arXiv:2303.00568v1 [physics.plasm-ph] 1 Mar 2023

利用高强度激光器对强场量子电动力学进行统计检验的前景

C. Olofsson* 和 A. Gonoskov†*Department of Physics, University of Gothenburg, SE-41296 Gothenburg, Sweden*(日期：2023年3月2日)

利用高能电子束与高强度激光脉冲碰撞，有望达到较高的无量纲静止系加速度 χ，从而触发强场量子电动力学（SFQED）所描述的过程。在高 χ 条件下测量与微扰强场量子电动力学预测结果的偏差，有助于检验现有预测，并为进一步的理论发展提供指导。然而，由于相互作用过程具有概率性、低-χ 相互作用产生的强背景，以及控制和测量此类碰撞实验中对准与同步的能力有限，这些实验测量面临挑战。本文详细阐述了一种利用近似贝叶斯计算（ABC）的方法，即使碰撞参数部分未知且因实验而异，也能根据多次重复实验的结果获得具有统计依据的推断。作为原理性验证，我们探讨了推断与强场环境耦合所导致的有效质量变化这一问题。

I. 引言

尽管量子电动力学（QED）的基本原理已通过精确的实验验证，但它们对于足够强电磁场所预示的影响在理论上仍然十分复杂，并且缺乏实验数据。让加速电子与高强度激光脉冲发生碰撞，可以视为获取此类实验数据的一条新兴途径[1–4]。局部相互作用由电子在其静止参考系中的加速度与施温格场所产生的加速度之比这一无量纲比值表征 $E_{\rm crit}$：

$$\chi = \frac{\gamma_e}{E_{\rm crit}}\sqrt{\left(\vec{E}+(\vec{v}/c)\times\vec{B}\right)^2-\left(\vec{E}\cdot\vec{v}/c\right)^2} \quad (1)$$

其中 $\vec{v},\gamma_e$ 分别是$\vec{}$ $\vec{}$电子的速度和洛伦兹因子，而 E, B 是电磁场矢量。这里， $E_{\rm crit}=m_e^2c^3/q_e\hbar\approx 10^{18}$ Vm^{-1} 其中 $\hbar$是约化普朗克常数， c 是光速， m_e, q_e 分别是电子的质量和电荷。在 $\chi \ll 1$ 下，电子会受到经典辐射的影响，并产生相应的辐射反作用。在 $\chi\sim 1$下的光子发射及相应反冲由非线性康普顿散射描述，并已在多项实验中观测到 [5–8]。测量 $\chi \sim 1$ 下光子发射的定量性质（如能量、角分布或偏振分布）可视为顺理成章的下一步，而关于 $\chi \gg 1$ 的结果可能有助于推动理论发展，甚至带来基础性发现（参见文献 [9] 及其中的参考文献）。

上述研究面临的一大障碍是相互作用过程的复杂性。束流中每个电子的 χ都会随时间变化，且总体上取决于电子相对于激光脉冲位置的位置；由于时空失配，这种相对位置也可能因实验而异。对于当代激光脉冲的持续时间，许多电子在到达强场区域之前，可能已经损失了相当一部分初始能量；它们只有到达该区域后才有机会以高 χ发射。除此之外，由于布赖特–惠勒过程，发射光子可能衰变为电子-正电子对，从而引发电磁级联。综合来看，这意味着碰撞后可测得的光子、电子和正电子分布主要由低-χ发射决定，无法直接提供高-χ发射的信息，即使这些高能发射已被诱发。

一种已知的处理此类困难的方法是贝叶斯二元假设检验，其基础是将实验结果与基于两个相互竞争的理论分别计算出的结果进行比较。然而，即使不存在需要检验的明确假设，也可以采用类似技术来确定量化近似理论偏差的参数（有时称为参数校准程序 [10–12]）；在我们的案例中，该近似理论可以是适用于中等 χ 值的非线性康普顿散射理论。这种方法的一个实际优势是，即使重复性较低，也能够从多次实验中获得具有统计严谨性的知识。例如，无论实验之间激光束流装置的对准是否以无法控制且我们无法测量的方式发生变化，都可以推断出高 χ 事件的相关信息。

本文探讨了在即将开展的实验 [10, 13, 14] 中使用近似贝叶斯计算（ABC）技术的可能性。作为一项原理验证问题，

* christoffer.olofsson@physics.gu.se
† arkady.gonoskov@physics.gu.se

我们详细阐述了如何利用该方法测量量化有效质量位移 [9, 15–17] 的常数。我们评估了在可能的实验条件下使用 ABC技术的效果，并分析了主要要求、困难以及改进机会。本文安排如下。第二节阐述了采用无似然推断的动机，并介绍 ABC算法。第三节展示了一种推断有效质量变化的原理验证方法，并评估其中的困难和局限性。第四节介绍模拟实验的数值方法，并展望所述方法论的应用前景。第五节给出结论。

