arXiv:2303.00567v1 [math.AT] 1 Mar 2023

高阶范畴中的等价是什么?

VIKTORIYA OZORNOVA 和 MARTINA ROVELLI

摘要。本文旨在以统一的方式介绍严格 n-范畴或 (∞, n)-范畴之间的等价概念，以及严格 $(n+1)$-范畴或 $(\infty, n+1)$-范畴内部的等价概念。

目录

引言 1
1. 严格高阶范畴之间及其内部的等价 4 1.1. 集合之间及范畴内部的同构 4 1.2. 范畴之间及 2-范畴内部的等价 8 1.3. 2-范畴之间及 3-范畴内部的等价 13 1.4. n-范畴之间及 $(n+1)$-范畴内部的等价 18 1.5. ω-范畴之间及 ω-范畴内部的等价 22 2. 弱高阶范畴之间及其内部的等价 28 2.1. (∞, n)-范畴概述 28 2.2. (∞, n)-范畴之间的 (∞, n)-等价 32 2.3. 模型范畴技术 37 2.4. 由模型呈现的 $(\infty, 1)$-范畴中的等价 38 2.5. 由模型呈现的 $(\infty, 2)$-范畴中的等价 40 2.6. 由模型呈现的 (∞, n)-范畴中的等价 41 参考文献 43

引言

数学中的许多定理都旨在辨认两类看似不同、但同样值得关注的数学对象。虽然人们很容易将这类结果表述为两类数学对象相等，但在实践中，概括许多此类对应的恰当数学概念并非相等，而是双射。例如，以下是数学中一些通过适当的双射来表达的著名对应：

(1) 伽罗瓦对应：给定有限域扩张 E/F，E/F 的中间域扩张集合与 E/F 的伽罗瓦群的子群集合之间存在一个双射。(2) 覆盖空间的分类：给定一个良好的带基点空间 X，X 的带基点覆盖空间的同构类集合与 X 的基本群的子群集合之间存在一个双射。

2020 数学主题分类。18N10；18N30；18N60；18N65；18N40。

(3) *Stone* 对偶性：布尔代数的大集合与布尔环的大集合之间存在一个双射。

此时我们可以注意到，前面提到的每个例子实际上都是一个更强命题的表象。例如，在伽罗瓦对应中，对于 E/F 的中间域扩张，每一个包含关系都对应于 E/F 的伽罗瓦群中相应子群的一个（反向）包含关系。

更一般地，我们感兴趣的数学对象往往带有相关的对象间态射概念，并自然地组合成一个范畴。集合只由元素构成，而范畴则由称为对象的元素以及对象之间的箭头或态射构成，并配备一个含单位元且满足结合律的复合法则。

因此，我们希望将这些对应关系的陈述提升为相应范畴的适当相同性概念。乍看之下，我们或许可以把集合间双射的概念推广为范畴同构。粗略地说，从$\mathcal{A}$到 $\mathcal{B}$的范畴同构由函子赋值 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$和 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$构成，其设计使得对于 $\mathcal{A}$ 中的所有对象 a，都有 a 等于 $G(F(a))$， $\mathcal{B}$也同理。

以下是 一些可以通过范畴同构来表达的对应。

(1) 范畴化伽罗瓦对应：给定有限域扩张 E/F，在 E/F 的中间域扩张及其包含关系所成的范畴，与 E/F 的伽罗瓦群的子群及其包含关系所成的范畴之间，存在一个逆变同构。

(2) 群代数的泛性质：给定一个群 G 和一个域 K，群代数 $K[G]$ 上的模范畴与 G的表示范畴之间存在一个同构。类似地，阿贝尔群范畴与 $\mathbb{Z}$ 上的模范畴之间也存在一个同构。

范畴同构这一概念虽然极其自然直观，却过于严格，无法涵盖大多数值得关注的数学对应。粗略地说，问题在于，许多情况下存在函子赋值 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$和 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$；但对于范畴 $\mathcal{A}$ 中的一个对象 a，有 a 并不等于，而是与范畴$\mathcal{A}$中的 $G(F(a))$ 同构， $\mathcal{B}$ 的情况也类似。这正是范畴等价的定义性质，而范畴同构则不具备这一性质。

以下是一些经典的对应，可以用范畴的等价来表示，但它们并非范畴的同构。

(1) *Zariski* 对偶性 [GW20, §2]：在代数几何中，仿射概形范畴与交换环范畴之间存在反变等价。(2) 覆盖空间的范畴化分类 [tD08, §3]：给定一个良好的空间 X， X 上的覆盖空间范畴与带有 X 的基本群胚作用的集合范畴之间存在等价。(3) *Morita* 理论：给定交换环 R， R 上的模范畴与 $\mathrm{Mat}_{n\times n}R$上的模范畴之间存在等价。此外，给定交换环 R和 S， R 和 S上的模范畴的积与 $R \times S$ 上的模范畴之间也存在等价。(4) *Gelfand* 对偶性 [Gel41]：在泛函分析中，交换 C^*-代数范畴与紧 Hausdorff 拓扑空间范畴之间存在反变等价。(5) *Dold–Kan* 对应 [GJ09, §III]：单纯阿贝尔群范畴与非负分次链复形范畴之间存在等价。(6) 1-范畴直化—反直化 [LR20]：给定一个范畴 $\mathcal{C}$，其上的预层范畴与 $\mathcal{C}$上的离散纤维化范畴之间存在等价。

(7) 低维配边假设 [Koc04]: 在数学物理中，给定一个域 K，以 K 为系数的 一维拓扑量子场论范畴与有限维 K-向量空间范畴之间存在等价；以 K-向量空间为值的二维拓扑量子场论范畴与交换 Frobenius K-代数范畴之间也存在等价。

但话说回来，许多值得关注的现象无法通过等价这一概念形式化，甚至更根本地说，无法通过范畴这一概念本身形式化。事实上，许多值得关注的数学对象自然地构成了比普通范畴更复杂的结构，例如 n-范畴、 ∞-范畴，或更一般的 (∞, n)-范畴。

这些概念之间的差异，主要源于对两个参数采用了不同的组合：维数高于 1 时是否存在不可逆态射，以及公理是严格成立，还是仅在高阶态射意义下成立。粗略地说，这些高阶范畴类型之间的差异可用下表概括

	严格公理	弱公理
维数为 >0 时态射的可逆性	set	∞-群胚
>1 维态射的可逆性	范畴	∞-范畴
$>n$ 维态射的可逆性	n-范畴	(∞, n)-范畴

其中，取 $n = 0,1$ 时，第一行和第二行是最后一行的特殊情形。无法用普通范畴建模的高阶范畴的著名例子包括:
(1) 空间、有理空间或谱的 ∞-范畴的各种版本；(2) 链复形和微分分次代数的 ∞-范畴的各种版本；(3) 范畴的2-范畴以及 ∞-范畴的 $(\infty, 2)$-范畴；(4) 配边的 (∞, n)-范畴的各种版本 [BD95, Lur09c, Aya09, CS19, AF17]; (5) ∞-群胚的跨度或对应的 $(\infty, 2)$-范畴的各种版本，或者更一般地，幺半 $(\infty, 2)$-范畴内部的此类结构 [Lur09c, GR17, Hau18, DK19, Har20]; (6) $\mathbb{E}_n$-代数的 $(\infty, n+1)$-Morita 范畴的各种版本 [JFS17, Hau17]。

以下是几个需要表述为（ ∞, n）-等价的对应关系，它们是（ ∞, n）-范畴之间的对应关系，而不是普通范畴之间的等价。
（1）有理同伦论和 p-进同伦论中的代数模型 [Qui69, Sul77, Man01]: 有理空间的 ∞-范畴与 ∞ 上约化微分分次李代数的 ∞-范畴之间存在一个（$\infty, 1$）-等价；同时，它还与 $\mathbb{Q}$上的二约化微分分次余交换余代数的同伦论等价。Sullivan代数模型在有理空间的 ∞-范畴与Sullivan代数的 ∞-范畴之间定义了一个（ $\infty, 1$）-等价。类似地，给定任意素数 p，∞空间的∞-范畴与适当的 ∞-$\mathbb{E}_\infty$代数范畴之间存在一个（ $\infty, 1$）-等价。

(2) 2-与$(\infty, 1)$-范畴直化—反直化 [Gro03, Lur09a, Nui21]: 给定一个2-范畴 $\mathcal{C}$，范畴 $\mathcal{C}$ 上的范畴伪预层之2-范畴与格罗滕迪克纤维化之2-范畴之间存在一个2-等价。此外，给定一个 ∞-（或更一般地，(∞, n)-）范畴 $\mathcal{C}$， ∞-范畴中∞-（或更一般地，(∞, n)-）范畴预层的范畴与 $\mathcal{C}$上的笛卡尔纤维化的 ∞-范畴之间存在一个$(\infty, 1)$-等价。

(3) 全扩张配边假设 [BD95, Lur09c, Fre13, AF17]: 给定一个幺半(∞, n)-范畴 $\mathcal{C}$，在一点处求值定义了一个$(\infty,0)$-等价，它将取值于 $\mathcal{C}$ 的全扩张 n维拓扑量子场论的 ∞-群胚与 $\mathcal{C}$中完全可对偶对象的 ∞-群胚联系起来。

(4) 同调镜像对称 [Kon95、KS01、GPS18] 给定一个辛流形 X，存在一个猜想中的 A_∞-范畴之间的等价——这些范畴是某些稳定的 ∞-范畴——即

X 的适当福柯范畴与 X的镜像簇上的凝聚层导出范畴之间的等价。(5) 稳定同伦假设 [JO12、GJO19、GH15、MOP+22]: Picard n-范畴的($\infty, 1$)-范畴与稳定 n-型的($\infty, 1$)-范畴之间存在一个($\infty, 1$)-等价。(6) $\mathbb{E}_n$-代数与同调理论 [AF15]: 分解同调定义了 ∞-代数的适当 ∞-范畴与切除同调理论的适当 ∞-范畴之间的一个($\infty, 1$)-等价。(7) 拟凝聚层的导出范畴 [MM15]: 给定一个满足适当拟仿射条件的导出栈 X ，拟凝聚层的幺半 ∞-范畴与 X的整体截面上的模所成的幺半∞-范畴之间存在一个幺半 ∞-等价（因而是一个$(\infty, 2)$-等价）。(8) ∞-范畴论 Dold–Kan 对应 [Dyc21]: 单纯稳定 ∞-范畴的适当 ∞-范畴与稳定 ∞-范畴的连通链复形的适当 ∞-范畴之间存在一个($\infty, 1$)-等价。(9) 局部几何朗兰兹对偶 [AG15]: 给定一个连通约化群 G，猜想存在一个($\infty, 1$)-等价，介于 G-丛模栈上的 D-模的适当 ∞-范畴与对偶 G上的局部系统 DG-˘栈上的归纳相干层的适当 ∞-范畴之间。

到目前为止，我们只提到了关于等价的外部视角，也就是 (∞, n)-范畴之间的 (∞, n)-等价的概念。不过，关于等价还有一种内部视角，它关注的是理解 (∞, n)-范畴内部对象的 $(\infty, n + 1)$-等价概念。例如，集合之间的双射可以看作集合范畴中的同构，而范畴之间的等价可以理解为范畴的2-范畴中的等价；更一般地，我们可以在任意范畴中定义同构，也可以在任意2-范畴中定义等价。更一般地，我们可以在一个 ($n + 1$)-范畴内部定义 n-等价，也可以在一个 ($\infty, n+1$)-范畴内部定义 (∞, n)-等价。这就是一般 ($\infty, n + 1$)-范畴中对象之间正确的相同性概念。

本文旨在综述各种高阶范畴结构之间及其内部的等价概念：集合、范畴、 n-范畴和（ ∞， n）-范畴，并分别讨论每种情况下的内部观点和外部观点。我们还讨论一些模型范畴工具，以帮助在模型范畴层面解释由模型呈现的（ ∞， $n + 1$）。

注：本文面向熟悉普通范畴论语言的读者。文章从回顾基本概念开始，例如范畴的概念、范畴中的同构，甚至集合间的双射概念。这样做并不是因为认为读者是第一次学习这些内容，而是旨在强调一个或多个适用于更复杂情形中推广的观点。

致谢。 我们感谢 Dimitri Ara、Nick Gurski、Simon Henry、Félix Loubaton、Lennart Meier、Nima Rasekh 和 Alex Rice 富有洞见的讨论。第二作者感谢美国国家科学基金会在资助编号 DMS-2203915 下提供的支持。

1. 严格高阶范畴的等价与其中的等价

1.1. **集合的同构与范畴中的同构**。

1.1.1. 集合间的双射。 我们回顾集合间双射的概念，并强调一种（或许有些奇怪的）观点，为将集合视为 0-范畴这一观点奠定基础。基于此，我们引入以下辅助记号：

记号 1.1.1。对于集合 $\mathcal{A}$ 和 $a, a' \in \mathcal{A}$，我们记作

$$\mathcal{A}(a,a') = \begin{cases} \{*\} & \text{if } a = a' \\ \varnothing & \text{if } a \neq a'. \end{cases}$$

定义双射的一种方式是从单射性和满射性出发：

定义 1.1.2（集合间的双射）。集合 $\mathcal{A}$ 到集合 $\mathcal{B}$ 的函数 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个双射，记作 $F\colon \mathcal{A} \cong \mathcal{B}$，如果

(1) F 是满射，这意味着对于每个元素 $b \in \mathcal{B}$，都存在 $\mathcal{A}$ 中的一个元素 a，使得元素之间有等式

$$b = Fa \text{ in } \mathcal{B};$$

(2) F 是单射，这意味着对于 $\mathcal{A}$ 中的任意两个元素 a、a'，都有等式

$$\mathcal{A}(a,a') = \mathcal{B}(Fa, Fa') \in \{\{*\}, \varnothing\}.$$

两个集合 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 之间存在双射，记作 $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$，如果它们之间存在一个双射。

双射可以通过逆函数的存在性来刻画 .

命题 1.1.3（范畴 $\mathcal{S}et$中的同构）。集合之间的函数 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是双射，当且仅当它是可逆的；也就是说，存在一个函数 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 以及等式

$$G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \ \textit{in}\ \mathcal{S}et(\mathcal{A},\mathcal{A}) \ \textit{and}\ F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \ \textit{in}\ \mathcal{S}et(\mathcal{B},\mathcal{B}).$$

这一观点将被作为集合范畴中的同构概念，并且可以推广到任意范畴 $\mathcal{C}$ 中定义同构。

1.1.2. 范畴。回顾例如 [ML98, §I.2]，一个（小）范畴 $\mathcal{C}$ 由以下部分组成 f

- 一个对象 集合 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,
- 对于每个 $c, c\prime \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，一个同态集 $\mathcal{C}(c, c\prime)$,
- 对每个 $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，都有一个恒等算子函数

$$\mathrm{id}_c\colon \{*\} \to \mathcal{C}(c,c) \qquad * \mapsto \mathrm{id}_c$$

- 对每个 $c, c\prime, c\prime\prime \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，都有一个复合算子函数

$$\circ\colon \mathcal{C}(c,c') \times \mathcal{C}(c',c'') \to \mathcal{C}(c,c'') \qquad (f,g) \mapsto g \circ f$$

满足对每个 $c, c', c'', c''' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，都有结合律公理；该公理由集合与函数构成的图表的交换性给出

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c,c') \times \mathcal{C}(c',c'') \times \mathcal{C}(c'',c''') & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{C}(c,c')} \times \circ} & \mathcal{C}(c,c') \times \mathcal{C}(c',c''') \\ \downarrow{\scriptstyle \circ \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}(c'',c''')}} & & \downarrow{\scriptstyle \circ} \\ \mathcal{C}(c,c'') \times \mathcal{C}(c'',c''') & \xrightarrow[\circ]{} & \mathcal{C}(c,c''') \end{array} \tag{1.1.4}$$

对于每个 $c, c' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，单位元公理由集合与函数构成的图表的交换性给出

$$\begin{array}{ccc} \{*\} \times \mathcal{C}(c,c') & & \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_c \times \mathrm{id}_{\mathcal{C}(c,c')}} & \searrow^{\mathrm{pr}_2} & \\ \mathcal{C}(c,c) \times \mathcal{C}(c,c') & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{C}(c,c') \end{array} \quad \text{and} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c,c') \times \{*\} & & \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathcal{C}(c,c')} \times \mathrm{id}_{c'}} & \searrow^{\mathrm{pr}_1} & \\ \mathcal{C}(c,c') \times \mathcal{C}(c',c') & \xrightarrow{\circ} & \mathcal{C}(c,c') \end{array} \tag{1.1.5}$$

特别地，范畴 $\mathcal{C}$ 的数据也确定了一个态射集合 $\operatorname{Mor}\mathcal{C}$，它由所有同态集的并集构成

$$\operatorname{Mor}\mathcal{C} \coloneqq \coprod_{c,c' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} \mathcal{C}(c,c'),$$

以及若干算子:

- 源 和 目标 算子 $s,t\colon \operatorname{Mor}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{C}$,
- 恒等 算子 $\mathrm{id}\colon \operatorname{Ob}\mathcal{C} \to \operatorname{Mor}\mathcal{C}$
- 复合 算子 $\circ\colon \operatorname{Mor}\mathcal{C} \times_{\operatorname{Ob}\mathcal{C}} \operatorname{Mor}\mathcal{C} \to \operatorname{Mor}\mathcal{C}$, 定义在所有满足 $s(g) = t(f)$ 的态射对 (f,g) 上。

给定范畴 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$，一个 函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$由以下部分组成

- 一个对象上的函数

$$F\colon \operatorname{Ob}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{D}$$

- 并且对于每个 $c,c' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$，在同态集上都有一个函数

$$F_{c,c'}\colon \mathcal{C}(c,c') \to \mathcal{D}(Fc,Fc'),$$

满足函子性；也就是说，与复合相容，即对于每个 $c,c',c'' \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$，图表具有交换性

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(c,c') \times \mathcal{C}(c',c'') & \longrightarrow & \mathcal{D}(Fc,Fc') \times \mathcal{D}(Fc',Fc'') \\ {\scriptstyle \circ}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \circ} \\ \mathcal{C}(c,c'') & \longrightarrow & \mathcal{D}(Fc,Fc'') \end{array} \tag{1.1.6}$$

以及与恒等态射的相容性，即对于每个 $c \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$，图表具有交换性

$$\begin{array}{ccc} \{*\} & \longrightarrow & \{*\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}(c,c) & \longrightarrow & \mathcal{D}(Fc,Fc) \end{array} \tag{1.1.7}$$

例如， $\mathcal{S}$et 是由集合和函数构成的大型范畴，其复合采用通常的函数复合，恒等态射为集合的恒等函数。

1.1.3. 范畴中的同构。在范畴 $\mathcal{C} = \mathcal{S}$et 的情形下阅读以下定义，便可得到集合间的双射的定义。

定义 1.1.8 （范畴 $\mathcal{C}$中的同构）。 范畴 $\mathcal{C}$中对象 A与B之间的态射 $F\colon A \to B$称为同构，记作 $F\colon A \cong B$，如果存在 $\mathcal{C}$ 中的态射 $G\colon B \to A$，并且满足等式

$$G \circ F = \mathrm{id}_A \text{ in } \mathcal{C}(A,A) \text{ and } F \circ G = \mathrm{id}_B \text{ in } \mathcal{C}(B,B)$$

1-范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象 A 和 B 称为同构，记作 $A \cong B$，如果它们在 $\mathcal{C}$中之间存在同构。

同构也可以用两侧存在逆来描述（这一观点将启发构造 1.5.11）：

[1]与小范畴类似，大范畴 $\mathcal{C}$ 的定义也允许 $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ 是一个类，而不是集合。借助格罗滕迪克宇宙 （参见 [AGV71, Exposé I, Appendice II]），可以精确地形式化不同大小的范畴。

注 1.1.9。 范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $F\colon A \to B$ 是同构，当且仅当存在态射 G、$G'\colon B \to A$ 使得

$$F \circ G = \mathrm{id}_B \quad \text{and} \quad G' \circ F = \mathrm{id}_A,$$

这一表述也被视为范畴中同构的最早定义之一，见 [EM45, §I.1]。

很容易验证，对于集合，或更一般地，对于范畴中的对象，$\mathcal{C}$ 互为同构这一关系是一个等价关系。

1.1.4. 漫游同构。 引入辅助范畴 $\mathcal{P}$ 之后，我们会简要回顾如何确定编码同构概念的普适形状 $\mathcal{I}$。

构造 1.1.10。 我们用 $\mathcal{P}$ 表示由两个方向相反的态射生成的自由范畴 $f\colon a \to b$ 和 $g\colon b \to a$。这是通过将 f 和 g“首尾相接”并生成所有可能的复合而得到的。具体而言，对象集为 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{P} = \{a, b\}$，同态集为

$$\mathcal{P}(a,a) = \{(g \circ f)^n \mid n \geq 0\} \quad \mathcal{P}(a,b) = \{f \circ (g \circ f)^n \mid n \geq 0\}$$
$$\mathcal{P}(b,a) = \{g \circ (f \circ g)^n \mid n \geq 0\} \quad \mathcal{P}(b,b) = \{(f \circ g)^n \mid n \geq 0\}.$$

范畴 $\mathcal{P}$ 可以理解为范畴的推出

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{C}_1 \amalg \partial\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathcal{C}_0 \amalg \mathcal{C}_0 \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \mathcal{C}_1 \amalg \mathcal{C}_1^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathcal{P} \end{array}$$

这里，

- $\mathcal{C}_0$ 表示漫游对象范畴，它由一个对象和没有非恒等态射组成；
- $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_{\mathrm{op}\,1}$ 分别表示漫游态射范畴及其对偶；它们各自由不同对象之间的一个态射——$f\colon a \to b$ 和 $g\colon b \to a$——以及没有其他非恒等态射组成；
- $\partial\mathcal{C}_1 = \partial\mathcal{C}_{\mathrm{op}\,1}$ 表示 $\mathcal{C}_1$ 的边界，由两个对象 a 和 b 以及没有非恒等态射组成。

垂直映射是典范包含，顶端水平映射的两个余分量是两个不同的同构 $\partial\mathcal{C}_1 \cong \mathcal{C}_0 \amalg \mathcal{C}_0$。

构造 1.1.11（漫游同构）。 我们将由 $\mathcal{I}$ 表示漫游同构范畴，它由范畴 $\mathcal{P}$ 施加以下关系得到：

$$f \circ g = \mathrm{id}_b \quad \text{and} \quad g \circ f = \mathrm{id}_a\,.$$

对象集为 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{I} = \{a, b\}$，同态集为

$$\mathcal{I}(a,a) = \{\mathrm{id}_a\} \quad \mathcal{I}(a,b) = \{f\} \quad \mathcal{I}(b,b) = \{\mathrm{id}_b\} \quad \mathcal{I}(b,a) = \{g\}.$$

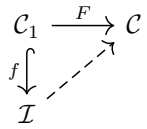
范畴 $\mathcal{I}$ 可以理解为范畴的推出

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{C}_2 \amalg \partial\mathcal{C}_2 & \xrightarrow{[(f\circ g, \mathrm{id}_b), (g\circ f, \mathrm{id}_a)]} & \mathcal{P} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \mathcal{C}_1 \amalg \mathcal{C}_1 & \longrightarrow & \mathcal{I} \end{array}$$

其中，$\partial\mathcal{C}_2$ 表示由两个平行态射组成的范畴，而垂直映射的两个余分量都是规范的折叠映射 $\partial\mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_1$，用于将这两个态射识别起来。

