arXiv:2303.00561v3 [math.DG] 5 Jun 2024

从自同构的局部行为确定嘉当几何的一种方法

JACOB W. ERICKSON

Abstract. 为了根据自同构的局部信息确定嘉当几何的整体性质，我们引入了一种嘉当几何构造，它能够捕捉给定自同构在特定元素附近的局部行为。我们将这一构造的结果称为由自同构从特定元素生成的蔓延，它由一种“泛性质”唯一刻画，使我们能够比较具有等价局部行为的自同构的嘉当几何。作为应用示例，我们证明，在连通流形上，唯一允许存在具有缩放各向同性的仿射变换的仿射结构，就是仿射空间上的标准仿射结构；此外，我们还说明如何构造非平坦的实射影结构，使其允许具有高阶不动点的非平凡自同构。

1. Introduction

对称性一旦存在，其行为往往能让我们深入了解某种特定的几何结构。例如，黎曼流形上的等距变换必然是适当作用的，因此，如果某个共形黎曼结构的自同构群作用不适当，那么它就不可能保持共形类中的底层黎曼度量。此外，Ferrand 和 Obata 的一条著名定理指出，在每个大于二的维数中，只有两种定号共形结构的自同构群作用不适当：共形球面，以及欧氏空间上的共形结构。

研究各种几何结构的对称性一般行为时，一个自然的框架是统一的嘉当几何理论。嘉当几何将克莱因的埃尔朗根纲领的思想拓展到大量不同类型的几何结构；这些结构都以特定的齐性几何为模型，因此，采用嘉当几何进行研究往往能够得到全面且具有统摄性的结果，其适用范围远远超出单一类型的几何

日期：2024年6月6日。部分经费由马里兰大学的Brin研究生奖学金资助。

结构。事实上，在 [7], Frances 认识到，Ferrand-Obata 定理是在某些温和的曲率限制下适用于所有实秩 1 的抛物嘉当几何的一个更一般结果的特例。即使我们只将范围限制在特定类型的几何结构上，Cartan 理论工具所提供的统摄性框架仍然非常适合探索自同构的行为。例如，近期 [11]和 [8]为解决洛伦兹李希纳罗维奇猜想所开展的工作，就是仔细研究与共形洛伦兹结构规范关联的嘉当几何的成果。

鉴于嘉当几何及其自同构在研究几何结构的对称性方面用途广泛、适用性强，了解给定的自同构能够告诉我们关于嘉当几何的多少信息，将会很有价值。为此，本文提出一种方法，借助自同构的局部几何行为，精确确定我们能够从中了解嘉当几何的哪些信息。

具体而言，我们为具有给定局部几何行为的自同构的嘉当几何，构造一种称为蔓延的“普适例子”。我们的主要结果定理 3.12 为这些对象提供了一种泛性质，表明每个具有自同构的嘉当几何都存在一个自然的几何映射指向其中，而该自同构具有源自蔓延的生成性局部行为。换言之，蔓延构造完整编码了自同构在几何的某个特定开集上的局部行为所提供的信息，并将其整理成一种实用的形式。

Acknowledgements

我们特别感谢 Karin Melnick 提供的若干有益建议并与我们交流，也感谢 Charles Frances，不仅因为他启发了本文的写作，还因为他包容了作者的热情。此外，我们还要感谢一位匿名审稿人，他审阅了本文的早期版本；尽管我们猜想他阅读其中大段内容时是被蒙着眼睛的，却仍设法提出了许多切实有用的改进意见。

2. Preliminaries

关于嘉当几何基础知识的标准参考文献是 [13] 和 [4]。本节仅对符号和术语作出说明；我们无意将其作为该主题的入门介绍。

定义 2.1. 对于李群 G 和闭子群 H，若G/H 是连通的，则称这一对 $(G,\ H)$ 为一个模型或模型几何。李群 G 称为模型群，而 H 称为各向同性或稳定子群。

例如，记 Aff(m) := $\mathbb{R}^m \rtimes \mathrm{GL}_m\mathbb{R}$ 为作用在 $\mathbb{R}^m$ 上的仿射变换李群，并将 $\mathrm{GL}_m\mathbb{R}$ 视为 Aff(m) 的闭子群，它固定原点 $0 \in \mathbb{R}^m$。于是，(Aff(m), $\mathrm{GL}_m\mathbb{R}$) 这一对是一个模型，对应于 $\mathrm{Aff}(m)/\mathrm{GL}_m\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^m$上的仿射几何。

顾名思义，这些模型几何充当各种嘉当几何的模型。

定义 2.2. 对于模型几何 (G, H)，在光滑流形 M 上的一个型嘉当几何 (G, H) 是一对 (G ω)，其中 G 是 M 上的主 H-丛，且 ω 是一个取值于 $\mathfrak{g}$ 的 1-形式，满足以下三个条件：

- 对于每个 g $\in$G，$\omega_g : T_g\mathrm{G} \to \mathfrak{g}$ 是一个线性同构。
- 对于每个 $h \in H$，$\mathrm{R}_h^*\omega = \mathrm{Ad}_{h^{-1}}\omega$，其中 $\mathrm{R}_h : \mathrm{g} \mapsto \mathrm{g}h$ 表示按 h 右平移。
- 对于每个 $Y \in \mathfrak{h}$，向量场 $\omega^{-1}(Y)$ 的流由 $\exp(t\omega^{-1}(Y)) = \mathrm{R}_{\exp(tY)}$ 给出，对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均成立。

为使记号更简洁，即使涉及多个主H丛，我们也始终用 q_H 表示主 H 丛的商映射；其含义应始终可由上下文明确。

模型几何（G， H）的几何结构编码为嘉当几何时，称为<soyle id='5'>类型为 （G， H）的克莱因几何。

定义 2.3。类型为 （G， H）的克莱因几何，是在 G/H 上、类型为（G， H）的嘉当几何，由二元组（G， ω_G）给出，其中 G 是模型群， ω_G 是 G 上的 Maurer-Cartan 形式，由 ω_G（X_g）:= $\mathrm{L}_{g^{-1}*}X_g \in T_eG = \mathfrak{g}$ 给出，其中 $X_g \in T_gG$。

为了比较同类型的不同嘉当几何，我们将使用几何映射。

定义 2.4。对于类型为（G_1， ω_1）和（G_2， ω_2）的两个嘉当几何，一个几何映射 φ：（G_1， ω_1）$\to$（G_2， ω_2）是一个 H-等变光滑映射 $\varphi : \mathrm{G}_1 \to \mathrm{G}_2$，满足 $\varphi^*\omega_2 = \omega_1$。

由 H-等变性可知，几何映射必定在上覆主 H-丛的底流形之间诱导相应的局部微分同胚。为方便起见，我们始终用与丛映射相同的符号表示底层基流形上的这一诱导映射，因此 $\varphi(q_H(\mathrm{g})) := q_H(\varphi(\mathrm{g}))$。

单射几何映射对我们尤为重要。当 φ 为单射时，我们称几何映射 $\varphi : (\mathrm{G}_1, \omega_1) \to (\mathrm{G}_2, \omega_2)$ 为几何嵌入；当 φ 为双射时，称其为(几何)同构。此外，从一个嘉当几何到其自身的几何同构称为(几何)自同构。

Cartan 几何的自同构往往相当刚性。给定一个 (G ω) 的自同构 α 和一个元素 e $\in$ G，当基流形连通时，像 α(e) 唯一确定 α。群

因此，所有 (G ω) 的自同构组成的群 Aut(G ω) 在 G 上自由作用；我们可以通过考察 Aut(G ω) 在 G 中各轨道所继承的光滑结构，在该群上诱导出李群结构。

比较不同嘉当几何的另一个工具是曲率，它有助于在局部将克莱因几何与同类型的其他嘉当几何区分开来。

定义 2.5。 嘉当几何 (G ω) 的曲率 是g值 2-形式 $\Omega := \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$。

嘉当几何的曲率在某点的一个邻域内处处为零，当且仅当它在该点的一个邻域内与克莱因几何几何等价。换言之，Ω 在 $\mathsf{e} \in \mathsf{G}$ 的某个邻域上为零，当且仅当存在一个几何嵌入

$$\varphi : (q_H^{-1}(U), \omega_G) \hookrightarrow (\mathcal{G}, \omega)$$

从 H不变邻域 q_H^{-1} (U)（其中 $e \in G$ ）到 G，使得φ(e) =e。

最后，本文中用于处理嘉当几何的主要工具是发展。

定义 2.6. 设 $[0,1] \to$ G 是一个类型为 (G, H) 的嘉当几何（G ω）中的一条（分段光滑的）[1] 路径 γ：其发展是唯一一条路径 γ_G： $[0,1] \to G$，取值于 G，满足 $\gamma_G(0) = e$ 且 $\omega(\dot{\gamma}) = \omega_G(\dot{\gamma}_G)$；其中 ω_G 是 G上的 Maurer-Cartan 形式。

这里的想法是，切向量 $\dot{\gamma}$ 告诉我们在每个时刻如何沿着 γ 移动，而 γ_G 则是我们从单位元出发，在模型群 G中尝试遵循相同指令所得到的路径。关键在于，由此可知，如果嘉当几何中有两条发展相同且起点相同的路径，那么它们必定是同一条路径。

3. Sprawls

我们希望构造这样的嘉当几何：它们由某个自同构的局部行为以“尽可能自由”的方式生成。我们称这类几何为扩展体（sprawls）；这个术语既让人联想到某种尽可能随意延展的事物，也与张成（span）一词相似，而后者在向量空间中扮演着大致相近的角色。

为有效阐释其中涉及的思想，我们首先介绍该构造的设置，并描述一种实现目标的朴素方法。尽管这种朴素方法最终并不可行，但它为更为复杂的蔓延定义提供了动机，而该定义恰好实现了我们的目标。在给出适当的定义并验证其合理性后，我们将最终陈述并证明本文的关键结果——定理 3.12，该定理给出了一个

[1]在本文中，“路径”始终指分段光滑路径。

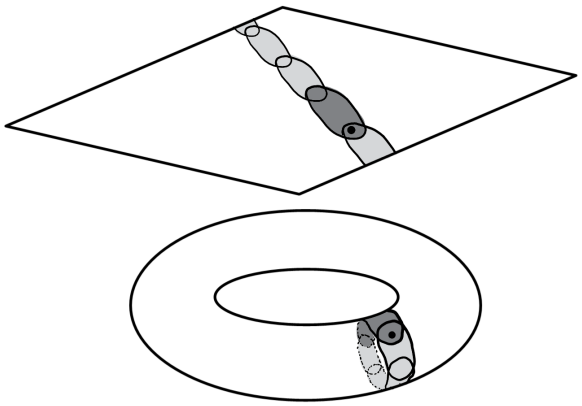

FIGURE 1. 区域 U （以深灰色突出显示）在环面上经平移 α 的迭代后会回到自身，但将这种情形提升到平面上后，可以得到一个局部行为完全相同的情形： U 离开后永远不会回到自身

关于扩展体的泛性质，使我们能够将具有自同构且局部行为相似的嘉当几何进行比较。

3.1. 设定与一种朴素的方法。 在本节中，设 (G ω) 是连通光滑流形 M 上的型嘉当几何 (G, H)，其中有一个特定元素 e $\in$G，以及一个自同构 $\alpha \in$ Aut(G ω)。此外，我们固定一个连通开子集 U ，它包含在M 中，且同时包含 q_H(e) 和 $q_H(\alpha$(e))；这使得 U 能够捕捉 α 在 e 附近的局部行为，也就是说，足够小的 q_H(e) 开邻域会被 α映回 U 中。

由于 α 是一个自同构， q_H^{-1} (U) 在 α作用下的所有迭代在几何上都等价，但在 G 内部，它们可能以不必要的方式粘合在一起，而这些粘合并非保留一个在 e 附近表现得如同 α 的自同构所必需。例如，考虑 (G ω) 是欧几里得环面上的黎曼几何、 α 是平移，且 U 是点 q_H(e) 的一个小邻域的情形：虽然 α 的连续迭代会将 U 推回自身，如图1所示，但提升到欧几里得平面后可以看到，存在一个自同构，其局部行为与 α相同，却不会将（几何上相同的副本） U 推回自身。

我们的目标本质上是构造一种几何，使其由 α 的局部行为“尽可能自由地”生成。换言之，我们希望通过在 α 作用下对 U 进行迭代来构造一种几何，并尽可能少地将这些迭代结果粘合在一起，同时仍保留一个在指定点 e 附近具有与 α 相同局部行为的自同构。

为了明确指定这些迭代，同时避免在 G 中隐式地将它们粘合起来，我们为每个 $i \in \mathbb{Z}$ 定义一个重新标记映射

$$\tilde{\alpha}^i : q_H^{-1}(U) \to \tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U)),$$

其中，$\tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 是 $q_H^{-1}(U)$ 的一个微分同胚副本，其中所有点 g 均被改写为 $\tilde{\alpha}^i(\mathsf{g})$。在$\tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 上有一个自然的右 H-作用：对每个 $h \in H$，$\tilde{\alpha}^i(\mathsf{g})h := \tilde{\alpha}^i(\mathsf{g}h)$；这使得$\tilde{\alpha}^i$ 成为一个 H-等变映射，因此也是主H-丛的一个同构。

有了这些记号，我们就能更具体地说明要做什么。我们将取不交并 $\bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$，并通过等价关系 $\sim$ 进行一些最小限度的粘合，从而得到一个新的嘉当几何，使得 $\tilde{\alpha}$：$\tilde{\alpha}^i(\mathsf{g}) \mapsto \tilde{\alpha}^{i+1}(\mathsf{g})$ 是一个自同构，且其局部行为与 α 在 e 附近相同。将 $\tilde{\alpha}^0(q_H^{-1}(U))$ 与 $q_H^{-1}(U)$ 认作同一对象，这样我们便可将 $\tilde{\alpha}^0(\mathsf{e}) \in \tilde{\alpha}^0(q_H^{-1}(U))$ 视为 $\mathsf{e} \in q_H^{-1}(U)$；这相当于要求 $\tilde{\alpha}(\mathsf{e}) = \alpha(\mathsf{e})$，因为连通基流形上的 Cartan 几何的自同构由其在单个元素上的像唯一确定。

