证明。 对于 $T = (C^i,\ w^i)_{1\le i\le r} \in U_{W,\ \eta}$，我们需要定义一个三元组

$$\varphi(T) = (P(T), Q(T), w(T))$$

与多格骨牌及其标签相对应。关于 φ 图2的情形，示例如图5所示。

对于 $1 \le i \le r$，令

$$\beta_i = \ell(C^i), \qquad \Sigma_i = \sum_{j=1}^{i} \beta_i, \qquad s_i = c(T_i) + \sum_{j=1}^{\beta_i} \mathrm{lwt}(w, \Sigma_{i-1} + j) - c(T_{i+1});$$

由于 $T \in U_{W,\ \eta}$，后者必定严格为正。我们定义

- $P = P(T) \coloneqq \left(\prod_{i=1}^{r} N^{\beta_i} E^{s_i}\right) E$
- $Q = Q(T) \coloneqq E\left(\prod_{i=1}^{n} E^{\mathrm{lwt}(w,i)} N\right)$
- $w = w(T) \coloneqq w^1 w^2 \cdots w^r$

其中，乘积表示字符串的有序拼接。我们声称，φ 就是所需的双射。

首先，我们需要证明其定义良好，即（P，Q，w）是一个 W标号的、类型为 η 且与 ρ兼容的平行四边形多格骨牌。事实上，P的最长连续向北步段的长度构成一个组合 $\alpha \in \mathrm{R}(\eta)$，$Q$ 按构造满足 ρ兼容条件，而 w 是一个 W标号。我们需要证明 P 和 Q 具有相同的大小，并且 P 始终严格位于 Q上方。

P 的总高度为 $\sum_{i=1}^{r} \beta_i = n$，而 Q 的总高度为 n，因此二者相同。P的总宽度为

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{i=1}^{r} s_i &= 1 + \sum_{i=1}^{r} \left(c(T_i) + \sum_{j=1}^{\beta_i} \mathrm{lwt}(w, \Sigma_{i-1} + j) - c(T_{i+1}) \right) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{r} (c(T_i) - c(T_{i+1})) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\beta_i} \mathrm{lwt}(w, \Sigma_{i-1} + j) \\
&= 1 + c(T_1) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{lwt}(w, i) \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{lwt}(w, i),
\end{aligned}$$

这恰好是 Q的总宽度，符合预期。为证明 P 始终严格位于 Q上方，只需检查对于 $1 \le k \le r$，我们有

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \le \sum_{i=1}^{\Sigma_k} \mathrm{lwt}(w, i).$$

但这是显而易见的，因为这两个量之差为 $c(T_{i+1}) \ge 0$。

最后，我们必须证明

$$\mathrm{area}(P, Q) = \sum_{i=1}^{r} \left(|C^i| + \sum_{j=1}^{\beta_i} \mathrm{lwt}(w^i, j)(\beta_i - j) \right).$$

令 area(P)（以及 area(Q)）表示矩形中，P（分别为 Q）与该矩形的右下半周界之间的完整单元格数。于是，area(P，Q) =area(P) − area(Q) − ($m+n-1$)，其中 m 是路径的宽度。

我们可以如下计算前几项的因子：对于相关路径的每一个向北步，统计其后向东步的数量，再将这些数量对所有向北步求和。这样，对于第一加项，我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{area}(P) &= \sum_{k=1}^{r} \beta_k \left(1 + \sum_{i=k}^{r} s_i\right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \beta_k \sum_{i=k}^{r} \left(1 + c(T_i) + \sum_{j=1}^{\beta_i} \operatorname{lwt}(w, \Sigma_{i-1} + j) - c(T_{i+1})\right) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \beta_k \sum_{i=k}^{r} (1 + c(T_i) - c(T_{i+1})) + \sum_{k=1}^{r} \beta_k \sum_{i=k}^{r} \sum_{j=1}^{\beta_i} \operatorname{lwt}(w, \Sigma_{i-1} + j) \\
&= \sum_{k=1}^{r} \beta_k \left(c(T_k) + 1\right) + \sum_{k=1}^{r} \beta_k \sum_{i=k}^{r} \sum_{j=1}^{\beta_i} \operatorname{lwt}(w, \Sigma_{i-1} + j) \\
&= n + \sum_{k=1}^{r} |C^k| + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\beta_i} \sum_{k=1}^{i} \beta_k \operatorname{lwt}(w, \Sigma_{i-1} + j).
\end{aligned}$$

对于第二加项，我们可以写成

$$\begin{aligned}
\operatorname{area}(Q) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i+1}^{n} \operatorname{lwt}(w, j)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (j-1) \operatorname{lwt}(w, j) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\beta_i} \left(\sum_{k=1}^{i-1} \beta_k + j - 1\right) \operatorname{lwt}(w, \Sigma_{i-1} + j).
\end{aligned}$$

最后，对于最后一个加项，我们有

$$\begin{aligned} m+n-1 &= \left(1+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{lwt}(w,i)\right)+n-1 \\ &= n+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{lwt}(w,i) \\ &= n+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_i}\mathrm{lwt}(w,\Sigma_{i-1}+j). \end{aligned}$$

由于面积$(P,\ Q)$ $=$面积(P) $-$面积(Q) $-(m+n-1)$，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{area}(P,Q) &= \sum_{k=1}^{r}|C^k|+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_i}\mathrm{lwt}(w,\Sigma_{i-1}+j)\left(\sum_{k=1}^{i}\beta_k-\left(\sum_{k=1}^{i-1}\beta_k+j-1\right)-1\right) \\ &= \sum_{k=1}^{r}|C^k|+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{\beta_i}\mathrm{lwt}(w,\Sigma_{i-1}+j)(\beta_i-j) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\left(|C^i|+\sum_{j=1}^{\beta_i}\mathrm{lwt}(w,\Sigma_{i-1}+j)(\beta_i-j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{r}\left(|C^i|+\sum_{j=1}^{\beta_i}\mathrm{lwt}(w^i,j)(\beta_i-j)\right) \end{aligned}$$

因为当 $j\neq\beta_i$ 时，$\mathrm{lwt}(w^i,j)$ $=\mathrm{lwt}(w,\Sigma_{i-1}+j)$；并且当 $j=\beta_i$ 时，上述相应的加项为 0。因此，等式成立，学位论文的结论立即得出。□

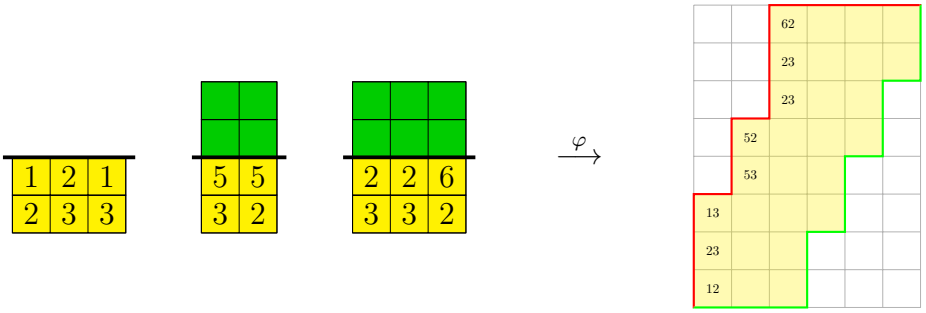


FIGURE 5. 双射的一个例子 φ 适用于 ψ 图中的一个不动点2。

推论 4.16。对于任意 $\eta \vdash n$,

$$D_{W,\eta} = \sum_{P \in \mathcal{P}_{W,\eta}} q^{\mathrm{area}(P)} \,\mathrm{wt}(P),$$

此处，若 $(w^1, \ldots, w^r) = w(\varphi^{-1}(P))$，则设 $\mathrm{wt}(P) = \prod_i \mathrm{wt}(w^i)$。特别地，若 w

$$F = \sum_{\eta \vdash n} e_\eta \sum_{\beta \vDash n} \sum_{\vec{w} \in \mathrm{WV}(W,\beta)} \sum_{\vec{\nu} \in \mathrm{PR}(\eta,\beta)} \rho(\vec{w})(-1)^{n-\ell(\beta)}(1-q^{\beta_1}) f_{\vec{\nu}}[1/(1-q)],$$

then

$$F = \sum_{\eta \vdash n} e_\eta \sum_{P \in \mathcal{P}_{W,\eta}} q^{\mathrm{area}(P)} \,\mathrm{wt}(P).$$

5. Multi-labeled Dyck paths

为了给$\nabla_*^k e_n$一个组合解释，我们必须先确定适当的集合和统计量，以便应用上一节的结果。

令 $X = \mathbb{N}_+^{k+1}, W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$，并且为方便起见，将 X 中的元素从 0 开始编号，使得对于 $w = (w_1, \ldots, w_n) \in W$，有 $w_i = (w_{i0}, \ldots, w_{ik}) \in \mathbb{N}^{k+1}$。令 $\mathsf{lwt}(w, i) = \#\{0 \le j \le k \mid w_{ij} < w_{i+1,j}\}$，即 i^{th} 与 w的第 $(i+1)$ 个字母之间在相同位置出现的上升数，并令

$$\mathrm{wt}(w) = \mathcal{X}^w = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=0}^{k} x_{j,w_{ij}}.$$

现在，回顾一下

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_*^k e_n(\boldsymbol{x}) &= \sum_{\mu \vdash n} \sum_{\beta \in R(\mu)} (-1)^{n-\ell(\mu)} \frac{1-q^{\beta_1}}{\widehat{h}_\beta(1)} \sum_{w \in (\mathbb{N}_+^{k+1})^n} q^{\mathrm{revmaj}_\beta(w)} \mathcal{X}^w \\ &= D_{W,1^n}(q) = \sum_{P \in \mathcal{P}_{W,1^n}} q^{\mathrm{area}(P)} \,\mathrm{wt}(P).\end{aligned}$$

这提供了一种获得组合解释的方法，但我们也可以用我们将称为多重标记 k^n-戴克路径的对象来表述这一结果。关于多重标记戴克路径的显式双射将在定义 5.6中给出。下面我们先陈述主要结果。