按照设计，漫游同构 $\mathcal{I}$ 以下述方式检测同构：

注 1.1.12。 范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射 $F\colon A \to B$ 是同构，当且仅当由 F 确定的函子$F\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$可沿包含 $\mathcal{C}_1 \hookrightarrow \mathcal{I}$ 延拓为函子 $\mathcal{I} \to \mathcal{C}$，也就是说，范畴的提升问题有解。



1.1.5. 范畴的基本集合。 范畴中对象的同构关系，也可以通过适当商集中的相等关系来检验。

定义 1.1.13。 给定一个范畴 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}$ 的基本集合 是集合

$$\Pi_0\mathcal{C} \coloneqq \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}/\cong$$

$\mathcal{C}$ 中对象的同构类构成的集合。这定义了一个保积函子 $\Pi_0\colon \mathcal{C}\mathsf{at} \to \mathcal{S}\mathsf{et}$。

根据定义，我们得到：

注记 1.1.14。 给定范畴 $\mathcal{C}$和 A， $B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，以下条件等价。

(1) 存在一个同构

$$A \cong B \text{ in the category } \mathcal{C}.$$

(2) 存在一个相等关系

$$A = B \text{ in the fundamental set } \Pi_0\mathcal{C}.$$

1.2. **范畴等价与一个2-范畴中的等价**。

1.2.1. 范畴等价。 范畴等价的概念由来已久，至少早在 [Gab62, §I.8] 中就已出现，并且例如在 [ML98, §IV.4] 中也有讨论。

定义 1.2.1 （范畴等价）。 范畴之间的函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$称为等价，记作 $F\colon \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$，如果

(1) 函　　子 F在同构意义下是对象满射，也就是说，对于每个对象 $b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$ 存在一个对象 $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ 和一个同构

$$b \cong Fa \text{ in the category } \mathcal{B}.$$

(2) 函子 F是忠实满函子，或是逐同态集同构，也就是说，对于 $\mathcal{A}$中的所有对象 a、 a'，函子 F 诱导出一个同构

$$F_{a,a'}\colon \mathcal{A}(a,a') \cong \mathcal{B}(Fa,Fa') \text{ of sets.}$$

范畴 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 等价，记作 $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$，当且仅当它们之间存在一个范畴等价。

命题1.2.2. 游走同构范畴 $\mathcal{I}$ 是可缩的，这意味着存在一个范畴等价

$$\mathcal{I} \simeq \mathcal{C}_0.$$

证明。 考虑唯一的函子 $\varphi\colon \mathcal{I} \to \mathcal{C}_0$。存在一个同构（事实上是相等）

$$* \cong \varphi(a) \text{ in } \mathcal{C}_0,$$

此外， φ 诱导出一个同构

$$\varphi_{a,a}\colon \mathcal{I}(a,a) = \{\mathrm{id}_a\} \cong \{\mathrm{id}_*\} = \mathcal{C}_0(*,*) = \mathcal{C}_0(\varphi(a),\varphi(a)) \text{ in } \mathcal{S}et.$$

类似地，函数 $\varphi_{b,\ b}$、 $\varphi_{a,\ b}$ 以及 $\varphi_{b,\ a}$ 都是同构。因此，存在一个等价 $\varphi\colon \mathcal{I} \simeq \mathcal{C}_0$，正如所要求的那样。□

注 1.2.3。 在范畴 $\mathcal{C}$at 上的典范模型结构背景下（描述见例如 [Rez96]或 [Joy08b] ），对象 $\mathcal{I}$ 是 Hov99，定义 1.2.4] 意义下终对象的一个柱体。也就是说，它带有一个分解:

$$\mathcal{C}_0 \amalg \mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathcal{I} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}_0$$

将 $\mathcal{C}_0$ 的折叠映射分解为一个余纤维化，后接一个弱等价（实际上是无圈纤维化）。请注意， $\mathcal{I}$ 并非唯一的柱体，也不应期待它是唯一的。事实上，对每个 $n \geq 0$，由 n 个元素构成的连通群胚（通过对象沿 $\mathcal{I} \amalg_{\mathcal{C}_0} \cdots \amalg_{\mathcal{C}_0} \mathcal{I}$ 个 n的迭代推出得到）也是范畴$\mathcal{C}$at 上典范模型结构中终对象的一个柱体。任何其他柱体对象也都可以像注 1.1.12 中那样用于检测范畴中的同构。

范畴之间的等价可以通过存在一个“弱”逆来刻画。例如参见 [Gab62，命题 12] 或 [ML98，第 IV 节4] 中的证明。

命题 1.2.4。 范畴之间的函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是<*style id='4'*>等价 当且仅当存在一个函子 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 以及同构

$$G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \ \ in\ \mathcal{C}at(\mathcal{A},\mathcal{A}) \ \ and\ F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \ \ in\ \mathcal{C}at(\mathcal{B},\mathcal{B}).$$

这一观点可以视为范畴的2-范畴中的等价概念，并且可以推广到任意2-范畴中以定义等价 $\mathcal{C}$。

1.2.2. 2-范畴。 回顾例如 [ML98，第 XII 节3] ，一个 2-范畴[2] $\mathcal{C}$ 由以下部分组成

- 一个 对象集 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$;
- 对于每个 c、 $c\prime \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，一个同态范畴 $\mathcal{C}(c, c\prime)$;
- 对于每个 $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，一个恒等函子

$$\mathrm{id}_c\colon \{*\} \to \mathcal{C}(c,c) \qquad * \mapsto \mathrm{id}_c$$

- 对于每个 $c, c\prime c\prime\prime \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，一个复合函子

$$\circ\colon \mathcal{C}(c,c') \times \mathcal{C}(c',c'') \to \mathcal{C}(c,c'') \qquad (f,g) \mapsto g \circ f;$$

满足结合律公理 (1.1.4) 和单位元公理 (1.1.5)，这些公理被理解为范畴与函子的图表，而不是集合与函数的图表。

给定范畴 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$，一个 2-函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$由以下部分组成:

- 一个对象上的函数

$$F\colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$$

- 对于每个 $c, c\prime \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，一个同态范畴上的函子

$$F_{c,c'}\colon \mathcal{C}(c,c') \to \mathcal{D}(Fc, Fc');$$

满足函子性，其中 (1.1.6) 和 (1.1.7) 被视为范畴和函子的图表，而非集合和函数。

特别地，2-范畴 $\mathcal{C}$的数据确定了一个 1-态射 集合 $1\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$和一个 2-态射 集合 $2\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$，由下式给出

$$1\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \coloneqq \coprod_{c,c' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}(c,c')) \quad \text{and} \quad 2\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \coloneqq \coprod_{c,c' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Mor}(\mathcal{C}(c,c')),$$

[2] 2-范畴这一概念也出现在 [EK66, §I.5] （称为超范畴），其基础是 [Ehr63, Bén65] 中的思想。

以及若干运算：

- 源与靶算子

$$s_0, t_0 \colon \operatorname{Mor}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{C}, \quad s_1, t_1 \colon 2\operatorname{Mor}\mathcal{C} \to \operatorname{Mor}\mathcal{C}, \quad s_0, t_0 \colon 2\operatorname{Mor}\mathcal{C} \to \operatorname{Ob}\mathcal{C}$$

- 恒等算子

$$\mathrm{id}_1 \colon \operatorname{Ob}\mathcal{C} \to \operatorname{Mor}\mathcal{C}, \quad \mathrm{id}_2 \colon \operatorname{Ob}\mathcal{C} \to 2\operatorname{Mor}\mathcal{C}, \quad \mathrm{id}_2 \colon \operatorname{Ob}\mathcal{C} \to 1\operatorname{Mor}\mathcal{C}$$

- 复合算子[3]

$$\circ_0 \colon \operatorname{Mor}\mathcal{C} \underset{\operatorname{Ob}\mathcal{C}}{\times} \operatorname{Mor}\mathcal{C} \to \operatorname{Mor}\mathcal{C}, \quad \circ_0 \colon 2\operatorname{Mor}\mathcal{C} \underset{\operatorname{Ob}\mathcal{C}}{\times} \operatorname{Mor}\mathcal{C} \to \operatorname{Mor}\mathcal{C},$$
$$\text{and } \circ_1 \colon 2\operatorname{Mor}\mathcal{C} \underset{\operatorname{Mor}\mathcal{C}}{\times} 2\operatorname{Mor}\mathcal{C} \to 2\operatorname{Mor}\mathcal{C}$$

定义于所有满足以下条件的（2-）态射对（ f, g）： g 的（维数相应的）源等于 f的靶。

例如，范畴和函子的 $\mathcal{C}$at也可以视为一个2-范畴：由范畴、函子和自然变换构成的大2-范畴，其复合为通常的函子复合和自然变换复合。

1.2.3. *2*-范畴中的等价。现在我们可以定义任意 2-范畴中的等价概念。例如， [Str80, §1.5], [Lac02, §2], [Gur12, Definition 1.6], [RV22, Defini- tion 1.4.6], 中都用到了这一概念；此外，将其应用于大 2-范畴 $\mathcal{C} = \mathcal{C}$at 时，它也能恢复范畴之间的等价概念。

定义 1.2.5 （2-范畴 $\mathcal{C}$中的等价与伴随等价）。2-范畴 $\mathcal{C}$中的一个 1-态射 $F \colon A \to B$称为等价，记作 $F \colon A \simeq B$，如果存在 $\mathcal{C}$ 中的一个 1-态射 $G \colon B \to A$以及同构

$$\mathrm{id}_A \cong G \circ F \text{ in } \mathcal{C}(A, A) \quad \text{and} \quad F \circ G \cong \mathrm{id}_B \text{ in } \mathcal{C}(B, B).$$

2-范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象 A 和 B 称为等价，记作 $A \simeq B$，如果它们之间在 $\mathcal{C}$中存在一个等价。

容易验证，对于范畴，或更一般地，对于 2-范畴中的对象， $\simeq$ 等价关系 $\mathcal{C}$ 是一种等价关系。

2-范畴中的等价可以用伴随等价来刻画，这一概念我们简要回顾如下。更多细节参见例如 [Str80, §1.5], [ML98, §IV.4], [Lac04, §3], 以及 [Gur12, 定理1.9] 。

定义 1.2.6 （2-范畴中的伴随等价 $\mathcal{C}$）。 2-范畴$\mathcal{C}$ 中的一个 1-态射 $F \colon A \to B$称为 $\mathcal{C}$ 中的伴随等价，如果存在一个 1-态射 $G \colon B \to A$ 属于 $\mathcal{C}$ 以及同构

$$\eta \colon \mathrm{id}_A \cong G \circ F \text{ in } \mathcal{C}(A, A) \quad \text{and} \quad \varepsilon \colon F \circ G \cong \mathrm{id}_B \text{ in } \mathcal{C}(B, B)$$

以及等式

$$\varepsilon F \circ F\eta = \mathrm{id}_F \text{ in } \mathcal{C}(A, B)(F, F) \quad \text{and} \quad G\varepsilon \circ \eta G = \mathrm{id}_G \text{ in } \mathcal{C}(B, A)(G, G).$$

下述结果是经典结果。证明参见例如 [Gab62，命题 I.12], [Str80，§1.5], [ML98，§IV.4], [Lac04，引理 5], 以及 [Gur12，定理 1.9] 。这一事实的标准证明会使用 2-范畴中 2-态射的字符串演算，而这里将说明可以替代它的代数公式。

[3]为简化表述，在上下文清楚时，我们允许使用记号上的简略写法。例如，我们可能省略复合符号，或省略复合算子的下标，或缩短诸如 $\alpha' \circ_0 \mathrm{id}f$ 写成$\alpha' \circ_0 f$ 或 $\alpha' f$这样的表达式。

定理 1.2.7。 *2*-范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 1-态射 $F\colon A \to B$ 是等价，当且仅当它在 $\mathcal{C}$中是伴随等价。

其思路是，按定义，每个伴随等价都是等价。反过来，给定一个由 g、η 和 ε 的数据见证的等价 f，我们可以调整 ε，得到 $\tilde{\varepsilon}$，使得 g、η 和 $\tilde{\varepsilon}$ 见证 f 是一个伴随等价。

1.2.4. 行走等价与伴随等价。 我们要寻找一种指标形状——记作 $\mathcal{E}$，并且例如在 [Lac02, §3] 中以 E 的形式出现——用来参数化 2-范畴中的等价。 $\mathcal{E}$ 的构造依赖于辅助范畴 $\mathcal{P}$ 的构造，而后者又依赖于悬挂的概念。给定一个范畴 $\mathcal{D}$，我们用 $\Sigma\mathcal{D}$ 表示其悬挂2-范畴，它由两个对象和一个非平凡的同态范畴 $\mathcal{D}$ 构成（更多细节参见 [OR21b, 定义 1.2] ）。这定义了一个函子 $\Sigma\colon \mathcal{C}\mathrm{at} \to 2\mathcal{C}\mathrm{at}$。

构造 1.2.8 （行走等价）。 我们将 $\mathcal{E}$ 记为行走等价，它由 $\mathcal{P}$ 自由添加 2-同构得到

$$\mathrm{id}_a \cong g \circ f \quad \text{and} \quad f \circ g \cong \mathrm{id}_b\,.$$

2-范畴 $\mathcal{E}$ 可以理解为下列 2-范畴的推出

$$\begin{array}{ccc}
\partial\mathcal{C}_2 \amalg \partial\mathcal{C}_2 & \xrightarrow{[(f\circ g,\mathrm{id}_b),(\mathrm{id}_a,g\circ f)]} & \mathcal{P} \\
\cong\downarrow & & \\
\Sigma\partial\mathcal{C}_1 \amalg \Sigma\partial\mathcal{C}_1 & & \\
\downarrow & & \\
\Sigma\mathcal{P} \amalg \Sigma\mathcal{P} & & \downarrow \\
\downarrow & \ulcorner & \\
\Sigma\mathcal{I} \amalg \Sigma\mathcal{I} & \longrightarrow & \mathcal{E}
\end{array}$$

这里， $\mathcal{C}_2$ 表示游走 2-态射，它由两个平行 1-态射之间的一个 2-态射组成；左侧的垂直映射是典范映射的悬挂，这些典范映射在构造 1.1.10 和 1.1.11 中将 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{I}$ 定义为推出。我们看到 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{E} \cong \{a, b\}$，但$\mathcal{E}$ 的同态范畴却难以直接描述。

按照设计，行走等价 $\mathcal{E}$ 可以按以下意义检测等价。

注 1.2.9。 2-范畴$\mathcal{C}$中的 1-态射 $F\colon A \to B$ 是等价，当且仅当函子$F\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$沿包含 $\mathcal{C}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}$延拓为函子 $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$。也就是说，如果下列 2-范畴的提升问题存在解

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\
{\scriptstyle f}\downarrow & \nearrow & \\
\mathcal{E} & &
\end{array}$$

相比之下，我们也可以确定指标形状——记作 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$，例如在 [Lac04, §6] 中以 E' 的形式出现——它为 2-范畴中的伴随等价提供参数化。

构造 1.2.10 （伴随等价的行走对象）。 我们将 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 记作伴随等价的行走对象，它通过施加以下关系由 $\mathcal{E}$ 得到

$$\varepsilon f \circ f\eta = \mathrm{id}_f \quad \text{and} \quad g\varepsilon \circ \eta g = \mathrm{id}_g\,.$$

2-范畴 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 可以理解为以下 2-范畴的推出

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{C}_3 \amalg \partial\mathcal{C}_3 & \xrightarrow{[[\varepsilon f\circ f\eta,\mathrm{id}_f],[\mathrm{id}_g,g\varepsilon\circ\eta g]]} & \mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_2 \amalg \mathcal{C}_2 & \longrightarrow & \mathcal{E}^{\mathrm{adj}} \end{array}$$

这里， $\partial\mathcal{C}_3$ 表示由两个平行的 2-态射构成的 2-范畴；垂直映射是两个典范折叠 映射 $\partial\mathcal{C}_3 \to \mathcal{C}_2$ 的余积。 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 的对象集为 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{E}^{\mathrm{adj}} := \{a, b\}$，其同态范畴

$$\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}(x,x) \cong \mathcal{E}^{\mathrm{adj}}(x,y) \cong \mathcal{E}^{\mathrm{adj}}(y,y) \cong \mathcal{E}^{\mathrm{adj}}(y,x) \cong \mathrm{ch}\mathbb{N}.$$

都同构于 $\mathrm{ch}\mathbb{N}$，即一个具有可数多个对象、且任意两个对象之间都有唯一态射的范畴。

按照设计，伴随等价的行走对象 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 以如下方式刻画等价：

注 1.2.11。 2-范畴 $\mathcal{C}$ 中的 1-态射 $F\colon A \to B$ 是伴随等价，当且仅当函子 $F\colon \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$ 可沿包含 $\mathcal{C}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 延拓为函子 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}} \to \mathcal{C}$。也就是说，如果以下 2-范畴之间的提升问题存在解

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{E}^{\mathrm{adj}} & & \end{array}$$

尽管由定理 1.2.7 可知，等价与伴随等价定义的是同一个概念，但在某种意义上，伴随等价的概念比基本的等价更加相干。这一点体现在指标形状 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 的层面：在 $\mathcal{E}$ 中，从 $\mathcal{P}$ 添加的态射 η 和 ε 彼此无关，随后又在 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 中加入了额外的相干关系。命题 1.3.2 和 1.3.3 将对此给出精确表述，我们将在其中讨论 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 是一个可缩的 2-范畴，而 $\mathcal{E}$ 则不是。请注意，尽管这或许有悖直觉，但这并不与定理 1.2.7 矛盾。

题外话 1.2.12。 2-范畴中有伴随的概念，指的是对（伴随）等价这一思想的推广，其中 2-态射 η 和 ε 不一定可逆。这一概念可追溯至 [Kel69, §2] 和 [KS74, §2]。相应的余表示对象，也就是所谓的伴随的行走对象，见 [SS86] ，并在 [RV16, 注 3.3.8]中再次使用。构造 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ （来自构造 1.2.10）的另一种方式，是要求伴随的行走对象中余表示单位和余单位的 2-态射可逆。

1.2.5. *2-范畴的基本范畴。* 2-范畴中对象的等价关系，也可以通过在适当范畴中的同构关系，或在适当集合中的相等来检验。

De定义 1.2.13。 给定一个 2-范畴 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}$ 的基本范畴是范畴

$$\Pi_1\mathcal{C} = ((\Pi_0)_*)\mathcal{C}$$

沿着从 $\Pi_0\colon \mathcal{C}$ 到 $\to \mathcal{S}$ 的保积函子作基变换得到。更明确地说，它的对象集为

$$\mathrm{Ob}(\Pi_1\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$$

且其同态集为

$$(\Pi_1\mathcal{C})(A,B) = \Pi_0(\mathcal{C}(A,B)).$$

这定义了一个从 $\Pi_1\colon 2\mathcal{C}$ 到 $\to\mathcal{C}$ 的保积函子。

注记 1.2.14。 给定一个 2-范畴 $\mathcal{C}$ 和 $A,B\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，以下各项等价 .

(0) 存在一个相等

$$A = B \text{ in the fundamental set } \Pi_0\Pi_1\mathcal{C}.$$

(1) 存在一个同构

$$A \cong B \text{ in the fundamental category } \Pi_1\mathcal{C}.$$

(2) 存在一个等价

$$A \simeq B \text{ in the 2-category } \mathcal{C}.$$

1.3. **2-范畴之间以及 3-范畴内部的等价**。

1.3.1. *2*-范畴的双等价。 2-范畴的双等价概念由来已久，例如见 [Str80, §1.33]和 [Lac02, §3]。

定义 1.3.1 （2-范畴的双等价）。 若一个 2-函子 $F\colon\mathcal{A}\to\mathcal{B}$是2-范畴的双等价，记作 $F\colon\mathcal{A}\simeq_2\mathcal{B}$，则

(1) 2-函子 F在对象上到等价为止满射，这意味着对每个对象 $b\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$，都存在一个对象 $a\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ 以及一个等价

$$b \simeq Fa \text{ in the 2-category } \mathcal{B};$$

(2) 且 2-函子 F是逐同态等价，这意味着对所有对象 $a,a'\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$，2-函子 F 诱导出等价

$$F_{a,a'}\colon\mathcal{A}(a,a')\simeq\mathcal{B}(Fa,Fa') \text{ of categories.}$$

两个 2-范畴是双等价的，记作 $\mathcal{A}\simeq_2\mathcal{B}$，如果它们之间存在一个双等价。

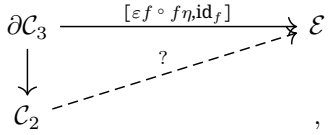
我们立即通过以下两个命题来使用并探讨 2-范畴的双等价的含义；这两个命题出现在 [Lac04] 中，并在那里归于 Joyal 名下。它们形式化了这样一个观点： $\mathcal{E}$ 并不<使用 style id='4'>相干</使用>，而 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 是相干的。

命题 1.3.2。 *2*-范畴 $\mathcal{E}$ 不是<样式 *id='6'*>可缩</样式>的，即

$$\mathcal{E}\neq_2\mathcal{C}_0.$$

我们给出这一事实的两个彼此独立的证明。

模型范畴证明。在 $2\mathcal{C}$处的提升问题



其中左侧垂直映射是折叠映射，无法提升。鉴于左侧垂直映射是典范模型范畴 $2\mathcal{C}$at 中的余纤维化（参见 [Lac02，Lac04] 中的明确描述），映射 $\mathcal{E}\to\mathcal{C}_0$ 不可能是无圈纤维化。由于它是纤维化，这意味着它不可能是弱等价。□

多图形同调证明。与 2-范畴 $\mathcal{E}$ 相关联的链复形 $\lambda\mathcal{E}$，如[Gue21，第 4 节2]所述（基于 [Bou84，第 7] 节中的思想），形式为

$$\lambda\mathcal{E} = [\quad \mathbb{Z}[a,b] \xleftarrow{\partial_0} \mathbb{Z}[f,g] \xleftarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[\eta,\varepsilon] \leftarrow 0 \quad].$$

鉴于

$$\partial_1(\varepsilon) = -f - g \quad and \quad \partial_1(\eta) = f + g,$$

$\lambda\mathcal{E}$ 的二阶同调，即 $\mathcal{E}$ 的多图形同调，由下式给出

$$H_2(\lambda\mathcal{E}) \cong \ker[\ \partial_1 \colon \mathbb{Z}[\eta,\varepsilon] \to \mathbb{Z}[f,g]\ ] \cong \mathbb{Z}[\eta+\varepsilon] \cong \mathbb{Z} \ncong 0.$$

根据 [Gue21，命题 4.3.3], ，我们得到 $\mathcal{E} \ncong \mathcal{C}_0$，如所期望。 □

以下内容见 [Lac04，§6]。

命题 1.3.3。 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 这个2-范畴是可缩的，即

$$\mathcal{E}^{\mathrm{adj}} \simeq_2 \mathcal{C}_0.$$

证明。C 考虑唯一函子 $\varphi \colon \mathcal{E}^{\mathrm{adj}} \to \mathcal{C}_0$。存在一个等价（事实上是一个相等）

$$* \simeq \varphi(a) \text{ in } \mathcal{C}_0$$

并且 φ 诱导出一个等价

$$\varphi_{a,a} \colon \mathcal{E}^{\mathrm{adj}}(a,a) \cong \mathrm{ch}\mathbb{N} \simeq \{\mathrm{id}_*\} = \mathcal{C}_0(*,*) \text{ in } \mathcal{C}at.$$

