arXiv:2303.00569v1 [cs.DS] 1 Mar 2023

二次及高阶最短路径问题线性化的线性时间算法

Eranda Cela[1][0000−0002−5099−8804]、Bettina Klinz[1][0000−0002−6156−688X]、Stefan Lendl[2][0000−0002−5660−5397]、†Gerhard J. Woeginger[3][0000−0001−8816−2693] 和 Lasse Wulf[1][0000−0001−7139−4092]

[1] 格拉茨工业大学离散数学研究所，奥地利{cela,klinz,wulf}@math.tugraz.at[2] 格拉茨大学运营与信息系统研究所，奥地利 stefan.lendl@uni-graz.at[3] 亚琛工业大学计算机科学系，德国

摘要。NP 困难的二次最短路径问题（QSPP）的一个实例，若且唯若其等价于在同一输入有向图上的经典最短路径问题（SPP）的一个实例，则称其可线性化。QSPP 的线性化问题（LinQSPP）用于判断给定的 QSPP 实例是否可线性化，并在答案为是时确定相应的 SPP 实例。我们为无环有向图上的 LinQSPP 提出了一种新颖的线性时间算法，其运行速度显著快于此前最优算法。该算法基于一项新发现：无环有向图上 QSPP 的可线性化性可视为一种局部性质。我们的方法还可扩展到更一般的高阶最短路径问题。

关键词：二次最短路径问题 · 高阶最短路径问题 · 线性化。

1 引言

本文研究最短路径问题（SPP）的非线性推广的线性化问题。最短路径问题是一个经典的组合优化问题。一个最短路径问题实例由有向图 $G = (V, A)$、源顶点$s \in V$、汇顶点 $t \in V$以及成本函数 c: $A \to \mathbb{R}$构成，其中该函数将每条弧 $a \in A$ 映射为其成本 $c(a)$。简单有向 s-t-路径 P的成本为[4]

$$\mathrm{SPP}(P, c) := \sum_{a \in P} c(a)\,. \tag{1}$$

目标是在 G 中找到一条简单的有向 s-t-路径，使其最小化目标函数 (1)。通常假设 G 中不存在负权回路。

†于2022年4月逝世。[4] 路径 P 及其弧集使用相同的记号。

现在考虑一个数 $d \in \mathbb{N}$。d 阶最短路径问题（SPP$_d$）的输入包括一个有向图 $G = (V, A)$、一个源顶点 $s \in V$、一个汇顶点 $t \in V$，以及一个 d 阶弧交互成本函数 $q_d\colon \{B \subseteq A : |B| \leq d\} \to \mathbb{R}$。因此，$q_d$ 为每个基数不超过 d 的弧子集赋予一个权重。一条简单的有向 s-t-路径 P 的成本为

$$\mathrm{SPP}_d(P, q_d) := \sum_{S \subseteq P:\ |S| \leq d} q_d(S)\,. \tag{2}$$

目标是在 G 中找到一条简单的有向 s-t-路径，使目标函数 (2) 最小。对于 $d = 2$，我们得到二次最短路径问题（QSPP），该问题已在文献 [2,10,11,18] 中得到研究。为方便记号，若 $d = 2$，则将 SPP$_d(P, q_d)$ 记作 QSPP(P, q)。

QSPP 出现在网络优化问题中，这类问题的成本既与单条弧相关，也与弧对相关。这包括随机和时变路径规划问题的变体 [15,20,21]，以及网络设计问题 [14,9]。有关 QSPP 应用的综述，请参见 [11,18]。据我们所知，目前尚无关于 $d > 2$ 情形的论文发表。

虽然最短路径问题可以在多项式时间内求解，但即使在相邻二次最短路径问题这一特殊情形下，QSPP 仍是 NP 困难问题；在该情形中，所有非连续弧对的成本均为零 [18]。从实际角度来看，QSPP 也是一个极难求解的问题。Hu 和 Sotirov [11] 报告称，当前最先进的二次规划求解器能够求解包含多达 365 条弧的 QSPP 实例，而他们专门设计的分支定界算法能够在一小时内将包含多达 1300 条弧的实例求解至最优。相比之下，对于包含数百万个顶点和弧的图，最短路径问题的实例也只需不到一秒即可求解。

鉴于 QSPP 的求解难度，针对该问题的一条研究路线聚焦于可在多项式时间内求解的特殊情形；当输入图和/或成本系数具有某些特定性质时，便会出现这些情形。Rostami 等人 [19] 提出了一种多项式时间算法，可求解无环有向图和串并联图中的相邻二次最短路径问题。Hu 和 Sotirov [10] 证明，若二次成本构成非负对称乘积矩阵，或者构成和矩阵，且 G 中所有 s-t 路径的弧数相同，则可在多项式时间内求解 QSPP。

这两种可在多项式时间内求解的 QSPP 特殊情形，属于更广泛的一类可线性化 SPP$_d$ 实例，定义如下。

定义 1. 对于一个 SPP$_d$ 实例，其输入有向图为 $G = (V, A)$，源节点为 s，汇节点为 t，成本函数为 q_d。若存在成本函数 $c\colon A \to \mathbb{R}_+$，使得对于 G 中任意简单有向 s-t 路径 P，等式 SPP(P, c) = SPP$_d(P, q_d)$ 均成立，则称该实例为可线性化实例。QSPP 的可线性化实例定义类似，只需将 SPP$_d(P, q_d)$ 替换为 QSPP(P, q)。

识别可线性化的 QSPP（SPP$_d$）实例，也称为 QSPP（SPP$_d$）的线性化问题，简称 LIN QSPP（LINSPP$_d$），是一个自然会提出的问题。在这个问题中，任务是判断一个

