arXiv:2303.00576v1 [math.CO] 1 Mar 2023

经典李群的某些特征标级数的生成函数

RONALD C. KING

Abstract. 舒尔函数级数存在一些众所周知的乘法生成函数。其中有一些与对偶柯西恒等式有关，其展开系数相当简单，并且在某些情况下，会随指定舒尔函数的参数呈周期性变化。最近，人们发现了涉及以辛群特征标展开的类似恒等式。本文将这些结果扩展并推广到所有经典李群。具体而言，基于辛群和正交群的魏尔群的作用，推导出展开系数所满足的显式递推关系。文中以表格形式列出了大量结果，给出了展开系数作为最高权参数函数的显式值。随后，基于辛群和/或正交群的对偶对，提出了另一种方法。该方法的一个副产品是，可以始终从非自旋情形恢复以自旋正交群特征标表示的展开式。

1. Introduction

本文受 Lee 和 Oh 在 [LO1] and [LO2] 中所做工作的启发。他们分别研究了辛群和酉群的不可约表示的特征标自相关函数及其求值，并由此得到了若干恒等式，其形式是关于这些特征标中特定级数的相当简洁的生成函数。

例如，对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 及不定元 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$，其逆元为 $\mathbf{x} = (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1})$，他们在 [LO1] 中建立了一个可表示为如下形式的恒等式

$$\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i^2 + x_i^{-2}) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{2} \rfloor} \psi_{k,r}\ \mathrm{ch}^{\,Sp(2n)}_{(2^p,1^{2k})}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})\,, \tag{1.1}$$

其中 $r = n - p - 2k$，而 $\psi_{k,\,r}$ 仅取决于 k 模 3 和 r 模 6，其中 $\psi_{k,\,r}$ 对 $k \in \{0, 1, 2\}$ 和 $r \in \{0, 1, 2, 3, , 4, 5\}$ 给定如下

(1.2)

$k\backslash r$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	−1	0	0
1	−1	1	0	1	−1	0
2	0	−1	0	0	1	0

南安普顿大学数学科学学院，南安普顿 SO17 1BJ，英格兰（r.c.king@soton.ac.uk）。

类似地，在 [LO2] 中，他们推导出了一个酉群恒等式，该恒等式同样适用于一般线性群，其形式为

$$\prod_{i=1}^{n}(1+x_i)(1+x_i^2)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\sum_{r=0}^{n-p-q}\tau_{q,r}\,\mathrm{ch}^{\,GL(n)}_{(3^p,2^q,1^r)}(\mathbf{x})\,, \tag{1.3}$$

其中 $\tau_{q,\,r}$ 仅取决于 q 和 r 模 4 的值，而 $\tau_{q,\,r}$ 对于 $q,r\in\{0,1,2,3\}$ 由下式给出

(1.4)

$q\backslash r$	0	1	2	3
0	1	1	0	0
1	1	0	−1	0
2	0	−1	−1	0
3	0	0	0	0

若引入额外参数 $\mathbf{y}=(y_1,y_2,\dots,y_m)$，其逆为 $\mathbf{y}=(y_1^{-1},y_2^{-1},\dots,y_m^{-1})$，则这些恒等式可视为对偶柯西恒等式的一种形式的特例 [Mac, BG]

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i+y_j)=\sum_{\lambda\in m^n}\mathrm{ch}^{\,GL(n)}_{\lambda}(\mathbf{x})\;\mathrm{ch}^{\,GL(m)}_{\tilde\lambda}(\mathbf{y}) \tag{1.5}$$

及其辛类比 [BG]

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i+x_i^{-1}+y_j+y_j^{-1})=\sum_{\lambda\in m^n}\mathrm{ch}^{\,Sp(2n)}_{\lambda}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\;\mathrm{ch}^{\,Sp(2m)}_{\tilde\lambda}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}})\,, \tag{1.6}$$

在这两种情况下，右侧的求和均遍及分拆 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$，其中非零部分不超过 n 个，且最大部分为 $\lambda_1\le m$；以及 $\lambda=(n-\lambda'_m,\dots,n-\lambda'_2,n-\lambda'_1)$，其中 $\lambda'=(\lambda'_1,\lambda'_2,\dots,\lambda'_m)$ 是与 λ 共轭的分拆。