定义 5.1。对于正整数 r、k 和 n，一个多标记 *Dyck* 路径 是一个有序对 $(\pi, w) \in \mathrm{LD}_{k^n}^r$，其中 $\pi \in D_n^k$ 是一个 $(kn \times n)$ 戴克路径（即一条始终弱于对角线 $ky = x$、称为主对角线的格路径），而 $w = (w_1, \ldots\ldots, w_n)$ 是一个由 r元组组成的字 $w_i = (w_{i0}, \ldots\ldots, w_{i,\,r-1}) \in \mathbb{N}_+^r$，满足：若 w 在位置 i有 s 个弱下降，则第 i^{th} 个向北步之后至少有 s 个向东步。换言之，若 π 的第 i^{th} 个向北步的 x坐标为 $\mathsf{col}_\pi(i)$，那么

$$\#\{j \mid w_{i,j} \ge w_{i+1,j}\} \le \mathrm{col}_\pi(i+1) - \mathrm{col}_\pi(i)$$

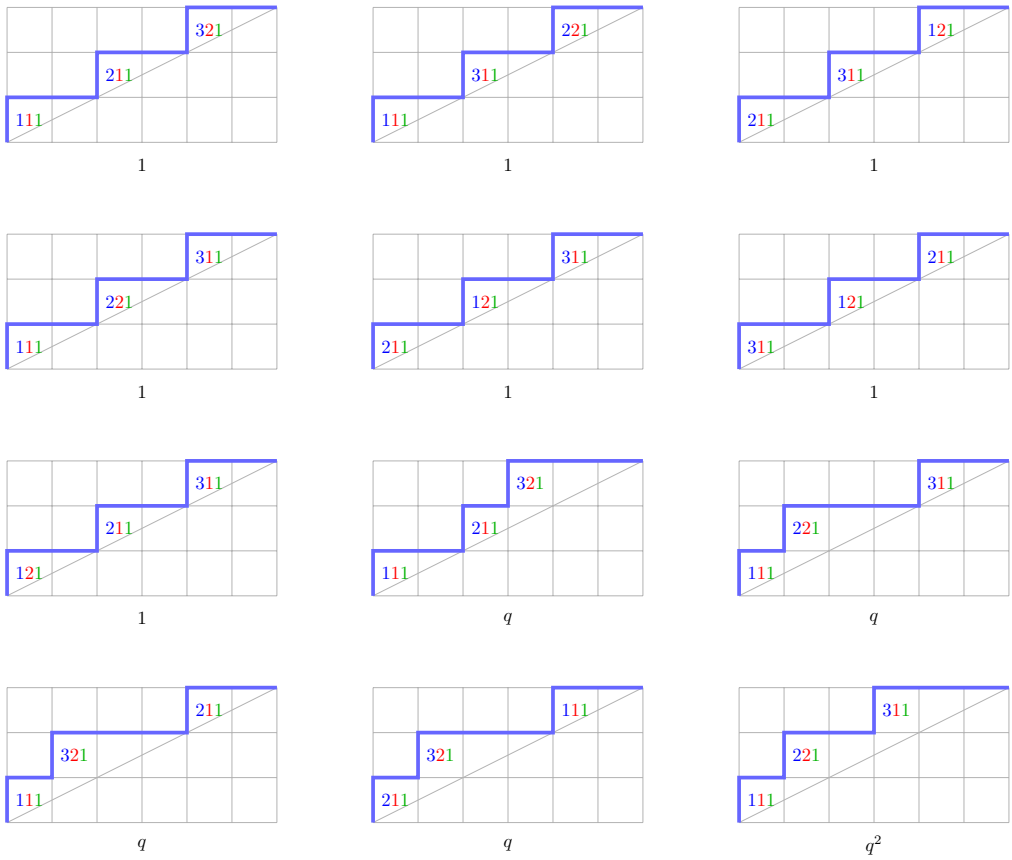


FIGURE 6. LD_{2^3} 中带有 $\boldsymbol{x}$ 标签（1、2、3）、 $\boldsymbol{y}$ 标签（1、1、2）和 $\boldsymbol{z}$ 标签（1、1、1）的多标号 Dyck 路径集合，在 $\widehat{\nabla}_{\boldsymbol{z}}\widehat{\nabla}_{\boldsymbol{y}}(e_3(\boldsymbol{x}))$ 中给出 $m_{111}(\boldsymbol{x}) \otimes m_{21}(\boldsymbol{y}) \otimes m_3(\boldsymbol{z})$ 的系数q^2+4q+7。

对所有 $1 \le i < n$ 均成立。多标记戴克路径的面积 定义方式与矩形戴克路径相同，因此 $\mathrm{area}(\pi)$ 是 π 与主对角线之间完整格单元的数量（注意，面积不依赖于 w）。

当 $r = k+1$ 时，我们将集合 $\mathrm{LD}_{k^n}^{k+1}$ 记为 LD_{k^n}。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\mathrm{LD}}$ 的概念$_{k^n}$ 如图 6所示。完整的 m-展开 $\nabla_{\boldsymbol{z}}\nabla_{\boldsymbol{y}}(e_3(\boldsymbol{x}))$ 可见于表1。

系数 $m_{111}(\boldsymbol{x})$	$m_{111}(\boldsymbol{z})$	$m_{21}(\boldsymbol{z})$	$m_3(\boldsymbol{z})$
$m_{111}(\boldsymbol{y})$	$q^6+7q^5+26q^4+67q^3+134q^2+196q+163$	$q^5+6q^4+20q^3+47q^2+78q+73$	$q^3+5q^2+14q+19$
$m_{21}(\boldsymbol{y})$	$q^5+6q^4+20q^3+47q^2+78q+73$	$q^4+5q^3+15q^2+29q+31$	q^2+4q+7
$m_3(\boldsymbol{y})$	$q^3+5q^2+14q+19$	q^2+4q+7	1

的系数 $m_{21}(\boldsymbol{x})$)	$m_{111}(\boldsymbol{z})$	$m_{21}(\boldsymbol{z})$	$m_3(\boldsymbol{z})$
$m_{111}(\boldsymbol{y})$	$q^5+6q^4+20q^3+47q^2+78q+73$	$q^4+5q^3+15q^2+29q+31$	q^2+4q+7
$m_{21}(\boldsymbol{y})$	$q^4+5q^3+15q^2+29q+31$	$q^3+4q^2+10q+12$	$q+2$
$m_3(\boldsymbol{y})$	q^2+4q+7	$q+2$	0

系数 $m_3(\boldsymbol{x})$)	$m_{111}(\boldsymbol{z})$	$m_{21}(\boldsymbol{z})$	$m_3(\boldsymbol{z})$
$m_{111}(\boldsymbol{y})$	$q^3+5q^2+14q+19$	q^2+4q+7	1
$m_{21}(\boldsymbol{y})$	q^2+4q+7	$q+2$	0
$m_3(\boldsymbol{y})$	1	0	0

TABLE 1. 的 m-展开式 $\nabla_{\boldsymbol{z}}\nabla_{\boldsymbol{y}}(e_3(\boldsymbol{x}))$.

定理 5.2。对于任意 n 和 k,

$$\widehat{\nabla}_*^k e_n = \sum_{(\pi,w)\in \mathrm{LD}_{k^n}} q^{\mathrm{area}(\pi)}\mathcal{X}^w. \tag{5.1}$$

我们希望从路径 π 和字 $w=(w_1,\ldots,w_n)$ 出发，构造 LD_{k^n} 中的一个元素，其中 $w_i=(w_{i1},\ldots,w_{ik})\in\mathbb{N}_+^k$（对应最后的 k 个张量）。这意味着 $(\pi,w)\in\mathrm{LD}_{k^n}^k$。现在我们将构造 $w=(w_1,\ldots,w_n)$，其中 $w_i=(w_{i0},w_{i1},\ldots,w_{ik})$，使得这对 $L=(\pi,w)$ 是一个多重标记戴克路径。然后我们还将记 $w(L)=w$ 和 $w(L)=w$。

假设存在 r 个弱下降，位于 w 的位置 τ。那么 π 其 r 个向东步至少要紧接在其 i^{th} 个向北步之后。若紧接在该 r 个向北步之后恰有 i^{th}个向东步，则要求$w_{i0}>w_{i+1,\,0}$。若其后的向东步多于 r 个，则可以任意选取$w_{i+1,\,0}$的值。由此得到初等对称函数乘积的线性组合展开（见下文方程（5.2））。

定义 5.3。对于多标记戴克路径 $L=(\pi,w)$，我们用 $\eta(p)$ 表示 n 的唯一组合，其对应的部分和集合满足

$$i\in\Sigma(\eta(L)) \qquad \text{if and only if} \qquad \#\{j\mid w_{i,j}\geq w_{i+1,j}\}<\mathrm{col}_\pi(i+1)-\mathrm{col}_\pi(i).$$

推论 5.4。对于任意 n 和 k，我们有

$$\widehat{\nabla}_*^k e_n = \sum_{L\in\mathrm{LD}_{k^n}^k} q^{\mathrm{area}(L)} e_{\eta(L)}\otimes\mathcal{X}^{w(L)}. \tag{5.2}$$

多标号 k^n-戴克路径（π， w）的内容 是重数类型 $m(w)$ $=(m(w_{\star 0})\dots,\ m(w_{\star k}))$。于是，如果 $m(w_{\star 0}) = 1^{\lambda_1}\cdots n^{\lambda_n}$，我们将记作 $w \in W_\lambda$。记 $\mathrm{LD}_{k^n}(\lambda)$ 为具有 $w \in W_\lambda$ 的（π， w） $\in \mathrm{LD}_{k^n}$ 的集合。

推论 5.5. 对于任意 $\lambda \vdash n$ 和 k，我们有

$$\nabla_*^k \,\Xi\, e_\lambda\Big|_{t=1} = \sum_{L\in \mathrm{LD}_{k^n}(\lambda)} q^{\mathrm{area}(L)} e_{\eta(L)} \otimes \mathcal{X}^{\overline{w}(L)}.$$

这个等式由以下双射得出：定义 5.6。

5.1. 从多格骨牌到戴克路径。对于 $\lambda \vdash n$，令 $W_\lambda \subseteq (\mathbb{N}^{k+1})^n$ 为单词 $w = w_1\cdots w_n$ 的集合，其中 $m(w_{\star 0}) = 1^{\lambda_1}\cdots n^{\lambda_n}$ 且 $w_{i,\ j} > 0$ 对于 $j > 0$。
本节通过给出一个保持权重的双射，完成这一构造：$\mathcal{P}_{W_\lambda,\ \eta}$ 与集合

$$\mathrm{LD}_{k^n}(\lambda,\eta) \coloneqq \{L \in \mathrm{LD}_{k^n}(\lambda) \mid \eta(L) = \eta\}$$