给定的 QSPP（SPP$_d$）实例是否可线性化，并在答案为肯定时找出线性成本函数 c。困难组合优化问题中可线性化特殊情形这一概念可追溯至 Bookhold [1]，他将其引入二次指派问题（QAP）。对于对称的可线性化 QAP 实例，已有完整的刻画；而对于一般 QAP 的可线性化性，目前只有部分研究成果，参见 [3,6,7,8,13,16]。其他若干二次组合优化问题的线性化问题也已得到研究：二次最小生成树问题见 [4,22]，二次旅行商问题见 [17]，二次环覆盖问题见 [5]，一般二次二元规划见 [12]。二次问题的可线性化实例可用于生成分支定界算法所需的下界。例如，Hu 和 Sotirov 为二元二次问题提出了一类所谓的基于线性化的界 [12]。该类中的每个具体界都基于该问题的一组可线性化实例。作者表明，文献中已有的知名界都是新提出的这些界的特例。显然，在此背景下，快速求解线性化问题的算法至关重要。

据我们所知，迄今文献尚未研究过 LinSPP$_d$，而近期有一些论文对 Lin QSPP 进行了探讨。在 [2] Cela、Klinz、Lendl、Orlin、Woeginger 和 Wulf 证明，对于含有有向环的输入图上的 QSPP 实例，判定其是否可线性化是 coNP 完全的。因此，对于这类图，可线性化的 QSPP 实例似乎难以得到简洁的刻画。在无环情形下，Hu 和 Sotirov 首先为有向二维网格图上的 Lin QSPP 描述了一种多项式时间算法 [10]。最近，[12] 他们将这一结果推广到所有无环有向图，并提出了一种求解该问题的算法，其运行时间为 $\mathcal{O}(nm^3)$，其中 n 和 m 分别表示 G中的顶点数和弧数。

最后，我们提及一个相关概念，即文献 [2,10] 研究的所谓普遍线性化性。若对于输入图 G 上的 QSPP，每一个实例在任意成本函数 q 的选择下都是可线性化的，则称有向图 G 关于 QSPP 是普遍可线性化的。文献 [10] 证明，某一类网格图是普遍可线性化的。文献 [2] 根据 s-t-路径集合的结构性质，给出了普遍可线性化网格图的刻画。此外，文献 [2] 给出了无环有向图的普遍线性化性的禁子图刻画。

本文的贡献与结构。本文为无环有向图上的可线性化 QSPP 实例提供了一种新颖而简洁的刻画。我们的刻画表明，可线性化性可以视为一种局部性质。具体而言，我们证明，在无环有向图 G 上的 QSPP 实例是可线性化的，当且仅当考虑由 G 中两条 s-t 路径构成的 G 的子有向图所得的每个子实例都是可线性化实例。我们的简洁刻画也适用于 SPP$_d$，甚至适用于完全任意的成本函数；这类函数会为每条 s-t 路径 P 指定某个成本 $f(P)$，且不受任何进一步限制。后一个问题称为通用最短路径问题（GSPP），并在第 2 节中作了形式化介绍。事实上，对线性可线性化实例的刻画

无环有向图上的 SPP$_d$ 可线性化实例的刻画，可由 GSPP 可线性化实例的刻画推得。

此外，我们提出了一种线性时间算法，可检查上述针对 QSPP 和 SPP$_d$ 的局部条件。值得注意的是，这并非易事，因为通常需要检查该条件的子实例数量呈指数级增长。作为一个附带结果，我们的方法揭示了 LinQSPP 与判定有向图中所有 s-t-路径是否具有相同长度这一问题之间有趣的联系。由此，我们得到了一个算法，可在 $\mathcal{O}(m^2)$ 时间内解决 LinQSPP 线性化问题，从而改进了 [12] 中给出的此前已知最佳运行时间 $\mathcal{O}(nm^3)$。我们的方法还为 LinSPP$_d$ 提供了一个 $\mathcal{O}(d^2m^d)$ 时间算法，从而给出了该问题的首个（多项式时间）算法。请注意，对于这两个问题，所提出算法的运行时间分别关于输入规模呈线性，即 LinQSPP 和 LinSPP$_d$。

最后，我们还得到了一个多项式时间算法：给定一个无环有向图 G，计算其上所有可线性化的 d 次成本函数构成的子空间的一组基。这样的基可用于获得更好的基于线性化的界，以供分支定界算法使用。

本文组织如下。第 2 节介绍一些记号和预备知识；第 3 节给出在无环输入有向图上 QSPP 和 SPP $_d$ 实例的可线性化性刻画结果。第 4 节介绍 QSPP Lin 和 SPP Lin 线性化问题的算法。第 5 节讨论如何计算无环有向图 G 上所有可线性化的 d 次成本函数构成的子空间的一组基。

2 记号与预备知识

给定一个有向图 $G = (V, A)$，其中一条简单有向 s-t 路径 P 是由弧 $P = (a_1, a_2, \ldots, a_p)$ 组成的序列，并满足：a_1 起于 s，止于 t，非连续的弧不共享顶点，并且对于任意 $i \in \{1, \ldots, p-1\}$，a_i 的终点与 a_{i+1} 的起点重合。P 中弧的数量称为路径长度。有时，我们用相同的记号表示路径 P 及其弧集。我们将单条弧 (x, y) 视为长度为 1 的 x-y 路径，将单个顶点 x 视为长度为 0 的平凡 x-x 路径。给定一条 y-z 路径 P_2，记 P_1 与 P_2 的连接为 $P_1 \cdot P_2$。我们还考虑路径与弧的连接，即形如 $P \cdot a$ 的项，其中 P 是一条 x-y 路径，$a = (y, z)$ 是一条弧。