II. 方法论

在转向具体主题的分析之前，我们先用一个一般问题的表述来讨论方法论。假设我们通过开展实验来研究一个概率过程。每次实验都会得到测量数据 x_{obs}。我们有一个模型 $M(\theta,\ z)$，对于模型参数 θ 和一个潜在参数 z的任意给定值，该模型都能针对这些数据给出预测 $x = M(\theta,\ z)$。其中，θ 是量化过程本身的基本参数，因此我们关注其唯一取值；而 z表示一个未测量的参数，它可能因实验而异，并根据模型 M决定结果x 。我们假设存在一个 θ 的取值，使得对于每次实验，都存在一个适当的 z 取值，令模型能够在某种程度上描述观测值。我们的任务是根据一系列重复的实验测量，推断 θ 取值的概率分布。换言之，目标是根据观测数据 x_{obs}，推断 θ 最有可能的取值范围。贝叶斯统计为上述问题提供了一个框架。待确定的概率分布称为后验分布 $p(\theta|x_{\mathrm{obs}})$，这一名称明确指出了用于推断的数据$x_{\mathrm{obs}}$ 。我们先从不存在潜在参数的情形入手。此时，后验分布可通过贝叶斯定理计算

$$p(\theta|x_{\mathrm{obs}}) = \frac{p(x_{\mathrm{obs}}|\theta)\cdot p(\theta)}{p(x_{\mathrm{obs}})} \tag{2}$$

其中， $p(\theta)$量化了关于 θ可能取值的先验知识，似然 $p(x_{\mathrm{obs}}|\theta)$表示在给定 θ 和 $p(x_{\mathrm{obs}})$的情况下，测量结果为 x_{obs} 的可能性。 $=\int p(x_{\mathrm{obs}}|\theta)p(\theta)d\theta$ 作为归一化因子出现。为纳入对潜在参数的依赖性，我们对其所有可能取值进行积分，并将相应的联合似然记为 $p(x_{\mathrm{obs}}|\theta,\ z)$

$$p(\theta|x_{\mathrm{obs}}) = \frac{\int p(x_{\mathrm{obs}}|\theta,z)p(z)dz\cdot p(\theta)}{\iint p(x_{\mathrm{obs}}|\theta,z)p(z)p(\theta)dzd\theta}, \tag{3}$$

其中， $p(z)$表示与潜在参数 z 取值相关的先验知识。现在我们可以依次处理所有观测值，每次都将得到的后验分布用作处理下一项观测值的先验分布。请注意，我们不会更新 z 的先验分布，因为假定它在所有实验中的取值都不同。

后验分布通常不存在闭式解，因此常采用数值方法。一种常见策略是从后验分布中收集有限数量的样本，以此近似后验分布。重要性抽样、马尔可夫链蒙特卡洛（MCMC）和序贯蒙特卡罗（SMC）等方法 [18–20]都是常用选择。然而，上述方法都需要直接计算似然；对于高维数据集，这在计算上可能难以承受 [21]。如果模型 M 是通过计算机模拟隐式定义的，那么与之相关的似然可能难以计算[13]。快速发展的基于模拟的推断领域 [22] 提供了一种解决方法，无需直接计算似然。为说明其用途，我们采用并拓展了参考文献[21]中的讨论。

考虑标准拒绝采样算法，其目标是从目标密度 $T(\theta)$ 中采样，给定某个辅助采样密度 $A(\theta)$，并满足条件 $A(\theta) > 0$ if $T(\theta) > 0$。那么，该算法如下：

算法 1 标准拒绝采样算法

1: 采样一个提议 $\theta^* \sim A(\theta)$。
2: 以如下概率接受该提议：$\frac{T(\theta^*)}{CA(\theta^*)}$ 其中 $C \geq \mathrm{argmax}[\frac{T(\theta)}{A(\theta)}]$.
3: 若未接纳 θ^* ，则丢弃该提议样本并重复步骤 (1)-(2)，直至达到所需次数。

经过 N 次试验后，得到一组来自 $T(\theta)$ 的样本。通过选择 $T(\theta) = p(\theta|x_{\mathrm{obs}})$ 和 $A(\theta) = p(\theta)$，即可建立与贝叶斯统计的联系。然后，式 (2) 表明，算法 1 中的接受率与似然 $\frac{p(\theta^*|x_{\mathrm{obs}})}{p(\theta^*)} \propto \frac{p(x_{\mathrm{obs}}|\theta^*)}{}$ 成正比，而根据我们的前提，该似然无法计算。不过，即使不显式计算似然，也可以判断是否接受提议样本。为此，我们首先注意到，模型 $M(\theta,\ z)$ 能够在给定 θ 和 z 的值时生成观测值 $x \sim p(x_{\mathrm{obs}}|\theta,\ z)$ 的样本。现在，生成 $x = x_{\mathrm{obs}}$ 的概率与 $p(x_{\mathrm{obs}}|\theta,\ z)$ 相同，因此需要修改算法 1，使其变为

算法 2： 无似然拒绝采样

1: 采样提议样本 $\theta^* \sim p(\theta)$、 $z^* \sim p(z)$。 2: 从模型生成数据 $x^* = M(\theta^*,\ z^*)$。 3: 如果 $x^* = x_{\mathrm{obs}}$ 提议样本被接受，则保留；否则丢弃。 4: 根据需要重复 (1)-(3)。