由内容为 λ 且具有 e-组合 η 的多重标号 k^n-戴克路径组成。描述逆映射稍微容易一些，因此我们将这样做。

定义 5.6。 设 $L = (\pi, w)$ 是一条多标号的 k^n-戴克路径，设 $P = \pi E$ 且 $Q = E(E^kN)^n$。我们定义 $\iota(L)$ $=(P, Q, w)$，其中 P和 Q分别是从 P和Q 中得到的路径：对于每个 $0 \le i < n$，从 P 所在的直线 $y = i$ 上移除 $\#\{j \mid w_{ij} \ge w_{i+1,j}\}$ 个东向步，并从 Q 所在的直线 $y = i-1$上移除相同数量的东向步。

命题 5.7。 映射 ι 在 $\mathrm{LD}_{k^n}(\lambda,\eta)$ 与 $\mathcal{P}_{W_\lambda,\eta}$ 之间定义了一个保权双射，即 面积(L) $=$面积$(\iota(L))$。

证明。 首先注意到，由于 $\mathrm{col}_\pi(i+1) - \mathrm{col}_\pi(i) \ge \#\{j \mid w_{ij} \ge w_{i+1,j}\}$，因此 $y = i$ 所在的直线上至少有 $\#\{j \mid w_{ij} \ge w_{i+1,j}\}$ 个 P 的东向步。注意，根据定义，每条直线上至少有 k 个 Q 的东向步。由于 $y = i$ 所在直线上的第一个东向步必然严格位于沿着直线 $\overline{y} = i-1$ 的 Q 的第一个东向步的左侧，因此 (P, Q) 必然是一个平行四边形多格骨牌。

现在，Q 在直线 $y = i-1$ 上的东向步数恰好为

$$k - \#\{j \mid w_{i,j} \ge w_{i+1,j}\} + \delta_{i,1} = \#\{j \mid w_{i,j} < w_{i+1,j}\} + \delta_{i,1} = \mathrm{lwt}(w,i) + \delta_{i,1}.$$

因此， $\iota(L)$ 是 ρ-相容的。根据构造， $\iota(L)$ 的字与 L 的字相同，因此它们的内容也相同。根据定义 5.3， L 的 e- 组合恰由 P 的极大竖直线段的长度给出。由此可得， $\iota(L) \in \mathcal{P}_{W_\lambda,\eta}$。

由于定义 ι 的过程是可逆的，因此该映射是双射的。最后请注意， i^{th} 行中的单元格数量减少了 $\#\{j \mid w_{ij} \ge w_{i+1,j}\}$，但底部路径在直线 $y = i-1$ 上的向东步数也相应减少。这意味着 $\iota(L)$ 的面积与 L 的面积相同。□

5.2. **舒尔展开。** 修正麦克唐纳多项式在$t=1$处的舒尔展开为

$$\frac{\widehat{h}_\beta(\boldsymbol{x})}{\widehat{h}_\beta(1)} = \sum_{\lambda\vdash n} s_\lambda(\boldsymbol{x}) \sum_{\alpha\in \mathrm{LW}_\lambda} q^{\mathrm{revmaj}_\beta}(\alpha),$$

其中 LW_λ 是类型为 λ 的格字集合。给定一个由长度为 k 的元组组成的字 $w=(w_1,\dots,w_n)$，若 $w_{\star i}$ 是类型为$\lambda^i(w)=\lambda^i$ 的格字，我们就称 w 是类型为 $(\lambda^1,\dots,\lambda^k)$ 的格字。我们注意到

$$\widehat{\nabla}_*^k e_n = \sum_{\eta\vdash n} e_\eta \otimes s_{\lambda^1}\otimes\cdots s_{\lambda^k} D_{\mathrm{LW}_{\lambda^1,\dots,\lambda^k},\eta}(q),$$

其中 $\mathrm{LW}_{\lambda^1,\dots,\lambda^k}$ 是类型为 $(\lambda^1,\dots,\lambda^k)$ 的格字集合；我们使用的局部权重与本节开头所用的相同，由局部上升的数量给出。令 LLD_{k^n} 为 $L\in\mathrm{LD}^k_{k^n}$ 中满足 $w(L)$ 是格字的子集。根据前几节的推导，立即可得以下结论。

定理 5.8。

$$\widehat{\nabla}_*^k e_n = \sum_{L\in\mathrm{LLD}_{k^n}} q^{\mathrm{area}(L)} e_\eta \otimes s_{\lambda^1(w(L))}\otimes\cdots\otimes s_{\lambda^k(w(L))}. \tag{5.3}$$

5.3. **值得注意的特殊情况。**

5.3.1. $\lambda=(n)$ $k=1$。 当 $k=1$ 时，我们得到常规的戴克路径，但带有两组不同的标签。通过恰当取标量积，我们可以得到一些著名的组合表达式，例如洗牌定理或 Delta 猜想的谷版本。

确实，根据命题 1.2，我们有 $\langle e_n,\ \nabla_*\rangle e_n = \nabla e_n$。这对应于 $\boldsymbol{y}$-标签在读词中的顺序严格递增的情形。由于我们只考虑面积，而面积不依赖于标签，因此可以使用对角读词（符合洗牌定理的 (dinv，面积) 版本），也可以使用垂直读词（符合等价的 (面积，pmaj) 版本 [15]）。

无论采用哪种情况，$\boldsymbol{y}$-标签都必须按照读词顺序严格递增这一事实意味着：每当两个向北步之间仅隔着一个东向步时，它们的标签就严格递增；而由于 $r=2$，$\boldsymbol{x}$-标签除了必须沿列递增之外没有其他限制，这正是洗牌定理中出现的条件。

如果我们改为取 $\langle e_{n-k}h_k,\nabla_*\rangle e_n = \Delta_{e_{n-k}}e_n$，这对应于这样一种情况：$\boldsymbol{y}$标号的读词是 $(1,2,\dots,n-k)$ 和 $(n,n-1,\dots,n-k+1)$ 的一个交错。与通常一样，在这种情况下，我们可以将其解释为给路径的 k 个峰加上装饰，条件是：每当有一个加了装饰的峰，且其正右方一列中有一个向北步时，由于 $\boldsymbol{y}$标号递减，$\boldsymbol{x}$标号必须递增。这个条件恰好等价于：加了装饰的峰之后的谷必须是可收缩的；这正是

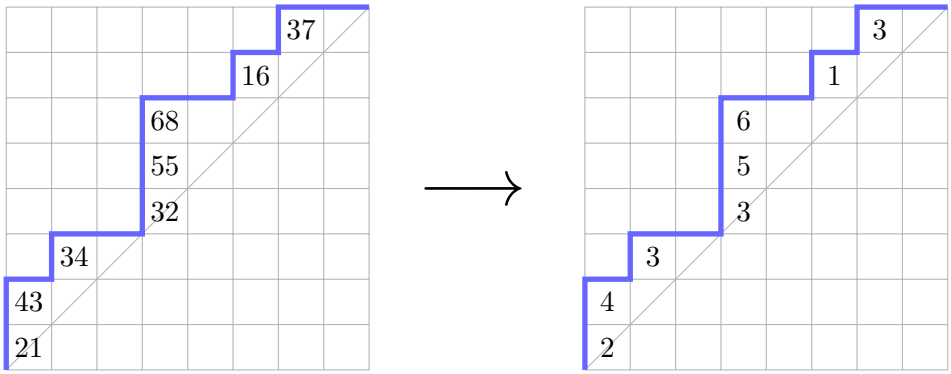


FIGURE 7. 一个双标记戴克路径，其 $\boldsymbol{y}$（对角线）读词为 12345678，以及相应的标号戴克路径。

Delta 猜想的谷版本所给出的条件。当然，最顶端的峰不对应任何谷，事实上我们得到的是 $\Delta_{e_{n-k}}e_n$，而不是 $\Delta'_{e_{n-k-1}}e_n$。

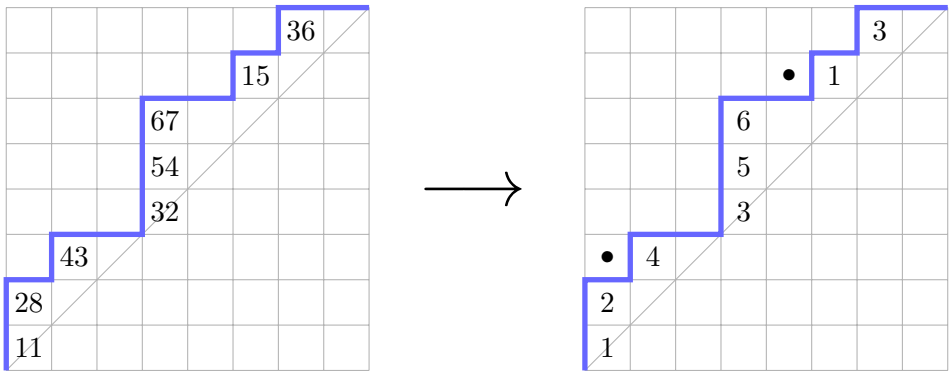


FIGURE 8. 一个双标记戴克路径，其 $\boldsymbol{y}$（对角线）读词为 $12834567 \in 123456 \sqcup\!\sqcup 87$，以及相应的谷装饰标号戴克路径。“大汽车”被装饰谷所取代。

在这两种情形中，来自 [11] 的 Delta 猜想的谷版本为具有某些 t-标号的双标记戴克路径给出了一个 $\boldsymbol{y}$-统计量。我们希望将这一统计量扩展到完整的多重标记戴克路径集合以及任意标号。

5.4. **分层树**。值得注意的是，由于以下恒等式，我们得到了对 $\nabla_* e_n$ 的另一种解释，它推广了 [5]的一个猜想。

命题5.9。

$$\nabla_* e_n = \sum_{\lambda} m_\lambda \otimes (\Xi\, e_\lambda)$$

将其与 [5, 猜想6。4], 结合起来，我们得到一个（$m \otimes m$）-展开式，用 $\nabla_* e_n|_{t=1}$ 有根分层树和树反演表示。