在线性化问题中，我们关注具有源顶点 s 和汇顶点 t 的无环有向图 $G = (V, A)$。我们将所有简单有向 s-t-路径的集合记为 $\mathcal{P}_{st}$。我们通常假设 G 被 $\mathcal{P}_{st}$ 覆盖，即 G 中的每条弧都至少被 $\mathcal{P}_{st}$ 中的一条路径经过。很容易看出，这一假设的成立不失一般性。

令 $d \geq 2$ 为自然数。阶数为 d 的交互成本由映射 $q_d\colon \{B \subseteq A : |B| \leq d\} \to \mathbb{R}$给出，该映射为每个至多包含 d 条弧的子集指定一个（可能为负的）交互成本。某条路径的成本 SPP$_d(P, q_d)$

P 在交互成本 q_d 下的定义如公式 (2) 所示。如果上下文能够明确判断 d，我们就采用更简洁的记法 $f_q(P) := \mathrm{SPP}_d(P, q_d)$。本文明确允许 $q(\emptyset) \neq 0$这种情况，因为这样可以简化计算。阶数为 d 的最短路径问题（LinSPP$_d$）的线性化问题形式化定义如下。

> 问题：SPP$_d$ (LinSPP$_d$) 的线性化问题
> 实例：一个 $\mathcal{P}_{st}$-覆盖的有向图 $G = (V, A)$，其中有 $s, t \in V, s \neq t$；一个整数 $d \geq 2$；一个 d 阶弧交互成本函数 $q_d : \{B \subseteq A : |B| \leq d\} \to \mathbb{R}$。
>
> 问题：求一个线性化成本函数 $c : A \to \mathbb{R}$，使得对于所有 $P \in \mathcal{P}_{st}$，$\mathrm{SPP}_d(P, q_d) = \mathrm{SPP}(P, c)$；或者判定不存在这样的线性化成本函数。

在特殊情形 $d = 2$ 下，我们得到 QSPP 的线性化问题（LinQSPP）。

最后，考虑一般最短路径问题（GSPP）。其输入是一个有向图 $G = (V, A)$，包含一个源顶点 s、一个汇顶点 t,$s \neq t$，以及一个一般成本函数 $f : \mathcal{P}_{st} \to \mathbb{R}$，该函数为每条路径 $P \in \mathcal{P}_{st}$[5] 指定一个成本 $f(P)$。不失一般性，假设 G 是 $\mathcal{P}_{st}$-覆盖的。目标是找到一条 s-t-路径，使目标函数 $f(P)$ 在 $\mathcal{P}_{st}$ 上最小。GSPP 的可线性化实例以及 GSPP 的线性化问题（LinGSPP）的定义，与 SPP$_d$ 相应定义类似。

3 无环有向图上 GSPP 可线性化实例的刻画

本节的主要结果是定理 1，它刻画了第 2 节中定义的无环有向图上 GSPP 的可线性化实例。

定义 2. 设 $G = (V, A)$ 是一个 $\mathcal{P}_{st}$-覆盖的无环有向图。对于某个顶点 v，设 P_1, P_2 是两条 s-v-路径，并设 Q_1, Q_2 是两条 v-t-路径。五元组 (v, P_1, P_2, Q_1, Q_2) 称为包含于 G 中的双路径系统。若存在一个成本函数 $c : A \to \mathbb{R}$，使得对于所有四条路径 $P \in \{P_1 \cdot Q_1, P_1 \cdot Q_2, P_2 \cdot Q_1, P_2 \cdot Q_2\}$，均有 $f(P) = SPP(P, c)$，则称该系统关于函数 $f : \mathcal{P}_{st} \to \mathbb{R}$ 可线性化。这样的 c 称为关于 f 的 (v, P_1, P_2, Q_1, Q_2) 的线性化成本函数。

双路径系统的示意图见图1。请注意，P_1 和 P_2（以及 Q_1 和 Q_2）可以有公共内部顶点，而且 $P_1 = P_2$、$Q_1 = Q_2$、$v = s$ 和 $v = t$ 这些情形都是允许的。然而，由于 G的无环性，

[5] 我们假设 f 由预言机指定。

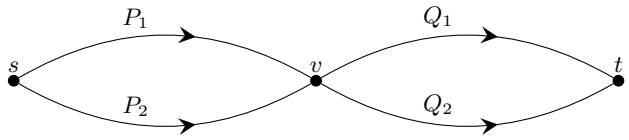

图1. 双路径系统。

对于 i、 $j \in \{1,2\}$，路径 P_i和 Q_j只有顶点 v是公共的。此外请注意，双路径系统的可线性化性是一种局部性质，也就是说，它只取决于四条路径 $P_1 \cdot Q_1$、$P_1 \cdot Q_2$、 $P_2 \cdot Q_1$和 $P_2 \cdot Q_2$。事实上，以下简单的刻画成立。

命题1. 双路径系统（v, P_1, P_2, Q_1, Q_2）相对于某个函数 f是可线性化的，当且仅当

$$f(P_1 \cdot Q_1) + f(P_2 \cdot Q_2) = f(P_1 \cdot Q_2) + f(P_2 \cdot Q_1). \tag{3}$$

证明. 首先，假设（v, P_1, P_2, Q_1, Q_2）是可线性化的，并令 c 为相应的线性化成本函数。令 M_1 (M_2)为由路径 $P_1 \cdot Q_1$ 和 $P_2 \cdot Q_2$ （$P_1 \cdot Q_2$ 和$P_2 \cdot Q_1$）的弧集并集得到的多重集。由于 M_1与 M_2重合，我们得到 $c(P_1 \cdot Q_1) + c(P_2 \cdot Q_2)$ $= \sum_{a \in M_1} c(a)$ $= \sum_{a \in M_2} c(a)$ $= c(P_1 \cdot Q_2)$ $+ c(P_2 \cdot Q_1)$。然后，(3)由（v, P_1, P_2, Q_1, Q_2）的可线性化性定义得出。