类似地，函子 $\varphi_{b,\ b}$、 $\varphi_{a,\ b}$ 和$\varphi_{b,\ a}$ 都是范畴的等价。因此存在一个双等价$\varphi \colon \mathcal{E}^{\mathrm{adj}} \simeq \mathcal{C}_0$，正如所要求的那样。□

注 1.3.4。在范畴 $2\mathcal{C}$at 上的典范模型结构的语境中（见 [Lac02，Lac04] 对其进行了明确描述），对象 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 是 Hov99 定义 1.2.4] 意义下终对象的一个柱体。也就是说，它配备了一个分解

$$\mathcal{C}_0 \amalg \mathcal{C}_0 \hookrightarrow \mathcal{E}^{\mathrm{adj}} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}_0$$

将 $\mathcal{C}_0$ 的折叠映射分解为先是一个余纤维化、随后是一个弱等价（事实上是无圈纤维化）。注意， $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 并不是唯一的柱体对象，也不应当期待它是唯一的。事实上，另外两个柱体对象分别由 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}} \amalg_{\mathcal{C}_0} \mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 和 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}} \amalg_{\mathcal{C}_1} \mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 给出，它们分别通过粘合 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 的两个副本得到，即分别将 a 与 b 或将 f 与 g 识别。相反，范畴 $\mathcal{I}$ ——视为一个离散 2-范畴——在此语境中不是 柱体对象，因为它不是余纤维的。

现在我们来探讨，双等价这一概念与逆的存在有多大关系。其中一个方向总是成立的:

注 1.3.5。如果存在一个 2-函子 $G \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 以及等价，则 2-范畴之间的 2-函子 $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是双等价

$$\eta \colon \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \simeq G \circ F \text{ in } 2\mathcal{C}at(\mathcal{A},\mathcal{A}) \text{ and } \varepsilon \colon F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \text{ in } 2\mathcal{C}at(\mathcal{B},\mathcal{B}).$$

一般而言，期望这两个陈述等价，结果证明是错误的。现在我们来回顾另一方向可能失效的情形。

注记 1.3.6. 如果 2-范畴之间的 2-函子 $F \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是双等价，那么通常并不能保证存在一个 2-函子 $G \colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 和一些 2-等价

$$\eta \colon \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \simeq G \circ F \text{ in } 2\mathcal{C}at(\mathcal{A},\mathcal{A}) \text{ and } \varepsilon \colon F \circ G \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \text{ in } 2\mathcal{C}at(\mathcal{B},\mathcal{B}).$$

在 [Lac02, Example 3.1] 中，证明了一个反例由如下形式的 2-函子给出：$F\colon \mathcal{A} \to B(\mathbb{Z}/2)$。这里， $\mathcal{A}$ 是这样一个 2-范畴：其底层范畴是 $B\mathbb{Z}$；从 1-态射 m 到 1-态射 n 存在 2-态射，当且仅当 $m-n$ 是偶数。

另一种选择是，对于任意两个 2-范畴 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$，考虑由从 $\mathcal{A}$ 到 $\mathcal{B}$的伪函子构成的适当的 2-范畴 $2\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{A},\mathcal{B})$。例如， [Str80, §1.33] 和[Lac02, §3]中都提到了这一点。

定理 1.3.7。 两个2-范畴之间的2-函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是双等价，当且仅当存在一个伪函子 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 以及 2-等价

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \simeq g \circ f \ \text{ in } 2\mathcal{C}at_{\mathrm{ps}}(\mathcal{A},\mathcal{A}) \ \text{ and } \varepsilon\colon f \circ g \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \ \text{ in } 2\mathcal{C}at_{\mathrm{ps}}(\mathcal{B},\mathcal{B}).$$

1.3.2. 3-范畴。 注 1.3.5 和定理 1.3.7 中的观点被用于定义任意 3-范畴中的双等价概念。

回顾一下，3-范畴 $\mathcal{C}$ 由以下部分构成：

- 一个 对象集 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ ，
- 对于每个 c， $c\prime \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ 一个 同态-2-范畴 $\mathcal{C}(c,\ c\prime)$，
- 对于每个 $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，一个 恒等 2-函子

$$\mathrm{id}_c\colon \{*\} \to \mathcal{C}(c,c);$$

- 对于每个 c， $c\prime\, c\prime\prime \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，一个 复合 2-函子

$$\circ\colon \mathcal{C}(c,c') \times \mathcal{C}(c',c'') \to \mathcal{C}(c,c'');$$

满足与 (1.1.4) 和 (1.1.5) 相同的公理，只不过是在 2-范畴而非集合中理解 s.

特别地，3-范畴 $\mathcal{C}$ 的数据确定了一个 1-态射集合 Mor $\mathcal{C}$、一个 2-态射集合 $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$ 和一个 3-态射集合 $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$，它们分别由以下给出

$$1\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \coloneqq \coprod_{c,c'\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Ob}(\mathcal{C}(c,c')), \qquad 2\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \coloneqq \coprod_{c,c'\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} 1\,\mathrm{Mor}(\mathcal{C}(c,c'))$$

$$\text{and} \quad 3\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \coloneqq \coprod_{c,c'\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} 2\,\mathrm{Mor}(\mathcal{C}(c,c')).$$

除了其他结构运算符之外，还可以得到复合 运算符 $\circ_p\colon q\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} \times_{p\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}} q\mathrm{Mor}\ \mathcal{C} \to q\mathrm{Mor}\ \mathcal{C}$，其对所有 $q > p \geq 0$ 以及所有满足 $s_p(g) = t_p(f)$ 的 q-胞 (f, g) 都有定义。

给定范畴 $\mathcal{C}$和 $\mathcal{D}$，一个 3-函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 由以下部分组成

- 一个对象上的函数

$$F\colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$$

- 以及对每个 $c, c\prime \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，一个定义在同态2-范畴上的 2-函子

$$F_{c,c'}\colon \mathcal{C}(c,c') \to \mathcal{D}(Fc, Fc'),$$

满足 (1.1.6) 和 (1.1.7) 中的函子性 。

例如，大型 2-范畴 $2\mathcal{C}\mathrm{at}$（其对象为 2-范畴、2-函子和 2-自然变换）也可以视为一个 3-范畴：由 2-范畴、2-函子、2-自然变换和修正构成的（大型）3-范畴，其复合采用函子、自然变换和修正的通常复合。我们也可以考虑 $2\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathrm{ps}}$：由 2-范畴、伪函子、伪自然变换和修正构成的大型 3-范畴。

1.3.3. *3*-范畴中的双等价和双伴随双等价。 3-范畴中双等价的定义见例如 [GPS95, 定义 3.5], , 且在 [Gur12, §2] 中也起着核心作用。

定义 1.3.8 （3-范畴 $\mathcal{C}$中的双等价）。 3-范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 1-态射 $F\colon A \to B$ 是双等价，记作 $F\colon A \simeq_2 B$, 如果存在一个 1-态射 $G\colon B \to A$ 属于 $\mathcal{C}$，以及等价

$$\eta\colon \mathrm{id}_A \simeq G \circ F \text{ in } \mathcal{C}(A,A) \text{ and } \varepsilon\colon F \circ G \simeq \mathrm{id}_B \text{ in } \mathcal{C}(B,B).$$

如果两个对象之间存在等价，则称它们 2-等价，记作 $A \simeq_2 B$。

注 1.3.9。 对于一个 2-函子，在大 3-范畴 $\mathcal{C} = 2\mathcal{C}\mathrm{at}_{\mathrm{ps}}$的情形下， $\mathcal{C}$ 中的双等价概念具体化为 2-范畴的双等价。然而，在大 3-范畴 $2\mathcal{C}\mathrm{at}$ 的情形下，它并不具体化为定义 1.3.8（见注 1.3.6，另参见 [Lac10，第 7 节5]）。

容易验证，在 3-范畴 $\mathcal{C}$ 中，对象 $\simeq_2$ 双等价这一关系是一个等价关系。

3-范畴中的等价可以用双伴随双等价来刻画，下面我们回顾这一刻画。以下内容见 [Gur12，定义 2.3] （另见 [CCKS21，定义 3.12]）。

定义 1.3.10 （3-范畴 $\mathcal{C}$中的 Gurski 意义下的双伴随双等价）。 3-范畴 $\mathcal{C}$ 中的 1-态射 $F\colon A \to B$称为 $\mathcal{C}$ 中的双伴随双等价，如果存在 $\mathcal{C}$ 中的 1-态射 $G\colon B \to A$ 以及 1-态射之间的 2-态射

$$\eta\colon \mathrm{id}_A \simeq G \circ F \text{ in } \mathcal{C}(A,A) \text{ and } \varepsilon\colon F \circ G \simeq \mathrm{id}_B \text{ in } \mathcal{C}(B,B).$$

以及 3-态射

$$\Phi\colon \varepsilon F \circ F\eta \cong \mathrm{id}_F \text{ in } \mathcal{C}(A,B)(F,F) \quad \text{and} \quad \Psi\colon G\varepsilon \circ \eta G \cong \mathrm{id}_G \text{ in } \mathcal{C}(B,A)(G,G)$$

并满足燕尾关系

$$\varepsilon \circ_1 (F \circ_0 \Psi) = \varepsilon \circ_1 (\Phi \circ_0 G) \quad \text{and} \quad (G \circ_0 \Phi) \circ_1 \eta = (\Psi \circ_0 F) \circ_1 \eta.$$

以下内容见 [Gur12，定理 4.5]。

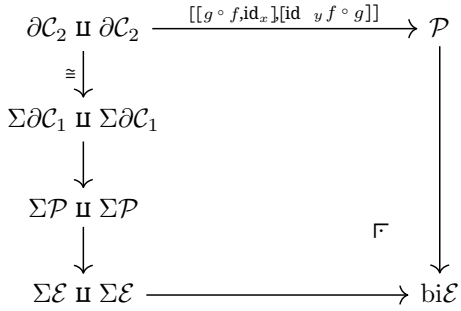
定理 1.3.11。 *3*-范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 A 1-态射 $F\colon A \to B$ 是双等价，当且仅当它在 $\mathcal{C}$中是双伴随双等价。

1.3.4. 双等价的步行对象与双伴随双等价。 我们要寻找一种指标形状——记作 bi$\mathcal{E}$ ——用于参数化3-范畴中的双等价。给定一个2-范畴 $\mathcal{D}$，我们将 $\Sigma\mathcal{D}$ 记作其悬挂 3-范畴，它由两个对象以及一个由 $\mathcal{D}$ 给出的非平凡同态2-范畴组成（参见例如 [AM20, §B.6.5]）。这定义了一个函子 $\Sigma\colon 2\mathcal{C}\mathrm{at} \to 3\mathcal{C}\mathrm{at}$。

构造 1.3.12 （游走双等价）。 我们用 bi$\mathcal{E}$ 表示游走双等价，它是通过自由添加同构从 $\mathcal{P}$ 得到的

$$\Phi\colon \varepsilon f \circ f\eta \cong \mathrm{id}_f \text{ in } \mathcal{C}(a,b)(f,f) \quad \text{and} \quad \Psi\colon g\varepsilon \circ \eta g \cong \mathrm{id}_g \text{ in } \mathcal{C}(b,a)(g,g)$$

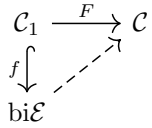
它可以描述为 3-范畴的推出



这里，左侧的垂直映射是典范映射的悬挂；这些典范映射在构造 1.1.10 和 1.2.8 中将 $\mathcal{P}$ 和 $\mathcal{E}$ 定义为推出。

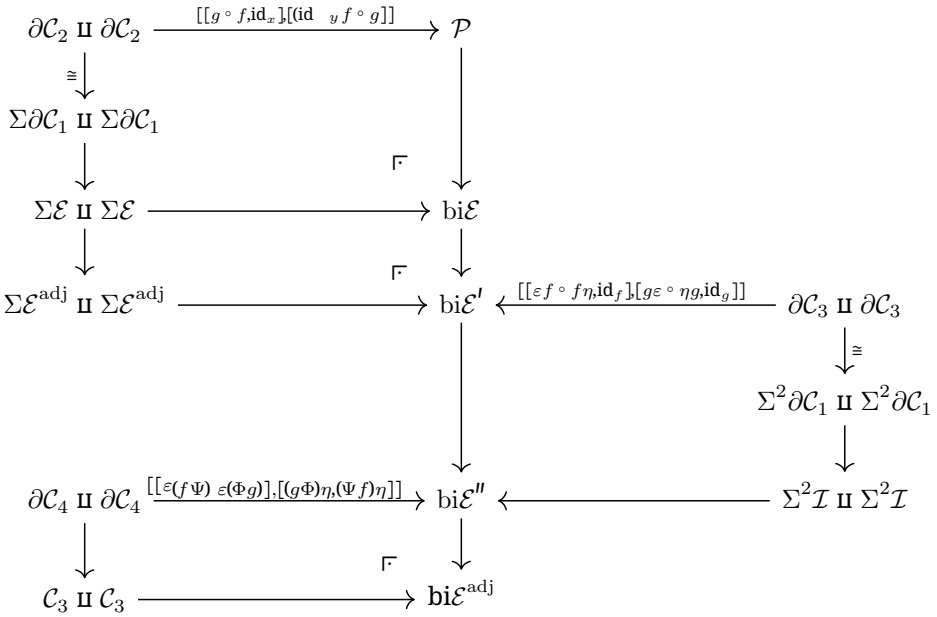
按照设计，双等价的步行对象 $\mathrm{bi}\mathcal{E}$ 以如下意义检测双等价。

注 1.3.13。 3-范畴 $\mathcal{C}$ 中的 1-态射 $F\colon A \to B$ 是双等价，当且仅当在 3-范畴的提升问题中存在一个解



我们还可以确定指标形状——记作 $\mathrm{bi}\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ ——它为 3-范畴中的伴随双等价提供参数。

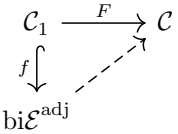
构造 1.3.14 （Gurski 的双伴随双等价）。 我们将 $\mathrm{bi}\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 记作 walking 双等价，它由以下迭代推出得到



这里， $\partial\mathcal{C}_4$ 表示由两个平行的 3-态射构成的 3-范畴，最后一个垂直映射是两个典范折叠映射 $\partial\mathcal{C}_4 \to \mathcal{C}_3$ 之和，该映射将这两个 3-态射识别起来。相反，前两个左侧（非同构）垂直映射是典范映射的悬挂，它们在构造 1.2.8 和 1.2.10 中分别将 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 定义为推出；右侧（非同构）垂直映射则是典范映射 $\partial\mathcal{C}_1 \hookrightarrow \mathcal{I}$的迭代悬挂。

3-范畴 bi$\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 旨在刻画双伴随双等价：

备注 1.3.15。 3-范畴 $\mathcal{C}$中的 1-态射 $F\colon A \to B$是双等价，当且仅当 3-范畴的提升问题存在解



与之前一样，尽管双等价和双伴随双等价定义的是同一概念，但在某种意义上，双伴随双等价的概念比基本的双等价更加相干。这一事实的精确表述将在命题 1.4.9 和猜想 1.4.10 中给出；届时我们将讨论 bi$\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 被猜想是一个可缩的 3-范畴，而 bi$\mathcal{E}$ 则不是。

旁论 1.3.16。 3-范畴中存在若干种双伴随的变体，也就是说，它们推广了（双伴随）双等价的概念，但其中出现的 2-胞和 3-胞并不一定可逆，即使是在弱意义下也不一定。这些变体包括 [Gur12，定义 2.1], [Ara22，定义 6.2], [Lac00], [Ver11，例 1.1.7], [Kel89，§6], [Pst22，§3]。

1.4. **范畴之间的等价 n-范畴以及在一个($n+1$)-范畴中的等价**。在探讨了低阶 n-范畴（ $n = 0$、1、2、3）中适当的相同性概念的含义之后，我们现在可以讨论任意 n阶的情形了。不出所料，要建立这一概念，需要通过归纳法逐步构建，并以先前的概念和术语为基础，因此我们先约定如下。我们遵循以下约定：

- 关系 $\simeq_{-1}$ 表示相等，关系 $\simeq_0$ 表示同构，关系 $\simeq_1$ 表示等价，关系 $\simeq_2$ 表示双等价。

- (−1)$\mathcal{C}$at 是集合 $\{\varnothing, \{*\}\}$， $0\mathcal{C}$at 是范畴 $\mathcal{S}$et， $1\mathcal{C}$at 是范畴 $\mathcal{C}$at。
- $\mathcal{E}_{-1}$ 是 $\mathcal{C}_0$， $\mathcal{E}_0$ 是 $\mathcal{I}$， $\mathcal{E}_1$ 是 $\mathcal{E}$ ，而 $\mathcal{E}_2$ 是 bi$\mathcal{E}$。

在采用这些约定，并假设已知（ $n-1$）-范畴和（ $n-1$）-函子的概念、范畴（ $n-1$）$\mathcal{C}$at、（ $n-1$）-范畴之间的等价 $n-1$的概念，以及 n范畴中的（ $n-1$）等价概念 $\simeq_{(}n-1$）之后，我们将通过对 $n > 0$ 归纳，回顾 n-范畴和 n-函子的概念、范畴 $n\mathcal{C}$at、 n-范畴之间的 n-等价概念$\simeq_n$ ，以及（ $n+1$）-范畴中的 n-等价概念 $\simeq_n$。

鉴于这些定义具有归纳性质，要想在本节中对某个 n 下的某些内容 （例如定义 1.4.1）有所理解，就必须能够理解 $n-1$ 下本节中的所有内容 （例如定义 1.4.3）。为方便读者，我们列出一张表，总结不同 n 取值下若干关键定义之间的依赖关系：

概念			定义于		
集合的同构	=	0-范畴之间的0-等价	定义1.1.2	=	定义 1.4.1 for $n = 0$
范畴中的同构	=	1-范畴中的0-等价	定义1.1.8	=	定义 1.4.3 for $n = 0$
范畴之间的等价	=	1-范畴之间的1-等价	定义 1.2.1	=	定义 1.4.1 对于 $n = 1$
2-范畴中的等价	=	2-范畴中的1-等价	定义 1.2.5	=	$n = 1$ 的定义 1.4.3
2-范畴的双等价	=	2-范畴的 2-等价	定义 1.3.1	=	$n = 2$ 的定义 1.4.1
3-范畴中的双等价	=	3-范畴中的 2-等价	定义 1.3.8	=	关于 $n = 2$ 的定义 1.4.3
		3-范畴之间的 3-等价			关于 $n = 3$ 的定义 1.4.1
		4-范畴中的 3-等价			$n = 3$ 的定义 1.4.3
		4-范畴之间的 4-等价			$n = 4$ 的定义 1.4.1
		5-范畴中的 4-等价			$n = 4$ 的定义 1.4.3
		...			...
		n-范畴之间的 n-等价			任意 n 的定义 1.4.1
		($n + 1$)-范畴中的 n-等价			任意 n 的定义 1.4.3
		...			...

1.4.1. n-范畴。 遵循将 0-范畴视为集合的约定（并由此恢复 1-范畴是一个范畴这一事实），回顾一下，例如据 [EK66, §IV.2]（另见 [Ehr63]），一个 n-范畴$\mathcal{C}$ 由以下部分组成

- 一个对象集 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,
- 对于每个 c, $c\prime\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$一个同态-($n-1$)-范畴 $\mathcal{C}(c,\ c\prime)$,
- 对于每个 $c \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，一个恒等 ($n-1$)-函子

$$\mathrm{id}_c\colon \{*\} \to \mathcal{C}(c,c)$$

- 并且，对于每个 c, $c\prime c\prime\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，一个 复合 ($n-1$)-函子

$$\circ\colon \mathcal{C}(c,c') \times \mathcal{C}(c',c'') \to \mathcal{C}(c,c''),$$

满足与（1.1.4）和（1.1.5）相同的公理，只不过是在（ $n-1$）-范畴中而非集合中来理解。

特别地，一个 n-范畴 $\mathcal{C}$的数据也确定了一族集合 $q\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}$，对于 $0 < q \le n$，按照约定，0 $\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} = \mathrm{Ob}\ \mathcal{C}$是 $\mathcal{C}$ 的对象集，而 $q\mathrm{Mor}\ \mathcal{C}$是由以下给出的 q-态射集合

$$q\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} := \coprod_{c,c'\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}} ((q-1)\,\mathrm{Mor})(\mathcal{C}(c,c')).$$

除了其他结构算子外，还可以得到 复合算子 $\circ_p\colon q\mathrm{Mor}\ \mathcal{C}\times_{p\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}} q\mathrm{Mor}\ \mathcal{C} \to q\mathrm{Mor}\ \mathcal{C}$，其对所有 $q > p \ge 0$ 以及满足 $s_p(g) = t_p(f)$ 的所有 q-胞腔对（ f, g）均有定义。给定 n-范畴 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$，一个 n-函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$由以下构成

- 一个对象上的函数

$$F\colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$$

- 以及对每个 $c, c\prime\in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，在 hom-($n-1$)-范畴上定义的一个 ($n-1$)-函子

$$F_{c,c'}\colon \mathcal{C}(c,c') \to \mathcal{D}(Fc, Fc'),$$

满足从 (1.1.6) 和 (1.1.7) 在 ($n-1$)-范畴中（而非集合中）解读时的函子性。

1.4.2. n-等价 n-范畴。现在我们针对 $n \geq 0$ 归纳定义 n-范畴之间的 $\simeq_n$ n-等价关系。这种方法与 [Str87, §1] 中的方法一致，同时也是富化语境中通常采用的等价概念，例如见 [Kel82, §1.11] 或 [JY21, 定义 1.3.11]。

定义 1.4.1 （n-范畴的 n-等价）。 范畴之间的一个 n-函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个 n-等价，记作 $F\colon \mathcal{A} \simeq_n \mathcal{B}$，如果

（1） n-函子 F 在对象上到等价为止满射，即对于每个对象 $b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$，都存在一个对象 $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ 和一个（ $n-1$）-等价[4]

$$b \simeq_{n-1} Fa \text{ in the } n\text{-category } \mathcal{B}.$$

（2） n-函子 F 是一个逐态射 （ $n-1$）-等价，即对于所有对象 a、$a' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$， n-函子 F 诱导出（ $n-1$）-等价

$$F_{a,a'}\colon \mathcal{A}(a,a') \simeq_{n-1} \mathcal{B}(Fa,Fa') \text{ of } (n-1)\text{-categories.}$$

两个 n-范畴 是 n-等价的，记作 $\mathcal{A} \simeq_n \mathcal{B}$，如果它们之间存在一个 n-等价 .