回顾一下 $\Xi e_{1^n} = \Delta_{e_1} M\Pi(e^*_{1^n})$。 m_λ 在 $M\Pi(e^*_{1^n})$ 中的系数是某些蒲公英箭图的 Kac 多项式，其维数向量取决于 λ；也就是说，它是对 $\mathbb{F}_q$ [5, 9] 上箭图的绝对不可分解表示进行计数的多项式。若能为任意 Ξe_μ 找到类似的解释，而不仅仅是为 $\mu = (1^n)$，将会很有趣。

6. On power sums

本节的目标是证明以下结论。

命题 6.1。 对于任意非空分拆 γ,

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_* \widehat{\Delta}_{m_\gamma}(\omega p_n) &= \sum_{L \in \mathrm{RLD}^\gamma_{k^n}} q^{\mathrm{area}(L)} e_{\eta(L)} \otimes \mathcal{X}^L \\ &= \sum_{L \in \mathrm{RLLD}^\gamma_{k^n}} q^{\mathrm{area}(L)} e_{\eta(L)} \otimes s_{\lambda^1(w(L))} \otimes \cdots \otimes s_{\lambda^k(w(L))},\end{aligned}$$

其中，两个求和分别遍历带有标记回返的多重标号(γ, k^n)-戴克路径，以及带有标记回返的格点多重标号(γ, k^n)-戴克路径。

相关集合的定义将在后续各节给出，且直接源自第4节的一般框架。

6.1. 牛顿恒等式。

分拆的<选定重排 SR(μ)是通过以下步骤可以得到的所有图示：

(1) 选择 μ 各部分的一种重排 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{\ell(\mu)})$，将其画成若干行；(2) 在第一个部分 α_1 中选取一个单元格，并用圆圈标记该单元格。

例如，要得到 SR(4,3,1,1) 的一个元素，我们可以将各部分重排为 $(3, 1, 4, 1)$，其 3 种可能标记方式之一为



根据该集合的构造可知,

$$|\mathrm{SR}(\mu)| = \sum_{\alpha \in \mathrm{R}(\mu)} \alpha_1. \tag{6.1}$$

命题 6.2 （牛顿恒等式）。对于任意 n,

$$p_n = \sum_{\mu \vdash n} (-1)^{\ell(\mu)-1} |\mathrm{SR}(\mu)|\, h_\mu.$$

由此可得

$$\widehat{p}_n(\boldsymbol{x}) = \frac{p_n(\boldsymbol{x})}{1-q^n} = -\sum_{\mu\vdash n}(-1)^{\ell(\mu)}|\mathrm{SR}(\mu)|\,\widehat{h}_\mu,$$

或者等价地

$$\omega(p_n) = (1-q^n)\sum_{\mu\vdash n}(-1)^{n-\ell(\mu)}|\mathrm{SR}(\mu)|\,\widehat{h}_\mu. \tag{6.2}$$

于是我们得到如下结果。

命题 6.3。 对于任意 n、 k和分拆 γ,

$$\widehat{\nabla}_*^k\widehat{\Delta}_{m_\gamma}\omega(p_n) = \sum_{\eta\vdash n} e_\eta(\boldsymbol{x}_0)\sum_{\mu\vdash n}\sum_{\vec{\nu}\in\mathrm{PR}(\mu,\eta)}(-1)^{n-\ell(\mu)}(1-q^n)\,\mathbf{CC}_{\nu^1}\cdots\mathbf{CC}_{\nu^{\ell(\mu)}}\,m_\gamma\Big[\textstyle\sum_i[\mu_i]_q\Big]$$
$$\times\sum_{\alpha\in\mathrm{R}(\mu)}\alpha_1\sum_{w\in(\mathbb{N}_+^k)^n}\prod_{i=1}^k q^{\mathrm{revmaj}_\alpha(w_{\star i})}x_{i,w_{1i}}\cdots x_{i,w_{ni}}.$$

证明。 将 ∇_*^k 应用于方程 (6.2), 得到

$$\widehat{\nabla}_*^k\widehat{\Delta}_{m_\gamma}\omega(p_n) = \sum_{\mu\vdash n}(-1)^{n-\ell(\mu)}(1-q^n)|\mathrm{SR}(\mu)|\left(\frac{\widehat{h}_\mu}{\widehat{h}_\mu(1)}\right)^{\otimes k}\otimes m_\gamma\Big[\textstyle\sum_i[\mu_i]_q\Big]\,\widehat{h}_\mu.$$

回想一下，利用柯西恒等式，我们有

$$\widehat{h}_\mu = \sum_{\eta\vdash n} e_\eta\sum_{\vec{\nu}\in\mathrm{PR}(\eta,\mu)} f_{\vec{\nu}}\left[1/(1-q)\right];$$

现在我们可以将乘积解释为

$$(1-q^n)f_{\vec{\nu}}\left[1/(1-q)\right] = (1-q^n)(-1)^{n-\ell(\eta)}\,\mathbf{CC}_{\nu^1}\cdots\mathbf{CC}_{\nu^{\ell(\mu)}}$$

列-组合表的生成函数（C^1、……、$C^{\ell(\mu)}$），其中 $C^i\in\mathsf{CC}_{\nu^i}$ 满足以下条件：对于至少一个 C^i，有 $c_1(C^i)=0$。乘积$\widehat{h}_\alpha^{\otimes k}$的单项式展开是对所有满足 $w_i\in(\mathbb{N}_+)^k$ 的字 $w=(w_1$、……、$w_n)$ 求和得到的；其中，若 $w_i=(w_{i1}$、……、$w_{in})$，则 w 贡献项

$$\prod_{i=1}^k q^{\mathrm{revmaj}_\alpha(w_{\star i})}x_{i,w_{1i}}\cdots x_{i,w_{ni}}. \qquad \square$$

因此，求和项中的每个分量都可以赋予组合解释，由此引出以下定义。

定义 6.4。 设 η、$\mu\vdash n$ 是 n 的分拆，并设 γ 为任意非空分割。我们将以下过程定义为一个类型为 $(\eta$、μ、$\gamma)$ 的带标号选定列-组合杨表 序列，记作 $S=(S^1,\ \ldots\ldots,\ S^\ell)\in\mathsf{SC}^\gamma(\eta$、$\mu)$。

(1) 选取 $\alpha \in \mathrm{SR}(\mu)$。

(2) 选择 $(\nu^1, \ldots, \nu^{\ell(\alpha)}) \in \mathrm{PR}(\eta, \alpha)$。

(3) 对于 $i = 1, \ldots, \ell(\alpha)$，选择 $C^i \in \mathsf{CC}_{\nu^i}$，并满足以下条件：对于某个 j，$c_1(C^j) = 0$。通过在 C^1 中对应的列上方放置圆圈，表示在 α_1 中的选择。

(4) 为便于记法，单词将用 $j = 0, \ldots, k$ 编号；序列w^i 中的第 j^{th} 个字记作 w^i_j；单词 w^i_j 中的第 r^{th} 个字母记作 w^i_{jr}；而单词 $w^i_{1r} w^i_{2r} \cdots w^i_{\alpha_i,\, r}$ 记作 $w^i_{\star r}$。

对于每个 $i = 1, \ldots, \ell(\alpha)$，选择一个单词序列 $w^i \in (\mathbb{N}^{k+1})^{\alpha_i}$，并满足两个额外条件：第一，$w^i_{jr}$ 对于 $r > 0$ 非零；第二，$m(w_{\star 0}) = 0^{n-\ell(\gamma)} 1^{m_1(\gamma_1)} \cdots n^{m_n(\gamma_n)}$，换言之，$w_{\star 0} \in \mathrm{R}(0^{n-\ell(\gamma)}, \gamma)$。

(5) Set $S^i = (C^i, w^i)$.

现在我们定义

$$\rho(S^i) = q^{|C^i|} q^{\mathrm{rw}(w^i_{*0})} \prod_{j=1}^{k} q^{\mathrm{revmaj}(w^i_{\star j})} x_{j,w^i_{1j}} \cdots x_{j,w^i_{\ell(w^i),j}}$$

with

$$\mathrm{rw}(a_1, \ldots, a_\ell) = \sum_{i=1}^{\ell} (\ell - i) a_i,$$

并令 $\rho(S) = \rho(S^1) \cdots \rho(S^{\ell(\eta)})$。最后，我们将 S 的符号定义为

$$\mathrm{sign}(S) = (-1)^{\ell(\eta) - \ell(\mu)},$$

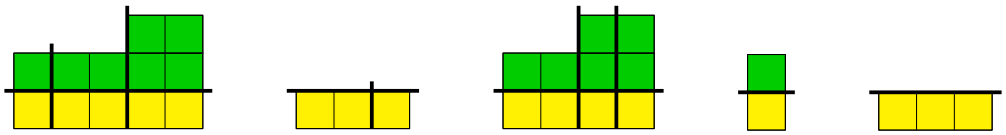
这样，它再次给出了 S 中出现的竖线数量的奇偶性。

使用上一节的记号，在这种情况下看起来恰当的统计量由 $\vec{w} = (w^1, \ldots, w^{\ell(\alpha)})$ 的元组中最后 k 个项的逆主指标（以及相应 x_{ij} 单项式的乘积）给出，而所有元组的第一项则由 rw 给出。

例如，假设 $\eta = (3, 2^4, 1^5)$、$\mu = (5, 4, 3^2, 1)$ 和 $\gamma = (2、2、1、1)$，并考虑重排 $\alpha = (5、3、4、1、3)$。我们选取

$$\vec{\nu} = ((2,2,1), (2,1), (2,1,1), (1), (3)) \in \mathrm{PR}(\eta, \mu),$$

并在 CC_{ν^1}、……、 $CC_{\nu^{\ell(\rho)}}$ 中选择以下列-组合杨表。



请注意，至少有一个列-组合表的第一列没有单元格。现在，在第一个分量的一列上方画一个圆圈，并将基行中的每个单元格替换为一列 $k+1$ 数字。从左到右，第一列包含元组 w_1^1，第二列包含元组 w_2^1，依此类推，直到第 α_1 列，其中包含元组 $w_{\alpha_1}^1$。下一列属于第二个列组合表，其中包含元组 w_1^2。我们继续以这种方式构造 S' ，如图9所示。