如果 $\tilde{\alpha}^{i+1}(\mathsf{e}) = \tilde{\alpha}^i(\tilde{\alpha}(\mathsf{e})) = \tilde{\alpha}^i(\alpha(\mathsf{e}))$，那么对于每一条以 $\alpha(\mathsf{e})$ 为起点的（分段光滑）路径 $\gamma\colon [0,1] \to q_H^{-1}(U \cap \alpha(U))$，对于所有 $t \in [0,1]$，我们也必须有 $\tilde{\alpha}^{i+1}(\alpha^{-1}(\gamma(t))) = \tilde{\alpha}^i(\gamma(t))$，因为 $\tilde{\alpha}^{i+1}(\alpha^{-1}(\gamma))$ 和 $\tilde{\alpha}^i(\gamma)$ 是具有相同发展和起点的路径。换言之，无论这种新的嘉当几何最终是什么，相邻的迭代 $\tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 和 $\tilde{\alpha}^{i+1}(q_H^{-1}(U))$ 都必须通过如下方式粘合起来：只要 $q_H(\mathsf{g})$ 位于包含 $\alpha(q_H(\mathsf{e}))$ 的 $U \cap \alpha(U)$ 连通分支内，就将 $\tilde{\alpha}^i(\mathsf{g})$ 与 $\tilde{\alpha}^{i+1}(\alpha^{-1}(\mathsf{g}))$ 等同。鉴于此，我们很容易设想，在 $\bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 上实现这些必要的相邻迭代间等同关系所需的最小等价关系也足以解决问题。事实上，在上面的环面例子中，我们可以看到，这种粘合恰好给出了正确答案。

遗憾的是，这种天真的粘合一般行不通。为说明这一点，考虑类型为 (I(2),O(2)) 的克莱因几何 $(\mathrm{I}(2)^{\omega_{1(2)}})$ over$\mathbb{R}^2$，它对应于欧几里得平面。在这一几何中，我们选取一个无限阶旋转 α，它固定 0；再选取一个开集U，该开集由一个以 0 为中心的小开球与平面上的一个开扇区的并组成，且该开扇区与其在 α 下的像不相交，如图 2 所示。单位元 (0,1) 是我们选定的特定元素，它属于 $q^{-1}{}_{\mathrm{O}(2)}(U)$；$\alpha(0,1)$ 也属于该集合，因为 α 固定 0。按照上述天真的粘合，迭代 $\tilde{\alpha}^i(q^{-1}{}_{\mathrm{O}(2)}(U))$ 在 0 附近的小开球上全都重合，但在其他任何地方都不重合。只要 $U \cap \alpha^i(U)$ 有点位于这个小开球之外，就会出现问题：如果 $x \in U \cap \alpha^i(U)$ 位于开球的边界上，那么 $\tilde{\alpha}^i(\alpha^{-i}(x))$ 的每个邻域都必须与 $\tilde{\alpha}^0(x) \cong x$ 在开球内的每个邻域相交；因此，由于按照这种天真的粘合，$\tilde{\alpha}^i(\alpha^{-i}(x))$ 并未与 x 等同，所得空间甚至不是豪斯多夫的。

幸运的是，我们可以通过一些稍微复杂的修改挽救这一想法。考虑一条路径 $\gamma\colon [0,1] \to U \cap \alpha^i(U)$，它从开球外开始

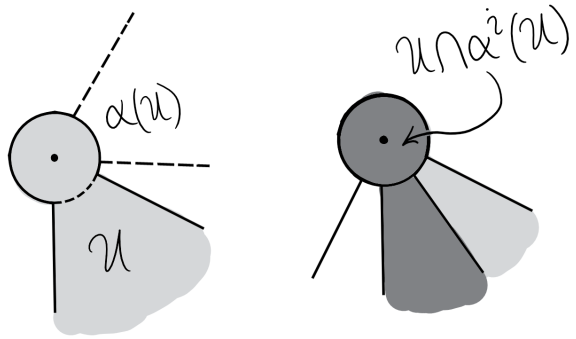

FIGURE 2. 由一个开球和一个开扇区的并集构成的区域 U （以较浅的灰色突出显示），该开扇区与其在旋转 α 下的像不相交；同时还展示了它与 α 下的一次迭代的交集（以较深的灰色突出显示），其中重叠部分逃出了开球

并在开球内结束。于是，我们分别在 $\tilde{\alpha}^0(U)$ 和 $\tilde{\alpha}^i(U)$ 中得到相应的路径$\tilde{\alpha}^0(\gamma) \cong \gamma$ 和 $\tilde{\alpha}^i(\alpha^{-i}(\gamma))$，并且可以将它们提升为路径 $\hat{}\gamma_0$，位于 $\tilde{\alpha}^0(q^{-1}{}_{\circ(2)}(U))$ 中，以及路径 $\hat{}\gamma_1$，位于 $\tilde{\alpha}^i(q^{-1}{}_{\circ(2)}(U))$ 中，它们具有相同的发展和端点。特别是，如果新的嘉当几何存在，那么 $\hat{}\gamma_0$ 和 $\hat{}\gamma_1$ 必定在其中重合，因此，$\hat{}\gamma_0 \star \hat{}\overline{\gamma_1}$（即 $\hat{}\gamma_0$ 与 $\hat{}\gamma_1$ 的逆路径的拼接）是一条在自身上“折返”的环路。

因此，新的策略是：只要我们能找到一条从 $\alpha^{i_1}(\mathsf{g}_1)$ 出发的路径，该路径仅在朴素粘合下被识别的点处穿越各次迭代之间，并且在自身上“回溯”，最终到达 $\alpha^{i_2}(\mathsf{g}_2)$，我们就将元素 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1)$ 和 $\tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2)$ 识别起来。在下一小节中，我们将把对朴素粘合的这一修正形式化，并利用它来定义蔓延。

3.2. 蔓延的定义。首先，我们给出一种描述路径的方法，使其仅在朴素粘合下被识别的点处穿越各次迭代之间。

定义3.1。对于 γ，一个 (U, α, e)-增量[2] 是 $[0,1]$ 的一个有限划分 $0 = t_0 < \cdots < t_\ell = 1$，以及一个有限整数序列 $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \mathbb{Z}$，满足：对每个 $0 \le j < \ell$，$|k_j - k_{j+1}| = 1$和 $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subseteq \alpha^{k_j}(U)$，以及对每个 $0 \le j < \ell - 1$，$\gamma(t_{j+1})$ 都属于 $\alpha^{k_j}(U) \cap \alpha^{k_{j+1}}(U)$ 中包含$q_H(\alpha^{\max(k_j,k_{j+1})}(\mathsf{e}))$的连通分支。整数 k_0 和 $k_{\ell-1}$ 分别称为初始标签和终止标签。

[2]如果上下文足以确定 U、α 和 e，我们将始终省略对它们的提及。例如，我们通常只称其为一个增量，而不称为一个 (U, α, e)-增量。

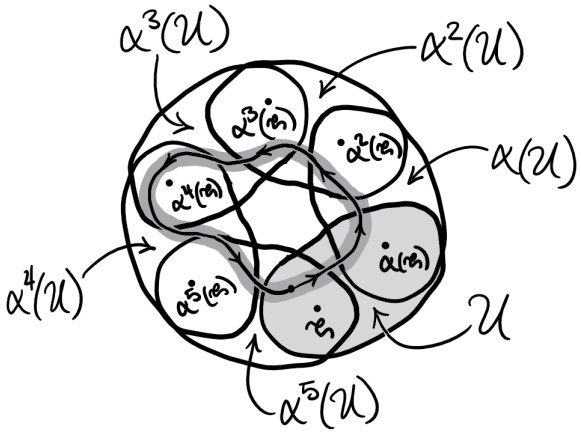

FIGURE 3. 路径 γ在流形 M中以深灰色突出显示，区域 U以浅灰色突出显示，以及它在自同构 α下的迭代

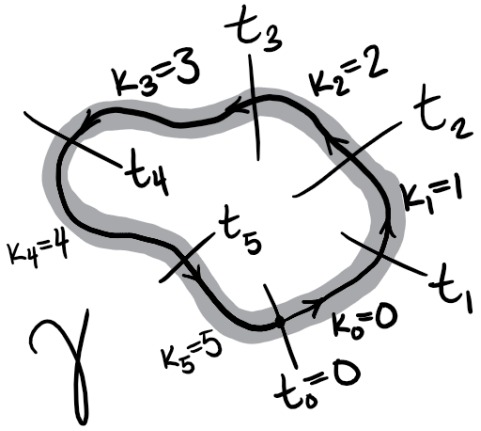

FIGURE 4. 路径 γ 的增量，如图3所示

定义3.2。 我们称一条路径 $\gamma\colon [0,1] \to M$是从 i_1到 i_2的 (U, α, e)-增量化，当且仅当存在一个针对 γ的 (U, α, e)-增量，其初始标签为 i_1，终止标签为 i_2。

路径 γ 的增量，其基本思路是将其分解为线段 $\gamma([t_j, t_{j+1}])$，然后为每条线段标记一个特定的整数 k_j，使得 $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subseteq \alpha^{k_j}(U)$。此外，要求相邻线段之间的标记只能递增或递减 1，且交集只能发生在朴素粘合过程中必须识别的位置。我们试图在图3和图4中说明这一概念。

回忆一下，以点 $q_H(\mathsf{g}) \in M$ 为基点的零伦是一个映射$c\colon [0,1]^2 \to M$，定义为 $(s,\ t) \mapsto c_s(t)$，满足

$$c_s(0) = c_s(1) = c_1(s) = q_H(\mathsf{g})$$

对所有 $s \in [0,1]$ 都成立。我们将需要使用一种特定类型的同伦，称为薄的同伦。

定义3.3. 称零伦 $c\colon\ [0,1]^2 \to M$ 为薄的，当且仅当 $c([0,1]^2) = c_0([0,1])$。因此，环路 $\gamma\colon\ [0,1] \to M$ 是薄零伦环路，当且仅当存在一个基于 $\gamma(0) = \gamma(1)$的薄零伦 c，使得 $c_0 = \gamma$。

从环路 $\gamma\colon\ [0,1] \to M$ 到以 $\gamma(0) = \gamma(1)$为基点的常值环路的薄零伦，会将 γ 变形为一点，同时始终保持在其自身的像内。薄零伦环路的典型例子是将一条路径与其逆路径拼接，所得环路便会在自身上“回溯”。薄同伦在许多情境中具有几何上的用途，因为薄同伦的环路总是具有相同的全纯（例如，参见 [1]）。特别是，虽然在本文当前版本中，除附录外我们并未明确利用这一点，但值得注意的是，薄零伦环路总是具有平凡的全纯。

有了增量操作和薄零伦之后，我们现在可以定义蔓延等价。

定义3.4。不交并 $\bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\alpha}^i(U)$ 中的两点 $\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1))$ 和 $\tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2))$ 在基底意义下蔓延等价，当且仅当 $\alpha^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1)) = \alpha^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2))$，且存在一个薄零伦环路 $\gamma\colon\ [0,1] \to M$ 以 $\gamma(0)$ 为基点，$= q_H(\alpha^{i_1}(\mathsf{g}_1)) = q_H(\alpha^{i_2}(\mathsf{g}_2)) = \gamma(1)$，该环路由 i_1 到 i_2 增量得到。

定义3.5。不交并$\bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 中的两个元素 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1)$ 和 $\tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2)$ 在丛意义下蔓延等价，当且仅当 $\alpha^{i_1}(\mathsf{g}_1) = \alpha^{i_2}(\mathsf{g}_2)$，并且 $\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1))$ 在基底意义下与 $\tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2))$ 蔓延等价。

自然，这些概念彼此相关：若在丛意义下，$\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1)$ 与 $\tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2)$ 蔓延等价，则在基底意义下，$\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1))$ 与 $\tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2))$ 蔓延等价。换言之，丛意义下的蔓延等价会导出基底意义下的蔓延等价；基于这一点，我们将用同一个符号 $\sim$表示二者。当然，我们首先应验证它们都是等价关系。

命题 3.6。两种蔓延等价概念都是等价关系。

证明。我们先从基底意义下的蔓延等价开始，证明该关系具有自反性、对称性和传递性。之后，丛版本的证明便可轻松得出。

对于每个 $i \in \mathbb{Z}$和 $q_H(\mathsf{g}) \in U$，取 γ为以 $\alpha^i(q_H(\mathsf{g}))$ 为起点的常值路径，取我们的划分为平凡分割 $0 = t_0 < t_1 = 1$，而 $i = k_0 = i$ 表明 $\tilde{\alpha}^i(q_H(\mathsf{g})) \sim \tilde{\alpha}^i(q_H(\mathsf{g}))$。

根据定义，若 $\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1)) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2))$，则必定存在一个薄零伦环路 $\gamma\colon [0,1] \to M$，其基点为

$$\gamma(0) = q_H(\alpha^{i_1}(\mathscr{g}_1)) = q_H(\alpha^{i_2}(\mathscr{g}_2)) = \gamma(1)$$

其增量由一个划分 $0 = t_0 < \cdots < t_\ell = 1$ 和一列整数 $i_1 = k_0$、…、$k_{\ell-1} = i_2 \in \mathbb{Z}$ 给出。考虑由 $t \mapsto \gamma(1-t)$ 定义的反向环 $\bar{\gamma}\colon [0,1] \to M$；令 $\bar{t}_j = 1 - t_{\ell-j}$ 和 $k_j = k_{\ell-1-j}$，对每个 j，我们得到从 i_2 到 i_1 的逆路径增量，对应于薄零伦环路 $\bar{\gamma}$，因此 $\tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2)) \sim \tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1))$。