尽管避免了直接计算似然，算法 2 的第 3 步仍引入了一个显著的障碍。为了

说明这一点，考虑将实验数据分箱为 $\dim(x_{\rm obs}) = B$ 个分箱，使得

$$x_{\rm obs} = [c_1, c_2, c_3, ..., c_B], \tag{4}$$
$$x = [c'_1, c'_2, c'_3, ..., c'_B] \tag{5}$$

其中，c_b，$c'_b \in \mathbb{Z}$ 表示属于b分箱的整数计数。随后，记 p_b 为在 b分箱中与$c_b = c'_b$ 重合的概率，并假设各分箱之间相互独立。于是，接受提议θ^* 的概率变为

$$p(x = x_{\rm obs}) = \prod_{b=1}^{b=B} p_b \tag{6}$$

在高维数据集 $B \to \infty$的极限情况下，该值趋近于零。对于连续数据，式（6）中的接受率较低，甚至不可行，因为其中c_b，$c'_b \in \mathbb{R}$ 为实数。因此，为使采样效率具有实用性，必须放宽精确匹配的要求。鉴于当 $x \approx x_{\rm obs}$ 时允许样本被接受，该接受率会显著提高，这促使我们定义一条规则，以判断数据何时足够接近

$$||x - x_{\rm obs}|| \leq \epsilon \tag{7}$$

其中，$||\cdot||$ 是合适的距离度量，ϵ 是阈值。根据式（7）接受的样本不可避免地来自近似后验分布 $\hat{p}(\theta|x_{\rm obs})$，其准确性完全由 ϵ 决定，而 ϵ 也会影响采样效率。然而，考虑前述采用欧几里得距离度量的示例，则式（7）写为

$$\left(\sum_{b=1}^{b=B} (c_b - c'_b)^2\right)^{1/2} \leq \epsilon \tag{8}$$

并考察 $c_b - c'_b \sim \Delta \ll 1$ 在各个分箱之间变化可忽略不计的有利情形。于是，我们可以直接将式 (8) 表述为

$$\dim(x_{\rm obs}) \leq (\epsilon/\Delta)^2. \tag{9}$$

显然，式 (9) 表明 $x_{\rm obs}$ 的维数受到阈值 ϵ 和误差 Δ 的上限约束。然而，为了保证推断 $\epsilon \to 0$ 的质量，我们希望满足这一要求，这对 $x_{\rm obs}$ 的维数提出了严格限制。为缓解这一问题，可以引入所谓的 汇总统计量

$$S : \mathbb{R}^B \mapsto \mathbb{R}^\beta \tag{10}$$

其作用是将可能含有噪声的数据转换为一组具有指示意义的特征

应能针对所有可能的 θ 明确表征数据。显然，此类向量所在空间的维数 β 可以远小于单元格数量 B。此外，汇总统计量函数甚至可以采用不依赖分箱选择的方式定义。例如，可以构造一个向量，其中包含 $x_{\rm obs}$ 的样本均值 μ 和方差 σ^2：$S(x_{\rm obs}) = (\mu, \sigma^2)$。

通过转换 $x_{\rm obs} \to S(x_{\rm obs})$，算法 2 的第三步可以改写为：当满足以下条件时接受样本

$$||S(x) - S(x_{\rm obs})|| \leq \epsilon. \tag{11}$$

尽管我们现在拥有了在方法上准确、且在某些情况下实际可行的后验分布采样流程，但还有两项常见的改进。首先，式 (11) 意味着接受概率非零即一，因此无法体现匹配程度。为了提高匹配更准确的情形相较于匹配勉强合格情形的贡献，可以使用所谓的 核函数

$$K_\epsilon : \mathbb{R}^\beta \mapsto \mathbb{R} = K_\epsilon\left(\frac{||S(x) - S(x_{\rm obs})||}{\epsilon}\right), \tag{12}$$

它定义了一种概率转移：完美匹配时取 1（$K_\epsilon(0) = 1$），而汇总统计量距离达到 ϵ 阶及以上时取 0。

第二项改进涉及这样一个事实：算法 1 意味着要么接受，要么拒绝，这意味着需要许多被接受的情况，才能减轻算法中这一额外概率因素带来的噪声。实际上，这意味着我们从接受概率较低的情况中获益甚微。为避免这一点，可以将接受概率视为样本权重，从而将所有产生非零接受概率的提议样本都纳入考量。

现在我们可以回到对潜在变量 z 的纳入。在这种情况下，我们可以根据对它的先验知识生成若干提议样本 $z^* \sim p(z)$，然后再次按照上述流程接受匹配程度足够好的情况。实际上，我们会尽可能多次尝试猜测 z。最后，我们指出，可以在一系列测量中，利用每次 $x_{\rm obs}$ 测量依次更新后验分布。为此，我们可以针对每次新的测量计算后验分布，并将前一次后验分布作为先验分布。处理第 i 次观测的算法（$i = 1$ 表示序列中的第一次测量） $x^i_{\rm obs}$ 用于根据前一次观测$p\left(\theta \mid x^{i-1}{}_{\text{观测}} \cdots, x^1_{\rm obs}\right)$ 计算后验分布 $p\left(\theta \mid x^i_{\rm obs}, x^{i-1}{}_{\text{观测}} \cdots, x^1_{\rm obs}\right)$ 其形式如下