现在假设方程 (3) 成立。我们通过构造一个线性化成本函数c，证明关于 f 的双路径系统具有可线性化性。若 $P_1 = P_2$ 或 $Q_1 = Q_2$，则很容易找到合适的 c 。因此，我们考虑更一般的情形，即 $P_1 \neq P_2$ 且 $Q_1 \neq Q_2$。在这种情形下，对于每个 $P \in \{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$，都存在一个所谓的代表弧 $a \in P$，使得a不包含在任何其他路径 $Q \in \{P_1, P_2, Q_1, Q_2\}$、 $Q \neq P$ 中。分别令 a_1、 a_2、e_1、 e_2 为 P_1、 P_2、 Q_1 和 Q_2 的代表弧。现在考虑一个成本函数 c : $A \to \mathbb{R}$，使得当 $a \notin \{a_1, a_2, e_1, e_2\}$ 时， $c(a)$ $= 0$ ，并且$c(a_1)$、 $c(a_2)$、 $c(e_1)$、 $c(e_2)$ 满足以下线性方程:

$$\begin{array}{rrrr} c(a_1) & + c(e_1) & & = f(P_1Q_1) \\ c(a_1) & + & c(e_2) & = f(P_1Q_2) \\ & c(a_2) + c(e_1) & & = f(P_2Q_1) \\ & c(a_2) + & c(e_2) & = f(P_2Q_2) \end{array}$$

利用基本线性代数可以看出，只要等式（3）成立，该系统确实有解（甚至存在一个满足 $c(e_2) = 0$ 的解）。因此，按上述方式构造的 c 是相对于 f、适用于 (v, P_1, P_2, Q_1, Q_2) 的线性化成本函数。□

现在，考虑一个 GSPP 实例，其有向图 G 是一个被 $\mathcal{P}_{st}$ 覆盖的无环有向图，源顶点为 s，汇顶点为 t ，一般成本函数为 f: $\mathcal{P}_{st} \to \mathbb{R}$。该实例 (G, s, t, f) 何时可线性化? 显然，如果 G 包含一个相对于 f 不可线性化的双路径系统，那么 (G, s, t, f) 就不可

线性化。下面的定理表明，每个双路径系统相对于 f 可线性化，是 (G, s, t, f) 可线性化的充分条件。

定理 1. 设 G 是一个 $\mathcal{P}_{st}$ 覆盖的无环有向图，具有源顶点 s 和汇顶点 t，且 $f\colon \mathcal{P}_{st} \to \mathbb{R}$ 是一个一般成本函数。那么，GSPP 的实例 (G, s, t, f) 可线性化，当且仅当 G 中包含的每个双路径系统关于 f 都是可线性化的。

在证明该定理之前，我们需要做一些准备。设 $G = (V, A)$ 是一个 $\mathcal{P}_{st}$ 覆盖的无环有向图，具有源顶点 s 和汇顶点 t。首先，我们引入一个拓扑弧序，即 $\preceq$ 上的全序 A，使得对于 A 中的任意一对弧 a、a'，均有如下性质：如果存在一条同时包含 a 和 a' 的路径 P，且 a 在 P 中位于 a' 之前，那么 $a \preceq a'$。显然，任何无环有向图都有一个（通常不唯一的）拓扑弧序。此外，还可以根据拓扑顶点序得到拓扑弧序。

此外，我们回顾 Sotirov 和 Hu [12] 引入的非基本弧系统定义。

定义3. 设 G 是一个 $\mathcal{P}_{st}$-覆盖的无环有向图，其具有源顶点 s 和汇顶点 t。如果对于每个顶点 $v \in V \setminus \{s, t\}$，从 v 出发的弧中恰有一条包含在 N 中，则称集合 $N \subseteq A$ 为非基本弧系统。后一条弧称为 v 的非基本弧。弧 $a \in A \setminus N$ 称为基弧。

显然，非基本弧系统并不唯一。任何此类系统都构成一个以 t 为根的内向树，其中包含 V 中除 s 外的所有顶点。对于某个非基本弧系统 N 和某个顶点 $v \in V \setminus \{s\}$，我们令 N_v 表示由非基本弧组成的唯一 v-t-路径（其中 N_t 是平凡路径）。若成本函数 $c\colon A \to \mathbb{R}$ 满足：对于所有非基本弧 $a \in N$，$c(a) = 0$，则称其关于 N 处于约化形式。下面的引理是对 [12], 的一个简单改编；在该文献中，针对比 GSPP 更一般性较弱的 QSPP 情形证明了类似结论（详细内容见本文完整版）。

引理 1（改编自 [**12,** 命题 **4**]）。设 G 是一个由 $\mathcal{P}_{st}$ 覆盖的无环有向图，具有源顶点 s 和汇顶点 t。设 $f\colon \mathcal{P}_{st} \to \mathbb{R}$ 是一般成本函数，且 $N \subseteq A$ 是一个固定的非基本弧系统。若 (G, s, t, f) 是 GSPP 的一个可线性化实例，则存在且仅存在一个线性成本函数 $c\colon A \to \mathbb{R}$，它既是线性化成本函数，又处于约化形式。

设 (G, s, t, f) 是 GSPP 的一个可线性化实例，其中 $G = (V, A)$，且 $N \subseteq A$ 是一个固定的非基本弧系统。对于线性化成本函数 $c\colon A \to \mathbb{R}$，我们用 reduced(c) 表示唯一处于约化形式的线性化成本函数（根据引理 1，该函数存在）。由引理 1 的证明可知，对于给定的 c，可以在 $\mathcal{O}(n+m)$ 时间内计算出 reduced(c)。现在我们可以概述主定理的证明了。