类似地，若我们有蔓延等价 $\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1)) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2))$ 和 $\tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2)) \sim \tilde{\alpha}^{i_3}(q_H(\mathsf{g}_3))$，那么就存在相应的薄零伦环路 γ 和 γ'，以及分别由 $0 = t_0 < \cdots < t_\ell = 1$ 和 $i_1 = k_0$、…、$k_{\ell-1} = i_2 \in \mathbb{Z}$ 给出的增量操作（对应于 γ），以及由 $0 = t'_0 < \cdots < t'_{\ell'} = 1$ 和 $i_2 = k'_0$、…、$k'_{\ell'-1} = i_3 \in \mathbb{Z}$ 给出的增量操作（对应于 γ'）。为证明 $\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1)) \sim \tilde{\alpha}^{i_3}(q_H(\mathsf{g}_3))$，考虑拼接环路 $\gamma \star \gamma'$。它仍然是薄零伦的，并令

$$\tau_j = \begin{cases} \frac{t_j}{2} & \text{if } j < \ell, \\ \frac{1+t'_{j-\ell}}{2} & \text{if } j \geq \ell \end{cases}$$

and

$$r_j = \begin{cases} k_j & \text{if } j < \ell, \\ k'_{j-\ell+1} & \text{if } j \geq \ell \end{cases}$$

对于每个 j，我们都会得到由划分 $0 = \tau_0 < \cdots < \tau_{\ell+\ell'} = 1$ 和标签 $i_1 = r_0$，…，$r_{\ell+\ell'-1} = i_3 \in \mathbb{Z}$ 组成的拼接 $\gamma \star \gamma'$ 的一个增量。特别地，$\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1)) \sim \tilde{\alpha}^{i_3}(q_H(\mathsf{g}_3))$。

因此，基底意义下的蔓延等价是一种等价关系，而丛版本的证明基本上由此得出。对于每个 $i \in \mathbb{Z}$ 和 $\mathsf{g} \in q_H^{-1}(U)$，根据上述内容，$\alpha^i(\mathsf{g}) = \alpha^i(\mathsf{g})$，且 $\tilde{\alpha}^i(q_H(\mathsf{g})) \sim \tilde{\alpha}^i(q_H(\mathsf{g}))$，所以 $\tilde{\alpha}^i(\mathsf{g}) \sim \tilde{\alpha}^i(\mathsf{g})$。同样地，$\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2)$ 当且仅当 $\alpha^{i_1}(\mathsf{g}_1) = \alpha^{i_2}(\mathsf{g}_2)$ 且 $\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1)) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2))$，因此 $\alpha^{i_2}(\mathsf{g}_2) = \alpha^{i_1}(\mathsf{g}_1)$；又由于基底意义下的蔓延等价具有对称性，$\tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2)) \sim \tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1))$，所以 $\tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2) \sim \tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1)$。最后，如果我们有 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2)$ 和 $\tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2) \sim \tilde{\alpha}^{i_3}(\mathsf{g}_3)$，那么

$$\alpha^{i_1}(\mathscr{g}_1) = \alpha^{i_2}(\mathscr{g}_2) = \alpha^{i_3}(\mathscr{g}_3)$$

and

$$\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathscr{g}_1)) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathscr{g}_2)) \sim \tilde{\alpha}^{i_3}(q_H(\mathscr{g}_3)),$$

因此，根据基础版本的传递性，我们得到 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1) \sim \tilde{\alpha}^{i_3}(\mathsf{g}_3)$。 □

蔓延等价正是本节开头提到的修正的最小粘合；正如我们很快将看到的，它使我们能够将副本 $\tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 粘合在一起，形成一个新的主 H-丛 F，使得 $\tilde{\alpha}(\mathsf{e})$ 与 $\alpha(\mathsf{e})$ 重合。

命题 3.7。商空间

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}(q_H^{-1}(U), \alpha, \mathscr{e}) := \left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U)) \right) \Big/ \sim$$

具有一个（光滑）主 H-丛结构，其底空间为商空间

$$q_H(\mathscr{F}) = q_H(\mathscr{F})(U, \alpha, \mathscr{e}) := \left(\bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\alpha}^i(U) \right) \Big/ \sim ,$$

该商空间是一个光滑流形。

证明。对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，$\tilde{\alpha}^i(\mathsf{g}_1) \sim \tilde{\alpha}^i(\mathsf{g}_2)$ 当且仅当 $\mathsf{g}_1 = \mathsf{g}_2$。这意味着，按 $\sim$ 取商的商映射限制在每个$\tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$上时是单射。此外，开子集 $V \subseteq \bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 会映射到商空间的开子集：若 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1) \in V$ 且 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2)$，其中 γ 是从 i_1 到 i_2 的相应薄零伦环路增量，那么对于$\alpha^{i_1}(q_H^{-1}(U))$中的每条小路径 δ，都有 $\cap\, \alpha^{i_2}(q_H^{-1}(U))$，使得 $\delta(0) = \alpha^{i_1}(\mathsf{g}_1) = \alpha^{i_2}(\mathsf{g}_2)$ 且 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\alpha^{-i_1}(\delta(1))) \in V$；我们可以取由 $q_H(\delta)$ 的逆路径与 γ 的拼接 $q_H(\delta) \star \gamma \star q_H(\delta)$，再结合$q_H(\delta)$，得到一条从 i_1 到 i_2的薄零伦环路增量。这说明 $\tilde{\alpha}^{i_2}(\alpha^{-i_2}(\delta(1)))$ 与$\tilde{\alpha}^{i_1}(\alpha^{-i_1}(\delta(1)))$中的某个元素 Sprawl 等价，$\in V$，因此 V 中元素的蔓延等价类之并是开集。于是，从 $\bigsqcup_{i\in\mathbb{Z}} \tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 到 F 的商映射限制在每个 $\tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 上都是一个嵌入，因此将每个 $\tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 与其在 F 中的像视为同一对象是合理的。同理，每个 $\tilde{\alpha}^i(U)$ 都自然嵌入到 $q_H(\mathsf{F})$ 中，因此我们可以将每个 $\tilde{\alpha}^i(U)$ 与其在商空间 $q_H(\mathsf{F})$ 中的像视为同一对象。

对于每个元素 $h \in H$，当且仅当 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1)h \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2)h$ 时，$\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2)$；并且，当且仅当 h 是单位元时，$\tilde{\alpha}^i(\mathsf{g}) \sim \tilde{\alpha}^i(\mathsf{g})h$，否则 $\alpha^i(\mathsf{g}) \neq \alpha^i(\mathsf{g})h$。因此，F 继承了一个自由的右 H-作用，该作用与 H 在每个 $\tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 上的光滑自由右作用一致。由于 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2)$ 蕴含 $\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1)) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2))$，我们得到一个自然映射 $q_H\colon \mathsf{F} \to q_H(\mathsf{F})$，其定义为 $q_H(\tilde{\alpha}^i(\mathsf{g})) := \tilde{\alpha}^i(q_H(\mathsf{g}))$。根据定义，对每个 i，该映射与丛映射 $q_H\colon \tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U)) \to \tilde{\alpha}^i(U)$ 一致，因此 F 是 $q_H(\mathsf{F})$ 上的一个主 H-丛。

剩下只需证明 $q_H(\mathsf{F})$ 是一个光滑流形。注意，U自然继承了来自 M 的光滑结构，而根据定义，$q_H(\mathsf{F})$ 是 U 的嵌入副本之并。此外，$\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathsf{g}_1) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(\mathsf{g}_2)$ 蕴含 $\alpha^{i_1}(\mathsf{g}_1) = \alpha^{i_2}(\mathsf{g}_2)$，因此 $\mathsf{g}_2 = \alpha^{i_1-i_2}(\mathsf{g}_1)$，所以 U 的嵌入副本通过微分同胚 α的迭代沿开集粘合在 $q_H(\mathsf{F})$ 中。特别地，我们只需证明 $q_H(\mathsf{F})$ 是豪斯多夫的，即可验证它具有光滑流形结构。

为此，假设 $\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathsf{g}_1))$ 和 $\tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathsf{g}_2))$ 是商空间 $q_H(\mathsf{F})$ 中的不同点。存在两种可能情况：要么

$\alpha^{i_1}(q_H(\mathrm{g}_1)) \neq \alpha^{i_2}(q_H(\mathrm{g}_2))$，要么 $\alpha^{i_1}(q_H(\mathrm{g}_1)) = \alpha^{i_2}(q_H(\mathrm{g}_2))$，但不存在从 i_1 增加到 i_2 的相应薄零伦环路。在第一种情况下，由于 M 是豪斯多夫的，存在互不相交的开邻域 $V_1 \subseteq \alpha^{i_1}(U)$ 和 $V_2 \subseteq \alpha^{i_2}(U)$，分别包含 $\alpha^{i_1}(q_H(\mathrm{g}_1))$ 和 $\alpha^{i_2}(q_H(\mathrm{g}_2))$；因此，$\tilde{\alpha}^{i_1}(\alpha^{-i_1}(V_1))$ 和 $\tilde{\alpha}^{i_2}(\alpha^{-i_2}(V_2))$ 分别是 $\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathrm{g}_1))$ 和 $\tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathrm{g}_2))$ 的互不相交的开邻域。在第二种情况下，令 V 为交集 $\alpha^{i_1}(U) \cap \alpha^{i_2}(U)$ 中连接点 $\alpha^{i_1}(q_H(\mathrm{g}_1))$ 与 $= \alpha^{i_2}(q_H(\mathrm{g}_2))$ 的路径连通分支，从而 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\alpha^{-i_1}(V))$ 是 $\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathrm{g}_1))$ 的开邻域，而 $\tilde{\alpha}^{i_2}(\alpha^{-i_2}(V))$ 是 $\tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathrm{g}_2))$ 的开邻域。这两个邻域必定不相交：如果它们的交集内存在一点 $q_H(\mathrm{f})$，那么就会存在一条路径

$$\zeta : [0,1] \to V \subseteq \alpha^{i_1}(U) \cap \alpha^{i_2}(U)$$

从 $\alpha^{i_1}(q_H(\mathrm{g}_1)) = (\alpha^{i_1} \circ (\tilde{\alpha}^{i_1})^{-1})(\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathrm{g}_1)))$ 到 $(\alpha^{i_1} \circ (\tilde{\alpha}^{i_1})^{-1})(q_H(\mathrm{f}))$，因此，如果 γ 是基于

$$(\alpha^{i_1} \circ (\tilde{\alpha}^{i_1})^{-1})(q_H(\mathscr{f})) = (\alpha^{i_2} \circ (\tilde{\alpha}^{i_2})^{-1})(q_H(\mathscr{f}))$$

从 i_1 增加到 i_2，这对于点 $q_H(\mathrm{f})$ 属于 $\tilde{\alpha}^{i_1}(U)$ 与 $\tilde{\alpha}^{i_2}(U)$ 的交集是必需的，那么由 $\bar{} \, \zeta \star \gamma \star \zeta$ 给出的拼接将是一个以点 $\alpha^{i_1}(q_H(\mathrm{g}_1)) = \alpha^{i_2}(q_H(\mathrm{g}_2))$ 为基点、从 i_1 增加到 i_2 的薄零伦环路。这将导致矛盾，因为根据假设，$\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H(\mathrm{g}_1))$ 与 $\tilde{\alpha}^{i_2}(q_H(\mathrm{g}_2))$ 不同，所以 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\alpha^{-i_1}(V))$ 与 $\tilde{\alpha}^{i_2}(\alpha^{-i_2}(V))$ 必须不相交。因此，$q_H(\mathrm{F})$ 是豪斯多夫的。□

为了赋予这个新的主 H-丛嘉当几何的结构，我们将使用一个从 F 到 G 的自然映射，将 G 上的 Cartan 联络拉回到 F。这个映射称为蔓延映射，它正是通过将嵌入 F 中的每个 $\tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 与 G 中对应的 $\alpha^i(q_H^{-1}(U))$ 相识别而得到的映射。

定义 3.8。由 $\tilde{\alpha}^i(\mathrm{g}) \mapsto \alpha^i(\mathrm{g})$ 给出的映射 $\sigma : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ 称为 (G, ω) 的蔓延映射。

在继续定义蔓延之前，我们先对蔓延映射作两点观察。首先，σ 定义良好：只有当 $\sigma(\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathrm{g}_1)) = \alpha^{i_1}(\mathrm{g}_1) = \alpha^{i_2}(\mathrm{g}_2) = \sigma(\tilde{\alpha}^{i_2}(\mathrm{g}_2))$ 时，$\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathrm{g}_1) \sim \tilde{\alpha}^{i_2}(\mathrm{g}_2)$ 才成立，因此蔓延等价元素在 σ 下具有相同的像。其次，σ 是一个 H-等变局部微分同胚，因为对于每个 $i \in \mathbb{Z}$，它都与 $\tilde{\alpha}^i(q_H^{-1}(U))$ 和 $\alpha^i(q_H^{-1}(U))$ 之间自然的 H- 等变微分同胚重合。

这样，我们终于可以定义蔓延了。

定义 3.9. 由 α 从 e 生成的 $(q_H^{-1}(U), \omega)$的蔓延是一个定义在 $q_H(\mathrm{F})$ 上、类型为 (G, H) 的嘉当几何 $(\mathrm{F}, \sigma^*\omega)$，其中 σ 是蔓延映射。

至关重要的是，请注意，我们以这样的方式构造了 (F $\sigma^*\omega$)，使得映射

$$\tilde{\alpha} : \mathscr{F} \to \mathscr{F},\ \tilde{\alpha}^i(\mathscr{g}) \mapsto \tilde{\alpha}^{i+1}(\mathscr{g})$$

变为一个自同构。事实上， σ 自然满足 $\sigma \circ \tilde{\alpha} = \alpha \circ \sigma$，因此

$$\tilde{\alpha}^*(\sigma^*\omega) = (\sigma \circ \tilde{\alpha})^*\omega = (\alpha \circ \sigma)^*\omega = \sigma^*(\alpha^*\omega) = \sigma^*\omega.$$