算法 3：含潜变量的 ABC 采样

1: 抽取提议样本 $\theta^* \sim p\left(\theta \mid x^{i-1}_{\text{观测}}, \ldots, x^1_{\text{obs}}\right)$, $z^* \sim p(z)$。2: 进行模拟并获取 $x^* = M(\theta^*, z^*)$，然后计算权重：

$$w^* = \frac{K_\epsilon\left(\|S(x^i_{\text{obs}}) - S(x^*)\|/\epsilon\right)}{p\left(\theta^* \mid x^{i-1}_{\text{obs}}, \ldots, x^1_{\text{obs}}\right) p(z^*)} \tag{13}$$

3: 如果 $w^* > 0$，则以计算出的权重接受该提议。4: 根据需要重复步骤 (1) – (3)，以近似后验分布 $p\left(\theta \mid x^i_{\text{obs}}, \ldots, x^1_{\text{obs}}\right)$。

在实践中，ABC 程序的一项核心难题是选择有效的汇总统计量，即能够根据 θ 和 z区分所有情况的汇总统计量。这意味着，对于任意两组不同的 θ 和 z，汇总统计量都不会产生彼此接近的状态。显然，如果不满足这一点，那么当 z^* 提供补偿，使 $S(x^*(\theta^*, z^*))$接近 $S(x_{\text{obs}}(\theta^{true}, z^{true}))$时，该过程就会接受具有错误 θ^* 的情况。这可能完全阻碍 ABC 采样过程的收敛。众所周知，寻找稳健的汇总统计量是一项依赖于具体问题的任务，需要分析各种可能情况。在下一节中，我们将考虑一个包含对潜变量依赖关系的原理验证问题。通过这一分析，我们确定有效的汇总统计量，并详细探讨与基于电子束和聚焦激光脉冲碰撞开展强场量子电动力学测试相关的可行实验策略。

III. 问题陈述

作为原理验证案例，我们考虑这样一个问题：检测并测量电子因与强场环境耦合而产生的有效质量位移的大小 [9, 15–17]。任务是根据高能电子束与聚焦激光脉冲碰撞期间发射光子的角能谱，推断量化这一效应的参数值。为简化问题，同时保留一些能够体现相关方法论能力的典型难点，我们作出若干假设。具体而言，我们假设电子束与聚焦激光场之间的时空失配无法测量，且每次碰撞时都会发生变化。这会导致电子所感受到的电磁场振幅出现波动。反过来，这使得我们无法将某次实验（碰撞）中电子动力学的变化与任何确定的振幅联系起来；而在直接测量有效质量位移时，这一振幅必须确定。为了展示 ABC 方法论如何解决这一难题，我们通过假设电子束穿过一个振幅未知且随每次碰撞而变化的一维激光脉冲，对上述变化进行建模。按照引入的术语，我们引入一个潜在参数，它是一个因子 < 1，会在每次实验中使激光场振幅处处降低，但其数值在不同实验之间不受控地变化。下文将详细介绍这一假想实验的模型。

据推测，强背景电磁场的存在会使量子电动力学的膨胀参数达到 $\alpha_f \chi^{2/3}$，其中 $\alpha_f \approx 1/137$ 是精细结构常数 [9, 15–17]。当取值为 $\alpha_f \chi^{2/3} \gtrsim 1$ 时，该理论将变为非微扰。在此范围内，光子、电子和正电子可以被认为会因辐射修正而获得有效质量。具体而言，可以证明，电子的有效质量 $\tilde{m}_e$ 可估算为 [15]

$$\tilde{m}_e^2 = m_e^2 + \delta m_e^2 = m_e^2\left(1 + 0.84\alpha_f \chi^{2/3}\right) \tag{14}$$

这意味着有效值为 χ（质量通过 E_{crit} 进入方程） (1)

$$\tilde{\chi}^{2/3} = \frac{\chi^{2/3}}{1 + 0.84\alpha_f \chi^{2/3}}. \tag{15}$$

为评估这一效应并测量其程度，可以将 0.84 视为一个模型参数 θ，并根据实验确定：

$$\tilde{\chi}^{2/3} = \frac{\chi^{2/3}}{1 + \theta\alpha_f \chi^{2/3}}. \tag{16}$$

替换有效量 $\tilde{m}_e$，$\tilde{\chi}$ 会影响光子发射和电子-正电子对产生的速率。对于前者，速率可写为 [23, 24]:

$$\frac{\partial I}{\partial \omega}(\delta, \theta) = \frac{\sqrt{3}\tilde{m}_e q_e^2 c\tilde{\chi}(1-\delta)}{2\pi\gamma_e \hbar}\left(F_1(\zeta) + \frac{3}{2}\delta\tilde{\chi}\zeta F_2(\zeta)\right) \tag{17}$$