$S' =$

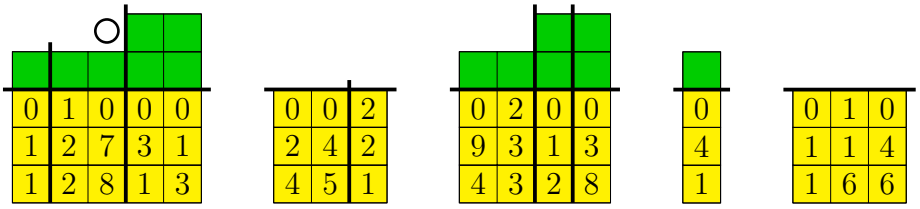


FIGURE 9. $S' \in \mathsf{SC}^{(2^2,1^2)}((3,2^4,1^5),(5,4,3^2,1))$的一个示例。

这是一个带标记的选定列合成表。我们看到，从顶部开始的第一行标签（即 w_{*0}）中的非零项重新排列后得到 γ。第二行的项为 $w_{\star 1} = w_{\star 1}^1 \cdots w_{\star 1}^{\ell(\alpha)} =$(1，2，7，3，1，2，4，2，9，3，1，3，4，1，1，4)。

要计算这个序列的权重，我们首先数出基底上方的单元格数量，得到 q^{14}。现在，我们计算0^{th} 行之后每一行的逆主指标。读取第一个分量中标签的第二行，得到字$w_{\star 1}^1 =$(1,2,7,3,1)，它在第一和第二个位置上升。第一个上升右侧的单元格数为 4，第二个上升右侧的单元格数为 3。因此得到 q^7。类似地，第一个分量的最后一行给出字$w_{\star 2}^1 =$(1, 2, 8, 1, 3)，它在位置 1,2,4 上升。因此得到 q^8。依此类推，第二个标记的杨表给出 q^{2+2}；第三个给出 q^{1+1}；最后一组标签给出 q^{1+2}。因此，与 $w_{\star 1}$ 和 $w_{\star 2}$ 对应的所有标签总共贡献 q^{24}。如果标签 j 出现在标签的 i^{th} 行中，它对权重的贡献为x_{ij}。因此，序列第一个分量中标签的第二行对总权重的贡献因子为 $x_{11}x_{12}x_{17}x_{13}x_{11}$。

0th 行的权重计算如下：在第一个分量中，第二列有一个 1。由于它右侧有 3 列，因此这个标号贡献的权重为$q^{1(3)}$。第二个分量的最后一列有一个 2，它贡献的因子为

$q^{2(0)}$。第三个分量给出 $q^{2(2)}$，最后一个分量给出 $q^{1(1)}$。因此，第一行贡献的因子为 q^{8}。总之，我们得出

$$\rho(S') = q^{14}q^{8}q^{24}\,x_{11}^{4}\,x_{12}^{2}\,x_{13}^{3}\,x_{14}^{3}\,x_{17}\,x_{19}\,x_{21}^{5}\,x_{22}^{2}\,x_{23}^{2}\,x_{24}^{2}\,x_{25}\,x_{26}^{2}\,x_{28}^{2}$$

命题 6.5。 对于任意 k、 n 和非空分拆 γ，我们有

$$\widehat{\nabla}_{*}^{k}\,\widehat{\Delta}_{m_\gamma}\omega(p_n) = \sum_{\eta\vdash n}\sum_{\mu\vdash n}\sum_{S\in \mathrm{SC}^{\gamma}(\eta,\mu)} \operatorname{sign}(S)\rho(S)\otimes e_{\eta}.$$

6.2. **一个反号对合**。 我们定义了一个分裂映射的变体，见 [18],[14],[13]，它将选定的带标记列组合表的无穷带符号和缩减为有限个不动点。我们先定义任意竖线处的分裂映射。为此，我们定义两个长度相等的词序列的相对局部权重，方法与第 4 节相同。

将前述定义特化后，可得以下相对统计量。

定义 6.6。 设 $A\in(\mathbb{N}^{k+1})^{a}$ 和 $B\in(\mathbb{N}^{k+1})^{b}$ 是两个长度为 $k+1$ 的元组字。那么， A 与 B 之间的相对统计量 为

$$\mathrm{D}(A;B) = A_{10}+\cdots+A_{a0}+\sum_{i=1}^{k}\operatorname{asc}(A_{1i}\cdots A_{ai}B_{1i}).$$

定义 6.7。 设 $T=(C,\ w)$ 是一个带标记的选定列组合表，$A=(w_1$、 ……、 $w_r)$ 是 w 的前 r 个字母，而 $B=(w_{r+1}$、 ……、 $w_\ell)$ 是 w 的剩余部分。假设 T 中第 r 列之后有一条竖线。那么，我们将 T 在 r 处的分裂 定义为 $\operatorname{split}_r(T)=(T^1,\ T^2)$，具体步骤如下。

(1) 设定 $T^1=(C^1,\ A)$，其中 C^1 由 C 的前 r 列组成。如果选中了 T 的前 r 列之一，则保留对 C^1 中对应列的选中状态。

(2) 设定 $T^2=(C^2,\ B)$，其中 C^2 由 C 的最后 $\ell-r$ 列构成，并向每一列添加 $\mathrm{D}(A;B)$ 个单元格。如果 T 的最后 $\ell-r$ 列中有一列被选中，则保留对 C^2 中对应列的选中状态。

定义 6.8。 假设 $T^1=(C^1,\ A)$ 和 $T^2=(C^2,\ B)$ 是某个被选中的列-组合表 T 的拆分。这意味着，对于某个 r，有 $\operatorname{split}_r(T)=(T^1,\ T^2)$。那么我们称 T^1 和 T^2 可以合并 ，并设 $\operatorname{join}(T^1,\ T^2)=T$。这样的 T 唯一存在，当且仅当以下不等式成立：

$$c_1(T^2)\geq c_\ell(T^1)+\mathrm{D}(A;B).$$

O我们在第 4 节中的前述工作表明，映射 split_r 保持权重。

定义 6.9。 给定 $S=(S^1,\dots,S^\ell)\in \mathrm{SC}^\gamma(\eta,\mu)$，如果圆圈左侧没有竖线（因此它位于 S^1 的第一个分量中），则称该圆圈在 S 中是首位的。通过以下过程定义映射 $\psi_\circ$：

(1) 如果圆圈在 S 中不是最前面的，那么圆圈左侧最右边有一条竖线，假设它位于第 r 列之后。此时，如果 $\mathrm{split}_r(S^1)=(R^1,R^2)$，则令 $\mathrm{set}\psi_\circ(S)=(R^2,S^2,\dots,S^\ell,R^1)$。
(2) 如果圆圈位于最前面且 S^ℓ 可以与 S^1 合并，那么 $\psi_\circ(S)=(\mathrm{join}(S^\ell,S^1)\ S^2,\dots,S^{\ell-1})$。(3) 如果圆圈位于最前面且 S^ℓ 不能与 S^1 合并，那么 $\psi_\circ(S)=\psi(S)$，如定义 4.5 所述。

例如，图 S' 9 中的构形 映射为以下构形 $\psi_\circ(S')$，见图10。

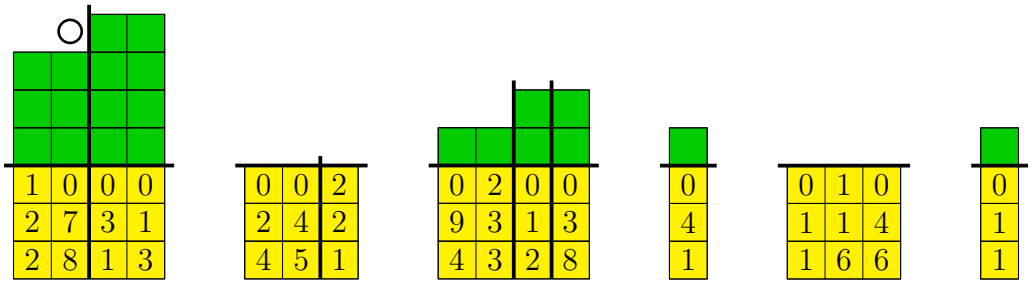


FIGURE 10. (S') 的一个示例 $\psi_\circ$。

命题 6.10。 对于 $|\gamma|>0$，上述映射 $\psi_\circ$ 是一个保持权重、反转符号的对合。

证明。 证明过程与第 4 节完全相同。显然，步骤 1 和 2 互为逆操作。并且我们知道 φ 在步骤 3 中是一个保持权重的反号对合。因此，我们需要证明：如果 S 属于情形 1 或 2，那么 $\psi_\circ(S)$ 也属于情形 1 或 2。并且，如果$S=(S^1,\dots,S^r)$ 属于情形 3，那么 $\psi(S)$ 也属于情形 3。因此，只需证明对于S属于情形 3 的情况，$\psi(S)=(T^1,\dots,T^s)$ 也属于情形 3。

假设圆圈在 S^1 中领先，并且 S^r 无法与 S^1 合并。这意味着 $c_1(S^1)<c_\ell(S^r)+\mathrm{D}(S^r;S^1)$。根据 ψ 的定义，我们必须始终有 $c_\ell(S^r)+\mathrm{D}(S^r;S^1)=c_\ell(T^r)+\mathrm{D}(T^r;T^1)$。这是因为如果 ψ 将 S^r 拆分为 (T^{s-1},T^s)，那么 S^r 的最后一列就会增加 $\mathrm{D}(T^{s-1};T^s)$，以创建 $c_\ell(T^s)$。换句话说，$c_\ell(T^s)=\mathrm{D}(T^{s-1};T^s)+c_\ell(S^r)$。因此，利用 $\mathrm{D}(T^{r-1};T^r)+\mathrm{D}(T^r;T^1)=\mathrm{D}(S^r;S^1)$，

$$c_\ell(T^s)+\mathrm{D}(T^r;T^1)=c_\ell(S^r)+\mathrm{D}(T^{s-1};T^s)+\mathrm{D}(T^r;T^1)=c_\ell(S^r)+\mathrm{D}(S^r;S^1).$$

反之，如果 ψ 与 S^{r-1}, S^r 合并成 T^s，那么只要将T^s, T^{s-1} 与 S^r, S^{r-1} 互换，这个论证同样成立。

当 $S = (S^1)$ 由单个部分组成时，这个论证存在一个问题，因为我们没有 S^ℓ 无法合并 S^1这一条件。假设圆圈在 S和 $\psi(S) = (T^1, T^2)$ 中处于前导位置。我们必须确保 T^2 不会与 T^1合并；否则，就会出现某个属于情形 3 的对象落入情形 2。只有当 γ 非空时，这一点才成立：