此外，在 $\tilde{\alpha}^0(q_H^{-1}(U))$ 与 $q_H^{-1}(U)$ 之间的识别下， $\tilde{\alpha}$ 和 α 必须在特定元素 e 上重合，因此 $\tilde{\alpha}$ 在 e 附近的 $q_H^{-1}(U)$ 上与 α 具有相同的局部行为。

3.3. 扩展体的泛性质。 我们希望将扩展体（F $\sigma^*\omega$）上的自同构 $\tilde{\alpha}$ 视为一种普适例子：它是一个在 e 附近与 α 具有相同行为的自同构。定理 3.12 将精确定义我们所说的“普适例子”，但首先，我们需要两个引理。

首先，我们需要证明，增量路径到 G 的提升可以通过蔓延映射进一步提升为 F 上的路径，并且提升的选择仅取决于底层增量的初始标签。

引理 3.10. 若 $\gamma\colon [0,1] \to \mathscr{G}$ 是 $\mathscr{G}$ 中的一条路径，且其像 $q_H(\gamma)$在 M 中具有增量，则存在一个提升 $\tilde{\gamma}\colon [0,1] \to \mathscr{F}$ ，使得 γ满足 $\sigma \circ \tilde{\gamma} = \gamma$。此外，该提升的选择仅取决于 $q_H(\gamma)$的增量的初始标签。

证明。 设 $q_H(\gamma)$的增量由划分 $0 = t_0 < \cdots < t_\ell = 1$和标签 $k_0, \ldots, k_{\ell-1} \in \mathbb{Z}$ 给出。我们可以如下构造 F 中的一条路径 $\tilde{\gamma}$ 。首先，关注路径 γ 的起点 $\alpha^{k_0}(q_H^{-1}(U))$。限制在 $\tilde{\alpha}^{k_0}(q_H^{-1}(U))$上时， σ与 $\tilde{\alpha}^{k_0}(q_H^{-1}(U))$ 和 $\alpha^{k_0}(q_H^{-1}(U))$之间的识别相一致，因此我们可以直接定义

$$\tilde{\gamma}|_{[0,t_1]} := \left(\sigma|_{\tilde{\alpha}^{k_0}(q_H^{-1}(U))}\right)^{-1} \circ \gamma|_{[0,t_1]}.$$

接下来，增量告诉我们， $q_H(\gamma(t_1))$ 属于 $\alpha^{k_0}(U) \cap \alpha^{k_1}(U)$ 中 $\alpha^{\max(k_0,k_1)}(q_H(\mathsf{e}))$ 所在的连通分支，因此， $q_H(\gamma(t_1))$ 处的常值路径是一个由 k_0 增量至 k_1 的薄零伦环路。特别地，这说明 $\tilde{\gamma}(t_1) \in \tilde{\alpha}^{k_0}(q_H^{-1}(U)) \cap \tilde{\alpha}^{k_1}(q_H^{-1}(U))$，因此我们可以通过再次限制到 σ 是微分同胚的范围来延拓路径 $\tilde{\gamma}$ ：

$$\tilde{\gamma}|_{[t_1,t_2]} := \left(\sigma|_{\tilde{\alpha}^{k_1}(q_H^{-1}(U))}\right)^{-1} \circ \gamma|_{[t_1,t_2]}.$$

通过重复这一过程，定义

$$\tilde{\gamma}|_{[t_j,t_{j+1}]} := \left(\sigma|_{\tilde{\alpha}^{k_j}(q_H^{-1}(U))}\right)^{-1} \circ \gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$$

对每个 j，我们得到一个定义良好的从 γ 到 F 的提升 $\tilde{\gamma}$，且 $\sigma \circ \tilde{\gamma} = \gamma$。

现在，假设 $\zeta\colon [0,1] \to$ F 是 γ 到 F 的另一个提升，它以相同的方式构造而成，只是可能采用了不同的增量操作

$q_H(\gamma)$。那么，根据定义，我们仍有 $\sigma \circ \zeta = \gamma$；又因为 σ是一个几何映射，这意味着 ζ、 $\tilde{\gamma}$和 γ 都会有相同的发展： $\zeta_G = \tilde{\gamma}_G = \gamma_G$。特别地，由于 ζ 和 $\tilde{\gamma}$ 的起点由 $q_H(\gamma)$ 的初始标签唯一确定，如果它们对应的增量操作具有相同的初始标签，那么必有 $\zeta = \tilde{\gamma}$，因为此时它们具有相同的起点和相同的发展。□

我们的第二个引理表明，发展完全决定一条路径是否为薄零伦环路。

引理 3.11. 路径 $\gamma : [0,1] \to \mathscr{G}$ 是薄零伦环路，当且仅当其发展 $\gamma_G : [0,1] \to G$ 是薄零伦环路。

证明。 设 γ 是 G 中的薄零伦环路。经过光滑重参数化后，我们可以假设 γ 和薄零伦 $c : [0,1]^2 \to \mathsf{G}$ 都是光滑的。由于 c 是薄的，c的像至多是一维的，因此 $c^*\omega$满足 $\mathsf{d}(c^*\omega) + \frac{1}{2}[c^*\omega, c^*\omega] = 0$。由非阿贝尔微积分基本定理（ [13]第 3 章中的定理 7.14）可知，存在唯一的光滑映射$c_G : [0,1]^2 \to G$ ，使得 $(c_G)_0(0) = e$ 且 $c_G^*\omega_G = c^*\omega$；由于 $\gamma = c_0$ 和 $\gamma_G(0) = e = (c_G)_0(0)$，这也必然满足 $(c_G)_0 = \gamma_G$。因为 $c_G([0,1]^2) = (c_G)_0([0,1])$，且 c_G沿着 $[0,1] \times \{0\}$、$\{1\} \times [0,1]$和 $[0,1] \times \{1\}$为常值，我们看到 c_G 是从 γ_G 到 e处常值路径的薄零伦。

反过来，假设 γ_G 是一个薄零伦环路。同样，经过光滑重参数化后，我们可以假设 γ 和薄零伦 $c_G : [0,1]^2 \to G$ （其中c_G）$_0 = \gamma_G$ 都是光滑的。我们的策略本质上只是修改非阿贝尔微积分基本定理的局部版本，以证明存在一个映射 $c : [0,1]^2 \to \mathsf{G}$，使得$c^*\omega = c_G^*\omega_G$ 在局部成立；然后从局部片段构造该映射，并令其从 $c_0(0) = \gamma(0)$出发。由于这样的映射 c 在$[0,1] \times \{0\}$、 $\{1\} \times [0,1]$和 $[0,1] \times \{1\}$上必定为常值，且（c_0）$_G$ = （c_G）$_0 = \gamma_G$，若其存在，它便是从 γ 到 $\gamma(0)$的零伦；并且 c的像不可能离开 $c_0 = \gamma$ 的像，因为 c_G 的像包含于 γ_G的像中，因此 c 必然是一个薄零伦。

仿照 [13], 第 3 章中定理 6.1 的证明，我们考虑投影 $\pi_{\mathscr{G}} : [0,1]^2 \times \mathsf{G} \to \mathsf{G}$ 和 $\pi_{[0,1]^2} : [0,1]^2 \times \mathsf{G} \to [0,1]^2$。令 $\zeta := (c_G \circ \pi_{[0,1]^2})^*\omega_G - \pi_{\mathscr{G}}^*\omega$，可见 $\pi_{[0,1]^2 *}$ 给出了从 $\ker(\zeta)$ 到 $[0,1]^2$, 的切空间的线性同构，因此 $\ker(\zeta)$

是一个二维分布。此外，对于 $\Omega := \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega,\omega]$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\zeta &= (c_G \circ \pi_{[0,1]^2})^* \mathrm{d}\omega_G - \pi_{\mathcal{G}}^* \mathrm{d}\omega \\
&= -\frac{1}{2}(c_G \circ \pi_{[0,1]^2})^*[\omega_G, \omega_G] + \frac{1}{2}\pi_{\mathcal{G}}^*[\omega,\omega] - \pi_{\mathcal{G}}^*\Omega \\
&= -\frac{1}{2}[\zeta + \pi_{\mathcal{G}}^*\omega, \zeta + \pi_{\mathcal{G}}^*\omega] + \frac{1}{2}\pi_{\mathcal{G}}^*[\omega,\omega] - \pi_{\mathcal{G}}^*\Omega \\
&= -\frac{1}{2}([\zeta,\zeta] + [\pi_{\mathcal{G}}^*\omega, \zeta] + [\zeta, \pi_{\mathcal{G}}^*\omega]) - \pi_{\mathcal{G}}^*\Omega.
\end{aligned}$$

由于 c_G 的秩至多为一，$(\pi_{\mathcal{G}})_*\ker(\zeta)$ 至多是一维的，因此 $\pi_{\mathcal{G}}^*\Omega$ 必须在 $\ker(\zeta)$ 上消失。上面 $\mathrm{d}\zeta$ 的其余表达式是与 ζ 进行括号运算所形成的项之和，因此它在 $\ker(\zeta)$ 上也必须消失。因此，$\ker(\zeta)$ 是可积的。若 N 是经过 $((s,t), g) \in [0,1]^2 \times G$ 的 $\ker(\zeta)$ 的一片叶，则 $\pi_{[0,1]^2 *}$ 给出了从 N 在 $((s,t), g)$ 处的切空间到 $[0,1]^2$ 在 (s,t) 处的切空间的线性同构，因此存在 (s,t) 的一个邻域 V，在该邻域上我们得到一个光滑逆映射 f：从 $V \to N$ 到 $\pi_{[0,1]^2}$，使得 $f(s,t) = ((s,t), g)$。因此，

$$\begin{aligned}
0 = f^*\zeta &= f^*((c_G \circ \pi_{[0,1]^2})^*\omega_G - \pi_{\mathcal{G}}^*\omega) \\
&= f^*\pi_{[0,1]^2}^*(c_G^*\omega_G) - f^*\pi_{\mathcal{G}}^*\omega \\
&= (\pi_{[0,1]^2} \circ f)^*(c_G^*\omega_G) - (\pi_{\mathcal{G}} \circ f)^*\omega \\
&= c_G^*\omega_G - (\pi_{\mathcal{G}} \circ f)^*\omega,
\end{aligned}$$

因此 $c|_V := \pi_{\mathcal{G}} \circ f\colon V \subseteq [0,1]^2 \to G$ 满足 $(c|_V)^*\omega = c_G^*\omega_G$。

对于每个 $s \in [0,1]$，令 $c_s\colon [0,1] \to G$ 为满足$c_s(0) = \gamma(0)$ 且 $(c_s)_G = (c_G)_s$ 的唯一一条路径；由于 $c_0 = \gamma$ 定义良好，且每个 c_s 都必须始终位于 c_0 的像内，因此这些路径也定义良好。若存在映射 $c\colon [0,1]^2 \to G$ 满足 $c^*\omega = c_G^*\omega_G$ 且 $c_0(0) = \gamma(0)$，那么对每个 s，它都必须满足 $c|_{\{s\}\times[0,1]} = c_s$，所以我们只需验证 $c : (s,t) \mapsto c_s(t)$ 可作为所需的映射。为此，对每个 $(s,t) \in [0,1]^2$，选取一个开邻域 $V_{(s,t)}$，使得我们能得到如上所述的映射 $c|_{V_{(s,t)}}$，并满足 $(c|_{V_{(s,t)}})(s,t) := c_s(t)$ 且 $(c|_{V_{(s,t)}})^*\omega = c_G^*\omega_G$。这样，我们便能用开集覆盖每个 $\{s\}\times[0,1]$，在这些开集上都存在满足所需条件的映射；这些映射 $c|_{V_{(s,t)}}$ 必然会在沿 $\{s\}\times[0,1]$ 的交叠区域上一致，因为根据定义，c_s 是满足 $c_s(0) = \gamma(0)$ 且 $(c_s)_G = (c_G)_s$ 的唯一一条路径。因此，对每个 $s \in [0,1]$，令 $V_s := \bigcup_{t\in[0,1]} V_{(s,t)}$，便得到一个定义在 $\{s\}\times[0,1]$ 的某个开邻域上的映射 $c|_{V_s}$，满足 $(c|_{V_s})^*\omega = c_G^*\omega_G$，且 $(c|_{V_s})(s,0) = \gamma(0)$。接下来，我们可以沿交叠区域将映射 $c|_{V_s}$ 粘合起来，得到c，因为 $c|_{V_s}$ 必然在 $[0,1]\times\{0\}$ 上重合，这是由于它们在此区间上为常值。因此，我们得到一个映射 $c\colon [0,1]^2 \to G$，满足 $c^*\omega = c_G^*\omega_G$ 且 $c_0(0) = \gamma(0)$；根据上面的论证，它必定是一个薄的零同伦。□

有了这些引理，我们终于可以解释下面这个定理旨在告诉我们什么。回想一下，在定义 3.9 中，我们将

Cartan 几何（F $\sigma^*\omega$）称为“由 α 从 e 生成的（$q_H^{-1}(U)$ ω）的‘蔓延’”。然而，表面看来，（$q_H^{-1}(U)$ ω）、 α 和 e 并不足以确定该蔓延的几何结构：Cartan 联络是用（G ω）上的蔓延映射 σ 明确给出的，而 F 的拓扑则由 M 中的特定零伦决定。我们希望证明，实际上，该蔓延确实唯一地由（$q_H^{-1}(U)$ ω）、特定元素 e $\in q_H^{-1}(U)$以及 α 在它们上的行为所确定。