其中，$\zeta = \frac{2}{3\tilde{\chi}}\frac{\delta}{1-\delta}$, $\delta = \frac{\hbar\omega}{\tilde{m}_e c^2 \gamma_e}$ 是频率为 ω 的光子能量，并以辐射电子的能量归一化；$F_1(x)$ $F_2(x)$分别表示由下式定义的第一类和第二类同步辐射函数：

$$F_1(y) = y\int_y^\infty K_{5/3}(y)dy,\ F_2(y) = yK_{2/3}(y) \tag{18}$$

其中，$K_\nu(y)$为第二类修正贝塞尔函数。

因此，一个可测量的性质 x_{obs} 可能是光子的碰撞后能谱。事实上，归因于 θ 的效应可能很微弱；当 $\chi \gg 1$时，随着电磁级联和低能辐射的出现，发射的概率性质也会变得越来越难以测量。作为原理验证，我们忽略电子-正电子对产生，聚焦于非线性康普顿散射过程，以避开这一困难。此外，我们忽略电子沿其

传播方向上的能量损失，假设 $a_0/\gamma_e \ll 1$，其中 $a_0 = \frac{q_e E_0}{m_e \omega_L c}$ 是频率为 ω_L、峰值电场为 E_0的激光的峰值无量纲振幅。为定义模拟器，我们选择一种简单的几何构型，模拟聚焦激光脉冲与反向传播电子束团之间的相互作用，且两者都可能发生失准。具体而言，我们模拟一个动量为 $p_z = -m_e c\gamma$ 的单个电子与电场为

$$E_x(z,t) = (1-d)E_0 \sin(k\xi)\cos^2\left(\frac{\pi\xi}{L}\right)\Pi\left(\frac{\xi}{L}\right) \quad (19)$$

其中，$\xi = z - ct$ 是运动坐标，k 和L 分别是激光的波数和脉冲长度，$\Pi(x)$定义为一个函数：当 $|x| < 1/2$ 时取值为 1，否则为 0。在此，我们引入潜在参数 $0 \le d \le 1$ 来表示实验方案中的失准，从而降低电子所经历的激光振幅。

然而，d 的不规则性可能会妨碍 ABC 采样。通过比较由公式（17）生成的谱与 $\theta = 0,\ d \neq 0$和 $\theta \neq 0,\ d = 0$可以清楚地看出这一点。将公式（16）的估计阶数写为

$$\tilde{\chi}(\theta, d) \sim (1-d)\chi_0\left(1 + \theta\alpha_f\left((1-d)\chi_0\right)^{2/3}\right)^{-3/2} \quad (20)$$

其中，$\chi_0 = \gamma_e(E_0/E_{\text{crit}})$是 χ的峰值。如果满足以下条件，两种情况可以产生相近的值 $\tilde{\chi}(\theta \neq 0,\ d = 0) \sim \tilde{\chi}(\theta = 0,\ d \neq 0)$

$$d \sim 1 - \left(1 + \theta\alpha_f \chi_0^{2/3}\right)^{-3/2}. \quad (21)$$

因此，对于若干组 θ 和 d，$\tilde{\chi}$ 的值可能相近，从而产生相似的能谱。因此，从这类数据中得到的任何汇总统计量都可能几乎相同，使d 的影响与 θ 的影响难以区分，反之亦然。总之，仅凭能量谱不足以推断 θ的值。可以通过将信息纳入 x_{obs}来解决这一问题，从而将 θ 和 d 的影响区分开来。如果能找到发射的一种互补性质，使任一参数引起的偏差彼此不相关，就有可能区分它们对 x_{obs}的影响。

我们现在要寻找这样一种性质，将其纳入 x_{obs}，并选择汇总统计量以消除潜变量 d。开始讨论之前，我们先指出，电子在激光场 [25]中保持其横向动量。

$$\vec{p}_\perp = q_e \int \vec{E}_\perp dt \quad (22)$$

其中，$\vec{p}_\perp$ 和 $E_\perp$ 分别表示电子动量和电场的横向分量。因此，在每一时刻，电子都沿着偏离初始方向一个角度 α的方向传播：

$$\alpha = \arctan\left(\frac{|\vec{p}_\perp|}{|\vec{p}_z|}\right), \quad (23)$$

其中我们假设运动始终保持高度相对论性。显然，发射光子保持这一角度；如果脉冲是圆偏振的，那么该角度便与 χ [26] 的取值相关。请注意，在 $\alpha \ll 1$ 的高度相对论运动情况下，有效质量的变化不会影响偏转角，因为它无法改变 $\vec{p}_z$（变化的是伽马因子），而根据式（22），$\vec{p}_\perp$ 完全由矢势决定。

考虑发射光子的角分布后，我们将 x_{obs} 重新定义为单位频率 $\Delta\omega$ 和单位角度 $\Delta\alpha$ 下的分数能量分布：$x_{\text{obs}}(\delta,\ \delta+\Delta\delta,\ \alpha,\ \alpha+\Delta\alpha)$，它是 δ 和 α 的函数。