如果 T^1 中存在非空标号 i，那么 $c_\ell(T^2) > c_\ell(S^1)$，因为为了形成 T^2，每一列至少新增了 i 个单元格。特别地，$c_\ell(T^2) > 0$；而根据 $\mathrm{SC}^\gamma(\eta, \mu)$ 的定义，$c_1(S^1) = c_1(T^1) = 0$。因此，T^2 无法与 T^1合并。另一方面，如果 T^2 中存在非零标号，那么要将 T^2 与 T^1合并，就需要 $c_1(T^1) \geq i > 0$。但是，由于 $c_1(T^1) = c_1(S^1) = 0$，可知这不可能成立。因此，如果 S 落入情形 3，那么 $\psi_\circ(S)$ 也会如此。□

注意，所有不动点都必须属于某个 η 的 $\mathrm{SC}^\gamma(\eta, \eta)$。令 SM_η^γ 为 $\psi_\circ$ 中类型为 η 的不动点集合。那么我们已证明如下结论。

命题 6.11。对于任意 n、k 和非空分割 γ，

$$\widehat{\nabla}_*^k \widehat{\Delta}_{m_\gamma} \omega(p_n) = \sum_{\mu \vdash n} \sum_{S \in \mathrm{SM}_\eta^\gamma} \rho(S) \otimes e_\eta.$$

集合 SM_η^γ 如下所示。若元素 $S = (S^1, \ldots, S^r) \in \mathrm{SM}_\eta^\gamma$ 满足以下条件，则它在 ψ° 作用下是不动点：

(1) 对所有 i，S^i 都不能拆分，也就是说，不存在横线。这意味着对于每个 i，$c_1(S^i) = c_\ell(S^i)$，因此我们可以用不带下标的形式表示这个量：$c(S^i) = c_1(S^i) = c_\ell(S^i)$。(2) 对所有 $i < \ell$，S^i 不能与 S^{i+1} 合并，且 S^ℓ 不能与 S^1 合并。(3) 圆圈在 S^1 中居首。

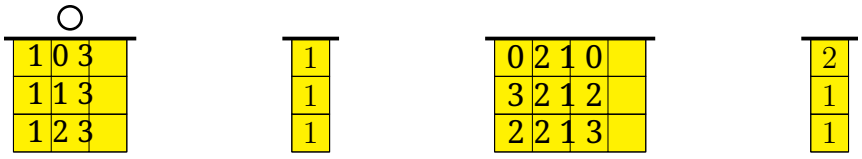
因此，每个 S^i 都由来自 η 的一个单独部分组成，$c(S^{i+1}) < c(S^i) + \mathrm{D}(S^i; S^{i+1})$，且还包括 $c(S^1) < c(S^\ell) + \mathrm{D}(S^\ell; S^1)$。例如，假设 $\eta = (4, 3, 1, 1)$，且 $\gamma = (3, 2, 2, 1, 1, 1)$。那么，要构造一个元素 $S = (S^1, S^2, S^3, S^4) \in \mathrm{SM}_\eta^\gamma$，首先选取 η 的一种重排，例如 (3, 1, 4, 1)，并在第一部分中选一个格子画上圆圈。这些将成为杨表的基行。



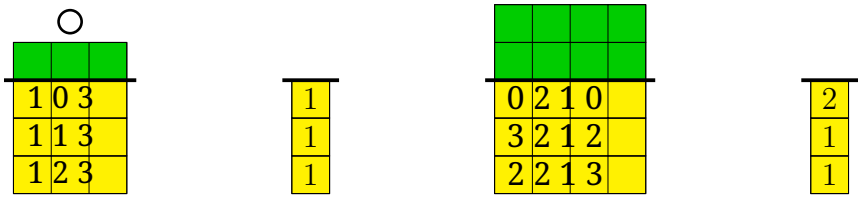
选择 γ、$0^{|\mu|-\ell(\gamma)}$ 的一种重新排列，例如 (1、0、3、1、0、2、1、0、2)，并将其放入基行中。



现在，在底行的每个单元格下方再放置两个字母。



为了构造 $(S^1, \dots, S^4)$，现在我们为 $c(S^i)$ 选取一个值，使得 $c(S^{i+1}) < c(S^i) + D(S^i; S^{i+1})$，且 $c(S^1) < c(S^4) + D(S^4; S^1)$。我们要求至少存在一个 i，使得 $c(S^i) = 0$。



在这种情况下，我们有以下数值。为了更好地说明相对统计量，我们写作 $D(S^i; S^{i+1}) = a + b$，其中 a 是第 0th 行中各标号之和，b 是下方各行中上升所产生的贡献。

$$D(S^1; S^2) = 4 + 4 \qquad D(S^2; S^3) = 1 + 2 \qquad D(S^3; S^4) = 3 + 2 \qquad D(S^4; S^1) = 2 + 0$$
$$c(S^1) = 1 \qquad c(S^2) = 0 \qquad c(S^3) = 2 \qquad c(S^4) = 0$$

这列带标签的选定列组合杨表序列的权重为

$$\rho(S) = q^{24}\, x_{11}^5\, x_{12}^2\, x_{13}^2\, x_{21}^4\, x_{22}^3\, x_{23}^2.$$

定义 6.12。回忆一下，平行四边形多格骨牌（P，Q）由两条仅在起点和终点相接触的路径组成。如果 r 是 P的第一个垂直线段的长度，那么必定存在某个 $i \geq r$，使得 P 与 Q 沿直线$y = i$ 之间的距离至多为 1 个单位。这样的最小 i 称为 P 的回返，记作 ret(P, Q)。令 $\eta \vdash n$，并令 γ 为任意非空分拆。用 $\mathrm{RP}_k^{\gamma}{}_{,\,\eta}$ 表示带有标记回返的ρ-相容多格骨牌的集合，其元素由四元组（P，Q，w，i）给出，其中

(1) $w = (w_1, \dots\dots, w_n) \in (\mathbb{N}^{k+1})^n$，其中 $w_{10} \cdots w_{n0} \in R(\gamma, 0^{n-\ell(\gamma)})$ 和 $w_{ij} > 0$ 对于 $j > 0$，(2) (P, Q, w) 是一个 ρ-相容的、类型为 η 的平行四边形多格骨牌，其中 P以两个连续的向东步结尾，并且 (3) $1 \leq i \leq \mathrm{ret}(P, Q)$。

定义 6.13。定义映射 $\varphi_\circ : \mathrm{SM}_\eta^\gamma \to \mathrm{RP}_k^{\gamma}{}_{,\,\eta}$ 使用 φ 第 4 节中的 $S = (S^1, \dots\dots, S^\ell) \in \mathrm{SM}_\eta^\gamma$，

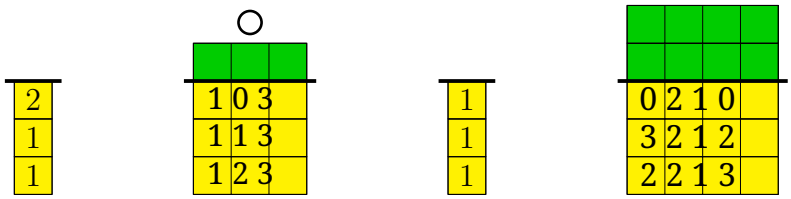
(1) 若 $c(S^1) = 0$，则令 $\varphi_\circ(S) = \varphi(S)$，保持圆圈内接于其对应的向北步 S^1 中，该向北步对应 $\varphi(S)$，正如命题 φ 4.15 中的映射所关联的那样；

(2) 若 $c(S^1) > 0$，则存在最大的 j 使得 $c(S^j) = 0$，因此令

$$\varphi_\circ(S) = \varphi(S^j, \ldots, S^\ell, S^1, \ldots, S^{j-1}),$$

再次将圆圈保留在 S^1 对应的向北步中。

例如，要找出上一个例子在 $\varphi_\circ$ 下的像，我们先重新排列各部分，得到



应用 φ 即可得到图 11 所示的所选多格骨牌。

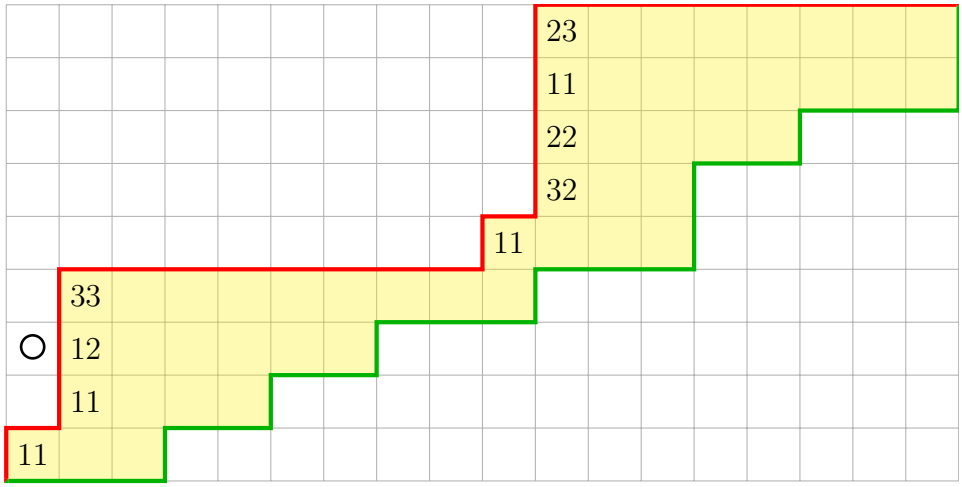


FIGURE 11. 一个与 ρ 兼容、带有标记回返的 $\mathrm{RP}_2^{(3,2,2,1,1,1)}$，$(4,\ 3,\ 1,\ 1)$ 多格骨牌，面积为 24。当 $y = 4$ 时，路径会回返。

令 $\mathrm{RP}_k^\gamma = \bigcup_\eta \mathrm{RP}_{k,\ \eta}^\gamma$，并令 $\eta(L) = \eta$，若 $L \in \mathrm{RP}_{k,\ \eta}^\gamma$。

命题 6.14。 映射 $\varphi_\circ$ 是一个保持权重的双射。特别地，我们有

$$\widehat{\nabla}_*^k \widehat{\Delta}_{m_\gamma} \omega(p_n) = \sum_{L \in \mathrm{RP}_k^\gamma} q^{\mathrm{area}(L)} \mathcal{X}^L \otimes e_{\eta(L)}$$