为此，假设 (Q υ) 是另一个型为 (G, H) 的嘉当几何，并且恰好有一个开集在几何上与 ($q_H^{-1}(U)$ ω) 相同，也就是说，存在一个几何嵌入 ψ: ($q_H^{-1}(U)$ ω) $\hookrightarrow$ (Q υ)。此外，假设它有一个自同构 $\varphi \in$ Aut(Q υ)，在几何嵌入 ψ 所给出的识别下，该自同构在特定元素 e 上的作用与 α 完全相同；换言之，$\varphi(\psi(\mathsf{e})) = \psi(\alpha(\mathsf{e}))$。那么，如果蔓延确实由 ($q_H^{-1}(U)$ ω)、 α 和 e 唯一确定，那么由 φ 从 ψ(e) 生成的 ($\psi(q_H^{-1}(U))$ υ) 的蔓延，应当以某种自然方式与 (F $\sigma^*\omega$) 几何同构。下面的定理恰好说明了这一点；事实上，它表明嵌入 ψ 可唯一延拓为从 (F $\sigma^*\omega$) 到 (Q υ) 的新蔓延映射。

定理 3.12. 设 $(\mathcal{Q}$ $\upsilon)$ 是另一个型为 (G, H)的嘉当几何，并具有一个自同构 $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{Q}$ $\upsilon)$。若

$$\psi|_{q_H^{-1}(U)} : (\tilde{\alpha}^0(q_H^{-1}(U)), \sigma^*\omega) \cong (q_H^{-1}(U), \omega) \hookrightarrow (\mathcal{Q}, \upsilon)$$

是一个几何嵌入，且 $\varphi((\psi|_{q_H^{-1}}(\upsilon))(e)) = (\psi|_{q_H^{-1}}(\upsilon))(\alpha(e))$，那么嵌入 $\psi|_{q_H^{-1}}(\upsilon)$ 可唯一延拓为一个几何映射ψ: (F $\sigma^*\omega$) $\to$ (Q υ)，其定义域是由 α 从 e 出发生成的蔓延 ($q_H^{-1}(U)$ ω)，值域为 (Q υ)，并且满足 $\psi \circ \tilde{\alpha} = \varphi \circ \psi$。

证明。 若所需的延拓存在于 F 上，则它必定具有如下形式ψ： $\tilde{\alpha}^i$(g) $\mapsto \varphi^i((\psi|_{q_H^{-1}}(\upsilon))$(g))，因此唯一性显而易见，并且

$$\begin{aligned}(\psi^*\upsilon)_{\tilde{\alpha}^i(g)} &= \psi^*(\upsilon_{\varphi^i(\psi(g))}) = \psi^*(\varphi^{-i})^*(\upsilon_{\psi(g)}) = (\varphi^{-i} \circ \psi)^*(\upsilon_{\psi(g)}) \\ &= (\psi \circ \tilde{\alpha}^{-i})^*(\upsilon_{\psi(g)}) = (\tilde{\alpha}^{-i})^*\psi^*(\upsilon_{\psi(g)}) = (\tilde{\alpha}^{-i})^*(\sigma^*\omega_g) \\ &= (\sigma^*\omega)_{\tilde{\alpha}^i(g)},\end{aligned}$$

因此 ψ 也必定是一个几何映射。由此，我们只需证明这种形式的延拓是良定义的。

为此，假设 $\tilde{\alpha}^{i_1}$(g$_1$) $\sim \tilde{\alpha}^{i_2}$(g$_2$)，于是 α^{i_1}(g$_1$) $= \alpha^{i_2}$(g$_2$)，并且存在一个薄零伦环路 $q_H(\gamma)$： $[0,1] \to M$，它以点 $\alpha^{i_1}(q_H$(g$_1$)) $= \alpha^{i_2}(q_H$(g$_2$)) 为基点，并从 i_1 增量至 i_2。由于零伦的像是可缩的，我们可以将 $q_H(\gamma)$ 提升为薄零伦环路 γ： $[0,1] \to$ G，它以 α^{i_1}(g$_1$) $= \alpha^{i_2}$(g$_2$) 为基点；根据引理 3.10，我们还可以进一步将其提升为路径 $\tilde{\gamma}$： $[0,1] \to$ F，起点为

在 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathfrak{g}_1)$。根据引理 3.11， $\gamma_G = \tilde{\gamma}_G$, $\tilde{\gamma}$ 又是一个薄零伦环路。我们的策略是证明

$$\psi(\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathfrak{g}_1)) = \psi(\tilde{\gamma}(0)) = \psi(\tilde{\gamma}(1)) = \psi(\tilde{\alpha}^{i_2}(\mathfrak{g}_2))$$

是构造一个定义良好的路径 $\beta\colon [0,1] \to \mathsf{Q}$，使其始终与复合映射 $\psi \circ \tilde{\gamma}$ 一致，前提是 ψ 定义良好；因为我们将有 $\beta_G = \tilde{\gamma}_G$，根据引理 3.11， β 将是一个薄零伦环路，因此

$$\psi(\tilde{\gamma}(0)) = \beta(0) = \beta(1) = \psi(\tilde{\gamma}(1)).$$

我们按照引理 3.10 证明中的思路构造路径 $\beta\colon [0,1] \to \mathsf{Q}$。设 $q_H(\gamma)$ 的增量由划分 $0 = t_0 < \cdots < t_\ell = 1$ 和标签 $i_1 = k_0$、 ..... 、 $k_{\ell-1} = i_2 \in \mathbb{Z}$给出。首先，这意味着 $\tilde{\gamma}([0,t_1]) \subseteq \tilde{\alpha}^{i_1}(q_H^{-1}(U))$，因为根据定义， $\sigma(\tilde{\gamma}) = \gamma$。每当我们将 ψ 限制在给定的 $\tilde{\alpha}^k(q_H^{-1}(U))$ 上时，便得到一个定义良好的几何嵌入 $\psi|_{\tilde{\alpha}^k(q_H^{-1}(U))}$，根据定义，它由下式给出

$$\psi|_{\tilde{\alpha}^k(q_H^{-1}(U))} := \varphi^k \circ (\psi|_{q_H^{-1}(U)}) \circ \tilde{\alpha}^{-k}|_{\tilde{\alpha}^k(q_H^{-1}(U))}.$$

因此，可以定义 $\beta|_{[0,t_1]} := \psi|_{\tilde{\alpha}^{i_1}(q_H^{-1}(U))} \circ \tilde{\gamma}|_{[0,t_1]}$。

此时，我们注意到一个关键事实：由于元素$\tilde{\alpha}(\mathsf{e})$ 和 $\alpha(\mathsf{e})$ 在 $(\tilde{\alpha}^0(q_H^{-1}(U)))\ \sigma^*\omega) \cong (q_H^{-1}(U)\ \omega)$ 和 $(\psi|_{q_H^{-1}(U)})(\tilde{\alpha}(\mathsf{e})) = \varphi((\psi|_{q_H^{-1}(U)})(\mathsf{e}))$ 中被识别，因此几何嵌入 $\psi|_{q_H^{-1}(U)}$与

$$\psi|_{\tilde{\alpha}(q_H^{-1}(U))} = \varphi \circ (\psi|_{q_H^{-1}(U)}) \circ \tilde{\alpha}^{-1}|_{\tilde{\alpha}(q_H^{-1}(U))}$$

必须在交集 $U \cap \tilde{\alpha}(U)$（位于 $q_H(\mathsf{F})$ 中）内 $q_H(\tilde{\alpha}(\mathsf{e})) = q_H(\alpha(\mathsf{e}))$ 所在的连通分支上重合，因为

$$(\psi|_{\tilde{\alpha}(q_H^{-1}(U))})(\tilde{\alpha}(\mathscr{e})) = \varphi((\psi|_{q_H^{-1}(U)})(\mathscr{e})) = (\psi|_{q_H^{-1}(U)})(\tilde{\alpha}(\mathscr{e})).$$

利用 $\tilde{\alpha}$ 和 φ 的迭代移至 $q_H^{-1}(U)$ 的其他副本，我们看到，对于每个 k, $\psi|_{\tilde{\alpha}^k(q_H^{-1}(U))}$ 和 $\psi|_{\tilde{\alpha}^{k+1}(q_H^{-1}(U))}$ 必须在 $\tilde{\alpha}^k(U) \cap \tilde{\alpha}^{k+1}(U)$ 中 $q_H(\tilde{\alpha}^{k+1}(\mathsf{e}))$ 所在的连通分支上重合。根据定义， $q_H(\gamma)$ 的增量表明， $q_H(\gamma)(t_1)$ 位于 $\alpha^{k_0}(U) \cap \alpha^{k_1}(U)$ 中 $\alpha^{\max(k_0,k_1)}(q_H(\mathsf{e}))$ 所在的连通分支上，因此，$\tilde{\gamma}(t_1)$ 必须位于 $\tilde{\alpha}^{k_0}(U) \cap \tilde{\alpha}^{k_1}(U)$ 中 $\tilde{\alpha}^{\max(k_0,k_1)}(q_H(\mathsf{e}))$ 所在的连通分支上。特别地， $\psi|_{\tilde{\alpha}^{k_0}(q_H^{-1}(U))}$ 和 $\psi|_{\tilde{\alpha}^{k_1}(q_H^{-1}(U))}$ 必须在 $\tilde{\gamma}(t_1)$ 上重合，因为 $|k_0 - k_1| = 1$，因此我们可以将 β 扩展为 $[0,t_2]$，定义 $\beta|_{[t_1,t_2]} := \psi|_{\tilde{\alpha}^{k_1}(q_H^{-1}(U))} \circ \tilde{\gamma}|_{[t_1,t_2]}$。

通过反复执行这一过程，定义

$$\beta|_{[t_j,t_{j+1}]} := \psi|_{\tilde{\alpha}^{k_j}(q_H^{-1}(U))} \circ \tilde{\gamma}|_{[t_j,t_{j+1}]}$$

对于每个 j，我们得到一条定义良好的路径 β；如果延拓 ψ 定义良好，它必定具有形式$\psi \circ \tilde{\gamma}$。特别地， β 是一条从$\beta(0) = \varphi^{i_1}((\psi|_{q_H^{-1}(U)})(\mathsf{g}_1))$ 到 $\beta(1) = \varphi^{i_2}((\psi|_{q_H^{-1}(U)})(\mathsf{g}_2))$ 的路径，且满足 $\beta_G = \tilde{\gamma}_G$，因此它必定是一个以

$$\psi(\tilde{\alpha}^{i_1}(\mathfrak{g}_1)) = \beta(0) = \beta(1) = \psi(\tilde{\alpha}^{i_2}(\mathfrak{g}_2)). \quad \square$$

3.4. 关于蔓延定义复杂度的说明。 坦率地说，蔓延的定义相当复杂。对此我们大概不必太惊讶：这一构造基本上编码了我们能够从自同构在特定元素附近的局部行为中获取的所有信息，因此它至少需要足够复杂，才能涵盖所有具有相同行为的自同构实例。尽管如此，我们还是可能会忍不住设想，扩展体的定义或许能以某种方式大幅简化，变得总是易于实现。

遗憾的是，即便确实存在这种简化方法，我们花了相当多的精力寻找，却仍未能找到。下面对本节开头示例所作的修改，有助于理解为什么即使在看似简单明了的情形下，蔓延定义也必须如此复杂。

令 (G ω) 为与单位二球面 $M = \mathbb{S}^2$ 上标准黎曼结构相对应的型 (I(2)，O(2)) 嘉当几何。我们选取 $\alpha \in$ Aut(G ω) $\simeq$ O(3)，使其为一个非平凡旋转；并令 e $\in$G 为一个位于 α 的两个不动点之一上方的元素；我们可以将 $q_{\mathrm{O}(2)}$(e) 视为“北极”，而另一个不动点x 则视为“南极”。按图5定义 $U = D \cup D' \cup V$，其中D 是围绕 $q_{\mathrm{O}(2)}$(e) 的一个小型 α 不变圆盘， D' 是围绕 x 的一个小型 α 不变圆盘，而 V 是两个不动点之间球面月形区的内部，并且满足 $\alpha(V) \cap V = \emptyset$。

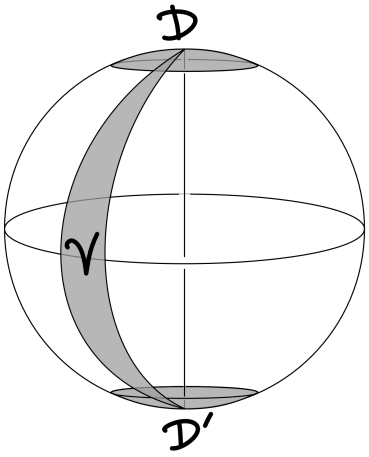

FIGURE 5. 区域 $U = D \cup D' \cup V$ 由两个开圆盘 D 和 D'的并集构成，每个圆盘分别围绕 2-球面上旋转的不动点之一，并包含连接这两个圆盘的球面月形区的内部 V

要计算由 α 从 e 生成的 ($q^{-1}{}_{\mathrm{O}(2)}(U)$ ω) 的蔓延 (F $\sigma^*\omega$)，注意，只要 $\alpha^{i_1}(V) \cap \alpha^{i_2}(V) \neq \emptyset$，每个 $y \in \alpha^{i_1}(U) \cap \alpha^{i_2}(U)$ 都有一条路径 δ: $[0,1] \to \alpha^{i_1}(U) \cap \alpha^{i_2}(U)$，它从 $\delta(0) = y$开始并以

在 $\delta(1) = q_{\mathrm{O}(2)}(\mathrm{e})$ 结束；由于 $q_{\mathrm{O}(2)}(\mathrm{e})$ 恰好是 α 的一个不动点，因此拼接 $\delta \star \delta$ 是一个薄零伦环路，可以从 i_1 增量至 i_2，所以 $\tilde{\alpha}^{i_1}(\alpha^{-i_1}(y))$ 与 $\tilde{\alpha}^{i_2}(\alpha^{-i_2}(y))$ Sprawl 等价。