如果在（1.5）中令 $m=3$ and $\mathbf{y}=(1,i,-i)$，则左端化简为（1.3）的左端。~在这种情况下，λ 必然具有 $(3^p,2^q,1^r)$ 的形式，且 $\lambda=(s+q+r,s+r,s)$，其中 $s=n-p-q-r\ge 0$，因此在（1.3）的右端可得 $\tau_{q,r}=\mathrm{ch}^{\,GL}(3)(_{q+r,r})\;(1,i,-i)$。这里利用了以下事实：对于所有 s，$\mathrm{ch}^{\,GL(3)}\;(_{s+q+r,s+r,s})\;(1,i,-i)=\mathrm{ch}^{\,GL}(3)(_{q+r,r})\;(1,i,-i)$。对于给定的 (q,r)，系数 $\tau_{q,r}$ 随后可由 $GL(3)$ [Mac、BG、FH 的 Weyl特征标公式求得。这给出了上面所列的 $\tau_{q,r}$ 的值，其中周期性行为源于 y 的各分量是 i 的幂。

类似地，若在 (1.6) 中令 $m=2$ 并令 $\mathbf{y}=(\omega,-\omega)$，其中 $\omega=e^{i\pi/3}$，则左端~与 (1.1) 的左端一致。这一次，λ 必为 $(2^p,1^q)$ 的形式，其中 $\lambda=(q+r,r)$，且 $r=n-p-q\ge 0$。因此，为了得到 (1.1) 的右端，必须显式计算 $\mathrm{ch}^{\,Sp_{(4)\,(q+r,\,r)}}(\omega,-\omega,\omega^{-1},-\omega^{-1})$。Weyl 的 $Sp(4)$ 特征标公式 [Mac、BG、FH] 表明，除非 q 为偶数，否则这些特征标均为零；而当 $q=2k$时，该公式给出 $\psi_{k,\,r}$ 如上所示的值，此时周期性是 (y, y) 的各分量为 $\omega=e^{i\pi/3}$ 的幂所导致的。

对于 $GL(n)$，数学物理文献中20世纪80年代 [YW、LP、KWY]发表的关于舒尔函数的研究，提出了一种相当不同的方法来处理 (1.3) 这类恒等式。特别是，[KWY],明确给出了恒等式 (1.3)

以及在 [LO2] 中得到的其他一些恒等式。在这种方法中，对偶柯西恒等式 (1.5) 被以下恒等式所取代：

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k\right) = \sum_{\lambda\in(m^n)}\sum_{\kappa} a(\kappa)\,\epsilon(\kappa,\lambda)\,\mathrm{ch}_{\lambda}^{GL(n)}(\mathbf{x})\,, \tag{1.7}$$

其中 $a(\kappa) = a_{\kappa_1}a_{\kappa_2}\cdots a_{\kappa_n}$ 是左侧乘积展开中 $\mathbf{x}^{\kappa} = x_1^{\kappa_1}x_2^{\kappa_2}\cdots x_n^{\kappa_n}$ 的系数，而从整数序列 κ 到分拆 λ 的过渡，则通过一系列如下形式的修改实现：

$$(\mu_1,\ldots,\mu_i,\mu_{i+1}\ldots,\mu_n)\to(\mu_1,\ldots,\mu_{i+1}-1,\mu_i+1,\ldots,\mu_n) \tag{1.8}$$

对于 $i=1$、2、.....、$n-1$，从 κ 到 λ 的过渡中，每次这样的修改都会对 $\epsilon(\kappa,\lambda)$ 贡献一个因子 -1；并且，在遇到序列 μ 且对任意 i 均有 $\mu_i=\mu_{i+1}-1$ 的情况下，$\epsilon(\kappa,\lambda)=0$。

这种方法的一个结果是，它相当容易地导出右侧系数的递推关系。例如，令 $m=3$ 和 $a_0=a_1=a_2=a_3=1$，则（1.7）的左侧与（1.3）的左侧一致。KWY] 中将要给出的通用递推关系使得（1.3）右侧的系数为：

$$\begin{array}{l}\tau_{q,r} = Q_qR_r - Q_{q-1}R_{r-1} \text{ with } Q_t = R_t = T_t,\\ \text{where } T_0=1, T_1=1, T_2=0 \text{ and } T_t = T_{t-1}-T_{t-2}+T_{t-3} \text{ for } t\geq 3\,.\end{array} \tag{1.9}$$

在这个特定例子中，这些递推关系导出了等式（1.3）左侧的显式无重数展开式，该展开式最初见于 [KWY], 的方程（5.15），随后由 [LO2] 重新推导，并写成（1.3）和（1.4）的形式。