证明（定理 1 的证明概要）。

可线性化性条件的必要性显而易见。现在证明其充分性。因此，我们假设每个双路径系统关于 f 都是可线性化的，并证明 (G, s, t, f) 是可线性化的。设 N 是一个非基弧系统。主要思路是找到一个处于约化形式的线性化成本函数，即在所有非基弧上的取值均为 0。为此，我们考虑 G 中弧集合 A 上的一个拓扑弧序 $\preceq$，并按归纳方式定义线性化成本函数 $c\colon A \to \mathbb{R}$，如下所示。对于任意弧 $a = (u, v)$，令

$$c(a) := \begin{cases} f(P \cdot a \cdot N_v) - \sum_{a' \in P} c(a') & a \notin N \\ 0; & a \in N \end{cases} \tag{4}$$

对于某个 s-u-路径 P。

现在考虑以下命题，为简洁起见，省略其证明。命题：如果 G 中的所有双路径系统都关于 f 可线性化，那么公式（4）中的函数 c 是定义良好的，并且与 P 的具体选择无关。此外，对于所有 s-u-路径 P，以下公式成立：

$$f(P \cdot a \cdot N_v) = c(a) + \sum_{a' \in P} c(a') = c(P \cdot a \cdot N_v) \tag{5}$$

请注意，该命题立即意味着 (G, s, t, f) 是可线性化的。事实上，令 c 为公式（4）中定义的成本函数，并令 Q 为某条 s-t-路径。选择 $a = (x, t)$ 作为 Q 上的最后一条弧。那么 N_t 是从 t 到 t 的平凡路径，因此将公式（5）应用于弧 a，我们有 $f(Q) = c(Q)$。

□

由于一般而言，一个图包含指数数量的不同双路径系统，乍一看，定理 1 似乎并不能为 GSPP Lin 的线性化问题导出高效算法。然而，我们将在下一节证明，事实确实如此。相关论证基于定理 1 的一个更具技术性的版本，并涉及所谓的强基本弧及其下文定义的性质 (π)。

定义 4. 设 $G = (V, A)$ 是一个无环的 $\mathcal{P}_{st}$-覆盖有向图，其源顶点为 s，汇顶点为 t。设 $f\colon \mathcal{P}_{st} \to \mathbb{R}$ 是一般成本函数，且 $N \subseteq A$ 是 G 中的非基本弧系统。若基弧 (u, v) 不与源顶点关联，也就是说 $u \neq s$，则称其为强基本弧。

强基本弧 $a = (u, v)$ 具有性质 (π)，意即对于任意 s-u 路径 P，值 $\mathrm{val}(a, P) := f(P \cdot a \cdot N_v) - f(P \cdot N_u)$ 不依赖于 P 的选择。

因此，若强基本弧 $a = (u, v)$ 具有性质 (π)，则对于任意两条 s-u 路径 P, Q，有 $\mathrm{val}(a, P) = \mathrm{val}(a, Q)$；这意味着对每条 s-u 路径 P，都存在一个值 $\mathrm{val}(a) := \mathrm{val}(a, P)$，且对每条强基本弧，$val(a)$ 都有定义。最后，对每条基弧 $a = (s, v)$，令 $\mathrm{val}(a) := f(a \cdot N_v)$。

引理 2. 设 $G = (V, A)$ 是一个无环的 $\mathcal{P}_{st}$-覆盖有向图，其源顶点为s，汇顶点为 t。设 $f\colon \mathcal{P}_{st} \to \mathbb{R}$ 是一个一般成本函数，并令 $N \subseteq A$

为 G 中的一个非基本弧系统。那么 (G, s, t, f) 可线性化，当且仅当每条强基本弧都具有性质 (π)。在这种情况下，由下式给出的映射 $c\colon A \to \mathbb{R}$

$$c(a) = \begin{cases} \mathrm{val}(a); & a \ is \ basic \\ 0; & a \ is \ nonbasic \end{cases}$$

是约化形式的线性化成本函数

证明。设 $a = (u, v)$ 是一条强基本弧。我们断言， a 具有性质 (π)，当且仅当对于任意两条 s-u-路径 P、 Q，双路径系统 $(u, P, Q, N_u, a \cdot N_v)$ 关于 f 是可线性化的。事实上，注意到根据命题1，上述双路径系统关于 f 是可线性化的，当且仅当 $f(P \cdot a \cdot N_v) + f(Q \cdot N_u) = f(P \cdot N_u) + f(Q \cdot a \cdot N_v)$。后一个方程等价于 $\mathrm{val}(a, Q) = \mathrm{val}(a, P)$。回忆一下，对于每一对 P、 Q，后一个等式成立，当且仅当 a 具有性质 (π)，命题得证。

现在，假设某条强基本弧 (u, v) 不具有性质 (π)。那么，相应的双路径系统 $(u, P, Q, N_u, a \cdot N_v)$ 关于 f 不是可线性化的，因此，(G, s, t, f) 不是可线性化的。

最后，假设每条强基本弧都具有性质（π）。在定理 1 的证明中，我们仅对形如（u、 P、 Q、 N_u、 $a \cdot N_v$）的特定双路径系统使用可线性化性假设，其中 $a =$（u、 v）是某条强基本弧。因此，如果所有强基本弧都满足性质（π），那么每个这样的特定双路径系统都关于 f 可线性化，并且（G、 s、 t、 f）的可线性化性也随之成立。此外，公式（4）中的线性化成本函数的值 c（a）对于任意满足以下条件的弧 a 都等于 val（a）：该弧为强基本弧，或与 s 关联；而对于任意非基弧 a，c（a） $= 0$。□

4 LinSPP 的线性时间算法$_d$

本节将介绍一种算法，该算法可在 $\mathcal{O}(m^d)$ 时间内，即在线性时间内，解决 SPP$_d$ （LinSPP$_d$）的线性化问题。该算法利用 LinSPP$_d$ 与全路径等成本问题（APECP）之间的关系，我们将在第4.1节介绍全路径等成本问题。在第4.2节中，我们将描述 SPP$_d$ 算法，并讨论其运行时间。

4.1 阶数为-d 的所有路径等成本问题（APECP$_d$）

阶数为-d的所有路径等成本问题（APECP$_d$）定义如下

ows.