现在我们来探讨 n-等价如何保证某种逆的存在。和之前一样，我们不应期待 n-范畴之间的等价一定有逆（参见备注 1.3.6），但一个方向总是成立的。 [GPS95, §1],中提到了以下内容，参见 [Str87]。

备注 1.4.2。若存在一个n-函子 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 以及 ($n-1$)-等价，则 n-函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$在 n-范畴之间是一个 n-等价

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \simeq_{n-1} G \circ F \text{ in } n\mathcal{C}at(\mathcal{A},\mathcal{A}) \text{ and } \varepsilon\colon F \circ G \simeq_{n-1} \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \text{ in } n\mathcal{C}at(\mathcal{B},\mathcal{B}).$$

($n+1$)-范畴中的 n-等价这一概念见 [Str87, §1]。

定义 1.4.3 （($n+1$)-范畴 $\mathcal{C}$中的 n-等价）。 $(n+1)$-范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个 1-态射 $F\colon A \to B$是一个 n-等价，当且仅当存在一个 1-态射 $G\colon B \to A$ 以及 $(n-1)$-等价

$$\eta\colon \mathrm{id}_A \simeq_{n-1} G \circ F \text{ in } \mathcal{C}(A,A) \text{ and } \varepsilon\colon F \circ G \simeq_{n-1} \mathrm{id}_B \text{ in } \mathcal{C}(B,B).$$

$\mathcal{C}$ 中的两个对象称为 n-等价，记作 $A \simeq_n B$，如果它们之间存在一个 n-等价。

1.4.3. 一个 k-范畴的基本 n-范畴。 判断 $(n+1)$-范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个对象 A 和 B 是否 n-等价，可以转而判断它们在适当的 n-范畴$\Pi_n\mathcal{C}$ 中是否构成一个 ($n-1$)-等价；我们现在来描述这种范畴。

定义 1.4.4。设 $n > 0$。给定一个 ($n+1$)-范畴 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}$ 的基本 n-范畴是如下的n-范畴

$$\Pi_n\mathcal{C} = ((\Pi_{n-1})_*)\mathcal{C}$$

通过沿着保积函子 $\Pi_{n-1}\colon n\mathcal{C}$ 在 $\to (n-1)\mathcal{C}$ 处作基变换得到。这定义了一个保积函子 $\Pi_n\colon (n+1)\mathcal{C}$ 处 $\to n\mathcal{C}$ 处。更明确地说，其对象集为

$$\mathrm{Ob}(\Pi_n\mathcal{C}) = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$$

其同态 ($n-1$)-范畴为

$$(\Pi_n\mathcal{C})(c,c') = \Pi_{n-1}(\mathcal{C}(c,c')). \tag{1.4.5}$$

对于 $0 \leq k < n$， $\mathcal{C}$ 的 基本 k-范畴 通过归纳法定义为 ($k+1$)-范畴

$$\Pi_{k+1}\mathcal{C} = (\Pi_k)_*\mathcal{C} \cong \Pi_{k+1}(\Pi_{k+2}(\ldots((\Pi_n\mathcal{C})\ldots))).$$

[4]请注意， $\mathcal{B}$中的 ($n-1$)-等价是在前文中定义的（对于 $n \leq 2$），或者在定义 1.4.3 中定义的（对于 $n \geq 2$）。

以下结论是定义的推论。

命题 1.4.6. 设 $n \geq 0$。给定一个 $(n+1)$-范畴 $\mathcal{C}$ 和 $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$，以下条件等价。

(1) 存在一个 n-等价

$$A \simeq_n B \text{ in the } (n+1)\text{-category } \mathcal{C}.$$

(2) 对某个——因而对所有—— $0 \leq k < n$，存在一个 k-等价

$$A \simeq_k B \text{ in the fundamental } (k+1)\text{-category } \Pi_{k+1}\mathcal{C}.$$

证明。我们对 $n = 0$ 使用归纳法证明此命题，并进一步假设 $k = n-1$，以简化表述。k 的其他取值也可类似地处理，只需对 k 再作归纳。

归纳的基例，即 $n = 1$ 的情形，是注 1.1.14；现在假设 $n > 1$。令 $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$。存在一个 n-等价

$$A \simeq_n B \text{ in the } (n+1)\text{-category } \mathcal{C}$$

这等价于存在 $F \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}(A,B)$ 和 $G \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}(B,A)$，使得存在 $(n-1)$-等价

$$G \circ F \simeq_{n-1} \mathrm{id}_A \text{ in the } n\text{-category } \mathcal{C}(A,A)$$
$$\text{and } F \circ G \simeq_{n-1} \mathrm{id}_B \text{ in the } n\text{-category } \mathcal{C}(B,B).$$

这 根据归纳假设，这又等价于存在 $(n-2)$-等价 es

$$G \circ F \simeq_{n-2} \mathrm{id}_A \text{ in the } (n-1)\text{-category } \Pi_{n-1}(\mathcal{C}(A,A)) = (\Pi_n\mathcal{C})(A,A)$$
$$\text{and } F \circ G \simeq_{n-2} \mathrm{id}_B \text{ in the } (n-1)\text{-category } \Pi_{n-1}(\mathcal{C}(B,B)) = (\Pi_n\mathcal{C})(B,B).$$

最后，这等价于存在一个 $(n-1)$-等价

$$A \simeq_{n-1} B \text{ in the } n\text{-category } \Pi_n\mathcal{B}.$$

证明至此完成。 □

这一事实说明，定义 1.4.1 与 [Tam99], [Sim12, §20], [Pao19, §§6.1-6.2] 中关于弱 n-范畴等价的处理方法是一致的。

1.4.4. 行走 n-等价。我们要寻找一种指标形状——记作 $n\mathcal{E}$ ——用以参数化 n-范畴中的 n-等价。我们遵循如下约定：$-1\mathcal{E} = \mathcal{C}_0$，我们有$\mathcal{I}$、$\mathcal{E}$和双$\mathcal{E}$恰好分别是 $0\mathcal{E}$、$1\mathcal{E}$和 $2\mathcal{E}$；假设已知如何定义（$n-1$）$\mathcal{E}$，我们便可为一般的 n定义$n\mathcal{E}$。

给定一个 n-范畴 $\mathcal{D}$，我们将由两个对象和一个非平凡的同-n-范畴 $\mathcal{D}$ 构成的 $n+1$ 悬挂 $(n+1)$-范畴记作 $\Sigma\mathcal{D}$（更多详情参见例如 [AM20, §B.6.5]）。这定义了一个函子 $\Sigma\colon n\mathcal{C}\mathrm{at} \to (n+1)\mathcal{C}\mathrm{at}$。

构造 1.4.7（行走 n-等价）。设 $n > 0$。我们将 $n\mathcal{E}$ 称为行走n-等价，它由 $\mathcal{P}$ 作为以下 $(n+1)$-范畴的推出得到

$$\begin{array}{ccc}
\partial\mathcal{C}_2 \amalg \partial\mathcal{C}_2 & \xrightarrow{[[\mathrm{id}_a, g\circ f],[f\circ g, \mathrm{id}_b]]} & \mathcal{P} \\
\cong\downarrow & & \\
\Sigma\partial\mathcal{C}_1 \amalg \Sigma\partial\mathcal{C}_1 & & \downarrow \\
\downarrow & \ulcorner & \\
\Sigma\,(n-1)\,\mathcal{E} \amalg \Sigma\,(n-1)\,\mathcal{E} & \longrightarrow & n\mathcal{E}
\end{array}$$

这里，左侧的（非同构）垂直映射是两个典范映射的悬挂的余积；根据归纳假设，这些典范映射定义了 $(n-1)\mathcal{E}$。

n-范畴 $n\mathcal{E}$ 旨在检测 n-等价：

备注 1.4.8。 $(n+1)$-范畴 $\mathcal{C}$ 中的 1-态射 $F\colon A \to B$ 是 n-等价，当且仅当存在一个针对 $(n+1)$-范畴的提升问题的解

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathcal{C} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \nearrow & \\ n\mathcal{E} & & \end{array}$$

可以用与命题 1.3.2 中类似的技巧证明以下结论。

命题 1.4.9。 设 $n > 0$。 $(n+1)$-范畴 $n\mathcal{E}$ 不可缩，即

$$n\mathcal{E} \not\simeq_n \mathcal{C}_0.$$

出于抽象理由，我们知道，对所有 n，都存在一个有两个对象的可缩 $(n+1)$-范畴 $\widetilde{n\mathcal{E}}$。例如，可以将唯一映射 $\mathcal{C}_0 \amalg \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_0$ 分解为一个余纤维化，后接一个弱等价

$$\mathcal{C}_0 \amalg \mathcal{C}_0 \hookrightarrow \widetilde{n\mathcal{E}} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{C}_0$$

在 [LMW10 的定理 6.1] 中的 $n\mathcal{C}\mathrm{at}$ 典范模型结构中。

然而，我们尚不了解如何显式构造我们在 $\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 中讨论过的 $n = 1$，使其成为 $(n+1)$-范畴 $\widetilde{n\mathcal{E}}$。即使对于 $n = 2$，也可以考虑候选对象 $\mathrm{bi}\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$；它很可能是可缩的，但我们尚不了解其证明。

猜想 1.4.10。 3-范畴$\mathrm{bi}\mathcal{E}^{\mathrm{adj}}$ 是可缩的，也就是说，存在一个3-范畴之间的等价

$$\mathrm{bi}\mathcal{E}^{\mathrm{adj}} \simeq_3 \mathcal{C}_0.$$

1.5. **ω-范畴的等价及其在 ω-范畴内部的等价**。

1.5.1. **ω-范畴。** n-范畴的概念预设了直至 n 维的态射，而允许所有维数 $k \geq 0$ 上都有胞腔，则引出了 ω-范畴的概念。关于 ω-范畴定义的传统方法，读者可参阅例如 [Str87, §1]；此处我们简要回顾其主要特征。

ω-范畴 $\mathcal{C}$ 的数据由一族集合 $q\mathrm{Mor}\ \mathcal{C}, q \geq 0$组成，其中 $0\ \mathrm{Mor}\mathcal{C}$ 称为 $\mathcal{C}$ 的对象 集合，而 $\mathrm{Mor}\mathcal{C}, q > 0$是 $\mathcal{C}$ 的 q-胞 或 q-箭头 或维数为 q 的胞腔，此外还包括：

- 源 和目标 算子 $s_p, t_p\colon q\mathrm{Mor}\mathcal{C} \to p\mathrm{Mor}\mathcal{C}$，对所有 $q > p \geq 0$均成立；
- 恒等 算子 $\mathrm{id}_q\colon p\mathrm{Mor}\mathcal{C} \to q\mathrm{Mor}\mathcal{C}$，对所有 $q > p \geq 0$均成立；
- 复合 算子 $\circ_p\colon q\mathrm{Mor}\ \mathcal{C} \times_{p\,\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}} q\mathrm{Mor}\ \mathcal{C} \to q\mathrm{Mor}\ \mathcal{C}$，对所有 $q > p \geq 0$ 以及所有满足 $s_p(g) = t_p(f)$ 的（ f, g）对，都有定义。

注意，这等价于为每一对 $(p\mathrm{Mor}\mathcal{C}, q\mathrm{Mor}\mathcal{C})$，$q > p \geq 0$赋予范畴的结构（但暂不要求满足公理）。对于所有 $r > q > p \geq 0$，我们要求三元组 $(p\mathrm{Mor}\ \mathcal{C}, q\mathrm{Mor}\mathcal{C}, r\ \mathrm{Mor}\mathcal{C})$ 连同所有相关的源、目标、恒等和复合算子构成一个 2-范畴。特别地，对于每个 $c, c' \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$，都有一个同态$\omega$-范畴 $\mathcal{C}(c, c')$。

一个 ω-函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$是指从 ω-范畴 $\mathcal{C}$到 $\mathcal{C}'$的一族映射 $F_q\colon q\mathrm{Mor}\ \mathcal{C} \to q\mathrm{Mor}\,\mathcal{C}'$，它们保留 $q \geq 0$ 的源、目标、恒等和复合。我们将（大）范畴中的小型 ω-范畴及 ω-函子组成的范畴记作 $\omega\mathcal{C}\mathrm{at}$。

在 ω-范畴 $\mathcal{C}$ 中，若一个胞是低维胞的恒等胞，则称其为平凡的。若 ω-范畴中的所有 q-胞腔对于 $q > n$ 都是平凡的，则它恰好是一个 n-范畴；而 ω-范畴之间的函子恰好简化为 n-函子。

1.5.2. ω-等价的 ω-范畴。以下内容摘自 [AL20, §1.2]（另见 [Lou21, 定义 1.1.7]）。

定义 1.5.1（可逆性结构）。设 $\mathcal{C}$ 为一个 ω-范畴，S 为 $\mathcal{C}$的一组态射。若对于每个 $k \geq 1$ 以及其中的每个 k-胞 $\varphi\colon \alpha \to \beta$，都存在 S 中的一个 k-胞 $\gamma\colon \beta \to \alpha$ 和 $(k+1)$-胞，则称 S 为一种可逆性结构。

$$\Phi\colon \mathrm{id}_\alpha \to \gamma \circ_{k-1} \varphi \quad \text{and} \quad \Psi\colon \varphi \circ_{k-1} \gamma \to \mathrm{id}_\beta\,.$$

Th以下术语与 [LMW10, 定义 4.2]（以及 [ABG$^+$]）一致 .

定义 1.5.2（ω-范畴 $\mathcal{C}$中的 ω-等价）。ω-范畴$\mathcal{C}$中的一个 1-态射 $F\colon A \to B$称为一个 ω-等价，记作 $F\colon A \simeq_\omega B$，如果存在一个包含 F的 ω-范畴 $\mathcal{C}$ 中的可逆性结构。若 $\mathcal{C}$ 中的两个对象 A 和 B 之间存在 ω-等价，则称它们是 ω-等价的，记作 $A \simeq_\omega B$。

很容易验证对象在 ω-范畴 $\mathcal{C}$ 中具有 ω-等价关系 $\simeq_\omega$ 是一种等价关系。

以下内容还原了 [LMW10，定义 4.7] 中的弱等价概念（以及 ω-等价概念，见 [ABG$^+$]）。

定义 1.5.3（ω-范畴的 ω-等价）。范畴之间的 ω-函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一种 ω-等价，记作 $F\colon \mathcal{A} \simeq_\omega \mathcal{B}$，当且仅当

(1) ω-函子 F 在对象上是满射（至 ω-等价），这意味着对于每个对象$b \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{B}$，都存在一个对象 $a \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$以及一个 ω-等价

$$b \simeq_\omega Fa \text{ in } \mathcal{B}$$

(2) 且 ω-函子 F 在-态射上是满射（至 ω-等价），这意味着，对于所有k-态射 x, x'（属于 $\mathcal{A}$）以及所有 $(k+1)$-胞腔 $\beta\colon F_k x \to F_k x'$（属于 $\mathcal{B}$），存在一个 $(k+1)$-胞腔 $\alpha\colon x \to x'$（属于 $\mathcal{A}$），使得

$$\beta \simeq_\omega F_{k+1}\alpha \quad \text{in} \quad \mathcal{B}(s_0(\beta), t_0(\beta))(\dots)(s_k(\beta), t_k(\beta)).$$

两个 ω-范畴 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 ω-等价的，记作 $\mathcal{A} \simeq_\omega \mathcal{B}$，如果它们之间存在一个 ω-等价。

备注 1.5.4。在定义 1.5.3 的语境中，条件 (2) 可以替换为

(2') ω-函子 F 是逐态射的 ω-等价，这意味着对于每个 $a, a' \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$，态射$F$ 诱导出一个 ω-等价

$$F_{a,a'}\colon \mathcal{A}(a, a') \simeq_\omega \mathcal{B}(Fa, Fa') \text{ of } \omega\text{-categories}\,.$$

对于一个 ω-函子 F，具有逆意味着它是 ω-范畴的等价:

注 1.5.5。如果存在一个 ω-函子 $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ 和 ω-等价，则 ω-函子 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是一个 ω-等价

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{A}} \simeq_\omega G \circ F \text{ in } \omega\mathcal{C}at(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \text{ and } \varepsilon\colon F \circ G \simeq_\omega \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \text{ in } \omega\mathcal{C}at(\mathcal{B}, \mathcal{B}).$$

再说一次，一般而言，我们不应指望 ω-范畴之间的等价通常会有一个逆（参见注释 1.3.6）。

1.5.3. 游走的 ω-等价。我们要寻找一种指标形状——记作 $\omega\mathcal{E}$ ——用来参数化 ω-范畴中的 ω-等价。在文献中，同一构造也以 R_1 的形式出现，见 [AL20，注释 4.4]。 $\omega\mathcal{E}$ 的范畴结构本质上编码了由 [Che07], 给出的见证集合所确定的结构、 [AL20，注释 4.4] 中的可逆性结构，以及 [Ric20，§1.4] 中的拟可逆结构。

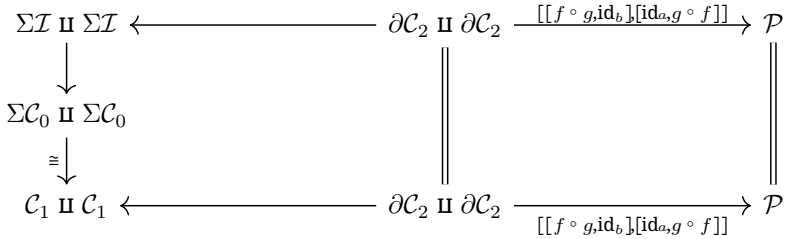
构造 1.5.6。 对 $n \geq 0$ 进行归纳，可得一个映射

$$(n+1)\mathcal{E} \to n\mathcal{E}.$$

事实上，对于 $n = 0$ ，这是由以下映射

$$\mathcal{E} \to \mathcal{I}$$

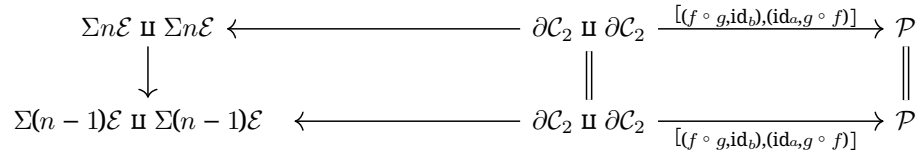
在跨度层级的推出所诱导的



而对于 $n > 1$ ，它是映射

$$(n+1)\mathcal{E} \to n\mathcal{E}.$$

由跨度的映射在推出层级诱导



构造 1.5.7 （行走 ω-等价）。 我们将 $\omega\mathcal{E}$ 记作行走 ω-等价，它是在 ω-范畴中对构造 1.5.6 的映射取极限得到的

$$\omega\mathcal{E} := \lim[\quad \cdots \to (n+1)\mathcal{E} \to n\mathcal{E} \to \cdots \to 4\mathcal{E} \to 3\mathcal{E} \to \mathrm{bi}\mathcal{E} \to \mathcal{E} \to \mathcal{I} \quad].$$

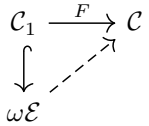
下面说明 $\omega\mathcal{E}$ 与 $n\mathcal{E}$之间的关系。考虑$\tau^{\mathrm{i}}_{\leq n}\colon \omega\mathcal{C}$在 $\to n\mathcal{C}$处的智能截断函子，它来自 [AM20, §1.2], ，是典范包含 $n\mathcal{C}$在 $\hookrightarrow \omega\mathcal{C}$处的左伴随。粗略地说，函子 $\tau^{\mathrm{i}}_{\leq n}$ 普遍地强制维数为 $n+1$ 的所有态射都成为等式。

注 1.5.8。 若 $\tau^{\mathrm{i}}_{\leq n}\colon \omega\mathcal{C}$在 $\to n\mathcal{C}$处表示来自 [AM20, §1.2], 的智能截断，则对每个 n ，都有一个 n-范畴的同构

$$\tau^{\mathrm{i}}_{\leq n}\omega\mathcal{E} \cong n\mathcal{E}.$$

ω-范畴 $\omega\mathcal{E}$ 旨在检测 ω-等价：

注记 1.5.9。 $F\colon A \to B$是 ω-范畴 $\mathcal{C}$中的一个 1-态射，当且仅当存在一个 ω-等价，使得在 $\omega\mathcal{C}$at 中，提升问题有解



以下结论可以使用与命题 1.3.2 类似的技巧证明。

命题 1.5.10。 注意到 $\omega\mathcal{E}$ 不是可缩的，即

$$\omega\mathcal{E} \not\simeq_\omega \mathcal{C}_0.$$

1.5.4. 可能相干的自由 ω-等价。 出于抽象理由（参见 [LMW10，第 4.7] 节），我们知道存在一个带有两个对象的可缩 ω-范畴 $\widehat{\omega\mathcal{E}}$，并且将在即将发表的手稿 [ABG$^+$] 中证明，这样的 ω-范畴 $\widehat{\omega\mathcal{E}}$ 将自动参数化ω-等价。

然而，我们并不知道文献中是否已有这个 ω-范畴的模型，因此在此提出一个候选模型 $\widehat{\omega\mathcal{E}}$。这项工作受到与 Rice 围绕 [Ric20，定义 11] 的讨论，以及与 Ara、Métayer 和 Mimram 的讨论的启发。它也可能与 [HL23，构造 4.29]有关。

构造 1.5.11。 我们将由三个态射 $f\colon a \to b$、$g\colon b \to a$ 和 $g'\colon b \to a$生成的自由范畴记为 $\mathcal{Q}$。这是将 f分别与 g和 g'“首尾相接”粘合，并生成所有可能的复合而得到的。对象集为 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{Q} = \{a, b\}$。范畴 $\mathcal{Q}$可以理解为以下范畴的推出

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{C}_1 \amalg \partial\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}} \amalg \partial\mathcal{C}_1^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathcal{C}_0 \amalg \mathcal{C}_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{C}_1 \amalg \mathcal{C}_1^{\mathrm{op}} \amalg \mathcal{C}_1^{\mathrm{op}} & \longrightarrow & \mathcal{Q} \end{array}$$

构造 1.5.12. 对于 $n \geq 1$，我们归纳地定义 $\widehat{\omega\mathcal{E}}^{(n)}$ 为一个 ω-范畴（事实上是一个n-范畴），并附带一个映射 $\widehat{\omega\mathcal{E}}^{(n)} \to \widehat{\omega\mathcal{E}}^{(n+1)}$:

- 令集合 $\widehat{\omega\mathcal{E}}_{(0)}$ 为 $\mathcal{C}_0 \amalg \mathcal{C}_0$，并令 $\widehat{\omega\mathcal{E}}_{(1)}$ 为 $\mathcal{Q}$。
- 对于 $n \geq 2$，令 $\widehat{\omega\mathcal{E}}_{(n)}$ 为以下 ω-范畴的推出

$$\begin{array}{ccc} \Sigma(\widehat{\omega\mathcal{E}}^{(n-2)}) \amalg \Sigma(\widehat{\omega\mathcal{E}}^{(n-2)}) & \xrightarrow{[[g\circ f, \mathrm{id}_a],[f\circ g', \mathrm{id}_b]]} & \widehat{\omega\mathcal{E}}^{(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Sigma(\widehat{\omega\mathcal{E}}^{(n-1)}) \amalg \Sigma(\widehat{\omega\mathcal{E}}^{(n-1)}) & \longrightarrow & \widehat{\omega\mathcal{E}}^{(n)} \end{array}$$

构造 1.5.13 （行走 ω-等价）。 我们将 $\omega\mathcal{E}$ 称为可能相干的行走ω-等价，它是 ω-范畴中的余极限

$$\widehat{\omega\mathcal{E}} := \mathrm{colim}[\quad \cdots \leftarrow \widehat{\omega\mathcal{E}}^{(n+1)} \leftarrow \widehat{\omega\mathcal{E}}^{(n)} \leftarrow \cdots \leftarrow \widehat{\omega\mathcal{E}}^{(3)} \leftarrow \widehat{\omega\mathcal{E}}^{(2)} \leftarrow \widehat{\omega\mathcal{E}}^{(1)} \quad].$$