证明。双射 φ 给出了一个单射，其像是由带有标记回返的平行四边形多格骨牌组成的子集。我们只需确保以下条件：若 $\varphi_\circ(S)$对应的多格骨牌为（P, Q），则 P以两个向东步结束。若 $S = (S^1, \dots, S^\ell)$映射到 $\varphi_\circ(S) = \varphi(S^j, \dots, S^\ell, S^1, \dots, S^{j-1})$，且其底层多格骨牌为（$P, Q$），那么我们知道 $c(S^j) = 0$，并且 $c(S^j) < c(S^{j-1}) + D(S^{j-1}; S^j)$（因为没有两个连续的 S^i 可以合并）。因此，$c(S^{j-1}) + D(S^{j-1}; S^j) > c(S^j) = 0$，也就是说，其中一个量非零。若$D(S^{j-1}; S^j) > 0$，那么 P 的最后一条向北线段必须位于路径最后一个点以西至少两个单位处。若 $c(S^{j-1}) > 0$，那么 P 最后一条垂直线段与底部路径之间的单元格数至少为 2。这说明无论哪种情况，P 都必须以两个向东步结束。□

现在我们应用映射 ι ： 定义 5.6 该映射将 ρ-相容的、带有标记回返的多格骨牌映射为带有标记回返的多标号（γ, k^n）-戴克路径，定义如下。

定义 6.15。 设 γ 为任意非空分拆。（γ, k^n）-戴克路径是一个多格骨牌（P, Q），其中 Q 是一个（γ, k^n）-阶梯路径，意即 $Q = EE^{a_1}N \cdots E^{a_n}N$满足

$$(a_1 - k, \dots, a_n - k) \in R(\gamma, 0^{n-\ell(\gamma)}).$$

记 $\mathrm{RLD}^\gamma_{k^n}$ 为带有标记回返的多标号（γ, k^n）-戴克路径集合，其标号由 $\mathbb{N}_+$ 中长度为 k的单词给出。回忆一下，若 $L \in \mathrm{RLD}^\gamma_{k^n}$ 的标号由w（L） =（w_1，.....，w_n）给出，且 i 是一个 r-下降，那么上路径的第 i^{th} 个向北步之后至少必须有 r 个向东步。

映射 ι 可以像之前一样应用于集合 $\mathrm{RP}^\gamma_{k^n}$，将路径 P 和Q 都按标签中非上升的数量平移。

命题 6.16. 对于任意 k 和非空分拆 γ，有

$$\widehat{\nabla}^k_* \widehat{\Delta}_{m_\gamma} \omega(p_n) = \sum_{L \in \mathrm{RLD}^\gamma_{k^n}} q^{\mathrm{area}(L)} \mathcal{X}^L \otimes e_{\eta(L)}$$

例如，前一个例子中的标记回返多格骨牌映射为图 γ, k^n 中带有标记回返的多重标号戴克路径。参见图 12。

6.3. **用于幂和应用的 Schur 函数展开**。 我们可以沿用上一节所述的相同步骤，但改用给出 Schur 展开的标签；这对应于取构成格词的标签。由此我们立即考虑以下多重标号的 (γ, k^n)-戴克路径子集。

定义 6.17。 设 γ 为一个非空分拆。带有标记回返的格多标号 (γ, k^n)-戴克路径的集合记作 $\mathrm{RLLD}^\gamma_{k^n}$，它是满足以下条件的元素 $(P, Q, w, m) \in \mathrm{RLD}^\gamma_{k^n}$ 的子集：

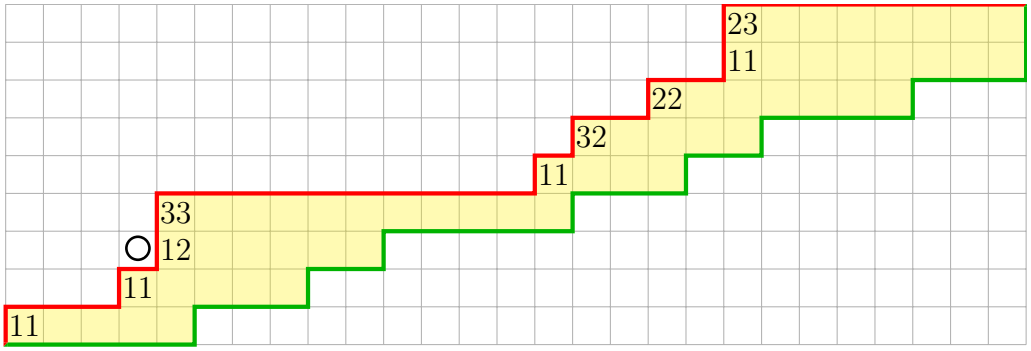


FIGURE 12. 带有标记回返的多标记（$322111, 2^9$）-戴克路径。

(1) 标号 $w_1, \ldots, w_n$ 是长度为 k的元组。(2) 字 $w_{\star i} = w_{1i} \cdots w_{ni}$ 是格字。我们将与此格字关联的分拆记作 $\lambda^i(w)$。(3) 上路径以两个东向步结束。(4) 在路径 (P, Q)的第一次回返之前存在一个标记行 m 。

我们有如下结果。

命题 6.18。 对于任意 k 和非空分拆 γ,

$$\widehat{\nabla}_*^k \widehat{\Delta}_{m_\gamma} \omega(p_n) = \sum_{L \in \mathrm{RLLD}_{kn}^{\gamma}} q^{\mathrm{area}(L)} e_{\eta(L)} \otimes s_{\lambda^1(w(L))} \otimes \cdots \otimes s_{\lambda^k(w(L))}.$$

6.4. **方形路径**。 Loehr 和 Warrington 的方形路径猜想给出了 ∇ 作用于幂和对称函数时的组合描述， [16],Emily Sergel 在她的学位论文中证明了该猜想 [19]。该猜想表明，我们可以将 $\nabla\omega(p_n)$ 写成对带标记的方形路径求和。现在我们定义这些结构，并证明当 $k = 0$ 和 $\gamma = 1^n$ 时，我们的结果与方形路径定理一致，其中 $t = 1$。

方形路径 $\pi \in \mathrm{SP}_n^E$ 是一条从 (0,0) 到 (n, n) 的格路径，由向北步和向东步组成，并以向东步结束。带标记方形路径的集合 LSP_n^E 通过在方形路径的向北步上放置正整数生成，使得各列从下到上读取时递增。带标记方形路径 $L \in \mathrm{LSP}$ 的单项式为 $\boldsymbol{x}^L = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots$ 其中 a_i 是标号 i 在 L中出现的次数。例如，图 13（左）中的方形路径具有单项式权重 $x_1 x_2^3 x_3 x_4^2 x_5$。

如果最低对角线上的向北步始于对角线 $y = x - d$，那么对角线 $y = x + a$ 上的一个向北步将贡献 $a + d$ 个面积单位。图 12 中的多格骨牌

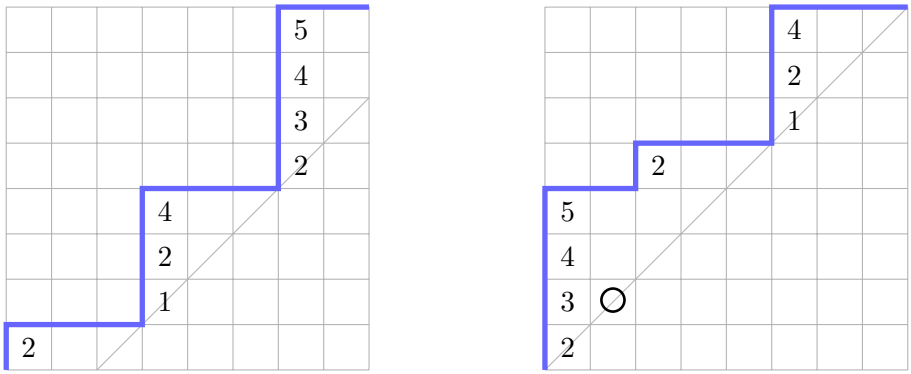


FIGURE 13. 带标签的方形路径（左）及其带标记的循环重排（右）

其面积将为 11。对角线逆序的数量以类似于戴克路径的方式计算。于是，方形路径定理可以表述为

$$\nabla\omega(p_n) = \sum_{L\in \mathrm{LSP}_n^E} q^{\mathrm{area}(L)} t^{\mathrm{dinv}(L)} \boldsymbol{x}^L.$$

将上图方形路径的向北步和向东步进行循环重排，使路径从最右侧、最低处的垂直线段开始，并在主对角线上的一个格子里画圈，以标记原方形路径的最后一列，便可得到一条带标记的戴克路径，如图 13（右）所示。这对应于在戴克路径回到主对角线之前标记一行。面积就是戴克路径所围成的面积。回想一下，

$$\nabla\omega(p_n)|_{t=1} = \widehat{\Delta}_{m_{1^n}}\omega(p_n) = \sum_{\mu\vdash n} e_\mu \sum_{L\in \mathrm{RP}_{\lambda,1^n}} t^{\mathrm{area}(L)}.$$

首先要注意，如果 $(P,\ Q) \in \mathrm{RP}_{\lambda,\ 1^n}$，那么底部的 Q 就完全确定了：路径必须只沿向北步和向东步，从 $(1,\ 0)$ 走到 $(n+1,\ n)$；并且每个向东步之后都必须接一个向北步（因为 $\lambda = 1^n$）。这意味着 Q 是这样一条路径：先走一步向东步，然后交替走“向东、向北、向东、向北”，依此类推。另一方面， P 不能接触 Q，因此直到最后一步，它都必须保持在直线 $y = x$上方或与之重合。因此， P 是一条戴克路径。多格骨牌的回返等于 P 作为戴克路径的回返，也就是 P 首次回到对角线 $y = x$的时刻。令 $t = 1$，便可使这两种解释对应起来。

我们的公式还有另一项应用：证明 Delta Square 猜想 [6] 在$t = 1$时成立。这里，有一个关于 $\Delta_{h_a}\Delta_{e_b}\omega(p_n)$的公式，以（部分）带标记的方形路径表示；我们的方法为这个对称函数建立了一种解释，当 $t = 1$时，该解释与猜想一致。

7. Further directions

7.1. 表示论。 在 $k = 2$ 这一特殊情形下，表达式 $\nabla_* e_n$ ap- 看起来在 Schur基中的系数为正。以下猜想已通过计算机验证至 $n \leq 9$。