因此，如果 $\alpha^k(V) = V$ 对某个 $k > 1$ 成立，并且对每个 $0 < i < k$ 都有 $\alpha^i(V) \cap V = \emptyset$，那么基流形 $q_{\mathrm{O}(2)}(\mathrm{F})$ 将恰好具有 k 个 D' 的不相交副本，即 $\tilde{\alpha}^0(D'), \ldots, \tilde{\alpha}^{k-1}(D')$。在这种情况下，$q_{\mathrm{O}(2)}(\mathrm{F})$ 在拓扑上类似于一只海星，其每条腕足的末端都附有圆盘。

如果对于某个 $k > 1$，$\alpha^k(V) \cap V \neq \emptyset$ 成立，但 $\alpha^k(V) \neq V$，那么情况会更加复杂。事实上，由上文可知，对于每个 n，$\tilde{\alpha}^{nk}(D')$ 都将与 $\tilde{\alpha}^0(D')$ 重合，但每个 $\alpha^i(V)$ 最终都会与某个 n 对应的 $\alpha^{nk}(V)$ 发生非平凡交集，因此我们还必须有 $\tilde{\alpha}^i(D') = \tilde{\alpha}^{nk}(D') = \tilde{\alpha}^0(D')$。换言之，$\tilde{\alpha}^0(D')$ 也是 $\tilde{\alpha}$-不变的；不难看出，在这种情况下，$(\mathrm{F}\ \sigma^*\omega)$ 必须与 $(\mathrm{G}\ \omega)$ 同构。特别注意，尽管 x 不在交集 $\alpha(U) \cap U$ 中与 $q_{\mathrm{O}(2)}(\mathrm{e})$ 位于同一个连通分支内，$\tilde{\alpha}(x) \sim x$，而且我们甚至无法从根本上知道，要使相关的增量从 0 变为 1，可能需要多少个中间步骤。

4. Applications

事实证明，定理 3.12 非常适合用来严格限制哪些嘉当几何能够容纳某些类型的自同构。为了举出“扩展体的泛性质”特别适用的例子，不妨考虑曲率在某个开集上消失的情形：如果我们能够证明，曲率在一个连通开子集上消失，而该子集包含某一点及其在给定自同构下的像，那么根据定理 3.12，只要我们能将平坦邻域取得足够小，由该自同构生成的扩展体就会与模型的某个自同构生成的相应扩展体重合。在克莱因几何中计算自同构的扩展体通常并不太困难，而且自同构的行为往往会迫使扩展体覆盖几何的很大一部分，甚至覆盖整个几何。

在本文中，为了证明曲率必定在某点附近消失，我们主要采用各向同性子群中某些元素构成的特定序列，并将其称为压舱序列。

定义 4.1. 设 $(\mathrm{G}\ \omega)$ 是类型为 (G, H) 的嘉当几何，且 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathrm{G}\ \omega)$ 是一个自同构。当且仅当存在 G 中的序列 (g_k)，使得 $\mathrm{g}_k \to \mathrm{g}$ 且 $\alpha^k(\mathrm{g}_k) b_k^{-1} \to \mathrm{e}$ 时，H 中的序列 (b_k) 称为 α 在 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$ 处的压载序列，其吸引子为 $\mathrm{e} \in \mathrm{G}$。

这里的“压舱”一词让人联想到放在船上以帮助其保持稳定的重物；单独来看，嘉当几何中的序列 $(\alpha^k(\mathrm{g}_k))$

可能会“倾覆”并飘向无穷远，但如果我们通过一列各向同性群中的元素进行右平移，添加一些额外的“重量”，那么结果在嘉当几何中仍然可以收敛。此外，由于这些序列的行为往往由它们与模型李代数的表示论权重之间的相互作用来刻画，因此将其比作专门用于承重的东西似乎是恰当的。话虽如此，我们引入这一术语的主要原因，是开始弃用“整体性序列”这一说法；在包括 [2], [7], 和 [10]在内的多个地方，这些对象都被称为“整体性序列”。压舱序列通常并不取值于全纯群，而且随着涉及嘉当几何实际全纯性的技术日益受到重视，继续称这些序列为“整体性序列”迟早会变得极其累赘且令人困惑。

使用这些序列的关键在于认识到：对于在 g 处以 e 为吸引子的配重序列（b_k），如果 V 是 H 和σ 的一个表示：$\mathsf{G} \to V$是一个 H-等变映射（因此对应于 $\mathsf{G} \times_H V$在 M上的一个截面），且满足 $\sigma \circ \alpha = \sigma$，那么

$$b_k \cdot \sigma(\mathscr{g}_k) = \sigma(\alpha^k(\mathscr{g}_k) b_k^{-1}) \to \sigma(\mathscr{e}).$$

因此，如果 $b_k \cdot \sigma(\mathsf{g}_k)$ 不可能收敛到 $\sigma(\mathsf{e})$，除非 $\sigma(\mathsf{g}_k)$ 收敛到 0，那么必有 $\sigma(\mathsf{g}) = 0$。特别是，由下式给出的曲率形式 Ω^ω

$$\begin{aligned}\Omega^\omega(X \wedge Y) &:= \Omega(\omega^{-1}(X) \wedge \omega^{-1}(Y)) \\ &= [X, Y] - \omega([\omega^{-1}(X), \omega^{-1}(Y)])\end{aligned}$$

在自同构下保持不变，因此我们可以将此应用于 $\sigma = \Omega^\omega$；当且仅当曲率 $\Omega = \mathsf{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]$ 为零时，它才为零。

4.1. 仿射缩放变换。例如，若 (G, ω) 是型 $(\mathsf{Aff}(m), \mathsf{GL}_m \mathbb{R})$ 嘉当几何，且 $\alpha(\mathsf{e}) = \mathsf{e}(\lambda \mathbb{1})$，其中$0 < \lambda < 1$ 而 $\lambda \mathbb{1} \in \mathsf{GL}_m \mathbb{R}$ 是将 $\mathbb{R}^m$ 中的所有元素按 λ缩放的线性变换，那么对于每个满足 $\exp(\omega^{-1}(v))\mathsf{e}$ 有定义的 $v \in \mathbb{R}^m < \mathfrak{aff}(m)$,

$$\begin{aligned}\alpha^k(\exp(\omega^{-1}(v))\mathscr{e}) &= \exp(\omega^{-1}(v))\alpha^k(\mathscr{e}) \\ &= \exp(\omega^{-1}(v))(\mathscr{e}(\lambda^k \mathbb{1})) \\ &= (\exp(\omega^{-1}(\mathrm{Ad}_{\lambda^k \mathbb{1}} v))\mathscr{e})(\lambda^k \mathbb{1}) \\ &= (\exp(\omega^{-1}(\lambda^k v))\mathscr{e})(\lambda^k \mathbb{1}),\end{aligned}$$

因此，$\mathsf{GL}_m \mathbb{R}$ 中的序列 $(\lambda^k \mathbb{1})$ 成为 α 在 $\exp(\omega^{-1}(v))\mathsf{e}$ 处的一个压舱序列，其吸引子为 e。曲率形式 Ω^ω 取值于 $\mathsf{GL}_m \mathbb{R}$-表示 $\Lambda^2(\mathbb{R}^m)^\vee \otimes \mathfrak{aff}(m)$ 中，该表示按 $\lambda \mathbb{1}$ 分解为特征子空间 $\Lambda^2(\mathbb{R}^m)^\vee \otimes \mathbb{R}^m$，对应特征值 $\lambda^{-2}\lambda = \lambda^{-1}$，以及 $\Lambda^2(\mathbb{R}^m)^\vee \otimes \mathfrak{gl}_m \mathbb{R}$，对应特征值 λ^{-2}。这些特征值都大于

1，因此对于非零的 $w \in \Lambda^2(\mathbb{R}^m)^\vee \otimes \mathfrak{aff}(m)$， $\lambda^k \mathbb{1} \cdot w$ 不可能收敛。由于

$$\lambda^k \mathbb{1} \cdot \Omega^\omega_{\exp(\omega^{-1}(v))e} = \Omega^\omega_{\alpha^k(\exp(\omega^{-1}(v))e)(\lambda^k \mathbb{1})^{-1}} \to \Omega^\omega_e,$$

这意味着我们必须有 $\Omega^\omega{}_{\exp(\omega^{-1}(v))e} = 0$，因此 Ω^ω 在e的某个邻域内为零。

由此可知，定理 3.12 使我们能够完全确定哪些仿射联络在某个不动点上允许具有缩放各向同性的自同构。具体而言，如果 ∇ 是连通光滑流形 M 上的一个（不一定无挠的）仿射联络，并且 α 是 (M, ∇) 的一个仿射变换，它固定点 x，且其在x 处的导数仅将切空间 x 按某个 $\lambda \neq \pm 1$进行缩放，那么 (M, ∇) 必须同构于仿射空间上的仿射结构。

命题 4.2。 设 $(\mathscr{G}\ \omega)$ 是 M上的一种型嘉当几何$(\mathrm{Aff}(m), \mathrm{GL}_m \mathbb{R})$，其中 M是连通光滑流形，并且存在一个自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathscr{G}\ \omega)$，使得对于某个元素 $e \in \mathscr{G}$ 以及$\lambda \neq \pm 1$， $\alpha(e) = e(\lambda \mathbb{1})$。那么，$(\mathscr{G}\ \omega)$ 同构于 $\mathbb{R}^m$上的克莱因几何 $(\mathrm{Aff}(m), \omega_{\mathrm{Aff}(m)})$。

证明。考虑 α 的逆，或在必要时取平方，我们可以假设 $0 < \lambda < 1$。如上所见，由于 $\alpha(e) = e(\lambda \mathbb{1})$，$(G\ \omega)$ 在 e 的某个邻域内是平坦的。因此，对于 $\mathbb{R}^m$ 中包含 0 的某个连通开邻域 U，我们有一个几何嵌入

$$\psi : (q^{-1}_{\mathrm{GL}_m \mathbb{R}}(U), \omega_{\mathrm{Aff}(m)}) \hookrightarrow (\mathscr{G}, \omega)$$

使得 $\psi(0, 1) = e$，并且由于

$$\alpha(\psi(0, \mathbb{1})) = \psi(0, \mathbb{1})(\lambda \mathbb{1}) = \psi(\lambda \mathbb{1} \cdot (0, \mathbb{1})),$$

定理 3.12 告诉我们， ψ 可从由 $\lambda \mathbb{1}$ 生成的 $(0, 1)$ 上的 $(q^{-1}{}_{\mathrm{GL}_m \mathbb{R}}(U)\ \omega_{\mathrm{Aff}(m)})$ 的蔓延延拓为一个几何映射。

这个蔓延恰好就是克莱因几何 $(\mathrm{Aff}(m), \omega_{\mathrm{Aff}(m)})$。 $\widetilde{\ }$为说明这一点，注意到 $\lambda \mathbb{1}$ 固定了 $0 \in \mathbb{R}^m$，因此迭代 $\lambda \mathbb{1}^k(U)$ 都包含 $\sim\lambda \mathbb{1}^0(0) \cong 0$。此外，对于所有充分大的正 k，迭代 $(\lambda \mathbb{1})^{-k}(U) = \lambda^{-k} \mathbb{1}(U)$ 将真包含 U；因此，如果 γ 是 $\widetilde{\ }$ $\sim\lambda \mathbb{1}^0(q^{-1}\mathrm{GL}_{m\,\mathbb{R}}(U)) \cong q^{-1}\mathrm{GL}_{m\,\mathbb{R}}(U)$ 中一条以 (0, 1) 结束的路径，那么 $\lambda \mathbb{1}^{-k}(q^{-1}\mathrm{GL}_{m\,\mathbb{R}}(U))$ 必须包含一条具有相同发展且也以 (0, 1) 结束的路径 γ'，因此根据$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$引理 3.11，$\gamma \star \gamma'$ 是一条由 0 增至 k 的薄零伦环路。换言之，对于所有充分大的 k， $\lambda \mathbb{1}^0(q^{-1}\mathrm{GL}_{m\,\mathbb{R}}(U)) \subseteq \lambda \mathbb{1}^{-k}(q^{-1}\mathrm{GL}_{m\,\mathbb{R}}(U))$；因此，对于所有充分大的 k， $\lambda \mathbb{1}^i(q^{-1}\mathrm{GL}_{m\,\mathbb{R}}(U)) \subseteq \lambda \mathbb{1}^{i-k}(q^{-1}\mathrm{GL}_{m\,\mathbb{R}}(U))$。由于所有 $(\lambda \mathbb{1})^{-k}(U)$ 的并集是 $\mathbb{R}^m$，这意味着 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ $\lambda \mathbb{1}^{i_1}(v_1, A_1)$ 与 $\lambda \mathbb{1}^{i_2}(v_2, A_2)$ Sprawl 等价，当且仅当 $(\lambda \mathbb{1})^{i_1}(v_1, A_1) = (\lambda \mathbb{1})^{i_2}(v_2, A_2)$，因此该蔓延就是 $(\mathrm{Aff}(m)\ \omega_{\mathrm{Aff}(m)})$。

由于 $(\mathrm{Aff}(m), \omega_{\mathrm{Aff}(m)})$ 是完备的，几何映射 ψ 必定是覆盖映射。然而，如果 Γ 是 $\mathrm{Aff}(m)$ 的一个离散子群，且

被 $\lambda\mathbb{1}$正规化，那么 $\Gamma < \mathrm{GL}_m\,\mathbb{R}$，因此不存在到具有各向同性为 $\lambda\mathbb{1}$的自同构的嘉当几何的非平凡覆盖映射。换句话说， ψ 必定是几何同构。□

4.2. 具有高阶不动点的射影变换。扩展体的泛性质似乎特别适合用于考察具有高阶不动点的抛物嘉当几何的行为。例如，考虑与 m 维实射影几何对应的模型 $(\mathrm{PGL}_{m+1}\,\mathbb{R},\ P)$，其中 P 是抛物子群

$$P := \left\{ \begin{pmatrix} r & \beta \\ 0 & R \end{pmatrix} : r \in \mathbb{R}^\times, \beta^\top \in \mathbb{R}^m, R \in \mathrm{GL}_m\,\mathbb{R} \right\},$$