显然， ω-范畴 $\omega\mathcal{E}$ 是一个每个维数上都有非平凡态射的 ω-范畴，因此它不是任何有限 n 的 n-范畴。不过，至少有两种自然的方式可以用一个 n-范畴来“近似”它：考虑典范包含 $i_n\colon n\mathcal{C}\mathrm{at} \to \omega\mathcal{C}\mathrm{at}$ 的左伴随和右伴随，详见 [AM20, §1.2]。我们已经提到过左伴随，即智能截断 $\tau_{\leq n}\colon \omega\mathcal{C}\mathrm{at} \to n\mathcal{C}\mathrm{at}$；现在也来考虑右伴随，即粗糙截断 $\tau^{\mathrm{b}}_{\leq n}\colon \omega\mathcal{C}\mathrm{at} \to n\mathcal{C}\mathrm{at}$。本质上，函子 $\tau_{\mathrm{b}\leq n}$会遗忘所有维数高于 n 的态射。

⌒注1.5.14。根据构造， $\omega\mathcal{E}$ 的粗糙 n-截断与构造 1.5.12 中的第 n 层同构，即

$$\tau^{\mathrm{b}}_{\leq n}\widehat{\omega\mathcal{E}} \cong \widehat{\omega\mathcal{E}^{(n)}}.$$

⌒相反，计算 $\omega\mathcal{E}$ 的智能 n-截断并非易事。对于较低层次，可以证明存在如下同一关系

$$\tau^{\mathrm{i}}_{\leq 0}\widehat{\omega\mathcal{E}} \cong \mathcal{C}_0 \quad \text{and} \quad \tau^{\mathrm{i}}_{\leq 1}\widehat{\omega\mathcal{E}} \cong \mathcal{I} \quad \text{and} \quad \tau^{\mathrm{i}}_{\leq 2}\widehat{\omega\mathcal{E}} \simeq \mathcal{E}^{\mathrm{adj}}. \tag{1.5.15}$$

计算 $\tau_{\mathrm{i}_{\leq 0}}\widehat{\omega\mathcal{E}}$只需直接验证。计算 $\tau^{\mathrm{i}}_{\leq 1}\widehat{\omega\mathcal{E}}$则依赖这样一个事实：范畴中的同构可以按照注 1.1.9 中的讨论来描述。计算 $\tau^{\mathrm{i}}_{\leq 2}\widehat{\omega\mathcal{E}}$则已颇为微妙；下面简要勾勒一种论证，将细节留给有兴趣的读者。若$c^{\natural}\colon \mathcal{S}\mathrm{et}^{t\Delta^{\mathrm{op}}}{}_{(\infty,\,2)} \to 2\mathcal{C}\mathrm{at}$ 表示 OR21a 的构造 4.8], 中的左 Quillen 函子，则可以得到双等价

$$\tau^{\mathrm{i}}_{\leq 2}\widehat{\omega\mathcal{E}} \simeq c^{\natural}\left(\Delta[3]_{\mathrm{eq}} \underset{\Delta[1]_t \amalg \Delta[1]_t}{\amalg} (\Delta[0] \amalg \Delta[0])\right) \simeq c^{\natural}\Delta[0] \cong \mathcal{C}_0 \simeq \mathcal{E}^{\mathrm{adj}}.$$

⌒我们想知道 $\omega\mathcal{E}$ 是否可缩：

⌒**问题 1.5.1.** ω-范畴 $\omega\mathcal{E}$ 是否可缩，即是否存在一个 ω-等价

$$\widehat{\omega\mathcal{E}} \simeq_{\omega} \mathcal{C}_0 \text{ of } \omega\text{-categories?}$$

⌒ $\omega\mathcal{E}$ 的潜在可缩性可以用以下几种等价方式表述。

命题 1.5.16。 以下几种说法等价。

(1) 存在一个 ω-等价

$$\widehat{\omega\mathcal{E}} \simeq_{\omega} \mathcal{C}_0 \ \textit{of } \omega\textit{-categories.}$$

(2) 对所有 $n \geq 0$ ，都存在一个 n-等价

$$\tau^{i}_{\leq n}\widehat{\omega\mathcal{E}} \simeq_{n} \mathcal{C}_0 \ \textit{of } n\textit{-categories.}$$

证明。 回顾 [LMW10, 定理 4.39] （分别是 [LMW10, 定理 6.1]）中的结果：在 $\omega\mathcal{C}$at（分别是 $n\mathcal{C}$at）上存在典范模型结构，其中每个对象都是纤维化的，且弱等价恰好是定义 1.5.3 中的 ω-范畴等价（分别是定义 1.4.1 中的 ω-范畴等价）。(1) 推出 (2) 是以下事实的推论：$\tau^{\mathrm{i}}_{\leq n}\colon \omega\mathcal{C}\mathrm{at} \to n\mathcal{C}$ at 是左 Quillen 函子，且 $\widehat{\omega\mathcal{E}}$按构造是余纤维的。现在我们证明 (2) 推出 (1)。

称存在一个 $\mathcal{C}_0$ 如范畴的等价所述，这等价于说⌒唯一映射 $\omega\mathcal{E} \to \mathcal{C}_0$ 是 $\omega\mathcal{C}$at 中的无圈纤维化。根据 [LMW10 的定理 4.39], 给出的 $\omega\mathcal{C}$at 的生成余纤维化的显式集合，同一陈述等价于求解$k \geq 0$ $\omega\mathcal{C}$ at 中所有如下形式的一般提升问题

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{C}_k & \longrightarrow & \widehat{\omega\mathcal{E}} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C}_k & & \end{array}$$

给定伴随 $i_{k+2} \dashv \tau^{\mathrm{b}}_{\leq k+2}$ 在给定映射 $\partial\mathcal{C}_k \to \widehat{\omega\mathcal{E}}$ 上的余单位的自然性方块

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{C}_k & \longrightarrow & \widehat{\omega\mathcal{E}} \\ \cong\uparrow & & \uparrow \\ \tau^{\mathrm{b}}_{\leq k+2}\partial\mathcal{C}_k & \longrightarrow & \tau^{\mathrm{b}}_{\leq k+2}\widehat{\omega\mathcal{E}} \end{array}$$

我们看到，映射 $\partial\mathcal{C}_k \to \widehat{\omega\mathcal{E}}$ 必须经由 $\tau^{\mathrm{b}}_{\leq k+2}\widehat{\omega\mathcal{E}}$ 分解，因此只需在 $(k+2)\mathcal{C}\mathrm{at}$ 中解决提升问题

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{C}_k & \longrightarrow & \tau^{\mathrm{b}}_{\leq k+2}\widehat{\omega\mathcal{E}} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C}_k & & \end{array}$$

给定同构

$$\tau^{\mathrm{b}}_{\leq k+2}\widehat{\omega\mathcal{E}} \cong \tau^{\mathrm{b}}_{\leq k+2}\tau^{\mathrm{i}}_{\leq k+4}\widehat{\omega\mathcal{E}}$$

只需在 $\mathcal{C}\mathrm{at}$ 中解决提升问题 $(k+2)$

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{C}_k & \longrightarrow & \tau^{\mathrm{b}}_{\leq k+2}\tau^{\mathrm{i}}_{\leq k+4}\widehat{\omega\mathcal{E}} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C}_k & & \end{array}$$

沿伴随 $i_{k+2} \dashv \tau^{\mathrm{b}}_{\leq k+2}$ 转置后，只需解决 $(k+4)$-范畴的提升问题

$$\begin{array}{ccc} \partial\mathcal{C}_k & \longrightarrow & \tau^{\mathrm{i}}_{\leq k+4}\widehat{\omega\mathcal{E}} \\ \downarrow & \nearrow & \\ \mathcal{C}_k & & \end{array}$$

由 (2) 可知，存在等价 $\tau^{\mathrm{i}}_{\leq k+4}\widehat{\omega\mathcal{E}} \simeq_n \mathcal{C}_0$，其对应于 $n = k+4$；又由于 $\partial\mathcal{C}_k \hookrightarrow \mathcal{C}_k$ 是 $(k+4)\mathcal{C}\mathrm{at}$ 中的余纤维化，因此该提升问题有解，如所需。□

由（1.5.15）并结合命题 1.2.2 和 1.3.3，我们知道等价条件（1）和（2）对 $n \leq 2$ 成立，但对于更高的 n，我们尚无证明。

关于.....可能具有可缩性的迹象 $\widehat{\omega\mathcal{E}}$ 如下。

- ω-范畴 $\omega\mathcal{E}$ 的多图形同调 $H_*\omega\mathcal{E}$ 在正次数上消失，而根据 [Gue21，第 4 节，这$\widehat{\ }$是 $\omega\mathcal{E}$ 可缩的必要条件。

- 很可能 ω-范畴 $\widehat{\omega\mathcal{E}}$ 与 [Ric20，定义 11], 中的构造一致；该构造已证明在 [Ric20，定义 21] 的意义下可缩，见 [Ric20，定理 22],$\widehat{\ }$。这很可能是 $\omega\mathcal{E}$ 可缩的必要条件。

不过，根据 [HL23，构造 4.29] 与构造 1.5.13 的关系， [HL23，引理 4.33]有可能意味着问题 1.5.1 的答案是否定的。

2. 弱高阶范畴的等价及其内部等价

本节中，我们假定读者熟悉 Kan复形（我们称之为空间）和拟范畴的基本语言与理论；我们将拟范畴称为 ∞-范畴。特别是，必要时我们会引用有关空间和 ∞-范畴的结果。

在这一前提的基础上，我们将非正式地介绍 (∞, n)-范畴的概念，以及 (∞, n)-范畴之间和 $(\infty, n+1)$-范畴内部适当等价的概念。尽管有时会省略细节，但所有陈述都是严谨的。

遵循这一约定，∞-范畴始终指拟范畴（因此实际上是一个允许内角提升的单纯集合），而 $(\infty, 1)$-范畴则指一般概念，拟范畴只是其一种体现。为了说明这一约定，下面给出一个可能的句子：一个 $(\infty, 1)$-范畴可以由不同的模型呈现。例如，它可以呈现为一个 ∞-范畴，即一个拟范畴，或者一个完全 *Segal* 空间。

我们将继续沿用上一节的做法，用花体字母（如 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B}$、$\mathcal{C}$、$\mathcal{I}$）表示（严格的！）n-范畴。相应地，我们将用手写体字母（如$\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$、$\mathscr{C}$、$\mathscr{I}$）表示（∞, n）-范畴或 ∞-范畴。为展示这一约定，下面列出本节将用到的一些相关示例：

- $n\mathcal{C}$at 表示 n-范畴的（1-）范畴；
- $n\mathscr{C}at$ 表示 n-范畴的 ∞-范畴；
- $(\infty, n)\mathscr{C}at$ 表示（∞, n）-范畴的 ∞-范畴；
- $m\mathcal{S}$Set 表示标记单纯集合的范畴。
- $m\mathcal{S}\mathrm{Set}^{(\infty,\ n)}$ 表示标记单纯集合范畴上关于（∞, n）-范畴的模型结构，其底层的 ∞-范畴为（∞, n）$\mathscr{C}at$;

2.1. （∞, n）-范畴回顾。

2.1.1. （∞, n）-范畴。（$\infty, 0$）-范畴是一个 ∞-群胚，也称为空间。空间组成一个（笛卡尔闭） ∞-范畴（$\infty, 0$）$\mathscr{C}at$。构造它的一种方法，是将 Kan 复形的（笛卡尔） Kan–Quillen 模型结构视为其底层的 ∞- 范畴。

现在设 $n > 0$。假设我们已知什么是（$\infty, n-1$）-范畴，以及由（$\infty, n-1$）-范畴构成的笛卡尔∞-范畴（$\infty, n-1$）$\mathscr{C}at$，现在我们通过对 $n > 0$ 归纳，回顾（∞, n）-范畴的概念以及笛卡尔 ∞-范畴（∞, n）$\mathscr{C}at$。

不失一般性[5]，我们可以假设，对于 $n > 0$，一个（小）（∞, n）-范畴 $\mathscr{C}$特别由以下内容构成：

- 一个对象集 $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$
- 对于每个 $c,\ c\prime \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$一个 *hom*-（$\infty,\ n-1$)-范畴 $\mathscr{C}(c,\ c\prime)$,
- 对于每个 $c \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$，一个恒等算子函数

$$\mathrm{id}_c \colon \{*\} \to \mathscr{C}(c, c) \qquad * \mapsto \mathrm{id}_c$$

- 并且对每个 $c, c\prime\, c\prime\prime \in \mathrm{Ob}\ \mathscr{C}$in the ∞-范畴 $(\infty, n)\mathscr{C}at$，都有一个 复合 1-单纯形

$$\circ \colon \mathscr{C}(c, c') \times \mathscr{C}(c', c'') \to \mathscr{C}(c, c'') \qquad (f, g) \mapsto g \circ f$$

[5]这一表述中的一些特征并非（$\infty,\ n$）-范畴这一概念的内在特征，也就是说，它们在适当的等价概念下并不保持不变；该等价概念将在第 2.2 节中介绍。例如，对象集就是其中之一。尽管这看起来可能是一个潜在的问题，但事实并非如此。

对每个 $c, c', c'', c''' \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$，都满足由 ∞-范畴 $(\infty, n-1)\mathscr{C}at$ 中图表的交换性给出的 (1.1.4) 中的结合律公理

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(c,c') \times \mathscr{C}(c',c'') \times \mathscr{C}(c'',c''') & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathscr{C}(c,c')} \times \circ} & \mathscr{C}(c,c') \times \mathscr{C}(c',c''') \\ {\scriptstyle \circ \times \mathrm{id}_{\mathscr{C}(c'',c''')}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \circ} \\ \mathscr{C}(c,c'') \times \mathscr{C}(c'',c''') & \xrightarrow[\circ]{} & \mathscr{C}(c,c''') \end{array} \tag{2.1.1}$$

对于每个 $c, c' \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$，在 $(\infty, n)\mathscr{C}at$ 这一 ∞-范畴中也满足 (1.1.5) 中的 单位元公理。完整的定义还需要相干同伦来表达复合算子的迭代所具有的结合性和单位性。要使这一点精确化，有多种方法，包括但不限于：如 [BR13 定理 3.11] 中那样，为 $(\infty, n-1)$-范畴采用笛卡尔闭模型结构上的严格丰化范畴；或如 [GH15 §5,6] 中那样，为 $(\infty, n-1)$-范畴采用由 $(\infty, n-1)$-范畴组成的 ∞-范畴进行丰化的 ∞-范畴。

给定一个 (∞, n)-范畴 $\mathcal{C}$，通过对 n 归纳可知，$\mathcal{C}$ 对 $k > 0$ 具有 k-态射，并且沿低维态射有若干复合映射，这与严格情形类似，只是此时公理被大量相干数据所取代。对于这些复合映射，高于 n 维的所有态射都是可逆的。这与以下事实相符：$(\infty,1)$-范畴还原为 ∞-范畴 的概念。

假设 $(\infty, 0)$-函子是空间映射，并假设已知 $(\infty, n-1)$-函子的含义，现在我们通过对 $n > 0$ 进行归纳，回顾 (∞, n)-范畴以及笛卡尔∞-范畴 $(\infty, n)\mathscr{C}at$的概念。给定 (∞, n)-范畴 $\mathscr{C}$和 $\mathscr{D}$，对于 $n \geq 0$，一个 (∞, n)-函子 $F\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$特别由以下内容组成

- 一个对象上的函数

$$F\colon \mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \to \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$$

- 以及对于每个 $c, c' \in \mathrm{Ob}\mathscr{C}$，在同伦-$(\infty, n-1)$-范畴上的一个 $(\infty, n-1)$-函子

$$F_{c,c'}\colon \mathscr{C}(c,c') \to \mathscr{D}(Fc, Fc'),$$

满足 (∞)-范畴 $(\infty, n)\mathscr{C}at$中 (1.1.6) 和 (1.1.7) 的函子性。此外，完整的定义还需要相干同伦，以表达复合算子函子性涉及多于两个输入时，其迭代的结合律和单位律。

(∞, n)-范畴组成一个（笛卡尔闭） ∞-范畴 $(\infty, n)\mathscr{C}at$，其 0-单形是 (∞, n)-范畴，而 1-单形是 (∞, n)-函子。可以利用 [GH15、注 5.7.13、第 6 节1] 中的形式体系（另见 [Hei20]），或者取 (∞, n)-范畴的一种（笛卡尔）模型结构的底层 ∞-范畴，来构造（笛卡尔闭） ∞-范畴 (∞, n)-范畴 $(\infty, n)\mathscr{C}at$。

关于 $(\infty, 1)$-范畴的模型结构包括：拟范畴上的 Joyal 模型结构（参见[Joy08b，第 6 节、1], [Lur09a，定理 2.2.51]）、Kan 丰富范畴上的 Bergner 模型结构（参见 [Ber07a]），以及自然标记拟范畴上的 Lurie 模型结构（参见 [Lur09a，命题 3.1.37]）。关于 $(\infty, 2)$-范畴的模型结构包括：∞-双范畴上的 Lurie 模型结构（参见 [Lur09b，定理 4.27] 以及 [GHL22，定义 61]）。对于一般 n，关于 (∞, n)-范畴的模型结构包括：饱和 n-复杂单纯集上的 Verity 模型结构（参见 [OR20，定理 125]）、n-重完全 Segal 空间上的 Barwick 模型结构（参见[Bar05]）、完全 Segal Θ_n空间上的 Rezk 模型结构（参见 [Rez10，第 11] 节）、n-拟范畴上的 Ara 模型结构（参见 [Ara14，第 5 节17]）、富集于 $(\infty, n-1)$-范畴的范畴上的 Bergner–Lurie 模型结构（参见 [Lur09a，定理 A.3.224]，例如应用于 [Lur09a，例 A.3.223]），以及饱和 n-复杂单纯集上的 Campion–Doherty–Kapulkin–Maehara 模型结构（参见 [CKM20，DKM21]）。要了解所有这些模型是等价的，并且

确切地说，它们具有一个与 $(\infty,n)\mathscr{C}at$等价的底层 ∞-范畴，可参见——除其他文献外—— [Ber07b、BR13、Lur09a、Lur09b、Ara14、BR20、DKM21、GHL22、Lou22b]。

从历史上看，在 (∞,n)-范畴这一概念出现之前，为了编码一些值得关注的现象，人们提出了其他弱 n-范畴的概念。这些概念有时称为弱 n-范畴或 (n,n)-范畴。其思想是，(∞,n)-范畴在任意 $k \geq 0$ 都具有 k-态射，而所有关于 k-态射的公理所编码的范畴结构，仅在可逆 $(k+1)$-态射意义下成立。相比之下，(n,n)-范畴可以看作一种特殊的 (∞,n)-范畴，其中在维数 $k > n$ 上不存在非恒等的 k-态射。

在较低维数（$(n = 2, n = 3$，以及在某种程度上 $n = 4$）中，已有弱 n-范畴的完全代数描述，例如双范畴 [Bén67], 三范畴[GPS95] 和四范畴 [Tri06]的模型。对于一般的 n，也有基于高阶拟 operad 的 (n,n)-范畴概念的各种版本；这一概念最初见于 [Bat98], ，其后续变体见于 [Lei04, §9-10]。其他（非完全代数）的一般n 维 (n,n)-范畴模型包括 Tamsamani 范畴，最初见于 [Tam99] ，并由 [HS98, Pel03, Sim12, Pao19] 进一步发展。

弱 n-范畴构成一个 ∞-范畴 $(n,n)\mathscr{C}at$。对于 $n \geq 0$，存在一个由弱 n-范畴或 n-截断的 (∞,n)-范畴所构成的 ∞-范畴 $(n,n)\mathscr{C}at$。这个 ∞-范畴的一个模型最初在 [Tam99], 中作为相对范畴构造出来，随后又在 [HS98、Pel03、Sim12、Pao19]中得到进一步研究。或者，按照 [GH15，Propo- sition 6.1.7] ，这个 ∞-范畴可构造为 ∞-范畴 $(\infty,n)\mathscr{C}at$的一个 ∞-局部化。另见 [GH15，Remark 6.1.3] ，其中说明了这些方法之间的关系。

2.1.2. 一些值得注意的函子。我们讨论 (∞,n)-范畴理论必须如何与其他理论相互作用，例如第 1 节中的严格 n-范畴理论，以及针对 $k < n$ 的 (∞,k)-范畴理论。

注记 2.1.2。对于 $n \geq 0$，存在一个 ∞-范畴的包含

$$(\infty,n)\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty,n+1)\mathscr{C}at,$$

其直观依据是，任何 (∞,n)-范畴都可以视为一个 $(\infty,n+1)$-范畴，其中维数高于 n 的非恒等态射均不存在。这个 ∞-函子有一个右伴随，称为核函子，

$$\mathrm{core}_n\colon (\infty,n+1)\mathscr{C}at \to (\infty,n)\mathscr{C}at,$$

w它直观地只保留维数 $n+1$ 中可逆的态射。

∞-范畴的伴随

$$(\infty,n)\mathscr{C}at \rightleftarrows (\infty,n+1)\mathscr{C}at\colon \mathrm{core}_n$$

可以在 Verity 对饱和 n-复杂单纯集给出的模型结构中实现为 (∞,n)-范畴的模型。准确地说，它是 ∞-范畴的底层伴随，即 [Ver08 的记号 13], 中所述的伴随 $\mathrm{th}_n \dashv \mathrm{sp}_n$ ；利用 [Ver08，引理 25，推论 108], 可以证明它构成一个 Quillen 对。

特别地，对于所有 $n > 0$ ，都有保 ∞-余极限的 ∞-范畴包含

$$(\infty,0)\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty,1)\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty,2)\mathscr{C}at \to \cdots \hookrightarrow (\infty,n)\mathscr{C}at.$$

此外，对于 $m \leq n$，存在一个函子

$$\mathrm{core}_m\colon (\infty,n)\mathscr{C}at \xrightarrow{\mathrm{core}_{n-1}} (\infty,n-1)\mathscr{C}at \to \ldots \to (\infty,m+1)\mathscr{C}at \xrightarrow{\mathrm{core}_m} (\infty,m)\mathscr{C}at. \tag{2.1.3}$$

注记 2.1.4。对于 $n \geq 0$，若 $(\infty,n+1)\mathscr{C}at_*$, $*$表示双指点的 $(\infty,n+1)$-范畴的 ∞-范畴，则存在一个*hom* 函子

$$\mathscr{H}om\colon (\infty,n+1)\mathscr{C}at_{*,*} \to (\infty,n)\mathscr{C}at,$$

它本质上提取两个给定点之间的 hom。该 hom 函子有一个左伴随，称为悬挂函子

$$\mathfrak{S}\colon (\infty,n)\mathscr{C}at \to (\infty,n+1)\mathscr{C}at_{*,*},$$

它构造出一个恰有两个对象的 $(\infty,n+1)$-范畴，而这两个对象之间唯一有趣的 hom 由输入给出。该伴随

$$\mathfrak{S}\colon (\infty,n)\mathscr{C}at \rightleftarrows (\infty,n+1)\mathscr{C}at_{*,*}\colon \mathfrak{H}om$$

被视为 [GH15，定义 4.3。21] ，并且可以在以下模型中实现：通过饱和的 n-复杂单纯集上的 Verity模型结构给出的 (∞,n)-范畴模型，借助 $\Sigma \dashv \mathrm{Hom}$（引自 [OR22，引理 2）； 7], 在完整 Segal Θ_n-空间模型中，借助左 Quillen 函子$V[1]$ （引自 [Rez10，命题 4）； 6], 或者在由完整 SegalΘ_{n-1}-空间富集的范畴模型中。