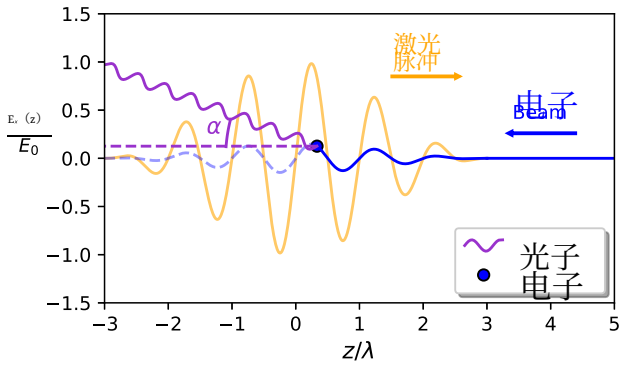

图 1. 实验数值实现的示意图（偏转角经过夸大处理）。

现在我们可以确定消除 d 所需的汇总统计量 $S(x_{\text{obs}})$。想必存在若干种能够实现这一目标的配置，因为并没有规定如何构造 S。为了找出一些稳健且足够简单的方案，我们计算二维数据 x_{obs} 的矩，计算至 i 阶和 j 阶：

$$M_{ij} = \int\int x_{\text{obs}}(\delta, \delta+\Delta\delta, \alpha, \alpha+\Delta\alpha)\delta^i\alpha^j d\delta d\alpha. \quad (24)$$

现在，让我们尝试选择一组矩，使任意组合（θ，d）都映射到该集合中一个可能唯一的值。图2展示了空间 θ 和 d中四个不同矩 M_{ij} 的等高线。矩集合

图2(a)中的矩集合是一个实际可行的选择，因为等高线在任何位置都不平行，这表明每个 θ和 d都对应唯一的一对值。相比之下，图2(b)描绘了这样一种情形：等高线在参数空间中的多个点处变得平行，这意味着所绘制矩的值无法明确指示唯一的一对 θ和 d。我们得出结论，选择 $S(x_{\rm obs}) = (M_{00}, M_{12})$是进行ABC采样的有效选择。

IV. 分析

在我们的模拟中，平面波脉冲的波长设为 $\lambda = 0.8$ μm，脉冲长度为 $L = 6\lambda$，峰值振幅为 $a_0 = 100$（不包括因子 $(1-d)$）。电子的初始能量设为 170 GeV（$\gamma_e \sim 10^5$），位于距原点 $z_s = 5\lambda$ 的位置（数值布置见图 1）。电子和脉冲均被允许反向传播 N 个时间步 $\Delta t = (L+z_s/2)$ $N^{c^{-1}}$。这里，$x(\delta, \delta+\Delta\delta, \alpha, \alpha+\Delta\alpha)$被离散为一个 100×100 网格单元 $x(m\Delta\delta, n\Delta\alpha)$，每个单元的尺寸为 $\Delta\delta\times\Delta\alpha$，并且 $m,n = 0,1,2,...,99$。在每个时间步 q，使用式（22）和（23）估计 $n \approx \alpha/\Delta\alpha$。然后，对于每个 m，我们累积

$$x_{q\Delta t} = x_{(q-1)\Delta t} + \Delta\alpha\Delta\omega\Delta t\frac{\partial I}{\partial\omega}(m\Delta\delta, \theta) \tag{25}$$

为便于阅读，我们省略了 x 的自变量，下标表示时间步。作为原理验证，我们对 $x = M(\theta, d)$进行盲测，并将“实验” $x_{\rm obs} = M(\theta^{true} = 0.84, d)$作为真实值。这里，$\theta$ 值固定为 θ^{true}，而潜变量 d 在各次实验之间随机变化。

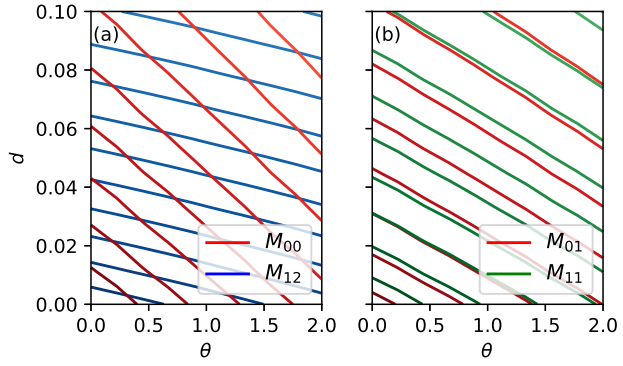

图2. M_{ij} 关于 θ 和 d 的等高线，其中(a)比较 M_{00} 和 M_{12}，(b)比较 M_{01} 和 M_{11}。

接下来讨论 ABC采样的先决条件，我们对 θ 和 d采用以下先验分布

$$p(\theta) = \mathcal{U}(0, 150),\ p(d) = \mathcal{U}(0, 0.1) \tag{26}$$

其中，$\mathcal{U}(a, b)$ 表示上下界分别为 a 和 b 的均匀分布。尽管除 $\theta \geq 0$ 和 $0 \leq d \leq 1$之外没有其他先验知识，但我们认为，给定的模拟参数会产生$\chi_0 \approx 100$，因此设置 $\theta = 150$ 会使 χ的值降至 1 以下，并趋近于经典描述。对于 d，可以根据真实实验中获得的经验值构建先验分布。由于无法采用这一方法，我们假设振幅的变化幅度最多为 10%。