它是 $\mathrm{PGL}_{m+1}\,\mathbb{R}$ 在 $\mathbb{RP}^m$ 上通常作用下某个点的稳定子。在某些温和的曲率限制下，众所周知，这些嘉当几何对应于 m 维流形上的射影结构；参见 [4] 的第4.1.5节或 [13] 的第8章。

在 P 中，其幂零根为 $P_+ := \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & \beta \\ 0 & \mathbb{1} \end{smallmatrix}\right) : \beta^\top \in \mathbb{R}^m\}$；若嘉当几何 $(\mathsf{G}\ \omega)$（其类型为 $(\mathrm{PGL}_{m+1}\,\mathbb{R},\ P)$）的自同构 α 满足 $\alpha(\mathsf{e}) \in \mathsf{e}P_+$，其中 $\mathsf{e} \in \mathsf{G}$，则称其具有一个 高阶不动点。在其底层基流形 M 上，这意味着存在一个射影自同构 α，它固定点 $q_P(\mathsf{e}) \in M$，且其在 $q_P(\mathsf{e})$ 处的导数 $\alpha_{*q_P(e)}$ 等于 $T_{q_P(e)}M$ 上的恒等变换。

每当某个类型为 $(\mathrm{PGL}_{m+1}\,\mathbb{R}, P)$ 的嘉当几何 $(\mathsf{G}\ \omega)$ 存在一个非平凡自同构 $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathsf{G}\ \omega)$，且该自同构具有高阶不动点 $q_P(\mathsf{e})$ 时，该高阶不动点的某个邻域上的曲率必定为零。利用压舱序列证明这一点的一般方法，曾在抛物几何这一更广泛的背景下得到阐述 [2]，，不过这一结果可追溯至 [12] 的引理5.6。这告诉我们，对于 $\mathbb{RP}^m$ 中 $q_P(e)$ 的某个开邻域U，我们可以在必要时通过限制邻域使其成为正则凸的；在此邻域上存在一个几何嵌入

$$\psi : (q_P^{-1}(U), \omega_{\mathrm{PGL}_{m+1}\,\mathbb{R}}) \hookrightarrow (\mathscr{G}, \omega)$$

满足 $\psi(e) = \mathsf{e}$。记 $a \in P_+$ 为满足 $\alpha(\mathsf{e}) = \mathsf{e}a$ 的各向同性元素，则定理 3.12 告诉我们，ψ 可扩展为一个几何映射，其定义域为 $(\mathsf{F}\ \sigma^*\omega_{\mathrm{PGL}_{m+1}\,\mathbb{R}})$，即由 a 从 e 生成的 $(q_P^{-1}(U)^{\omega_{\mathrm{PGL}_{m+1}\,\mathbb{R}}})$ 的蔓延，值域为 $(\mathsf{G}\ \omega)$，使得 $\psi \circ \tilde{a} = \alpha \circ \psi$。

在这种情况下，我们可以将 F 分解为一种特别有用的形式。

引理 4.3。 设 $a \in P_+$ 是非平凡的，且 U 是 $q_P(e)$ 在 $\mathbb{RP}^m \cong \mathrm{PGL}_{m+1}\,\mathbb{R}/P$ 中的一个适当凸开邻域。那么，由 a 从单位元 $e \in \mathrm{PGL}_{m+1}\,\mathbb{R}$ 生成的 $(q_P^{-1}(U)^{\omega_{\mathrm{PGL}_{m+1}\,\mathbb{R}}})$ 的蔓延$(\mathscr{F}\ \sigma^*\omega_{\mathrm{PGL}_{m+1}\,\mathbb{R}})$ 可表示为以下两个互不相交集合的并：

$$\mathscr{F} = \mathscr{F}_- \cup q_P^{-1}(U \cap \mathrm{Fix}_{\mathbb{RP}^m}(a)) \cup \mathscr{F}_+$$

两个互不相交的、 P-不变的开子集

$$\mathscr{F}_+ := \left\{ \tilde{a}^i(g) \in \mathscr{F} : g \notin P \text{ and } \lim_{k\to+\infty} \tilde{a}^{k+i}(q_P(g)) = \tilde{a}^0(q_P(e)) \right\}$$

and

$$\mathscr{F}_- := \left\{ \tilde{a}^i(g) \in \mathscr{F} : g \notin P \text{ and } \lim_{k\to-\infty} \tilde{a}^{k+i}(q_P(g)) = \tilde{a}^0(q_P(e)) \right\}$$

与该子集在 $\mathrm{PGL}_{m+1}\mathbb{R}$ 中的原像副本，其中该子集由 a 固定在 U 中。

证明。 由于子集 $U \cap \mathbf{Fix}_{\mathbb{RP}^m}(a)$ 由凸性而连通，因此它作为自同构 $\tilde{a}$ 的不动点子空间，在蔓延中保持不变。同时，我们可以在 $\mathbf{PGL}_{m+1}\mathbb{R}$ 中定义两个 P-不变开子集 $\sigma(\mathbf{F}_+)$ 和 $\sigma(\mathbf{F}_-)$，如下：

$$\sigma(\mathscr{F}_+) := \left\{ g \in \mathrm{PGL}_{m+1}\mathbb{R} : g \notin P \text{ and } \lim_{k\to+\infty} a^k(q_P(g)) = q_P(e) \right\}$$

and

$$\sigma(\mathscr{F}_-) := \left\{ g \in \mathrm{PGL}_{m+1}\mathbb{R} : g \notin P \text{ and } \lim_{k\to-\infty} a^k(q_P(g)) = q_P(e) \right\}.$$

它们恰好是 $\mathbf{PGL}_{m+1}\mathbb{R}$ 的同一个子集——二者都等于 $\mathbf{PGL}_{m+1}\mathbb{R}$ 中 $q_P^{-1}(\mathbf{Fix}_{\mathbb{RP}^m}(a))$ 的补集——不过我们会将它们分开处理，因为它们对应于蔓延中的不相交开子集。注意，基本上根据定义，对于充分大的 $k > 0$，若 $g \in \sigma(\mathbf{F}_+)$，则 $a^k(g) \in q_P^{-1}(U)$；对于 $\sigma(\mathbf{F}_-)$ 也同样如此，因此二者确实都属于蔓延映射 $\sigma : \mathbf{F} \to \mathbf{PGL}_{m+1}\mathbb{R}$ 的像。

由于 a 是一个射影变换，它保持直线不变；又由于a 将原点 $q_P(e) \in \mathbb{RP}^m$ 固定到一阶，因此每条经过原点的直线在 a作用下都是不变的。特别地，对于每个 $g \in \sigma(\mathbf{F}_+)$，存在一条测地线段 $\gamma_g : [0,1] \to \mathbb{RP}^m$ 包含于 $q_P(\{e\} \cup \sigma(\mathbf{F}_+))$ 中，将 $\gamma_g(\mathbf{1}) = q_P(g)$ 与 $\gamma_g(\mathbf{0}) = q_P(e)$ 连接起来，并且在 a的正向迭代下被压缩到$q_P(e)$ 中。因此，对于正的 i_1、$i_2 \in \mathbb{Z}$，使得 $a^{i_1}(g)\ a^{i_2}g \in q_P^{-1}(U)$，根据凸性，$\gamma_g$同时包含于 $a^{-i_1}(U)$ 和$a^{-i_2}(U)$ 中，并且对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，都有 $\tilde{a}^k(q_P(e)) \sim \tilde{a}^0(q_P(e))$，所以拼接 $\bar{\gamma}_g \star \gamma_g$ 是在 $a^{-i_1}(a^{i_1}(q_P(g)))$ 与 $a^{-i_2}(a^{i_2}(q_P(g)))$ 之间从 $-i_1$ 递增到 $-i_2$ 的薄零伦环路，因此$\tilde{a}^{-i_1}(a^{i_1}(g))$ 与 $\tilde{a}^{-i_2}(a^{i_2}(g))$ Sprawl 等价。换言之，我们在 $\mathbf{F}$ 中得到一个 $\sigma(\mathbf{F}_+)$ 的副本 $\mathbf{F}_+$，其中 $g \in \sigma(\mathbf{F}_+)$ 对应于形如 $\tilde{a}^{-k}(a^k(g))$ 的元素的蔓延等价类，且对于所有 $k > 0$，$a^k(g) \in q_P^{-1}\ U$；通过类似的考虑，我们在 $\mathbf{F}$ 中得到一个 $\sigma(\mathbf{F}_-)$ 的类似副本 $\mathbf{F}_-$。

$\mathbf{F}_+$ 和 $\mathbf{F}_-$ 在克莱因几何的双覆盖（$\mathbf{SL}^{\pm}_{m+1}\mathbb{R}$，$\omega_{\mathrm{SL}^{\pm}_{m+1}\mathbb{R}}$）中的像互不相交，因此它们在蔓延中也必然互不相交。由此得证。□

这种对蔓延的分解非常有用，因为几何映射 ψ 限制在 F+ 和 F_上时必须是单射。

引理 4.4. 对于上述定义的几何映射 $\psi : (\mathscr{F}\ \sigma^*\omega_{\mathrm{PGL}_{m+1}\mathbb{R}}) \to (\mathscr{G}\ \omega)$ $\psi \circ \tilde{a} = \alpha \circ \psi$，$\psi|_{\mathscr{F}_+}$ 和 $\psi|_{\mathscr{F}_-}$ 都是单射。

证明。假设对于某个 $\tilde{a}^{i_1}(g_1)\ \tilde{a}^{i_2}(g_2) \in$ F+，有 $\psi(\tilde{a}^{i_1}(g_1)) = \psi(\tilde{a}^{i_2}(g_2))$。那么，根据定义，对于所有充分大的 $k > 0$，$\tilde{a}^{i_1+k}(g_1)$和 $\tilde{a}^{i_2+k}(g_2)$必定属于 $\tilde{a}^0(q_P^{-1}\ (U))$；并且 ψ 在$\tilde{a}^0(q_P^{-1}\ (U)) \cong q_P^{-1}\ (U)$上是几何嵌入，因此 $\tilde{a}^{i_1+k}(g_1) \sim \tilde{a}^{i_2+k}(g_2)$，从而 $\tilde{a}^{i_1}(g_1) \sim \tilde{a}^{i_2}(g_2)$。类似地，如果对于某个 $\tilde{a}^{i_1}(g_1)\ \tilde{a}^{i_2}(g_2) \in$ F_，有 $\psi(\tilde{a}^{i_1}(g_1)) = \psi(\tilde{a}^{i_2}(g_2))$，那么对于所有充分大的 $k > 0$，$\tilde{a}^{i_1-k}(g_1) \sim \tilde{a}^{i_2-k}(g_2)$，因此再次得到$\tilde{a}^{i_1}(g_1) \sim \tilde{a}^{i_2}(g_2)$。□

因此，结合 [12] 引理5.6 与我们的定理 3.12，我们得到克莱因几何的大型开子集的副本，它们嵌入到每个型为 $(\mathrm{PGL}_{m+1}\mathbb{R},\ P)$ 的嘉当几何中（满足某些温和的曲率限制），且这些嘉当几何具有一个带高阶不动点的非平凡自同构。

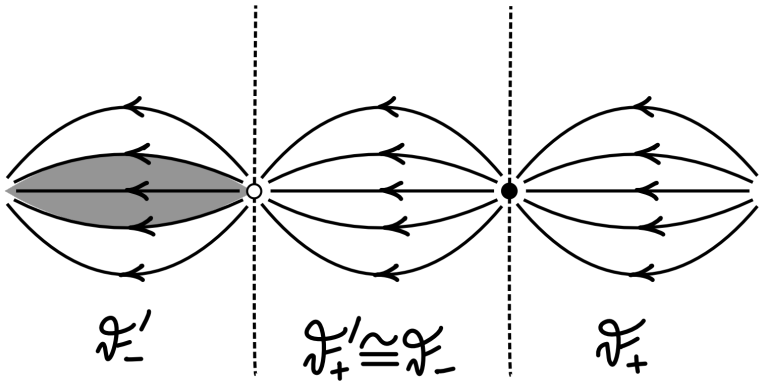

FIGURE 6. 示意图：一种射影几何具有一个带高阶不动点的非平凡自同构，其中非平坦区域以灰色突出显示

尽管这确实确定了每个具有非平凡高阶不动点的 $(\mathrm{PGL}_{m+1}\mathbb{R},\ P)$ 型嘉当几何中的很大一部分，但若不对基流形的拓扑（例如紧致性）作出进一步假设，仍不足以完全确定所有这类嘉当几何。例如，我们可以取蔓延 F 和 F′ 的两个副本，通过将 F'_+ 与 F_ 识别而把它们粘合起来，从 F′ 中移除高阶不动点 q_P(e′)，然后考虑 F'_- 的 $\tilde{a}$-不变形变。图 6 给出了这一情形的示意图。这样的射影结构仍具有将 F+ 和 F_ 嵌入其中所必需的几何嵌入，但在其他方面可能相当复杂。与前一小节讨论的仿射例子不同，它不必与克莱因几何一致，甚至不必

几何地嵌入其中。事实上，它甚至不需要在 F 的像的闭包之外是平坦的。

或许值得指出，这似乎是首个针对非平坦抛物几何的构造示例，该几何存在一个具有高阶不动点的非平凡（整体）自同构。在此之前，已有涉及不完备流的构造，例如 [6] 第 6.2 节和 [9], 例 4.3；此外， [3], 中还有一项低正则性的结果，但它没有相应的嘉当几何。

Appendix: the holonomy group of the sprawl

鉴于人们对围绕嘉当几何全纯群的技术日益关注，我们决定纳入以下补充结果。在整个证明过程中，我们将毫不避讳地运用 [5], 中的思想和术语，尤其是关于点的发展及其与自同构之间关系的内容。