> 问题：阶数为-d 的所有路径等成本问题（APECP$_d$）
> 实例：一个无环的 $\mathcal{P}_{st}$-覆盖有向图 $G = (V, A)$，含有一个源顶点 s 和一个汇顶点 t，一个整数 $d \geq 1$；一个阶数为-d的成本函数q_d：$\{B \subseteq A : |B| \leq d\} \to \mathbb{R}$。
>
> 问题：所有 s-t-路径的成本是否都相同？也就是说，是否存在某个 $\beta \in \mathbb{R}$，使得对于 $\mathcal{P}_{st}$ 中的每条路径 P，SPP$_d(P, q_d) = \beta$？

下面我们将 LinSPP$_d$ 与用于 $d \geq 2$ 的 APECP$_{d-1}$ 联系起来。更确切地说，我们在引理 3 中证明，一个具有无环 $\mathcal{P}_{st}$-覆盖有向图 $G = (V, A)$ 的 Lin SPP$_d$ 实例 (G, s, t, q_d)，可以约化为 $\mathcal{O}(m)$ 个 APECP$_{d-1}$ 实例，每个实例都对应于相对于某个固定非基本弧系统而言的一条强基本弧（见定义 3 和 4）。与强基本弧 $a = (u, v)$ 对应的 APECP$_{d-1}$ 实例如下定义。

定义 5。与强基本弧 $a = (u, v)$ 对应的 APECP$_{d-1}$ 实例 $I^{(a)}$ 以有向图 $G^{(a)} = (V_u, E_u)$ 为输入，该图的源顶点为$s' = s$、汇顶点为 $t' = u$，其中 V_u 是 V 中至少位于一条 s-u-路径上的顶点集合，A_u 是 A 中至少位于一条 s-u-路径上的弧集合。阶为-$d-1$的成本函数 $q^{(a)}_{d-1}\colon \{B \subseteq A_u\colon |B| \leq d-1\} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$q^{(a)}_{d-1}(B) := \left(\sum_{\substack{C \subseteq N_u \\ |C| \leq d-|B|}} q_d(B \cup C) \right) - \left(\sum_{\substack{C \subseteq a \cdot N_v \\ |C| \leq d-|B|}} q_d(B \cup C) \right). \tag{6}$$

引理 3。设 $d \geq 2$，且 (G, s, t, q_d) 是具有固定非基本弧系统 N 的 LinSPP$_d$ 实例。与某条强基本弧 a 对应的 APECP$_{d-1}$ 实例 $I^{(a)}$ 是一个 YES-实例，当且仅当弧 a 关于 f 具有性质 (π)：$\mathcal{P}_{st} \to \mathbb{R}$ 由 $f(P) = SPP_d(P, q_d)$ 给出，其中 $P \in \mathcal{P}_{st}$。在此情况下，$\mathrm{val}(a) = \beta$，其中 β 是 APECP$_{d-1}$实例中所有路径的共同代价。

证明（概要）。令 $a = (u, v) \in A$ 为一条强基本弧，并令 P 为图 G中的某条 s-u-路径。那么，P 包含在图 $G_a = (V_u, A_u)$中。可以证明，

$$\mathrm{val}(a, P) = f(P \cdot N_u) - f(P \cdot a \cdot N_v) = \sum_{\substack{B \subseteq P \\ |B| \leq d-1}} q^{(a)}_{d-1}(B) = f^{(a)}(P)\,,$$

对于图 G中的任意一条 s-u-路径 P，都有 $f^{(a)}(P) = SPP_{d-1}(P, q^{(a)}_{d-1})$。由此得出，值 $\mathrm{val}(a, P)$ 与 P无关，当且仅当对于每条路径，量 $f^{(a)}(P)$ 都不依赖于 P。后一个条件等价于 $I^{(a)}$ 是一个 YES-实例。此外，若此条件成立，则对于任意s-u-路径 P，都有 $\mathrm{val}(a) = f^{(a)}(P)$。□

引理 2 和 3 表明，对于具有无环有向图 G 的 SPP$_d$ 实例 (G, s, t, q_d)，其可线性化当且仅当每个对应于某条强基本弧 a （相对于某个固定的非基本弧系统）的 APECP$_{d-1}$ 实例 $I^{(a)}$ 都是 YES 实例。因此，一个 SPP$_d$ 实例 Lin可约化为 $\mathcal{O}(m)$ 个 APECP$_{d-1}$实例。接下来，我们将在引理 4 中证明，每个 APECP$_{d-1}$ 实例都可约化为一个 SPP$_{d-1}$实例 Lin。首先，我们如下定义一个特定的成本函数。

定义 6。设 $G = (V, A)$ 是一个 $\mathcal{P}_{st}$-覆盖的无环有向图，且 $\beta \in \mathbb{R}$。函数 source$^\beta$: $A \to \mathbb{R}$ 为每条与源点 s 相 incident 的弧赋予成本 β，并为所有其他弧赋予 0。

引理 4. 设 $G = (V, A)$ 是一个由 $\mathcal{P}_{st}$ 覆盖的无环有向图，其源顶点为s，汇顶点为 t，并设 $N \subseteq A$ 为一个固定的非基弧系统。设 q_d 是一个阶数为-d 的成本函数。APECP$_d$ 问题的实例 (G, s, t, q_d) 是 YES 实例，当且仅当 SPP$_d$ 的实例 (G, s, t, q_d) 可线性化，且 source$^\beta$ 是其约化形式下唯一的线性化函数（相对于 N）。