三篇论文 [YW, LP, KWY] 给出了许多其他同类结果，其中包括在 [KWY], 中以 $(1+x_i)$ $(1-x_i^2)$、$(1-x_i)$ $(1+x_i^2)$ 和 $(1-x_i)$ $(1-x_i^2)$ 替换 $(1+x_i)$ $(1+x_i^2)$，以及更简洁地在 [YW] 中对 $1\leq p\leq 4$ 的情形、在 [LP] 中对所有 p 的情形以 $(1\pm x_i^p)$ 替换。此外，递推关系（1.9）已推广到 $\mathbf{a}=(1,a,b,c)$ 的情形，该结果见于 KWY。

恒等式 (1.7) 可视为直接源自左侧对 x 的各分量置换下的对称性，以及对称函数的性质。这些观察导出了恒等式：

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k x_i^k\right) = \sum_{\mu\in(m^n)} a(\mu)\,m_{\mu}(\mathbf{x}) = \sum_{\mu\in(m^n)}\sum_{\lambda\in(m^n)} a(\mu)\,K^{-1}_{\mu\lambda}\,\mathrm{ch}_{\lambda}^{GL(n)}(\mathbf{x})\,, \tag{1.10}$$

其中，μ 与 λ 一样，对所有分拆求和：每个分拆最多含有 n 个部分，且最大部分不超过 m；而 K^{-1} 是科斯塔矩阵的逆矩阵，也就是将单项式对称函数 $m_{\mu}(\mathbf{x})$ 变换为舒尔函数 $s_{\lambda}(\mathbf{x})$ 的变换矩阵 $=\mathrm{ch}_{\lambda}^{GL(n)}(\mathbf{x})$ [Mac]。将 $m_{\mu}(\mathbf{x})$ 表示为所有互不相同的单项式 $\mathbf{x}^{\kappa}$ 之和，其中 κ 是分拆 μ 各部分的一个排列；再按照 [ER, Mac] 中的说明，以带符号的边钩或特殊边条来计算 $K^{-1}_{\mu\lambda}$，即可看出该公式与 (1.7) 等价。这些边钩或边条实际上就是 [KWY] 中使用的 Slinkies。

它们的长度为 κ_i；在这里，对于 $i = 1$、2、.....、 n，它们分别按 a_{κ_i}加权，并带有符号因子，这些因子已自动包含在修改规则 (1.8) 中。

下文将基于（1.7）得到的、针对 $GL(n)$ 这类特征标恒等式的方法推广到所有经典李群，即 $GL(n)$、 $Sp(2n)$、 $SO(2n+1)$ 和 $SO(2n)$。实现这一推广的关键在第2节中阐明：利用每个恒等式左侧乘积的魏尔群对称性，给出右侧求和的一般公式。该公式以魏尔群元素的符号因子表示，这些元素的作用将权空间 Λ^G 中各群 G 的向量 κ 映射为主导室 Λ^G_+ 中的向量 λ 。文中还列表给出了相关魏尔群所需的 n 个生成元的作用。

作为讨论辛群和正交群的铺垫，第3节在第2节所提供的更一般框架下，重新阐述了 $GL(n)$ 这一情形；该情形曾由 [KWY] 和 [LO2] 研究。通过系统地运用魏尔群生成元的所谓点作用，推导出递推关系，将（1.9）中的递推关系推广至乘积情形：对 i 从 1 到 n，取和式 $a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + a_3x_i^3$，其中参数 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ 任意；同时还讨论了这些递推关系依次限制到 $a_3 = 0$ 和 $a_2 = a_3 = 0$ 的情形。文中指出，对偶柯西恒等式提供了另一种计算此类 $GL(n)$ 恒等式中展开系数的方法，但不太容易据此得到这些系数的递推关系。

随后，第4、5和6节分别对 $Sp(2n)$、 $SO(2n+1)$和 $SO(2n)$重复同样的过程：对于任意 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2)$，考虑从 1 到 n 的 i 上的乘积，即和 $a_0 + a_1(x_i + x_i^{-1}) + a_2(x_i^2 + x_i^{-2})$，并先将它们限制到 $a_2 = 0$ ，再限制到 $a_1 =$0。相同的方法也用于将从 1 到 n 的 i 上的乘积 $_1 \quad _1 \quad _{33} \quad _5 \quad _5 a_{\frac{1}{2}}(x_i^{\frac{1}{2}} + x_i^{-\frac{1}{2}}) + a_3(x_i^{\frac{3}{2}} + x_i^{-\frac{3}{2}}) + a_{\frac{5}{2}}(x_i^{\frac{5}{2}} + x_i^{-\frac{5}{2}})$ 展开为 $SO(2n+1)$ 和$O(2n)$ 的自旋特征标：第7节先讨论 $a_{\frac{5}{2}} = 0$ 的情形，随后在附录A讨论复杂得多的 $a_{\frac{3}{2}} = 0$ 情形。第8节利用对偶对群 [Bau, Mor] ，为所有展开系数给出明确的特征标理论公式，不仅涵盖辛情形，也涵盖普通正交群和自旋正交群情形。还表明，这些公式精确揭示了自旋特征标展开系数与非自旋特征标展开系数之间的联系，并以 $m = 1$ 和 $m = 2$ 情形为例加以说明。