命题 4.5。对于由 $\alpha \in Aut(G\ \omega)$从 e 生成的 $(F\ \sigma^*\omega)$ 上的 $(q_H^{-1}(U)\ \omega)$ 蔓延，设 $a \in G$ 是 $(q_H^{-1}(U)\ \omega)$ 中 $\alpha(e)$ 从 e 出发的一个发展。该蔓延的全纯群 $Hol_e(F\ \sigma^*\omega)$ 是包含 $Hol_e(q_H^{-1}(U)\ \omega)$ 且被 a正规化的最小子群 G。

证明。设 γ: $[0,1] \to$ F 是一条路径，它位于q_H(F) 中环路 $q_H(\gamma)$ 之上，其中 $\gamma(0) = e$，且 $\gamma(1) = \gamma(0)h_\gamma$。我们要计算$\gamma_G(1)h_\gamma^{-1}$。首先，我们将证明可以假设 γ 位于一条从 0 增至 0 的环路之上，然后计算 $\gamma_G(1)h_\gamma^{-1}$可能是什么。

将 γ拆分为若干线段的拼接 $\gamma = \gamma_0 \star \cdots \star \gamma_{\ell-1}$，使得对每个 $0 \le j < \ell$，都有 $\gamma_j([0,1]) \subseteq \tilde{\alpha}^{k_j}(q_H^{-1}(U))$，其中某个 $k_j \in \mathbb{Z}$ 满足此关系。根据蔓延等价的定义，对于

$$\gamma_j(1) = \gamma_{j+1}(0) \in \tilde{\alpha}^{k_j}(q_H^{-1}(U)) \cap \tilde{\alpha}^{k_{j+1}}(q_H^{-1}(U)),$$

必定存在一个以 $\gamma_j(1)$ 为基点的薄零伦环路 $\gamma_{j,\ j+1}$ ，其$q_H(\gamma_{j,\ j+1})$ 从 k_j 增至 k_{j+1}。特别地，修正路径

$$\gamma_0 \star \gamma_{0,1} \star \gamma_1 \star \gamma_{1,2} \star \cdots \star \gamma_{\ell-1} \star \gamma_{\ell-1,\ell} \star \gamma_\ell$$

在 F 中下降为 q_H(F) 内的一条环路，其增量从 0 到k_ℓ。由于薄零伦环路的全纯总是平凡的，

$$(\gamma_0 \star \gamma_{0,1} \star \gamma_1 \star \gamma_{1,2} \star \cdots \star \gamma_{\ell-1} \star \gamma_{\ell-1,\ell} \star \gamma_\ell)_G(1) = \gamma_G(1).$$

因此，不失一般性，我们可以假设 γ 位于环路$q_H(\gamma)$上，该环路对某个 $k_\ell \in \mathbb{Z}$ 从 0 增量至 k_ℓ 。此外，由于

$$q_H(e) = q_H(\gamma(0)) = q_H(\gamma(1)) \in \tilde{\alpha}^0(U) \cap \tilde{\alpha}^{k_\ell}(U),$$

必定存在一个以 e 为基点的薄零伦环路 γ'，使得 $q_H(\gamma')$ 从 0 增量至 k_ℓ。将 γ 与 $\mathrm{R}^{h_\gamma}(\gamma')$ 拼接起来，我们再次得到路径 $\gamma \star \overline{\mathrm{R}^{h_\gamma}(\gamma')}$，它位于 $q_H(\mathrm{F})$ 中的一个环路上，这次增量从 0 到 0，且 $(\gamma \star \mathrm{R}^{h_\gamma}(\gamma'))_G(1) = \gamma_G(1)$。因此，不失一般性，我们可以假设 γ 位于环路 $q_H(\gamma)$ 上，其增量从 0 回到 0。

设环路 $q_H(\gamma)$ 从 0 到 0 的这一增量由划分 $0 = t_0 < \cdots < t_\ell = 1$ 和有限整数序列 $k_0 = 0$、……、$k_{\ell-1} = 0 \in \mathbb{Z}$ 给出。根据定义，$\gamma(t_{j+1})$ 位于 $\tilde{\alpha}^{k_j}(U) \cap \tilde{\alpha}^{k_{j+1}}(U)$ 的连通分支之上，该连通分支包含 $q_H(\tilde{\alpha}^{\max(k_j,k_{j+1})}(\mathrm{e}))$，因此存在路径

$$\beta_{j+1} : [0,1] \to \tilde{\alpha}^{k_j}(q_H^{-1}(U)) \cap \tilde{\alpha}^{k_{j+1}}(q_H^{-1}(U))$$

其中 $\beta_{j+1}(0) = \gamma(t_{j+1})$ 且 $\beta_{j+1}(1) b_{j+1} = \tilde{\alpha}^{\max(k_j,k_{j+1})}(\mathrm{e})$，对某个 $b_{j+1} \in H$ 成立。特别地，$\beta_{j+1} \star \beta_{j+1}$ 是 $\tilde{\alpha}^{k_j}(q_H^{-1}(U)) \cap \tilde{\alpha}^{k_{j+1}}(q_H^{-1}(U))$ 中的薄零伦环路，因此我们可以再次构造一条修正路径

$$\gamma|_{[0,t_1]} \star \beta_1 \star \overline{\beta_1} \star \cdots \star \gamma|_{[t_{\ell-2},t_{\ell-1}]} \star \beta_{\ell-1} \star \overline{\beta_{\ell-1}} \star \gamma|_{[t_{\ell-1},1]}$$

与 γ 具有相同的总发展；这告诉我们，不失一般性，可以进一步假设，对于某个 $b_{j+1} \in H$，每个 $0 \le j < \ell - 1$ 都有 $\gamma(t_{j+1}) b_{j+1} = \alpha^{\max(k_j,k_{j+1})}(\mathrm{e})$。

由此，每个满足 $0 \le j < \ell - 1$ 的线段 $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 都是从 $\gamma(t_j) = \tilde{\alpha}^{\max(k_{j-1},k_j)}(\mathrm{e}) b_j^{-1}$ 到 $\gamma(t_{j+1}) = \tilde{\alpha}^{\max(k_j,k_{j+1})}(\mathrm{e}) b_{j+1}^{-1}$ 的路径，因此，由于从 $\tilde{\alpha}^{\max(k_{j-1},k_j)}(\mathrm{e})$ 到 $\tilde{\alpha}^{\max(k_j,k_{j+1})}(\mathrm{e})$ 的可能发展空间恰好是

$$\mathrm{Hol}_e(q_H^{-1}(U), \omega) a^{\max(k_j,k_{j+1}) - \max(k_{j-1},k_j)} = \mathrm{Hol}_e(q_H^{-1}(U), \omega) a^{\frac{1}{2}(k_{j+1} - k_{j-1})},$$

我们必有

$$(\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]})_G(t_{j+1}) = b_j \eta_j a^{\frac{1}{2}(k_{j+1} - k_{j-1})} b_{j+1}^{-1}$$

对于某个 $\eta_j \in \mathrm{Hol}_e(q_H^{-1}(U)\ \omega)$。关键的是，注意对于另一条路径 $\zeta : [0,1] \to q_H^{-1}(U)$，满足 $\zeta(0) = \mathrm{e}$ 且 $\zeta(1) = \zeta(0) h_\zeta = \mathrm{e} h_\zeta$，我们可以将 $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 替换为 $\tilde{\alpha}^{\max(k_{j-1},k_j)}(\mathrm{R}^{b_j^{-1}}(\zeta)) \star \mathrm{R}^{b_j h_\zeta b_j^{-1}}(\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]})$，从而改变 $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 的总发展，使其从 $b_j \eta_j a^{\frac{1}{2}(k_{j+1} - k_{j-1})} b_{j+1}^{-1}$ 变为

$$(b_j \zeta_G(1) b_j^{-1})(b_j h_\zeta^{-1} b_j^{-1})(b_j \eta_j a^{\frac{1}{2}(k_{j+1} - k_{j-1})} b_{j+1}^{-1})(b_j h_\zeta b_j^{-1}),$$

也就是 $b_j(\zeta_G(1) h_\zeta^{-1}) \eta_j a^{\frac{1}{2}(k_{j+1} - k_{j-1})} (b_j h_\zeta b_j^{-1} b_{j+1})^{-1}$，因此将 b_{j+1} 替换为 $b_j h_\zeta b_j^{-1} b_{j+1}$，每个 $\eta_j \in \mathrm{Hol}_e(q_H^{-1}(U)\ \omega)$ 都可以实现为线段 $\gamma|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 的总发展 $b_j \eta_j a^{\frac{1}{2}(k_{j+1} - k_{j-1})} b_{j+1}^{-1}$，-其中某个 γ 从 0 到 0 具有给定的增量。

类似地，对于 γ 的最后一段 $\gamma|_{[t_{\ell-1},1]}$ ，我们得到一条从$\gamma(t_{\ell-1})$ $= \tilde{\alpha}^{\max(k_{\ell-2},k_{\ell-1})}(\mathsf{e})b_{\ell-1}^{-1}$ 到 $\gamma(1) = \gamma(0)h_\gamma = \mathsf{e}h_\gamma$ 的路径，因此

$$(\gamma|_{[t_{\ell-1},1]})_G(1) = b_{\ell-1}\eta_{\ell-1}a^{-\max(k_{\ell-2},k_{\ell-1})}h_\gamma$$

对于某个 $\eta_{\ell-1} \in \mathrm{Hol}_e(q_H^{-1}(U)\ \omega)$。同样，通过修改线段和$h_\gamma$，我们可以在该线段的总发展中实现任意 $\eta_{\ell-1} \in \mathrm{Hol}_e(q_H^{-1}(U)\ \omega)$。

综上所述，

$$\begin{aligned}\gamma_G(1) &= (\gamma|_{[0,t_1]})_G(t_1)\cdots(\gamma|_{[t_{\ell-1},1]})_G(1)\\ &= (\eta_0 a^{k_1}b_1^{-1})(b_1\eta_1 a^{\frac{1}{2}(k_2-k_0)}b_2^{-1})\cdots(b_{\ell-1}\eta_{\ell-1}a^{-\max(k_{\ell-2},k_{\ell-1})}h_\gamma)\\ &= \eta_0 a^{k_1}\eta_1 a^{\frac{1}{2}(k_2-k_0)}\cdots\eta_{\ell-1}a^{-\max(k_{\ell-2},k_{\ell-1})}h_\gamma,\end{aligned}$$

so

$$\gamma_G(1)h_\gamma^{-1} = \eta_0 a^{k_1}\eta_1 a^{\frac{1}{2}(k_2-k_0)}\cdots\eta_{\ell-1}a^{-\max(k_{\ell-2},k_{\ell-1})}.$$

不过请注意，由于标签 k_j 来自一次增量操作，此表达式中 a 的各次幂必为 a^{-1}、 $a^0 = e$ 或$a^1 = a$，且前 j 个 a 幂的和恰好等于 k_j。此外，由于该增量操作是从 0 到 0，元素 a 和a^{-1} 必定成对出现，因此 $\gamma_G(1)h_\gamma^{-1}$属于包含 $\mathrm{Hol}_e(q_H^{-1}(U)\ \omega)$ 且在 a的各次幂共轭作用下封闭的最小子群。因此， $\gamma_G(1)h_\gamma^{-1}$包含于所需子群。最后，由于对于给定的增量操作，任意 $\eta_j \in \mathrm{Hol}_e(q_H^{-1}(U)\ \omega)$ 都可以通过上述表达式中的某个 γ 实现，我们可以通过考察具有不同增量操作、从 0 到 0 的路径 γ，得到所需子群的每个元素，因此 $\mathrm{Hol}_e(F\ \sigma^*\omega)$ 等于该子群。□

References

[1] A. Caetano 和 R. F. Picken，《整体性的公理化定义》，《国际数学杂志》**5** （1994），第 6 期，835–848。[2] Andreas ˇCap 和 Karin Melnick，《抛物几何中的本质基灵场》，《印第安纳大学数学杂志》**62** （2013），第 6 期，1917–1953。[3] , C^1 《具有强本质对称性的近格拉斯曼结构变形》，《变换群》**26** （2021），第 4 期，1169–1187。[4] Andreas ˇCap 和 Jan Slov´ak，《抛物几何 I：背景与一般理论》，《数学调查与专著》，第 154 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2009。[5] JACOB W. ERICKSON，《嘉当几何的内在全纯与弯曲余集》，《欧洲数学杂志》**8** （2022），446–474。[6] Charles Frances，《因果共形向量场与扭量旋量的奇点》，《全球分析与几何年刊》**32** （2007），第 4 期，277–295。[7] ,关于秩为一的抛物几何自同构群 ´几何 `结构，《高等师范学校科学年刊》**40** （2007）。英文版见 https://irma.math.unistra.fr/~frances/cartan-english6.pdf。

[8] Charles Frances 和 Karin Melnick, 《实解析三维流形的洛伦兹李希纳罗维奇猜想》, 《纯粹与应用数学杂志》（2023）。（即将出版）。[9] Boris Kruglikov 和 Dennis The, 《抛物几何对称性的喷射确定》, 《数学年刊》**371** （2018）, 1575–1613。[10] Karin Melnick 和 Katharina Neusser, 《不可约抛物几何上的强本质流》, 《美国数学会汇刊》**368** （2016）, 第 11 期, 8079–8110。[11] Karin Melnick 和 Vincent Pecastaing, 《紧致单连通洛伦兹流形的共形群》, 《美国数学会杂志》**35** （2022）, 第 1 期, 81–122。[12] Tadashi Nagano 和 Takushiro Ochiai, 《关于允许本质射影变换的紧致黎曼流形》, 《东京大学理学部纪要 IA 数学》**33** （1986）, 第 2 期, 233–246。[13] R. W. Sharpe, 《微分几何：嘉当对克莱因埃尔朗根纲领的推广》, 《数学研究生教材》, 第 166 卷, 施普林格出版社, 纽约, 纽约州, 1997。