证明。显然，source$^\beta$ 是线性化函数，当且仅当所有路径的成本相同β。此外，注意到所有与源点相 incident 的弧都不属于 N。因此，source$^\beta$ 相对于 N处于约化形式。事实上，根据引理 1，source$^\beta$ 是约化形式下唯一的线性化函数，并且对于所有其他线性化函数 c'，reduced(c') =source$^\beta$ 。□

4.2 线性时间 LinSPP$_d$ 算法

我们的 LinSPP$_d$ 算法 $\mathcal{A}$ 如下。考虑一个 LinSPP$_d$ 实例 (G, s, t, q_d)，其有一个由 $\mathcal{P}_{st}$ 覆盖的无环有向图 G、源顶点 s、汇顶点 t 以及阶数为 d 的成本函数 q_d。我们首先固定一个非基本弧系统 N，并针对每条强基本弧 a，构造定义 5 中给出的 APECP$_{d-1}$ 问题实例 $I^{(a)}$。然后，我们检查每个实例 $I^{(a)}$ 是否为一个 YES-实例，并根据引理 4，将 $I^{(a)}$ 归约为一个 LinSPP$_{d-1}$ 实例来完成检查。通过反复执行这一过程，我们最终得到次数为 1 的 APECP 问题，这些问题可以通过动态规划轻松求解。该动态规划程序基于以下事实：在一个由 $\mathcal{P}_{st}$ 覆盖的无环有向图中，若成本函数 f: $\mathcal{P}_{st} \to \mathbb{R}$ 满足条件，则所有 s-t 路径具有相同成本，当且仅当对于每个顶点 v，所有s-v 路径具有相同成本。

用 $\mathcal{O}(d^2 m^{d+1})$ 时间实现上述算法并不困难。经过仔细实现，还可以获得更好的结果。

定理 2. 在无环有向图上， LinSPP$_d$ 可以在 $\mathcal{O}(d^2 m^d)$ 时间内求解。

为简洁起见，定理的证明请参见论文完整版。这里仅指出，高效计算定义 5 中所有强基本弧对应的 $I^{(a)}$ 实例的必要性。为此，我们高效地计算以下值

$$\gamma(B, x) := \sum_{\substack{C \subseteq N_x \\ |C| \le d - |B|}} q(B \cup C).$$

对于所有满足 $|B| \le d - 1$ 的弧集 $B \subseteq A$，以及所有顶点 $x \in V \setminus \{s\}$。随后利用这些值，高效地计算公式（6）中的成本函数 $q_{d-1}^{(a)}$。此外，通过谨慎管理计算线性化函数时涉及的量（见引理 4），我们得到了一种线性时间算法。请注意，编码成本函数 q_d 所需的输入规模等于 $\sum_{k=0}^{d} \binom{m}{k} \ge m^d/d!$。因此， $\mathcal{O}(d^2 m^d)$ 关于输入规模呈线性，因此在将 d 视为常数时是最优的，例如在 QSPP 中。

5 可线性化实例的子空间

固定 $d \in \mathbb{N}$、 $d \geq 2$，以及一个由 $\mathcal{P}_{st}$ 覆盖的无环有向图 $G = (V, A)$，其源顶点为 s，汇顶点为 t。令 $H^{(d)} := \{B \subseteq H \mid |B| \leq d\}$ 为弧集 $H \subseteq A$ 中至多包含 d 条弧的所有子集的集合。每个 d 阶成本函数q_d：$A^{(d)} \to \mathbb{R}$ 都可以唯一地表示为一个向量 $x \in \mathbb{R}^{A^{(d)}}$，满足对于所有 $F \in A^{(d)}$，$q_d(F) = x_F$；反之亦然。因此，每个实例 (G, s, t, q_d) 都可以用相应的向量 $x \in \mathbb{R}^{A^{(d)}}$ 表示，我们称 $x \in \mathbb{R}^{A^{(d)}}$ 是 SPP_d 的一个实例。显然，在固定有向图 G 上，SPP_d 的可线性化实例构成 $\mathbb{R}^{A^{(d)}}$ 的一个线性子空间 $\mathcal{L}_d$。

计算该子空间的方法在 SPP_d的分支定界算法中很有用，因为它们可用于计算更好的下界，思路与 Hu 和 Sotirov [12] 针对一般二次二元规划所采用的方法类似。Hu 和 Sotirov 证明，对于 $d = 2$，可以在多项式时间内计算 $\mathcal{L}_d$ 的一个基 [12,Prop. 5]。我们将他们的结果扩展到情形 $d > 2$。

定理 3. 设 $G = (V, A)$ 是一个 $\mathcal{P}_{st}$-覆盖的无环有向图，具有源顶点s 和汇顶点 t，且 $d \in \mathbb{N}$ 为常数。SPP_d 的可线性化实例子空间 $\mathcal{L}_d$ 的一个基可以在多项式时间内计算。

证明（概要）。证明思路是指定一个 $k \in \mathbb{N}$ 和一个矩阵 M，其维数具有多项式上界，使得对于 f：$\mathbb{R}^{A^{(d)}} \to \mathbb{R}^k$，其中 $f(x) = Mx$，有：$f(x) = 0$ 当且仅当 x 是 SPP_d的一个可线性化实例。因此，SPP_d 的可线性化实例 x 构成 $\ker(M)$，而该集合可以高效计算。

M 的构造是迭代进行的，并利用了 SPP_d与 $APECP_{d-1}$之间的关系，这与第 4.2 节中的算法 $\mathcal{A}$类似。具体而言，我们使用以下两个事实：