猜想7.1。 表达式 $\nabla_* e_n$ 是$(s \otimes s)$-正的。

如果猜想7.1 成立，那么这表明表达式 $\nabla_* e_n$ 可能具有某种表示论意义；若能找到这样的解释，将会很有意思。对于$(s \otimes s)$-展开， $\nabla_* e_4$ 见表2。

μ	ν	$\mathbf{s}_\mu \otimes \mathbf{s}_\nu$的系数
(1, 1, 1, 1)	(1,1,1,1)	$q^6+q^5t+q^4t^2+q^3t^3+q^2t^4+qt^5+t^6+q^4t+q^3t^2+q^2t^3+qt^4+q^3t+q^2t^2+qt^3$
(2, 1, 1)	(1,1,1,1)	$q^5+q^4t+q^3t^2+q^2t^3+qt^4+t^5+q^4+2q^3t+2q^2t^2+2qt^3+t^4+q^3+2q^2t+2qt^2+t^3+qt$
(3, 1)	(1, 1, 1, 1)	$q^3+q^2t+qt^2+t^3+q^2+qt+t^2+q+t$
(4)	(1, 1, 1, 1)	1
(2, 2)	(1, 1, 1, 1)	$q^4+q^3t+q^2t^2+qt^3+t^4+q^2t+qt^2+q^2+qt+t^2$
(1,1,1,1)	(2,1,1)	$q^5+q^4t+q^3t^2+q^2t^3+qt^4+t^5+q^4+2q^3t+2q^2t^2+2qt^3+t^4+q^3+2q^2t+2qt^2+t^3+qt$
(2,1,1)	(2,1,1)	$q^4+q^3t+q^2t^2+qt^3+t^4+2q^3+3q^2t+3qt^2+2t^3+2q^2+3qt+2t^2+q+t$
(3, 1)	(2,1,1)	$q^2+qt+t^2+q+t+1$
(2, 2)	(2,1,1)	$q^3+q^2t+qt^2+t^3+q^2+2qt+t^2+q+t$
(1,1,1,1)	(2, 2)	$q^4+q^3t+q^2t^2+qt^3+t^4+q^2t+qt^2+q^2+qt+t^2$
(2,1,1)	(2, 2)	$q^3+q^2t+qt^2+t^3+q^2+2qt+t^2+q+t$
(3, 1)	(2, 2)	$q+t$
(2, 2)	(2, 2)	q^2+qt+t^2+1
(1, 1, 1, 1)	(3, 1)	$q^3+q^2t+qt^2+t^3+q^2+qt+t^2+q+t$
(2, 1, 1)	(3, 1)	$q^2+qt+t^2+q+t+1$
(2, 2)	(3, 1)	$q+t$
(1, 1, 1, 1)	(4)	1

Table 2. $\nabla_* e_4$ 的 $(s \otimes s)$-展开。

值得一提的是， $s^{\otimes k}$-正性在 $k > 2$ 时不成立。事实上， $s_{42} \otimes s_{42} \otimes s_{33}$ 在 $\nabla_*^2 e_6$ 中的系数不满足 (q,t)-正性，因为其 0 次项系数为 -1。当我们将 $t = 1$ 特化后，便可恢复 q-正性，这与定理 5.8 相符。

7.2. 单项式展开。 尽管我们在 t =1 的情形下，为算子的若干一般应用给出了明确的组合模型，但对于具有 $(q,\ t)$ 参数的一般设置，我们没有这样的组合描述。事实上，计算机实验表明了以下猜想，并已对 $k,\ n \leq 6$ 进行了验证。

猜想 7.2。 表达式 $\nabla_*^{k-1} e_n$ 是 $m^{\otimes k}$-正的。

这表明，多重标号的 t 戴克路径上可能存在一种 $kn \times n$ 统计量，可将定理 5.2 推广为以下恒等式。

问题 7.3。 求一个统计量 $\mathrm{tstat} : \mathrm{LD}_{k^n} \to \mathrm{LD}_{k^n}$，使得

$$\nabla_*^k e_n = \sum_{(\pi,w)\in \mathrm{LD}_{k^n}} q^{\mathrm{area}(\pi)} t^{\mathsf{tstat}(\pi,w)} \mathcal{X}^w. \tag{7.1}$$

或许可以利用 Carlsson 和 Mellit 的工作找到这类描述（参见 [3, 17]）。基于 Mellit 对的一个展开，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\mu \vdash n} \frac{\widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x}_0) \cdots \widetilde{\mathrm{H}}_\mu(\boldsymbol{x}_k)}{w_\mu}, \tag{7.2}$$

Carlsson 和 Mellit [3] 为 $\nabla^k e_n$ 的洗牌定理给出了一个新的证明。在他们的证明中，他们将 $\boldsymbol{x}_0$ 特化为 M，并取 $s_{1^n}(\boldsymbol{x}_i)$ 关于 $1 \le i \le k$ 的系数，从而将方程（7.2）化简为 $\sum_{n=0}^{\infty} \nabla^k e_n$。在这种特化下，他们证明该无穷级数涉及幂零自同态，因此可进一步化简为 $\boldsymbol{x}$ 中单项式构成的有限级数，并具有正确的正 q、t 权重。

他们的方法产生了一个有趣的副产品：统计量 dinv 自然而然地出现了，而无需事先了解洗牌猜想。进一步研究或许能完善他们的论证，从而得到 $\nabla_*^k e_n$ 的正单项式展开，并7.3 问题提供一个解。

Acknowledgements

A. Iraci 感谢授予比萨大学数学系的 MIUR 卓越院系项目，项目编号为 CUPI57G22000700001。
M. Romero 的部分研究工作得到了 NSF 数学科学博士后研究奖学金 DMS-1902731 的资助。

References

[1] Fran.cois Bergeron 和 Adriano M. Garsia， *Science fiction and Macdonald's polynomials*，《代数方法与 q ´ 1996 1999， 1 52 1726826 特殊函数》（蒙特利尔，魁北克，），第 –[2] 页。MR ˆFrancois Bergeron、Adriano M. Garsia、Mark Haiman 和 Glenn Tesler， *Identities and positivity conjectures for some remarkable operators in the theory of symmetric functions* **6**，《应用分析方法》（1999年），第3期，363–420页。谨以此文献念献给 Richard A. Askey，以庆祝他65岁生日，第三部分。MR1803316[3] Erik Carlsson 和 Anton Mellit， *A combinatorial formula for the nabla operator*，arXiv:2012.011627v1（2020年）。[4] Michele D'Adderio、Alessandro Iraci 和 Anna Vanden Wyngaerd， *Theta operators refined Delta* ，，，《高级数学》（1月），*conjectures and coinvariants* **376** 2021 107447（英文）。

[5] Michele D'Adderio、Alessandro Iraci、Yvan Le Borgne、Marino Romero 和 Anna Vanden Wyngaerd, *Tiered Trees and Theta Operators*, 《国际数学研究通知》2023年（202209），第24期，20748–20783页，网址：https://academic.oup.com/imrn/article-pdf/2023/24/20748/54919020/ rnac258.pdf。[6] Michele D'Adderio、Alessandro Iraci 和 Anna Vanden Wyngaerd, *The Delta Square Conjecture*, 《国际数学研究通知》2021年（201903），第1期，38–84页，网址：https://academic. oup.com/imrn/article-pdf/2021/1/38/36348455/rnz057.pdf。[7] Ömer Eğecioğlu 和 Jeffrey B. Remmel, *Brick tabloids and the connection matrices between bases of symmetric functions.* **34** 1991 1 3, 107 120 ,

《离散应用数学》（），第 - 期，– 页。[8] Adriano M. Garsia 和 Mark Haiman, *A remarkable q, t-Catalan sequence and q-Lagrange inversion*, 《代数组合学杂志》 **5** 1996 3, 191 244 1394305

（），第 – 期。MR Paul E. Gunnells、Emmanuel Letellier 和 Fernando Rodriguez Villegas, [9] *Torus orbits on homogeneous varieties and Kac polynomials of quivers* **290** 2018 1, 445 467 ，《数学杂志》（10月），

第 – 期（英文）。[10] James Haglund、Mark Haiman 和 Nicholas Loehr, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials* **18** 2005 3, 735 761 ，《美国数学会杂志》

（），第 – 期。MR[11] 2138143 James Haglund、Jeffrey B. Remmel 和 Andrew T. Wilson, *The Delta Conjecture*, 《美国数学会汇刊》

370 2018 6, 4029 4057 3811519（），第 – 期。MR Mark Haiman, ,

[12] *Hilbert schemes polygraphs and the Macdonald positivity conjecture*, 《美国数学会杂志》 **14** 2001 4, 941 1006 1839919

（），第 – 期。MR Angela Hicks 和 Marino Romero, [13] *Delta operators at $q = 1$ and polyominoes*, 《洛塔尔组合学研讨班》80B（2018年），12页。[14] Alessandro Iraci 和 Marino Romero, *Delta and theta operator expansions*, 《数学论坛：Sigma》12（2024年），e30。[15] Nicholas A. Loehr 和 Jeffrey B. Remmel, *Conjectured combinatorial models for the Hilbert series of generalized diagonal harmonics modules* **11** 2004 1, 68, 64 ，《电子组合学杂志》

（），研究论文第 期。MR2097334[16] Nicholas A. Loehr 和 Gregory S. Warrington, *Square q, t-lattice paths and $\nabla(p_n)$*, 《美国数学会汇刊》359（2007年），第2期，649–669页。MR2255191[17] Anton Mellit, *Poincaré polynomials of character varieties Macdonald polynomials and affine Springer* , , 《数学年刊》（） *fibers* 2 **192** 2020 1, 165 228

（），第 – 期。[18] Marino Romero, *Delta eigenoperators and e-positivities in the theory of Macdonald polynomials*, 博士论文，2019年。[19] Emily Sergel, *A proof of the Square Paths Conjecture*, 《组合理论杂志A辑》152（2017年），363–379页。MR3682738

Université du Québec à Montréal, LACIM

Email address: bergeron.francois@uqam.ca

University of Pennsylvania, Department of Mathematics

Email address: jhaglund@upenn.edu

Università di Pisa, Dipartimento di Matematica

Email address: alessandro.iraci@unipi.it

Universität Wien, Fakultät für Mathematik

Email address: marino.romero@univie.ac.at