总之，可以忘掉基点并迭代这一构造，从而得到一个函子

$$\mathfrak{S}^{k-1}\colon (\infty,1)\mathscr{C}at \xrightarrow{\mathfrak{S}} \dots \xrightarrow{\mathfrak{S}} (\infty,n)\mathscr{C}at \xrightarrow{\mathfrak{S}} (\infty,k)\mathscr{C}at. \tag{2.1.5}$$

下面的结果说明了核心函子与 hom 函子以何种方式彼此交换。它也可以看作是 (1.4.5) 对 (∞,n)-范畴的一种变体。

命题2.1.6. 设 $n \geq 0$。设 $\mathscr{C}$为一个$(\infty,n+1)$-范畴，且 $A,B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$。存在一个$(n-1)$-等价，将$(\infty,n-1)$-范畴

$$\mathrm{core}_{n-1}(\mathscr{C}(A,B)) \simeq_{n-1} (\mathrm{core}_n \mathscr{C})(A,B)$$

命题*2.1.6*的证明。 可以证明（例如，在饱和的 n-复杂单纯集模型中），存在一个由左伴随 ∞-函子构成的交换图：

$$\begin{array}{ccc} (\infty,n-1)\mathscr{C}at & \xrightarrow{\mathfrak{S}} & (\infty,n)\mathscr{C}at_{*,*} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\infty,n)\mathscr{C}at & \xrightarrow[\mathfrak{S}]{} & (\infty,n+1)\mathscr{C}at_{*,*} \end{array}$$

因此，由 [RV22 的命题2.1.10] 可得相应的右伴随 ∞-函子构成的交换图：

$$\begin{array}{ccc} (\infty,n-1)\mathscr{C}at & \xleftarrow{\mathfrak{H}om} & (\infty,n)\mathscr{C}at_{*,*} \\ {\scriptstyle \mathrm{core}_{n-1}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{core}_n} \\ (\infty,n)\mathscr{C}at & \xleftarrow[\mathfrak{H}om]{} & (\infty,n+1)\mathscr{C}at_{*,*} \end{array}$$

至此，证明完毕。 □

令 $n\mathscr{C}at$ 表示（严格） n-范畴的 ∞-范畴，它可以构造为 [LMW10 中 n-范畴的典范模型结构所对应的底层 ∞-范畴，见定理6.1]。我们简要讨论联系严格与弱 n 维范畴的 ∞-范畴的函子的最新进展，并区分一般 n 的情形。

注记 2.1.7。 对于 $n = 0$、1、2，存在一个 ∞-范畴的包含[6]

$$n\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty,n)\mathscr{C}at,$$

[6]我们称 $X \hookrightarrow Y$是 ∞-范畴的包含，如果它是一个 ∞-范畴之间的映射，且该映射是 Kan 复形的逐同态等价，并且在 Y 中是至等价的对象单射。

它以自然的方式将严格的 n-范畴视为一个 (∞,n)-范畴。这个 ∞-函子有一个左伴随

$$\Pi_n\colon (\infty,n)\mathscr{C}at \to n\mathscr{C}at,$$

它直观地要求所有维数高于 n 的态射以及相干等价都成为等式。该伴随

$$\Pi_n\colon (\infty,n)\mathscr{C}at \rightleftarrows n\mathscr{C}at \tag{2.1.8}$$

在大多数由模型范畴呈现的 (∞,n)-范畴模型中，它可以实现为神经函子-范畴化奎伦反射。例如，对于 $n=0$，可以在 Kan复形中轻松实现；对于 $n=1$，则可以在拟范畴、自然标记拟范畴和完全 Segal 空间中实现（参见例如 [MOR22, §4.2]）。对于 $n=2$，这一点已在饱和2-复杂集合 [OR21a]、2-拟范畴 [Cam20]、二重完备Segal空间 [Mos20] 以及富于 $(\infty,1)$-范畴的范畴中实现 [MOR22, §4.2], [GHL22, §1]。对于一般的 n，伴随 (2.1.8) 有望由 [HL23, Definition 4.46, Theorem 4.50] 中的 Quillen 对实现。

考虑函子

$$\Pi_0\mathrm{core}_0\colon (\infty,n)\mathscr{C}at \xrightarrow{\mathrm{core}_0} (\infty,0)\mathscr{C}at \xrightarrow{\Pi_0} 0\mathcal{C}at = \mathcal{S}et.$$

该函子不保持 (∞)-拉回，但下面的引理记录了该函子与拉回之间一种至关重要的较弱相容性，这种相容性将在命题2.3.1和2.3.3中发挥作用。

引理2.1.9. 给定(∞,n)-范畴之间的函子 $\mathscr{A}\to\mathscr{B}$ 和 $\mathscr{C}\to\mathscr{B}$，我们有 *th* *at*

$$\Pi_0\mathrm{core}_0\left(\mathscr{A}\overset{\infty}{\underset{\mathscr{B}}{\times}}\mathscr{C}\right)\neq\varnothing \quad \textit{if and only if} \quad \Pi_0\mathrm{core}_0\mathscr{A}\underset{\Pi_0\mathrm{core}_0\mathscr{B}}{\times}\Pi_0\mathrm{core}_0\mathscr{C}\neq\varnothing.$$

证明。 由于核心$_0$ 保持 (∞)-极限，因此，说

$$\Pi_0\mathrm{core}_0\left(\mathscr{A}\overset{\infty}{\underset{\mathscr{B}}{\times}}\mathscr{C}\right)\neq\varnothing$$

等价于说

$$\Pi_0\left((\mathrm{core}_0\mathscr{A})\overset{\infty}{\underset{\mathrm{core}_0\mathscr{B}}{\times}}(\mathrm{core}_0\mathscr{C})\right)\neq\varnothing,$$

可以看出（例如，使用 [Lin21] 中的论证），这等价于说

$$\Pi_0\mathrm{core}_0\mathscr{A}\underset{\Pi_0\mathrm{core}_0\mathscr{B}}{\times}\Pi_0\mathrm{core}_0\mathscr{C}\neq\varnothing,$$

因此我们就完成了。 □

2.2. **(∞,n)-等价(∞,n)-范畴**。 我们遵循这样的约定：在一个 $(\infty,0)$-范畴中，$(\infty,-1)$-等价是一条路径。

现在令 $n>0$。假设我们已知什么是在一个 (∞,n)-范畴中的 $(\infty,n-1)$-等价，现在对于 $n\geq 0$，我们归纳地定义一个 $(\infty,n+1)$-范畴中的 (∞,n)-等价。

定义 2.2.1 ((∞,n)-等价于一个 $(\infty,n+1)$-范畴 $\mathscr{C}$)。 令 $n\geq 0$。$(\infty,n+1)$-范畴 $\mathscr{C}$中的一个 1-态射$F\colon A\to B$是一个 (∞,n)-等价，当且仅当存在一个 1-态射 $G\colon B\to A$ 以及 $(\infty,n-1)$-等价

$$\eta\colon \mathrm{id}_A \simeq_{(\infty,n-1)} G\circ F \text{ in } \mathscr{C}(A,A) \text{ and } \varepsilon\colon F\circ G \simeq_{(\infty,n-1)} \mathrm{id}_B \text{ in } \mathscr{C}(B,B).$$

若两个 $(\infty,n+1)$-范畴中的对象 A和 B之间存在一个 (∞,n)-等价，则称它们 (∞,n)-等价，记作 $A\simeq_{(\infty,n)} B$。

我们可以立即给出这个定义的一个变体。

命题 2.2.2. 设 $n \geq 0$。1-态射 $F\colon A \to B$ 是一个$(\infty, n+1)$-范畴 $\mathscr{C}$ 中的(∞, n)-等价，当且仅当存在 1-态射 $G, G'\colon B \to A$ 以及$(\infty, n-1)$-等价

$$\eta\colon \mathrm{id}_A \simeq_{(\infty,n-1)} G \circ F \text{ in } \mathscr{C}(A,A) \text{ and } \varepsilon'\colon F \circ G' \simeq_{(\infty,n-1)} \mathrm{id}_B \text{ in } \mathscr{C}(B,B).$$

证明。 正向蕴涵很直接，只需取 $G' = G$ 和 $\varepsilon' = \varepsilon$。对于逆向蕴涵，我们注意到存在一个 $(\infty, n-1)$-等价

$$\begin{aligned}\Phi\colon G' &\simeq_{(\infty,n-1)} \mathrm{id}_A \circ G' \simeq_{(\infty,n-1)} (G \circ F) \circ G' \\ &\simeq_{(\infty,n-1)} G \circ (F \circ G') \simeq_{(\infty,n-1)} G \circ \mathrm{id}_B \simeq_{(\infty,n-1)} G\end{aligned}$$

然后可以利用 Φ 和 ε' 构造出一个适当的 ε，使得

$$\varepsilon := \varepsilon' \circ (F \circ \Phi^{-1}),$$

因此得证。 □

2.2.1. 另一种观点。 我们讨论 $(\infty, n+1)$-范畴中的等价概念如何与第 1.4.2 节中的严格 $(n+1)$-范畴，以及针对 $k < n$ 的 $(\infty, k+1)$-范畴中的等价概念相互作用。

回顾注 2.1.2 中的函子核心$_k\colon (\infty, n)\mathscr{C}at \to (\infty, k)\mathscr{C}at$。以下关于 (∞, n)-等价的刻画以低维核为依据，可视为命题 1.4.6 针对 (∞, n)-范畴的一个变体。这与最初在[Tam99、HS98、Pel03、Sim12、Pao19] 中定义弱 n-范畴中的等价时所采用的方法相似。

命题 2.2.3。 令 $n > 0$。令 $\mathscr{C}$为一个 $(\infty, n+1)$-范畴，并令 A, $B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$。以下各项等价。

(1) 存在一个 (∞, n)-等价

$$A \simeq_{(\infty,n)} B \text{ in the } (\infty, n+1)\text{-category } \mathscr{C}.$$

(2) 对于某个——因而对于所有—— $0 \leq k+1 < n+1$，存在一个 (∞, k)-等价

$$A \simeq_{(\infty,k)} B \text{ in the } (\infty, k+1)\text{-category } \mathrm{core}_{k+1}\mathscr{C}.$$

现在我们可以证明该命题。

证明。 我们对 $n > 0$ 进行归纳，并为简化叙述进一步假设 $k = n-1$。 k 的其他取值可以类似地处理，只需再对 k进行归纳。归纳的基始情形，即 $n+1 = 1$、 $k+1 = 0$的情形，可利用 [Joy08b，命题 1.14], 证明；现在我们假设 $n > 1$。令 A、 $B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$。

具有一个 (∞, n)-等价

$$A \simeq_{(\infty,n)} B \text{ in the } (\infty, n+1)\text{-category } \mathscr{C}$$

等价于存在 $F \in \mathrm{Ob}\ \mathscr{C}(A, B)$ 和 $G \in \mathrm{Ob}\ \mathscr{C}(B, A)$，使得存在 $(\infty, n-1)$-等价

$$\begin{aligned}G \circ F \simeq_{(\infty,n-1)} \mathrm{id}_A \text{ in the } (\infty, n)\text{-category } \mathscr{C}(A,A) \quad \text{and} \\ F \circ G \simeq_{(\infty,n-1)} \mathrm{id}_B \text{ in the } (\infty, n)\text{-category } \mathscr{C}(B,B).\end{aligned}$$

根据归纳假设和命题2.1.6，这反过来等价于存在 $(\infty, n-2)$-等价

$$G \circ F \simeq_{n-2} \mathrm{id}_A \text{ in the } (\infty, n-1)\text{-category } \mathrm{core}_{n-1}(\mathscr{C}(A,A)) \simeq_{n-1} (\mathrm{core}_n \mathscr{C})(A,A)$$

以及 $F \circ G \simeq_{n-2} \mathrm{id}_B$ 在 $(\infty, n-1)$-范畴核心$_{n-1}(\mathscr{C}(B,B)) \simeq_{n-1}$ (核心$_n \mathscr{C}$)(B,B) 中。

最后，这等价于存在一个 $(\infty, n-1)$-等价

$$A \simeq_{(\infty,n-1)} B \text{ in the } (\infty,n)\text{-category } \mathrm{core}_n \mathscr{C}.$$

证明到此结束。 □

回顾注 2.1.7 中的函子 $\Pi_n : (\infty,n)\mathscr{C}at \to n\mathscr{C}at$。我们将讨论——至少在 n 取较小值时——关于 (∞,n)-等价的刻画，即应用 Π_n 后的 n-等价。

命题 2.2.4. 设 $n+1 = 0, 1, 2$。设 $\mathscr{C}$ 是一个$(\infty, n+1)$-范畴，且 $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$。以下条件等价。

(1) 存在一个(∞, n)-等价

$$A \simeq_{(\infty,n)} B \textit{ in the } (\infty,n+1)\textit{-category } \mathscr{C}.$$

(2) 存在一个 n-等价

$$A \simeq_n B \textit{ in the fundamental } (n+1)\textit{-category } \Pi_{n+1}\mathscr{C}.$$

$n+1 = 0$ 的情形基本上由 Π_0的定义得出， $n+1 = 1$ 的情形基本上已在[Joy08a, §1.10], 中完成，而 $n+1 = 2$ 的情形则见于 [RV22, 定理 1.4.7]。正确识别函子 Π_n后，这一陈述或许对更高的 n也成立。

我们遵循这样的约定：$(\infty,0)$-等价$(\infty,0)$-范畴之间的映射是同伦等价。现在令 $n > 0$。假设我们已知什么是$(\infty, n-1)$-等价的$(\infty, n-1)$-范畴之间的映射，现在我们对 $n \geq 0$ 归纳定义(∞, n)-范畴之间的(∞, n)-等价。

定义 2.2.5 （(∞, n)-范畴的(∞, n)-等价）。 令 $n > 0$。(∞, n)-范畴之间的一个(∞, n)-函子 $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$是$(\infty, n)$-等价，当且仅当
(1) (∞, n)-函子 F 在对象上到等价为止满射，也就是说，对于每个对象$b \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{B}$，都存在一个对象 $a \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$以及一个 $(\infty, n-1)$-等价

$$b \simeq_{(\infty,n-1)} Fa \text{ in the } (\infty,n)\text{-category } \mathscr{B}.$$

(2) (∞, n)-函子 F是一个按同态空间的 $(\infty, n-1)$-等价，也就是说，对于所有对象 $a, a' \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{A}$，态射 F诱导出 $(\infty, n-1)$-等价

$$F_{a,a'}\colon \mathscr{A}(a,a') \simeq_{(\infty,n-1)} \mathscr{B}(Fa, Fa') \text{ of } (\infty,n-1)\text{-categories.}$$

我们可以证明，每个 (∞, n)-等价都以适当的意义存在一个逆 .

命题 *2.2.6*（(∞, n)-范畴之间的 (∞, n)-等价）。设 $n > 0$。一个从 (∞, n)-范畴到 (∞, n)-范畴的 (∞, n)-函子$F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$是一个 (∞, n)-等价，当且仅当存在一个 (∞, n)-函子 $G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$以及一些 $(\infty, n-1)$-等价

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \simeq_{(\infty,n-1)} G \circ F \textit{ in the } (\infty,n)\textit{-category } (\infty,n)\mathscr{C}at(\mathscr{A},\mathscr{A})$$
$$\textit{and } \varepsilon\colon F \circ G \simeq_{(\infty,n-1)} \mathrm{id}_{\mathscr{B}} \textit{ in the } (\infty,n)\textit{-category } (\infty,n)\mathscr{C}at(\mathscr{B},\mathscr{B}).$$

这个命题的内容本质上见于 [GH15, §5.5, 5.6]。具体而言，反向推论见 [GH15, Proposition 5.5.3], ，而正向推论在 [GH15, Remark 5.6.5] 中得到了大致讨论； [GH15, Corollary 5.6.3] 中还有一段密切相关的讨论。我们给出另一种证明。

证明。 不失一般性，可将 $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$表示为 Verity 模型结构 $m\mathbb{S}\mathcal{S}\mathrm{et}_{(\infty,n)}$ 中纤维化对象之间的一个映射；该模型结构是 [OR20，定理 1.25]中标记单纯集合上饱和 n-复杂单纯集的模型结构。根据定义 2.2.5，称 F 为一个 (∞, n)-等价，等价于它是 $(\infty, n-1)$-范畴之间的逐同态等价，并且在

$(\infty, n-1)$-等价意义下本质满。根据 [Lou22a，推论 3.2.11] 这等价于称 F 是 $ms\mathcal{S}et_{(\infty,n)}$中的一个弱等价。利用 [Hov99，命题 1.2.8], 这又等价于称映射 $F\colon \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 是 $ms\mathcal{S}et_{(\infty,n)}$中的一个同伦等价，也就是说，存在一个映射$G\colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}$以及 $ms\mathcal{S}et_{(\infty,n)}$中的同伦

$$G \circ F \sim_{ms\mathcal{S}et_{(\infty,n)}} \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \text{ and } F \circ G \sim_{ms\mathcal{S}et_{(\infty,n)}} \mathrm{id}_{\mathscr{B}}.$$

根据（$\infty, -1$）-等价的定义，这等价于说存在（$\infty, -1$）-等价

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \simeq_{(\infty,-1)} G \circ F \text{ in the } (\infty,0)\text{-category } \mathrm{Map}^{h}_{(\infty,n)\mathscr{C}at}(\mathscr{A},\mathscr{A})$$

$$\text{and } \varepsilon\colon F \circ G \simeq_{(\infty,-1)} \mathrm{id}_{\mathscr{B}} \text{ in the } (\infty,0)\text{-category } \mathrm{Map}^{h}_{(\infty,n)\mathscr{C}at}(\mathscr{B},\mathscr{B}).$$

通过直接验证可以证明，复杂单纯集的模型结构 $ms\mathcal{S}et_{(\infty,n)}$ 是单纯的，其映射空间为

$$\mathrm{Map}_{(\infty,n)\mathscr{C}at}(\mathscr{A},\mathscr{B}) \cong \mathrm{sp}_0(\infty,n)\mathscr{C}at(\mathscr{A},\mathscr{B}).$$

因此，前面的陈述等价于说存在（$\infty, -1$）-等价

$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \simeq_{(\infty,-1)} G \circ F \text{ in the } (\infty,0)\text{-category } (\mathrm{sp}_0((\infty,n)\mathscr{C}at))(\mathscr{A},\mathscr{A}).$$

$$\text{and } \varepsilon\colon F \circ G \simeq_{(\infty,-1)} \mathrm{id}_{\mathscr{B}} \text{ in the } (\infty,0)\text{-category } (\mathrm{sp}_0((\infty,n)\mathscr{C}at))(\mathscr{B},\mathscr{B})$$

根据命题 2.2.3，这等价于说存在（$\infty, n-1$）-等价 s

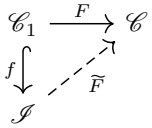
$$\eta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \simeq_{(\infty,n-1)} G \circ F \text{ in the } (\infty,n)\text{-category } ((\infty,n)\mathscr{C}at)(\mathscr{A},\mathscr{A})$$

$$\text{and } \varepsilon\colon F \circ G \simeq_{(\infty,n-1)} \mathrm{id}_{\mathscr{B}} \text{ in the } (\infty,n)\text{-category } ((\infty,n)\mathscr{C}at)(\mathscr{B},\mathscr{B})$$

如所要求的。 □

2.2.2. 行走等价。 我们可以确定一种指标形状，用来参数化 $(\infty, n+1)$-范畴中的 (∞, n)-等价。为此，令 $\mathscr{C}_1$和 $\mathscr{I}$分别表示通过注 2.1.7 中的 $(\infty,1)\mathscr{C}at$ 个 ∞-范畴的包含，将范畴 $\mathcal{C}_1$和 $\mathcal{I}$视为 $(\infty,1)$-范畴后得到的 $(\infty,1)$-范畴。对于 $n \geq 1$，通过 $(\infty,1)\mathscr{C}at \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow (\infty,n)\mathscr{C}at$ 个 ∞-范畴的包含，它们也将被视为 (∞,n)-范畴。显然，$\mathscr{C}_1$将 $(\infty,n+1)$-范畴中的 1-态射分类；接下来我们将以适当的意义证明，$\mathscr{I}$能够检测 $(\infty,n+1)$-范畴中的 (∞,n)-等价。

命题 2.2.7. 一个1-态射 $F\colon A \to B$在一个$(\infty,1)$-范畴 $\mathscr{C}$中是一个$(\infty,0)$-等价，当且仅当在 ∞-范畴 $(\infty,1)\mathscr{C}at$中存在提升问题的解

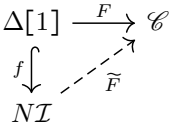


为澄清该命题的含义，我们意指存在一个 $(\infty,1)$-函子 $\widetilde{F}\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$ 以及一个 $(\infty,-1)$-等价

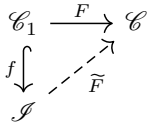
$$\widetilde{F} \circ f \simeq_{(\infty,-1)} F \text{ in the } (\infty,0)\text{-category } (\infty,1)\mathscr{C}at(\mathscr{C}_1,\mathscr{C}).$$

证明。 不妨将 $\mathscr{C}$ 表示为一个拟范畴，并将映射 F 表示为一个 1-单纯形 $F\colon \Delta[1] \to \mathscr{C}$。利用 [DS11，命题 2.2]（以及拟范畴中右同空间的模型

来自 [Lur09a，第 1.2.2] 节），可以证明，称 F 为一个（ ∞,0）-等价，等价于称在范畴 s$\mathcal{S}$et 中存在提升问题的解



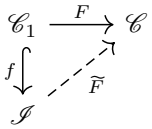
利用与命题 2.3.1 的证明中类似的论证，可以进一步看出，这等价于说提升问题



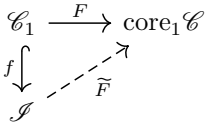
在 ∞-范畴 (∞, 1)$\mathscr{C}at$ 中存在一个解，正如所需。 □

现在，我们可以在 (∞, 1)-范畴中运用前一个关于 (∞, 0)-范畴的命题，从而证明 ($\infty, n+1$)-范畴中 (∞, n)-等价的类似刻画。

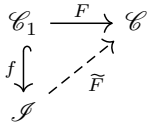
命题 2.2.8。 设 $n \geq 0$。($\infty, n+1$)-范畴 $\mathscr{C}$中的一个1-态射 $F\colon A \to B$是一个(∞, n)- 等价，当且仅当在 ∞-范畴 ($\infty, n+1$)$\mathscr{C}at$中提升问题存在一个解



证明。 根据命题 2.2.3， F是 (∞, n+1)-范畴 $\mathscr{C}$中的一个 (∞, n+1)-等价，这等价于说 F是 $\mathrm{core}_1\mathscr{C}$ 中的一个 (∞, 0)-等价。根据命题 2.2.7，这等价于说在 ∞-范畴 ($\infty, n+1$)$\mathscr{C}at$ 中存在一个解，使得



沿着 (2.1.3) 中针对 $m = 1$的 ∞-函子之包含-核心伴随进行转置后，这等价于说，在 ∞-范畴 (∞, 1)$\mathscr{C}at$ 中存在一个解，满足



如所需。 □

我们还可以研究 ($n+1$)-范畴中的 k-态射何时是 ($\infty, n+1-k$)-等价。为此，回顾 (2.1.5) 中的悬挂函子 $\mathfrak{S}^{k-1}$:(∞, 1)$\mathscr{C}at \to (\infty, n)\mathscr{C}at$，并考虑 (∞, k)-范畴 $\mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{C}_1$ 和 $\mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{I}$。通过 ∞-范畴的包含 $\infty, k\mathscr{C}at \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow (\infty, n)\mathscr{C}at$，它们也可视为 $n \geq k$ 的 (∞, n)-范畴。例如，利用完备 Segal Θ_n-空间模型可以看出， $\mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{C}_1$ 对应于 ($\infty, n+1$)-范畴中的 k-态射。现在我们将以适当的意义证明， $\mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{I}$ 对应于 ($\infty, n+1$)-范畴中的 (∞, k)-等价。