(i) 对于每条强基本弧 $a = (u, v)$，将 $x \in \mathbb{R}^{A^{(d)}}$ 映射到 $q^{(a)}_{d-1}$：$A_u^{(d-1)} \to \mathbb{R}$ 的函数是线性函数（参见公式（6），并回顾定义 5 中关于 A_u的内容）。(ii) 函数 $c \mapsto \mathrm{reduced}(c)$（在引理 1 之后定义）是线性函数。

按照算法 $\mathcal{A}$中的做法，迭代使用 (i) 和 (ii)，我们通过归纳证明：对于每条强基本弧 $a = (u, v)$ 以及每个 $d \geq 2$，都存在 $k_a \in \mathbb{N}$ 和一个线性函数 g_a：$\mathbb{R}^{A_u^{(d-1)}} \to \mathbb{R}^{k_a}$，使得 $g_a(x) = 0$ 当且仅当 x 对应于 APECP 的一个 YES 实例$_{d-1}$。然后，我们在与 g_a相同的定义域上构造线性函数 g'_a：每当 $g_a(x) = 0$时，令 $g'_a(x) = \beta$，其中 β 是 APECP 对应实例 x_{d-1}的共同路径成本。接下来，我们证明，对于每个顶点 u，都存在一个 $k_u \in \mathbb{N}$ 和一个线性函数 f_u：$\mathbb{R}^{A_u^{(d-1)}} \to \mathbb{R}^{k_u}$，使得 $f_u(x) = 0$ 当且仅当 x 是与 APECP_{d-1}对应的 SPP_{d-1} 的可线性化实例（见引理 4）。然后，我们在与 f_u 相同的定义域上构造线性函数 f'_u：每当 x 可线性化时（即当 $f_u(x) = 0$ 时），令 $f'_u(x)$ 等于 SPP_{d-1} 实例 x 的线性化成本函数。通过重复这些步骤进行迭代来构造 M，直至 $d = 1$。可以确保所有相关函数的矩阵表示规模均为多项式。□

致谢。本研究得到奥地利科学基金（FWF）：W1230 的支持。

参考文献

1. Bookhold, I.：二次指派问题的一个贡献。《优化》21(6)，933–943（1990） 2. C¸ela, E., Klinz, B., Lendl, S., Orlin, J.B., Woeginger, G.J., Wulf, L.：二次最短路径问题的可线性化特殊情形。载于：Kowalik, L., Pilipczuk, M., Rz ̨a ̇zewski, P.（编）：计算机科学中的图论概念。第245–256页。施普林格，Cham（2021） 3. Cela, E., Deineko, V.G., Woeginger, G.J.：QAP的可线性化特殊情形。《组合优化杂志》31(3)，1269–1279（2016） 4. ´Custi´c, A., Punnen, A.P.：二次最小生成树问题的可线性化实例刻画。《组合优化杂志》35(2)，436–453（2018） 5. De Meijer, F., Sotirov, R.：二次环覆盖问题：特殊情形与有效界。《组合优化杂志》39(4)，1096–1128（2020） 6. Erdo ̆gan, G.：二次分配问题：线性化与多项式时间可解情形。博士论文，比尔肯特大学（2006） 7. Erdo ̆gan, G., Tansel, B.：一种基于线性化的二次指派问题分支割算法。《计算机与运筹研究》34(4)，1085–1106（2007） 8. Erdo ̆gan, G., Tansel, B.C.：两类可作为线性指派问题求解的二次指派问题。《离散优化》8(3)，446–451（2011） 9. Gamvros, I.：卫星网络设计、优化与管理。马里兰大学帕克分校（2006） 10. Hu, H., Sotirov, R.：二次最短路径问题的特殊情形。《组合优化杂志》35(3)，754–777（2018） 11. Hu, H., Sotirov, R.：关于求解二次最短路径问题。《INFORMS计算杂志》32(2)，219–233（2020） 12. Hu, H., Sotirov, R.：二元二次问题的线性化问题及其应用。《运筹学年鉴》307，229–249（2021） 13. Kabadi, S.N., Punnen, A.P.：一种用于QAP线性化问题的 $O(n^4)$算法。《运筹学数学》36(4)，754–761（2011） 14. Murakami, K., Kim, H.S.：可生存ATM网络恢复方案的比较研究。载于：INFOCOM’97会议论文集。第1卷，第345–352页。电气与电子工程师学会（1997） 15. Nie, Y. M., Wu, X.：具有有限空间和时间依赖性的可靠先验最短路径问题。载于：《2009年交通与交通流理论：金禧纪念》，第169–195页。施普林格（2009） 16. Punnen, A.P., Kabadi, S.N.：Koopmans–Beckmann二次指派问题线性化及相关问题的线性时间算法。《离散优化》10(3)，200–209（2013） 17. Punnen, A.P., Walter, M., Woods, B.D.：二次旅行商问题的可线性化实例刻画。arXiv预印本 arXiv:1708.07217（2017） 18. Rostami, B., Chassein, A., Hopf, M., Frey, D., Buchheim, C., Malucelli, F., Goerigk, M.：二次最短路径问题：复杂性、可近似性与求解方法。《欧洲运筹学杂志》268(2)，473–485（2018） 19. Rostami, B., Malucelli, F., Frey, D., Buchheim, C.：关于二次最短路径问题。载于：Bampis, E.（编）：《实验算法》。第379–390页。施普林格国际出版公司，Cham（2015）

20. Sen, S., Pillai, R., Joshi, S., Rathi, A.K.：先进旅行者信息系统中用于路径导航的均值-方差模型。Transportation Science 35(1), 37–49 (2001) 21. Sivakumar, R.A., Batta, R.：方差约束最短路径问题。Transportation Science 28(4), 309–316 (1994) 22. Sotirov, R., Verch´ere：二次最小生成树问题：通过扩展公式得到下界。arXiv 预印本 arXiv:2102.10647 (2021)