随后，在第9节的两个小节中，分别列表给出了对应于递推关系解的显式结果，涵盖各种 $m = 1$ 和 $m = 2$ 情形。重点关注那些具有周期性，或能够以某种简洁方式表示的结果，其风格类似于 [KWY、YW] 以及 Lee 和 Oh 在 [LO2、LO1]中已经确定的结果。最后在第10节中给出一些总结性评论。

2. Characters of classical Lie groups

令 $n \in \mathbb{N}$ 为定值，并令 $\mathcal{E}_n$ 为一个 n 维欧几里得空间，其一组基由两两正交的单位向量 ϵ_i （ $i = 1$、2、.....、 n）构成。该基下由 $\kappa = \kappa_1\epsilon_1 + \kappa_2\epsilon_2 + \cdots + \kappa_n\epsilon_n$ 给出的任意向量 $\kappa \in \mathcal{E}_n$，在此简记为 $\kappa =$（κ_1、 κ_2、.....、 κ_n）。对于任意一列不定元 $\mathbf{x} =$（x_1、 x_2、.....、 x_n），将 $x_1^{\kappa_1}x_2^{\kappa_2}\cdots x_n^{\kappa_n}$ 记作 $\mathbf{x}^\kappa$ 也很方便。

令 G 为经典李群 $GL(n)$、$SO(2n+1)$、$Sp(2n)$ 或 $SO(2n)$ 中的任意一个。这些群都具有由其最高权 λ 指定的有限维不可约表示 V_G^λ，其中 $\lambda \in \Lambda_G^+$ 为 G 的权格 Λ_G 中支配权的子集；在每种情况下，该子集都可以嵌入 $\mathcal{E}_n$。V_G^λ 的特征标由魏尔公式给出

$$\mathrm{ch}_\lambda^G(\mathbf{x}) = \sum_{w\in W_G} \mathrm{sgn}(w)\,\mathbf{x}^{w(\lambda+\rho_G)} \Big/ \sum_{w\in W_G} \mathrm{sgn}(w)\,\mathbf{x}^{w(\rho_G)}, \tag{2.1}$$

其中 W_G 是 G的魏尔群，其元素 w 的符号或奇偶性为 $\mathrm{sgn}(w) = \pm 1$；而 ρ_G 是 G的魏尔向量，即相应李代数正根之和的一半；并且 $\mathbf{x} = (e^{\epsilon_1}, e^{\epsilon_2}, \ldots, e^{\epsilon_n})$，其中 e^{ϵ_i} 对于 $i = 1, 2, \ldots, n$ 是 n维空间 $\mathcal{E}_n$ 中标准正交基向量的形式指数，权就嵌入在该空间中。

我们可以方便地扩展 (2.1) 右侧的定义域，从而定义

$$\mathrm{ch}_\kappa^G(\mathbf{x}) = \sum_{w\in W_G} \mathrm{sgn}(w)\,\mathbf{x}^{w(\kappa+\rho_G)} \Big/ \sum_{w\in W_G} \mathrm{sgn}(w)\,\mathbf{x}^{w(\rho_G)}, \tag{2.2}$$

对于任意 $\kappa \in \Lambda_G$以及任意不定元序列 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，均可如此定义。应注意，对于任意 $w \in W_G$，我们有

$$\mathrm{ch}_\kappa^G(\mathbf{x}) = \mathrm{sgn}(w)\ \mathrm{ch}_{w(\kappa+\rho_G)-\rho_G}^G(\mathbf{x}). \tag{2.3}$$

任何关于形如 $\mathbf{x}^\kappa$（其中 $\kappa \in \Lambda_G$）的项的魏尔群不变线性表达式本身都可以表示为不可约特征标 $\mathrm{ch}_\lambda^G(\mathbf{x})$ 的线性和，其中 $\lambda \in \Lambda_G^+$ 在 $\mathbf{x}$ 处取值；也就是说，我们有：