定义 2.2.9。 设 $n \geq 0$ 和 $k \geq 1$。若在 ∞-范畴 $(\infty, n+1)\mathscr{C}at$ 中存在该提升问题的解，则 $(\infty, n+1)$-范畴 $\mathscr{C}$ 中的 k-态射 $F\colon A \to B$ 是 $(\infty, n+1-k)$-等价 。

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \nearrow & \\ \mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{I} & & \end{array}$$

2.3. **模型范畴技术**。 我们回顾 [Hir03] 中的一个模型范畴命题 2.3.1，它将在下文中成为一项关键工具。这一技术性结果将使我们能够诠释由模型结构所产生的常见模型之一所呈现的 (∞, n)-等价在 $(\infty, n+1)$-范畴中的概念。

我们用 $\sim_{\mathcal{M}}$ 表示 $\mathcal{M}$ 中的（左）同伦关系。我们用 $\perp_{\mathcal{M}}$ （分别用 $\top_{\mathcal{M}}$）表示 $\mathcal{M}$ 的始对象（分别为终对象）。

下面的技术性事实使我们能够处理严格提升问题，而不必处理模同伦意义下的提升问题（也就是说，在一个 ∞-范畴中）。我们将在命题 2.4.1、2.4.2、2.5.1 和 2.6.1 中使用此命题。

命题 2.3.1. 令 $n \geq 0$。令 $\mathcal{M}$ 为一个用于$(\infty, n+1)$-范畴的模型范畴[7] 假设$\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{I}$ 是余纤维对象，并且给定了 f的一个分解

$$f\colon \mathscr{C}_1 \xhookrightarrow{\varphi} \widetilde{\mathscr{I}} \xrightarrow[\simeq]{\psi} \mathscr{I} \tag{2.3.2}$$

为先是一个余纤维化 φ，随后是一个弱等价 ψ，且二者都在 $\mathcal{M}$中。若$(\infty, n+1)$-范畴 $\mathscr{C}$中的一个1-态射 $F\colon \mathscr{C}_1 \to \mathscr{C}$是一个$(\infty, n)$-等价，当且仅当 $\mathcal{M}$中存在该（严格的！）提升问题的解

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle \varphi}\big\downarrow & \nearrow & \\ \widetilde{\mathscr{I}} & & \end{array}$$

证明。 根据定义，在（ $\infty, n+1$）-范畴 $\mathscr{C}$中是一个等价，等价于存在（ ∞， ∞）-范畴中的提升问题的解（$n+1$）$\mathscr{C}at$

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \nearrow_{\widetilde{F}} & \\ \mathscr{I} & & \end{array}$$

这等价于说，存在一个（ $\infty, n+1$）-函子 $\widetilde{F}\colon \mathscr{I} \to \mathscr{C}$以及一个（ $\infty, -1$）-等价

$$\widetilde{F} \circ f \simeq_{(\infty,-1)} F \text{ in the } (\infty,0)\text{-category } (\infty, n+1)\mathscr{C}at(\mathscr{C}_1, \mathscr{C}).$$

用映射空间来表述，这等价于说

$$\pi_0(\infty, n+1)\mathscr{C}at(\widetilde{\mathscr{I}}, \mathscr{C}) \underset{\pi_0(\infty,n+1)\mathscr{C}at(\mathscr{C}_1,\mathscr{C})}{\times} * \neq \varnothing.$$

由于模型范畴 $\mathcal{M}$ 中的导出映射空间计算了∞-范畴（ $\infty, n+1$）$\mathscr{C}at$的 hom-$(\infty, 0)$-范畴，这等价于说

$$\pi_0 \operatorname{Map}^h_{\mathcal{M}}(\widetilde{\mathscr{I}}, \mathscr{C}) \underset{\pi_0 \operatorname{Map}^h_{\mathcal{M}}(\mathscr{C}_1,\mathscr{C})}{\times} * \neq \varnothing.$$

[7]按照 [BSP21 的定义 15，4]

根据 [Hir03，定理 17.7。2], 这等价于说

$$\mathcal{M}(\widetilde{\mathscr{I}},\mathscr{C})/_{\sim_{\mathcal{M}}} \underset{\mathcal{M}(\mathscr{C}_1,\mathscr{C})/_{\sim_{\mathcal{M}}}}{\times} * \neq \varnothing.$$

这又等价于存在一个同伦意义下的提升

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & \simeq \nearrow & \\ \widetilde{\mathscr{I}} & & \end{array} \qquad \widetilde{F}$$

在 $\mathcal{M}$ 中。根据 [Hir03，推论 7.3，12], 这等价于在同一图表中存在严格提升，正如所需。□

通过类似证明，可以证明一个更一般的陈述，它在 $k = 1$ 的情形下还原为前一个陈述。考虑映射 $\mathfrak{S}^{k-1}f\colon \mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{C}_1 \to \mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{I}$。

命题 2.3.3。设 $n \geq 0$ 且 $k > 0$。设 $\mathcal{M}$ 是一个用于$(\infty, n+1)$-范畴[8]的模型范畴。假设 $\mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{C}_1$ 和 $\mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{I}$ 是余纤维对象。再假设给定了 $\mathfrak{S}^{k-1}f$的一个分解

$$\mathfrak{S}^{k-1}f\colon \mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{C}_1 \xrightarrow{\varphi_k} \widetilde{\mathscr{I}}_k \xrightarrow[\simeq]{\psi_k} \mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{I} \tag{2.3.4}$$

作为余纤维化 φ_k，后接一个弱等价 ψ_k（在 $\mathcal{M}$ 中）。那么，$(\infty, n+1)$-范畴 $\mathscr{C}$中的一个 k-态射 $F\colon A \to B$是一个$(\infty, n+1-k)$-等价，当且仅当存在如下（严格！）提升问题的解：$\mathcal{M}$

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle\varphi_k}\big\downarrow & \nearrow & \\ \widetilde{\mathscr{I}}_k & & \end{array}$$

备注 2.3.5。给定 $\mathfrak{S}^{k-1}$ 作为同伦且保余纤维化函子 Σ^{k-1} 的一个显式实现后，可以将 (2.3.2) 应用于 Σ^{k-1}，从而得到 (2.3.4) 的一个实例。

$$\Sigma^{k-1}f\colon \Sigma^{k-1}\mathscr{C}_1 \xrightarrow{\Sigma^{k-1}\varphi} \Sigma^{k-1}\widetilde{\mathscr{I}} \xrightarrow[\simeq]{\Sigma^{k-1}\psi} \Sigma^{k-1}\mathscr{I}.$$

为了应用命题 2.3.1，我们关注 $\mathscr{C}_1$、$\mathscr{I}$，以及它们在对 $(\infty, n+1)$-范畴建模的主要模型范畴中的最简单余纤维替换。下一节中，我们将在 $(\infty, n+1)$-范畴的主要模型结构中阐释命题 2.3.1（有时也包括命题 2.3.3）。

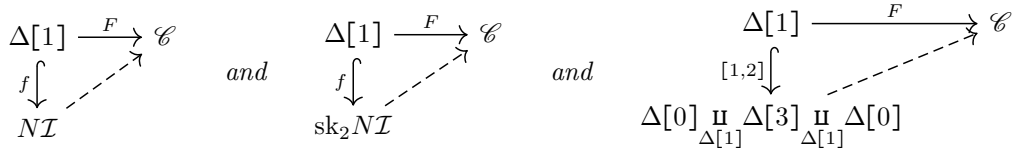
2.4. 由模型呈现的 $(\infty, 1)$-范畴中的等价。我们讨论由拟范畴、自然标记的拟范畴和 Kan 丰富范畴呈现的 $(\infty, 1)$-范畴中的 $(\infty, 0)$-等价概念。对于其他模型——例如完全 Segal 空间、饱和 1-复形集和 1-comical 集——其处理可在 $n = 1$ 第 2.6.1 至 2.6.3 节的情形中得到。

[8]，依照 [BSP21，定义 15.4]

2.4.1. 拟范畴中的等价。 考虑用于拟范畴的单纯集合上的 Joyal 模型结构，见 [Joy08b, §61] 或 [Lur09a, 定理 2.2.5.1]。注 2.1.7 中的包含$1\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty,1)\mathscr{C}at$由通常的神经 $N\colon \mathcal{C}$在 $\to$单纯集 $_{(\infty,1)}$上实现，它是一个右 Quillen 函子。因此，游走 1-态射 $\mathscr{C}_1$ 的一个模型是 1-单纯形$N\mathcal{C}_1 \cong \Delta[1]$，而 $\mathscr{I}$的一个模型是 $N\mathcal{I}$。(2.3.2) 形式的 $f\colon \Delta[1] \to N\mathcal{I}$的一个分解是平凡分解

$$f\colon \Delta[1] \xhookrightarrow{f} N\mathcal{I} \xrightarrow[\simeq]{} N\mathcal{I}.$$

命题 2.4.1. 拟范畴 $\mathscr{C}$中的一个1-态射 $F\colon A \to B$是一个$(\infty,0)$-等价，当且仅当以下严格提升问题中任意一个——因而也包括所有——有解：$s\mathcal{S}et$



第一个是命题 2.3.1 的应用，第二个和第三个则由 [DS11, 命题 2.2] 得出。

2.4.2. 自然标记拟范畴中的等价。 考虑 [Lur09a, 命题 3.1.3.7] 中关于自然标记拟范畴的标记单纯集合上的 Lurie 模型结构 s$\mathcal{S}$et$^+$ $_{(\infty,1)}$。注 2.1.7 中的包含 $1\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty,1)\mathscr{C}at$的一个模型，由自然标记神经 $N^\natural\colon \mathcal{C}$在 s$\mathcal{S}$et $^+{}_{(\infty,1)}$上的实现给出；它将同构的 1-单纯形标记出来（更多细节参见 [GHL22, §1] ），这是一个右 Quillen 函子。因此，游走 1-态射的一个模型是 $N\natural\mathcal{C}_1 = \Delta[1]^\sharp$，即最小标记 1-单纯形；而 $\mathscr{I}$的一个模型是 $N\natural\mathcal{I} = N^\sharp\mathcal{I}$，即最大标记的单纯集。相关的 $f\colon \Delta[1] \to N^\sharp\mathcal{I}$分解（形式为 (2.3.2)）包括平凡分解

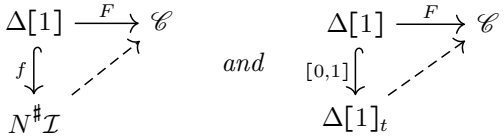
$$f\colon \Delta[1] \xhookrightarrow{[0,1]} N^\sharp\mathcal{I} \xrightarrow[\simeq]{\mathrm{id}_{N^\sharp\mathcal{I}}} N^\sharp\mathcal{I},$$

以及分解

$$f\colon \Delta[1] \xhookrightarrow{[0,1]} \Delta[1]_t \xrightarrow[\simeq]{f} N^\sharp\mathcal{I}.$$

以下是命题 2.3.1 的一个应用。

命题 2.4.2. 自然标记拟范畴 $\mathscr{C}$ 中的一个 1-态射 $F\colon A \to B$ 是一个 $(\infty,0)$-等价，当且仅当在 $s\mathcal{S}et^+$ 中，以下任一（因而所有）严格提升问题都有解



2.4.3. *Kan*复形富集范畴中的等价。 考虑用于 Kan 丰富范畴的单纯范畴上的 Bergner 模型结构 s$\mathcal{S}$et $\mathcal{C}$at$_{(\infty,1)}$on，该结构来自 [Ber07a]。注 2.1.7 中包含 $1\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty,1)\mathscr{C}at$ 的一个模型由基变换函子 disc$_*\colon \mathcal{C}$at $\to$s$\mathcal{S}$et $\mathcal{C}$at 沿离散包含 disc$\colon \mathcal{S}$et $\to$s$\mathcal{S}$et 实现；该函子将每个范畴视为一个单纯范畴，其同态单纯集均为离散集，并且它是一个右 Quillen 函子。因此，游走 1-态射 $\mathscr{C}_1$ 的一个模型是 disc$_*\mathcal{C}_1$。以下是命题 2.3.1 的一个应用。

命题 2.4.3。 *Kan*-范畴 $\mathscr{C}$ 中的一个1-态射 $F\colon A \to B$ 是一个$(\infty,0)$-等价，当且仅当在范畴 $s\mathcal{S}et\mathcal{C}at$ 中，下列提升问题存在一个解

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{disc}_*\mathcal{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \nearrow & \\ \mathfrak{C}N\mathcal{I} & & \end{array}$$

2.5. **由一个模型呈现的$(\infty,2)$-范畴中的等价**。 我们讨论由 ∞-双范畴和准范畴富集范畴呈现的 $(\infty,2)$-范畴中的 $(\infty, 1)$-等价概念。对于其他模型——例如 2-复杂集合、饱和 2-拟集合以及完备 Segal Θ_2-空间——其处理可由 $n = 2$ 第 2.6.1 至 2.6.3 节中针对该情形的讨论得出。

2.5.1. 由一个 ∞-双范畴中的等价。 考虑 Lurie 模型结构，它定义在带标度单纯集合上，对应于 ∞-双范畴，见 [Lur09b，定理 4.2.7]或 [GHL22，定义 6.1]。注 2.1.7 中包含 $1\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty, 1)\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty, 2)\mathscr{C}at$ 的一个模型由函子$N^\sharp\colon \mathcal{C}\mathrm{at} \to \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}_{\mathrm{sc}}$实现；该函子将范畴神经中的所有 2-单纯形都标记出来，并且是右 Quillen 函子。因此，游走 1-态射 $\mathscr{C}_1$ 的模型是 $N^\sharp\mathcal{C}_1 = \Delta[1]$，即具有唯一可能标度的 1-单纯形；而 $\mathscr{I}$ 的一个模型是 $N^\sharp\mathcal{I}$，即具有最大标度的单纯集 $N\mathcal{I}$。 $f\colon \Delta[1] \to N^\sharp\mathcal{I}$ 的一个形如 (2.3.2) 的分解是平凡分解

$$f\colon\ \Delta[1] \xhookrightarrow{f} N^\sharp\mathcal{I} \xrightarrow{\simeq} N^\sharp\mathcal{I},$$

以下是命题 2.3.1 的一个应用。另请参见 [GHL22, Definition 1.25]，其中给出了 ∞-双范畴中 $(\infty, 1)$- 等价的其他刻画。

命题 2.5.1. ∞-双范畴 $\mathscr{C}$中的一个1-态射 $F\colon A \to B$是一个$(\infty,1)$-等价，当且仅当在$s\mathcal{S}et^{sc}$中，以下（严格的！）提升问题有解。

$$\begin{array}{ccc} \Delta[1] & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \nearrow & \\ N^\sharp\mathcal{I} & & \end{array}$$

2.5.2. 在（自然标记的）拟范畴上富集的范畴中的等价。考虑拟范畴富集范畴（分别为在自然标记的拟范畴上富集的范畴）的单纯范畴（分别为标记单纯范畴）上的 Bergner–Lurie 模型结构 $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}_{(\infty,1)}\mathcal{C}\mathrm{at}$（分别为 $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}^+_{(\infty,1)}\mathcal{C}\mathrm{at}$）。模型结构 $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}_{(\infty,1)}\mathcal{C}\mathrm{at}$（分别为 $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}^+_{(\infty,1)}\mathcal{C}\mathrm{at}$）是 [Lur09a, Theorem A.3.2.24] 在 [Lur09a, Example A.3.2.23]（分别为 [Lur09a, Example A.3.2.22]）这一特定情形下的实例。注 2.1.7 中包含 $\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty, 1)\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty, 2)\mathscr{C}at$ 的一个模型，由沿离散包含 $\mathrm{disc}\colon \mathcal{S}\mathrm{et} \to \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}$ 的基变换函子 $\mathrm{disc}_*\colon \mathcal{C}\mathrm{at} \to \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}^{(+)}_{(\infty,1)}\mathcal{C}\mathrm{at}$ 所给出的右 Quillen 函子实现。以下是命题 2.3.1 的一些应用。

命题 2.5.2. 范畴 $\mathscr{C}$（其以自然标记拟范畴为富集）中的一个1-态射 $F\colon A \to B$是$(\infty,1)$-等价，当且仅当在范畴 $s\mathcal{S}et^+\mathcal{C}at$中，以下提升问题有解：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{disc}_*\mathcal{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \nearrow & \\ \mathfrak{C}^{sc}N^\sharp\mathcal{I} & & \end{array}$$

命题 2.5.3. 拟范畴 *enriqueced* 范畴 $\mathscr{C}$ 中的一个1-态射 $F\colon A \to B$ 是$(\infty,1)$-等价，当且仅当在$s\mathcal{S}et_{(\infty,1)}\mathcal{C}at$中，以下提升问题有解：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{disc}_*\mathcal{C}_1 & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \nearrow & \\ N_*\mathcal{E}^{\mathrm{adj}} & & \end{array}$$

例 2.5.4。 我们想强调，在类型为 (2.3.2) 的分解中有一个余纤维化 φ 确实至关重要。考虑 2-范畴 $\mathcal{E}$ 中的 1-态射 $f\colon a \to b$。根据构造，我们知道 f 是 2-范畴 $\mathcal{E}$ 中的一个等价。特别地，它也是拟范畴富化范畴 $N_*\mathcal{E}$ 中的一个 $(\infty,1)$-等价。我们注意到，在模型范畴 $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}_{(\infty,1)}\mathcal{C}\mathrm{at}$ 中，这个提升问题在同伦意义下有解。

$$\begin{array}{ccc} N_*\mathcal{C}_1 & \xrightarrow{F} & N_*\mathcal{E} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \overset{\simeq}{\nearrow} & \\ N_*\mathcal{I} & & \end{array}$$

将同一个提升问题严格地看作范畴 $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}\mathcal{C}\mathrm{at}$ 中的问题——而非模型范畴 $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}_{(\infty,1)}\mathcal{C}\mathrm{at}$ 中同伦意义下的问题——它无法 提升。观察到所有映射$N_*\mathcal{I} \to N_*\mathcal{E}$ 都是常值映射即可看出这一点。不过，如果考虑典范映射 $N_*\mathcal{E}^{\mathrm{adj}} \to N_*\mathcal{I}$，这个提升问题

$$\begin{array}{ccc} N_*\mathcal{C}_1 & \xrightarrow{F} & N_*\mathcal{E} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & \nearrow & \\ N_*\mathcal{E}^{\mathrm{adj}} & & \end{array}$$

在 $\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}\mathcal{C}\mathrm{at}$ 中存在一个严格解。

2.6. **由模型呈现的 (∞,n)-范畴中的等价**。 我们讨论由饱和的 $(n+1)$-复杂单纯集、饱和的 $(n+1)$-comical 集以及完备 Segal Θ_{n+1}-空间呈现的 $(\infty,n+1)$-范畴中的 (∞,n)-等价这一概念。

2.6.1. 饱和 $(n+1)$-复杂单纯集中的等价。 考虑 [OR20, 定理 1.25] 中关于饱和 $(n+1)$-复杂单纯集的标记单纯集合 $m\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\infty,n+1)}$ 上的 Verity 模型结构。注 2.1.7 中的包含 $1\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty,1)\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty,n+1)\mathscr{C}at$ 的一个模型由同伦函子 $N_{\natural}\colon \mathcal{C}\mathrm{at} \to m\mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}^{(\infty,n+1)}$ 实现；该函子会标记范畴神经中由同构见证的 1-单纯形，以及维数为 2 或更高的所有单纯形。因此，游走 1-态射 $\mathscr{C}_1$ 的一个模型是 $\Delta[1]$，即最小标记的标准 1-单纯形；而 $\mathscr{I}$ 的一个模型是 $N^{\sharp}\mathcal{I}$，即最大标记的单纯集 $N\mathcal{I}$。$f\colon \Delta[1] \to N^{\sharp}\mathcal{I}$ 的 (2.3.2) 式分解中相关的分解包括

$$f\colon \Delta[1] \hookrightarrow N^{\sharp}\mathcal{I} \xrightarrow{\psi}_{\simeq} N^{\sharp}\mathcal{I},$$

以及分解

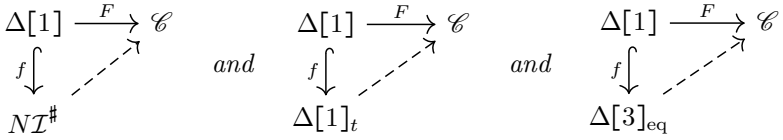
$$f\colon \Delta[1] \hookrightarrow \Delta[1]_t \xrightarrow{\psi}_{\simeq} N^{\sharp}\mathcal{I},$$

以及分解

$$f\colon \Delta[1] \hookrightarrow \Delta[3]_{\mathrm{eq}} \xrightarrow{\psi}_{\simeq} N^{\sharp}\mathcal{I},$$

以下是命题 2.3.1 的一个应用。

命题 2.6.1。 饱和的1-复形集 $F\colon A \to B$中的一个($\infty, n-1$)-态射是($\infty, n-1$)-等价，当且仅当下列（严格！）提升问题中的任意一个（因此也包括全部）在范畴 $ms\mathcal{S}et$中有解

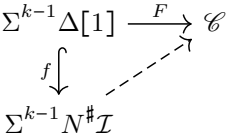


设 $k > 0$。悬挂函子 $\mathfrak{S}^{k-1}\colon(\infty, 1)\mathscr{C}at \to (\infty, k)\mathscr{C}at$ 的一个模型由同伦函子 $\Sigma^{k-1}\colon m\mathsf{s}\mathcal{S}\mathsf{et}_{(\infty,1)} \to m_{\mathsf{S}}\mathcal{S}\mathsf{et}_{(\infty,k)}$给出，该函子是通过迭代 OR22 引理 2.7] 中的构造得到的。因此， $\mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{C}_1$ 的一个模型是 $\Sigma^{k-1}\Delta[1]$，而 $\mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{I}$ 的一个模型是 $\Sigma^{k-1}N^\sharp\mathcal{I}$。 $f_k\colon \Sigma^{k-1}\Delta[1] \to \Sigma^{k-1}N^\sharp\mathcal{I}$ 的一个形如 (2.3.2) 的分解是平凡分解

$$f_k\colon \Sigma^{k-1}\Delta[1] \hookrightarrow \Sigma^{k-1}N^\sharp\mathcal{I} \xrightarrow[\simeq]{\psi} \Sigma^{k-1}N^\sharp\mathcal{I}.$$

因此，下面的内容再次是命题 2.3.3 的一个应用。另见 [Lou22a，推论 3.2.11]，其中给出了其他关于 ($\infty, n+1-k$)-等价的刻画。

命题 2.6.2. 饱和的 ($n+1$)-拟范畴集合 $\mathscr{C}$中的 k-态射 $F\colon A \to B$是一个 ($\infty, n+1-k$)-等价，当且仅当在范畴 $ms\mathcal{S}et$中，以下（严格）提升问题存在解。