采样过程中，计算以下距离以区分观测值

$$||S(x) - S(x_{\rm obs})|| = \sqrt{d_{00}^2 + d_{12}^2} \tag{27}$$

其中，$d_{ij} = |1 - \frac{M_{ij}^{\rm sim}}{M_{ij}}|$（不要与潜在参数混淆）表示从模拟 $x = M(\theta, d)$中计算出的、带有上标标记的矩。均匀核$K_\epsilon($·

）选择 $= \Pi(\cdot)$，其阈值 $\epsilon = 0.1$ 根据以下要求确定：在 ≈ 50 个采样小时内接受 $N_\theta = 1600$ 个样本。每提出50次 θ^*，我们就生成新的观测数据 $x_{\rm obs}$，以免结果偏向 $d^* \sim p(d)$的现有取值。

图3展示了基于所述 ABC 程序，对一次碰撞实验的模拟结果进行采样所得的后验分布；该实验中 d 的值未知。接受的样本分布在实际选定的 $\theta^{true} = 0.84$ 值附近，这表明了该方法所声称的能力。若要使分布更加集中并缩小其可信区间，可以通过算法3处理多次实验。也就是说，后续实验会根据前一次实验的推断调整先验分布。

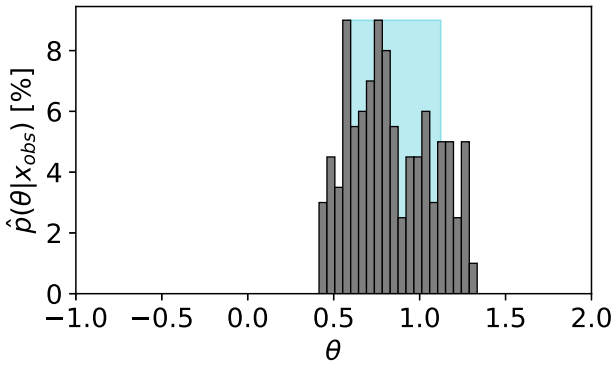

图3. 使用 ABC 采样获得的近似后验分布，共接受了 1600 个样本，阴影区域表示 68% 可信区间。

V. 结论

我们探讨了开展此类实验的前景：在 $\chi \gg 1$ 条件下，借助有效质量的概念，推断表征偏离非线性康普顿散射程度的参数 θ。研究结果推动了在类似实验中采用 ABC 采样的策略；这类策略可扩展至纳入多个参数 θ 和 z，以考量其他非微扰效应。设计未来实验需要改进相互作用的模拟实现。例如，可以模拟现实中聚焦的激光脉冲，通过潜在参数构建更全面的描述，并考虑电磁级联。实施这些措施可能会增加计算负担，也可能影响采样效率。

ABC。不过，通过进一步研究其他汇总统计量、非均匀核，以及利用机器学习提出更优的提议样本，可以加快其收敛。此外，利用高性能计算并行运行大量ABC采样器，能够缓解这两项不足。

致谢

作者感谢瑞典研究理事会提供的支持（资助编号：2017-05148和2019-02376）。研究所需的计算资源由瑞典国家学术超级计算基础设施（NAISS）在Tetralith上提供，部分经费由瑞典研究理事会通过资助协议编号2022-06725提供。作者感谢Tom Blackburn提供的有益讨论。