2.6.2. 饱和的 ($n+1$)-拟范畴集合中的等价。 考虑标记立方集上的 Doherty–Kapulkin–Maehara 模型结构，它用于饱和的 ($n+1$)-拟范畴集合 [DKM21，定理 2.7]。注 2.1.7 中包含 $1\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty, 1)\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty, n+1)\mathscr{C}at$ 的一个模型，由 $N_!\colon \mathcal{C}$在 $\to m\mathcal{C}\mathsf{S}\mathsf{at}_{(\infty,n+1)}\mathsf{et}$ 上的同伦函子实现；该函子会标记由同构见证的 1-立方体，以及范畴的立方神经中所有维数为 2 或更高的立方体。因此，游走 1-态射 $\mathscr{C}_1$ 的一个模型是 $\square[1]$, ，即最小标记的标准 1-立方体；而 $\mathscr{I}$的一个模型是 $N^\sharp\mathcal{I}$，即 $\mathcal{I}$的最大标记立方神经 $N\mathcal{I}$。$\square f\colon [1] \to N^\sharp\mathcal{I}$的相关分解中，形如 (2.3.2) 的分解包括以下分解

$$f\colon \square[1] \hookrightarrow N^\sharp\mathcal{I} \xrightarrow[\simeq]{\psi} N^\sharp\mathcal{I},$$

以及分解

$$f\colon \square[1] \hookrightarrow \tilde{\square}[1] \xrightarrow[\simeq]{\psi} N^\sharp\mathcal{I},$$

其中 $\tilde{}\square[1]$ 是来自 [DKM21, §1], 的标记的 1-立方体，以及分解

$$f\colon \square[1] \hookrightarrow L_{i,j} \xrightarrow[\simeq]{\psi} N^\sharp\mathcal{I},$$

其中 $L_{i,\ j}$ 是来自 [DKM21, §2]的立方集合。

以下是命题 2.3.3 的一个应用。

命题 2.6.3。 饱和($n+1$)余单纯集合 $\mathscr{C}$中的 A1-态射 $F\colon A \to B$是(∞, n)-等价，当且仅当在范畴 $mc\mathcal{S}et$中，以下（严格！）提升问题之一（因而也就是全部）存在解

$$\begin{array}{ccc} \square[1] & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \nearrow & \\ N^{\sharp}\mathcal{I} & & \end{array} \quad and \quad \begin{array}{ccc} \square[1] & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \nearrow & \\ \tilde{\square}[1] & & \end{array} \quad and \quad \begin{array}{ccc} \square[1] & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \nearrow & \\ L_{i,j} & & \end{array}$$

2.6.3. 完备 *Segal* Θ_{n+1}-空间中的等价。 考虑 Θ_{n+1}-空间上的 Rezk 模型结构，其中完备 Segal Θ_{n+1}-空间来自 [Rez10, §11]。

由注 2.1.7 给出的包含 $1\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty,1)\mathscr{C}at \hookrightarrow (\infty,n+1)\mathscr{C}at$ 的一个模型，由同伦函子实现：

$$p^*N^{\mathrm{Rezk}}\colon \mathcal{C}at \xrightarrow{N^{\mathrm{Rezk}}} s\mathcal{S}et^{\Theta_1^{\mathrm{op}}}_{(\infty,1)} \xrightarrow{p^*} s\mathcal{S}et^{\Theta_{n+1}^{\mathrm{op}}}_{(\infty,n+1)},$$

其中， N^{Rezk} 表示来自 [Rez01, §3.5] 的 Rezk 神经——文中称为分类图——它是一个右 Quillen 函子，因而是同伦函子； $p\colon \Theta_{n+1} \to \Theta_1 = \Delta$ 表示典范投影，因此函子 $p^*\colon \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Theta_1^{\mathrm{op}}}(\infty,1) \to \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Theta_{n+1}^{\mathrm{op}}}(\infty,n+1)$ 是一个左 Quillen 函子，因而是同伦函子。对于 $k > 0$，悬挂函子 $\mathfrak{S}^{k-1}\colon (\infty,1)\mathscr{C}at \to (\infty,k)\mathscr{C}at$ 的一个模型由同伦函子 $\Sigma^{k-1}\colon \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Theta_1^{\mathrm{op}}}(\infty,1) \to \mathrm{s}\mathcal{S}\mathrm{et}^{\Theta_{n+1}^{\mathrm{op}}}(\infty,n+1)$ 给出，该函子是通过迭代 [Rez10, 命题 4.6] 中的构造 $V[1]$ 得到的。因此， $\mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{C}_1$ 的一个模型是可表对象 $\Sigma^{k-1}p^*N\mathrm{Rezk}\mathcal{C}_1 \cong \Theta_n[\mathcal{C}_k]$，而 $\mathfrak{S}^{k-1}\mathscr{I}$ 的一个模型是 $\Sigma^{k-1}p^*N^{\mathrm{Rezk}}\mathcal{I}$。

$f\colon \Delta[1] \to \Sigma^{k-1}N^{\mathrm{Rezk}}\mathcal{I}$形如（2.3.2）的分解是平凡分解

$$f\colon \Sigma^{k-1}N^{\mathrm{Rezk}}\mathcal{C}_1 \hookrightarrow \Sigma^{k-1}N^{\mathrm{Rezk}}\mathcal{I} \xrightarrow[\simeq]{\psi} \Sigma^{k-1}p^*N^{\mathrm{Rezk}}\mathcal{I}.$$

以下是命题 2.3.3 的一个应用。另见 [Rez10, §11.14]，了解关于（ ∞， $n+1-k$）-等价的其他刻画。

命题 2.6.4. 完备 *Segal* Θ_{n+1}-空间 $\mathscr{C}$中的一个 k-态射 $F\colon A \to B$是($\infty, n+1-k$)-等价，当且仅当在范畴$s\mathcal{S}et^{\Theta_{n+1}^{\mathrm{op}}}$中，以下（严格！）提升问题有解

$$\begin{array}{ccc} \Theta_{n+1}[\mathcal{C}_k] & \xrightarrow{F} & \mathscr{C} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \nearrow & \\ \Sigma^{k-1}p^*N^{Rezk}\mathcal{I} & & \end{array}$$

参考文献

[ABG+] Dimitri Ara、Albert Burroni、Yves Guiraud、Philippe Malbos、François Métayer 和 Samuel Mimram，多面体图：从重写到高阶范畴，准备中的手稿。[AF15] David Ayala 和 John Francis，拓扑流形的分解同调，J. Topol. **84**, 1045 2015 1084 ( )，第 – 期。[AF17] ———，配边假设，arXiv:1705.02240v2 (2017)。[AG15] D. Arinkin 和 D. Gaitsgory，凝聚层的奇异支撑与几何朗兰兹猜想，Selecta Math. (N.S.) **21**(2015)，第 1 期，1–199。[AGV71] Michael Artin、Alexander Grothendieck 和 Jean-Louis Verdier，拓扑斯理论与概形的*étale*上同调 *I*、*II*、*III*，数学讲义丛书，第 269、270、305 卷，施普林格，1971年。[AL20] Dimitri Ara 和 Maxime Lucas，严格 ω-范畴上的民间模型范畴结构是幺半的，理论与应用范畴 **35**(2020)，第 21 号论文，745–808。

[AM20] Dimitri Ara 和 Georges Maltsiniotis，严格 ∞-范畴的纤维积与切片，法国数学会回忆录 (N.S.) (2020)，第 165 期，vi+213。[Ara14] Dimitri Ara，高阶拟范畴与高阶 Rezk 空间，J. K-理论 14 (2014)，第 3 期，701–749。[Ara22] Manuel Araújo，通过弦图研究 3-范畴中伴随的相干性，Compositionality 4 (2022)。[Aya09] David Ayala，几何配边范畴，ProQuest LLC，安娜堡，MI，2009，博士论文——斯坦福大学。[Bar05] Clark Barwick，(∞, n)-Cat 作为闭模型范畴，博士论文（宾夕法尼亚大学），可在 https://repository.upenn.edu/dissertations/AAI3165639 查阅，2005年，查阅于2023年3月。[Bat98] M.A. Batanin，作为弱 n-范畴理论的自然环境的幺半 globular 范畴，数学进展 136 (1998)，第 1 期，39–103。[BD95] J. C. Baez 和 J. Dolan，高维代数与拓扑量子场论，J. Math. Phys. 36 (1995)，第 11 期，6073–6105。[Bén65] Jean Bénabou，相对范畴，C. R. Acad. Sci. Paris 260 (1965)，3824–3827。[Bén67] Jean Bénabou，双范畴导论，中西部范畴研讨会报告，施普林格，柏林，1967年，第 1–77 页。[Ber07a] Julia E. Bergner，单纯范畴范畴上的模型范畴结构，美国数学会汇刊 359 (2007)，第 5 期，2043–2058。[Ber07b] ———，同伦论的三个模型，拓扑学 46 (2007)，第 4 期，397–436。[Bou84] Dominique Bourn，n-范畴的正合纤维化塔，拓扑、微分几何与范畴论札记 25 (1984)，第 4 期，327–351。[BR13] Julia E. Bergner 和 Charles Rezk，(∞, n)-范畴模型的比较 I，几何与拓扑 17 (2013)，第 4 期，2163–2202。[BR20] ———，(∞, n)-范畴模型的比较 II，J. Topol. 13 (2020)，第 4 期，1554–1581。[BSP21] Clark Barwick 和 Christopher Schommer-Pries，论高阶范畴理论的唯一性，J. Amer. Math. Soc. 34 (2021)，第 4 期，1011–1058。[Cam20] Alexander Campbell，双范畴的同伦相干胞腔神经，Adv. Math. 368 (2020)，107138，67。[CCKS21] Daniel Carranza、Jonathan Chang、Krzysztof Kapulkin 和 Ryan Sandford，同伦类型论中的 2- 伴随等价，Log. Methods Comput. Sci. 17 (2021)，第 1 期，第 3 号论文，9。[Che07] Eugenia Cheng，一个具有所有对偶的 ω ω **15** 2007 4, -范畴是一个 -群胚，Appl. Categ. Structures ( )，第 – 期。[CKM20] Tim Campion、Chris Kapulkin 和 Yuki Maehara，(∞, n)-范畴的立方模型，arXiv:2005.07603v2 (2020)。[CS19] Damien Calaque 和 Claudia Scheimbauer，关于配边的 (∞, n)-范畴的一则注记，代数与几何拓扑 19 (2019)，第 2 期，533–655。[DK19] Tobias Dyckerhoff 和 Mikhail Kapranov，高阶 Segal 空间，第 2244 卷，沙姆：施普林格，2019年（英文）。[DKM21] Brandon Doherty、Chris Kapulkin 和 Yuki Maehara，(∞, n)-范畴的立方与单纯方法的等价，arXiv:2106.09428v2 (2021)。[DS11] Daniel Dugger 和 David I. Spivak，拟范畴中的映射空间，代数与几何拓扑 11 (2011)，第 1 期，263–325。[Dyc21] Tobias Dyckerhoff，范畴化的 Dold-Kan 对应，Selecta Math. (N.S.) 27 (2021)，第 2 期，第 14 号论文，35。[Ehr63] Charles Ehresmann，结构化范畴，Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 80 (1963)，349–426。[EK66] Samuel Eilenberg 和 G. Max Kelly，闭范畴，范畴代数会议论文集（加利福尼亚州拉霍亚，1965年），施普林格，纽约，1966年，第 421–562 页。[EM45] Samuel Eilenberg 和 Saunders MacLane，自然等价的一般理论，美国数学会会刊 58 (1945)，231–294。[Fre13] Daniel S. Freed，配边假设，美国数学会通报 (N.S.) 50 (2013)，第 1 期，57–92。[Gab62] Pierre Gabriel，阿贝尔范畴，法国数学会通报 90 (1962)，323–448。[Gel41] I. Gelfand，赋范环，Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S. 9 (51) (1941)，3–24。[GH15] David Gepner 和 Rune Haugseng，通过非对称 ∞-幺半算子丰富化的 ∞-范畴，Adv. Math. 279 (2015)，575–716。[GHL22] Andrea Gagna、Yonatan Harpaz 和 Edoardo Lanari，关于 $(\infty, 2)$-范畴所有模型的等价性，J. Lond. Math. Soc. (2) 106 (2022)，第 3 期，1920–1982。[GJ09] Paul G. Goerss 和 John F. Jardine，单纯同伦论，现代 Birkhäuser 经典著作，Birkhäuser 出版社，巴塞尔，2009年，重印1999年版 [MR1711612]。

[GJO19] Nick Gurski、Niles Johnson 和 Angélica M. Osorno，《二维稳定同伦假设》，J. Pure Appl. Algebra 223 (2019)，第 10 期，4348–4383。[GPS95] R. Gordon、A. J. Power 和 Ross Street，《三范畴的相干性》，Mem. Amer. Math. Soc. 117 (1995)，第 558 期，vi+81.[GPS18] Sheel Ganatra、John Pardon 和 Vivek Shende，《包裹 Fukaya 范畴的扇区下降》，arXiv:1809.03427v3 (2018)。[GR17] Dennis Gaitsgory 和 Nick Rozenblyum，《导出代数几何研究。第一卷：对应与对偶性》，数学调查与专著，第 221 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2017。[Gro03] Étale 覆盖与基本群（SGA 1），巴黎数学文献丛书 [巴黎数学文献], 第 3 卷，法国数学会，巴黎，2003。[Gue21] Léonard Guetta，《严格 ω-范畴的同调》，博士论文，网址：https://www.irif.fr/~guetta/these，2021，2022 年 11 月查阅。[Gur12] Nick Gurski，《三范畴中的双等价》，理论与应用范畴 26 (2012)，第 14 期，349–384。[GW20] Ulrich Görtz 和 Torsten Wedhorn，《代数几何 I：概形——附例题与练习》，施普林格 Studium Mathematik—Master，施普林格 Spektrum，威斯巴登，2020，第二版 [的2675155]。[Har20] Yonatan Harpaz，《双侧性与有限跨度的普适性》，Proc. Lond. Math. Soc. (3) 121 (2020)，第 5 期，1121–1170。[Hau17] Rune Haugseng，《 $\mathbb{E}_n$-代数的高阶 Morita 范畴》，几何与拓扑 21 (2017)，第 3 期，1631–1730。[Hau18] ———，《迭代跨度与经典拓扑场论》，Math. Z. 289 (2018)，第 3–4 期，1427–1488。[Hei20] Hadrian Heine，《富集 ∞-范畴与带弱作用的 ∞-范畴之间的等价》，arxiv:2009.02428v2 (2020)。[Hir03] Philip S. Hirschhorn，《模型范畴及其局部化》，数学调查与专著，第 99 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003。[HL23] Simon Henry 和 Félix Loubaton，《严格 ∞-范畴的归纳模型结构》，arXiv:2301.11424v1 (2023)。[Hov99] Mark Hovey，《模型范畴》，数学调查与专著，第 63 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1999。[HS98] André Hirschowitz 和 Carlos Simpson，《n-层的下降》（n-层的下降），1998。[JFS17] Theo Johnson-Freyd 和 Claudia Scheimbauer，《（拟）松自然变换、扭曲量子场论与“更高阶” Morita 范畴》，Adv. Math. 307 (2017)，147–223。[JO12] Niles Johnson 和 Angélica M. Osorno，《稳定 1-型的建模》，理论与应用范畴 26 (2012)，第 20 期，520–537。[Joy08a] André Joyal，《拟范畴札记》，预印本，网址：https://www.math.uchicago.edu/~may/IMA/Joyal.p

df，

2008年，2023年2月检索。[Joy08b] ———， 拟范畴理论及其应用，预印本，见 http://mat.uab.cat/~kock/crm/hocat/advanced-course/Quadern45-2.pdf，2008年，2023年2月检索。[JY21] Niles Johnson 和 Donald Yau，《二维范畴》，牛津大学出版社，牛津，2021年。[Kel69] G. M. Kelly，《富集范畴的伴随》，《中西部范畴研讨会报告》III，施普林格，柏林，1969年，第166–177页。[Kel82] ———，《富集范畴论的基本概念》，《伦敦数学会讲义系列》第64卷，剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1982年。[Kel89] ———，《关于 2 2 的初等观察》，《澳大利亚数学学会通报》（301，39，1989，317），第–期。[Koc04] Joachim Kock，《Frobenius代数与二维拓扑量子场论》，《伦敦数学会学生文本》第59卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[Kon95] Maxim Kontsevich，《镜像对称的同调代数》，《国际数学家大会论文集》第1、2卷（苏黎世，1994年），Birkhäuser，巴塞尔，1995年，第120–139页。[KS74] G. M. Kelly 和 Ross Street，《二范畴要素述评》，《范畴研讨会》（研讨会论文集，悉尼，1972/1973），《数学讲义》第420卷，施普林格，柏林，1974年，第75–103页。[KS01] Maxim Kontsevich 和 Yan Soibelman，《同调镜像对称与环面纤维化》，《辛几何与镜像对称》（首尔，2000年），世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇，2001年，第203–263页。[Lac00] Stephen Lack，《伪单子的相干方法》，《数学进展》152（2000），第2期，179–202。[Lac02] Stephen Lack，《2-范畴的 Quillen 模型结构》，K理论与应用范畴 26（2002），第2期，171–205。[Lac04] ———，《双范畴的 Quillen 模型结构》，K理论与应用范畴 33（2004），第3期，185–197。

[Lac10] ———，《2-范畴指南》，《迈向高阶范畴》，施普林格，2010年，第105–191页。[Lei04] Tom Leinster，《高阶拟 operad、高阶范畴》，《伦敦数学会讲义系列》第298卷，剑桥大学出版社，剑桥，2004年。[Lin21] Zhen Lin，《同伦拉回的连通分支》，2021年，StackExchange 答复，见 https://math.stackexchange.com/q/4136997（版本：2021-05-13，2023年2月检索）。[LMW10] Yves Lafont、François Métayer 和 Krzysztof Worytkiewicz，《ω-范畴上的 folk 模型结构》，《数学进展》224（2010），第3期，1183–1231。[Lou21] Félix Loubaton，《 ω-范畴神经上的 Kan 条件》，arXiv:2102.04281v2（2021）。[Lou22a] ———，《 ∞-范畴的 complicial 模型中的对偶性》，arXiv:2203.11845v1（2022）。[Lou22b]， n-complicial 集合作为（ ∞， n）-范畴的模型，arXiv:2207.08504v1（2022）。[LR20] Fosco Loregian 和 Emily Riehl，《纤维化的范畴论概念》，《数学展望》38（2020），第4期，496–514。[Lur09a] Jacob Lurie，《高阶拓扑斯理论》，《数学年刊研究丛书》第170卷，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。[Lur09b] ———，（∞，2）-范畴与 Goodwillie 微积分 I，arXiv:0905.0462v2（2009）。[Lur09c] ———，《拓扑场论的分类》，《数学当前发展》2008，国际出版社，萨默维尔，马萨诸塞州，2009年，第129–280页。[Man01] Michael A. Mandell， E_∞ 代数与 p-进同伦论，《拓扑学》40（2001），第1期，43–94。[ML98] Saunders Mac Lane，《工作数学家的范畴论》，第2版，《数学研究生文本》第5卷，施普林格出版社，纽约，1998年。[MM15] Akhil Mathew 和 Lennart Meier，《仿射性与色同伦论》，《拓扑学杂志》8（2015），第2期，476–528。[MOP+22] Lyne Moser、Viktoriya Ozornova、Simona Paoli、Maru Sarazola 和 Paula Verdugo，《Tamsamani 模型中的稳定同伦假设》，《拓扑学应用》316（2022），论文编号108106，共40页。[MOR22] Lyne Moser、Viktoriya Ozornova 和 Martina Rovelli，《（ ∞，2）-范畴神经的模型独立性》，arXiv:2206.00660v1（2022）。[Mos20] Lyne Moser，《双范畴的双（ ∞，1）-范畴神经》，arXiv:2007.01848v4（2020）。[Nui21] Joost Nuiten，《关于 Segal 空间的直化》，arXiv:2108.11431v1（2021）。[OR20] Viktoriya Ozornova 和 Martina Rovelli，《（预）分层单纯集合与预分层单纯空间上的（∞,n）-范畴的模型结构》，《代数与几何拓扑》20（2020），第3期，1543–1600。[OR21a] ———，《2-范畴的神经与（ ∞，2）-范畴的2-范畴化》，《数学进展》391（2021），107948。[OR21b] ———，《Joyal 胞腔范畴 Θ_2中的2-范畴 Duskin 神经》，《纯粹与应用代数杂志》225（2021），第1期，106462。[OR22] ———，《 n-complicial 集合的基本推出》，《高阶结构》 6 （ 2022 ），第 1 期，403–438。[Pao19] Simona Paoli，《高阶范畴的单纯方法：弱 n-范畴的 Segal 型模型》，《代数与应用》第26卷，施普林格，沙姆，2019年。[Pel03] Régis Pellissier，《弱富集范畴》，arXiv:0308246v1（2003）。[Pst22] Piotr Pstrągowski，《幺半双范畴中的可对偶对象》，《理论与应用范畴》38（2022），论文编号9，257–310。[Qui69] Daniel Quillen，《有理同伦论》，《数学年刊》（第2辑）90（1969），205–295。[Rez96] Charles Rezk，《范畴的模型范畴》，笔记见 https://faculty.math.illinois.edu/~rezk/cat-ho.dvi，1996年，2023年2月检索。[Rez01] ———，《同伦论的同伦理论模型》，《美国数学会会刊》353（2001），第3期，973–1007（电子版）。[Rez10] ———，《弱 n-范畴的笛卡尔呈示》，《几何与拓扑》14（2010），第1期，521–571。[Ric20] Alex Rice，《高阶范畴中的余归纳可逆性》，arXiv 预印本 arXiv:2008.10307（2020）。[RV16] Emily Riehl 和 Dominic Verity，《同伦相干伴随与单子形式理论》，《数学进展》286（2016），802–888。[RV22] ———，《 ∞-范畴论要素》，《剑桥高等数学研究丛书》第194卷，剑桥大学出版社，剑桥，2022年。[Sim12] Carlos Simpson，《高阶范畴的同伦论》，《新数学专著》第19卷，剑桥大学出版社，剑桥，2012年。[SS86] Stephen Schanuel 和 Ross Street，《自由伴随》，《拓扑、微分几何与范畴论札记》27（1986），第1期，81–83。[Str80] Ross Street，《双范畴中的纤维化》，《拓扑、微分几何与范畴论札记》21（1980），第2期，111–160。[Str87] ———，《定向单形代数》，《纯粹与应用代数杂志》49（1987），第3期，283–335。[Sul77] Dennis Sullivan，《拓扑学中的无穷小计算》，《高等科学研究所数学出版物》（1977），第47期，269–331（1978）。

[Tam99] Zouhair Tamsamani，关于 n-范畴和 n经由多重单纯集合定义的非严格-群胚， K-理论**16** （1999），第1期，51–99页。[tD08] Tammo tom Dieck，《代数拓扑》，EMS 数学教科书，欧洲数学学会（EMS），苏黎世，2008年。[Tri06] Todd Trimble，四范畴笔记，笔记见 https://math.ucr.edu/home/baez/trimble/tetracategories.html，2006年，2023年2月检索。[Ver08] Dominic Verity，弱拟范畴集。一、基本同伦论，《数学进展》**219**（2008），第4期，1081–1149页。[Ver11] ———，富集范畴、内范畴与基变换，《理论与应用范畴代表作》（2011），第20期，1–266页。

马克斯·普朗克数学研究所，波恩，德国电子邮件地址：
viktoriya.ozornova@mpim-bonn.mpg.de

数学与统计学系，马萨诸塞大学，阿默斯特，USA
电子邮件地址：mrovelli@umass.edu