[1] K. Poder, M. Tamburini, G. Sarri, A. Di Piazza, S. Kuschel, C. D. Baird, K. Behm, S. Bohlen, J. M. Cole, D. J. Corvan, M. Duff, E. Gerstmayr, C. H. Keitel, K. Krushelnick, S. P. D. Mangles, P. McKenna, C. D. Murphy, Z. Najmudin, C. P. Ridgers, G. M. Samarin, D. R. Symes, A. G. R. Thomas, J. Warwick, and M. Zepf, 《超强激光场中辐射反作用量子特性的实验标志》, Phys. Rev. X **8**, 031004 (2018). [2] J. Cole, K. Behm, E. Gerstmayr, T. Blackburn, J. Wood, C. Baird, M. J. Duff, C. Harvey, A. Ilderton, A. Joglekar, *et al.*, 《高强度激光脉冲与激光尾场加速电子束碰撞中辐射反作用的实验证据》, 《物理评论X》**8**, 011020 (2018). [3] H. Abramowicz, U. Acosta, M. Altarelli, R. Assmann, Z. Bai, T. Behnke, Y. Benhammou, T. Blackburn, S. Boogert, O. Borysov, *et al.*, 《LUXE实验概念设计报告》, The European Physical Journal Special Topics **230**, 2445 (2021). [4] V. Yakimenko, L. Alsberg, E. Bong, G. Bouchard, C. Clarke, C. Emma, S. Green, C. Hast, M. Hogan, J. Seabury, *et al.*, 《用于先进加速器实验测试的FACET-II设施》, 《物理评论：加速器与束流》**22**, 101301 (2019). [5] C. Bula, K. McDonald, E. Prebys, C. Bamber, S. Boege, T. Kotseroglou, A. Melissinos, D. Meyerhofer, W. Ragg, D. Burke, *et al.*, 《康普顿散射中非线性效应的观测》, 《物理评论快报》**76**, 3116 (1996). [6] M. Iinuma, K. Matsukado, I. Endo, M. Hashida, K. Hayashi, A. Kohara, F. Matsumoto, Y. Nakanishi, S. Sakabe, S. Shimizu, *et al.*, 《利用低能电子束在激光–电子散射中观测二次谐波》, 《物理快报A辑》**346**, 255 (2005). [7] T. Kumita, Y. Kamiya, M. Babzien, I. Ben-Zvi, K. Kusche, I. Pavlishin, I. Pogorelsky, D. Siddons, V. Yakimenko, T. Hirose, *et al.*, 《电子束和激光束相对论汤姆孙散射中非线性效应的观测》, Laser physics **16**, 267 (2006).

[8]T. Englert 和 E. Rinehart, 《自由电子与强激光辐射相互作用产生的二次谐波光子》, 《物理评论A》**28**, 1539（1983年）。[9] A. Fedotov、A. Ilderton、F. Karbstein、B. King、D. Seipt、H. Taya 和 G. Torgrimsson, 《强背景场中的量子电动力学进展》, arXiv 预印本 arXiv:2203.00019（2022年）。[10] T. Ritto、S. Beregi 和 D. Barton, 《将强化学习和近似贝叶斯计算用于模型选择与参数校准：在非线性动力系统中的应用》, 《机械系统与信号处理》**181**, 109485（2022年）。[11] M. C. Kennedy 和 A. O'Hagan, 《计算机模型的贝叶斯校准》, 《英国皇家统计学会杂志B辑（统计方法学）》**63**, 425（2001年）。[12] D. N. DeJong、B. F. Ingram 和 C. H. Whiteman, 《一种贝叶斯校准方法》, 《商业与经济统计杂志》**14**, 1（1996年）。[13] J. Brehmer、G. Louppe、J. Pavez 和 K. Cranmer, 《从隐式模型中挖掘宝贵信息以改进无似然推断》, 《美国国家科学院院刊》**117**, 5242（2020年）。[14] J. Akeret、A. Refregier、A. Amara、S. Seehars 和 C. Hasner, 《用于宇宙学前向建模的近似贝叶斯计算》, 《宇宙学与天体粒子物理杂志》**2015** (08), 043。[15] V. Yakimenko、S. Meuren、F. Del Gaudio、C. Baumann、A. Fedotov、F. Fiuza、T. Grismayer、M. Hogan、A. Pukhov、L. Silva、 *et al.*, 《利用束束碰撞研究非微扰量子电动力学的前景》, 《物理评论快报》**122**, 190404（2019年）。[16] V. Ritus, 《强电磁场中的辐射效应及其增强》, 《苏联物理JETP》**30**, 052805（1970年）。[17] S. Meuren 和 A. Di Piazza, 《强激光场中的量子电子自相互作用》, 《物理评论快报》**107**, 260401（2011年）。[18] S. T. Tokdar 和 R. E. Kass, 《重要性抽样：综述》, 《Wiley跨学科评论：计算

统计学**2**，54（2010年）。[19] A. Doucet、N. d. Freitas 和 N. Gordon，《序贯蒙特卡罗方法导论》，载于 *Sequential Monte Carlo methods in practice* 2001 3 14 （施普林格，）第–页。[20] S. Brooks、A. Gelman、G. Jones 和 X.-L. Meng, *Handbook of markov chain monte carlo* 2011 （CRC出版社，）。[21] S. A. Sisson、Y. Fan 和 M. Beaumont, *Handbook of approximate Bayesian computation* 2018 （CRC出版社，）。[22] K. Cranmer、J. Brehmer 和 G. Louppe，《基于模拟的推断前沿》，《美国国家科学院院刊》**117**，30055（2020年）。[23] V. B. Berestetskii、E. M. Lifshitz 和 L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics: Volume 4*，第 **4** 卷（巴特沃思-海涅曼，1982）。[24] V. Baier 和 V. Katkov，《磁轫致辐射中的量子效应》，《物理快报A辑》**25**，492（1967）。[25] A. Macchi, *A superintense laser-plasma interaction theory primer* 2013 （施普林格科学与商业媒体，）。[26] C. Olofsson 和 A. Gonoskov，《通过优化聚焦在激光-电子对撞机中获得强场量子电动力学信号》，《物理评论A》**106**，063512（2022年）。