命题 2.1. 对所有满足以下条件的系数 $a(\kappa)$

$$\sum_{\kappa\in\Lambda_G} a(\kappa)\,\mathbf{x}^\kappa = \sum_{\kappa\in\Lambda_G} a(\kappa)\,\mathbf{x}^{w(\kappa)} \tag{2.4}$$

对于任意 $w \in W_G$，有

$$\sum_{\kappa\in\Lambda_G} a(\kappa)\,\mathbf{x}^\kappa = \sum_{\lambda\in\Lambda_G^+} \sum_{\kappa\in\Lambda_G} \mathrm{sgn}(w_{\kappa,\lambda})\,a(\kappa)\,\mathrm{ch}_\lambda^G(\mathbf{x}). \tag{2.5}$$

其中求和遍及所有满足存在 $w_{\kappa,\lambda} \in W_G$ 使得 $w_{\kappa,\lambda}(\kappa+\rho_G) - \rho_G = \lambda$ 的 κ

证明：由 (2.4) 可得

$$\begin{aligned} &\Big(\sum_{\kappa\in\Lambda_G} a(\kappa)\mathbf{x}^\kappa\Big)\Big(\sum_{w\in W_G} \mathrm{sgn}(w)\mathbf{x}^{w(\rho_G)}\Big) = \sum_{w\in W_G} \mathrm{sgn}(w)\Big(\sum_{\kappa\in\Lambda_G} a(\kappa)\mathbf{x}^{w(\kappa)}\Big)\mathbf{x}^{w(\rho_G)} \\ &= \sum_{w\in W_G} \mathrm{sgn}(w)\Big(\sum_{\kappa\in\Lambda_G} a(\kappa)\mathbf{x}^{w(\kappa+\rho_G)}\Big) = \sum_{\kappa\in\Lambda_G} a(\kappa)\Big(\sum_{w\in W_G} \mathrm{sgn}(w)\mathbf{x}^{w(\kappa+\rho_G)}\Big), \end{aligned} \tag{2.6}$$

从而

$$\sum_{\kappa\in\Lambda_G} a(\kappa)\,\mathbf{x}^\kappa = \sum_{\kappa\in\Lambda_G} a(\kappa)\,\mathrm{ch}_\kappa^G(\mathbf{x}). \tag{2.7}$$

然而，若存在 $w \in W_G$ 使得 $w(\kappa+\rho_G) = \kappa+\rho_G$ 且符号函数 $(w) = -1$，则 $\mathrm{ch}^G_\kappa(x) = 0$；而在所有其他情况下，对每个 $\kappa \in \Lambda_G$，都存在唯一的支配权$\lambda \in \Lambda^+_G$ 以及某个 $w_{\kappa,\lambda} \in W_G$，其符号为符号函数 $(w_{\kappa,\lambda})$，使得 $w_{\kappa,\lambda}(\kappa+\rho_G) = \lambda+\rho_G$；在这种情况下，$\mathrm{ch}^G_\kappa(x) =$符号函数 $(w_{\kappa,\lambda})\,\mathrm{ch}^G_\lambda(x)$。这足以完成 (2.5) 的证明。□

我们所需的关于 W_G G 的魏尔群的数据，即其正根集合 Δ^+_G 及其和的一半 ρ_G，列于表 1 [Hum、FH] 中。

G	正根 Δ^+_G	$\rho_G = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta^+_G}\alpha$
$GL(n)$	$\{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$	$\sum_{i=1}^n (n-i)\epsilon_i$
$SO(2n+1)$	$\{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{\epsilon_i \mid 1 \le i \le n\}$	$\sum_{i=1}^n (n+\frac{1}{2}-i)\epsilon_i$
$Sp(2n)$	$\{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\} \cup \{2\epsilon_i \mid 1 \le i \le n\}$	$\sum_{i=1}^n (n+1-i)\epsilon_i$
$SO(2n)$	$\{\epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \le i < j \le n\}$	$\sum_{i=1}^n (n-i)\epsilon_i$

TABLE 1. 经典李群的正根$\alpha \in \Delta^+_G$ 及其半和 G， ρ_G。

相应的 Weyl 群 W_G 在 $GL(n)$ 的情形下可识别为对称群 S_n；在 $SO(2n+1)$ 和$Sp(2n)$ 两种情形下可识别为半直积 $(Z_2)^n \rtimes S_n$；而在 $SO(2n)$ [Hum] 的情形下则可识别为 $(Z_2)^{n-1} \rtimes S_n$。在其对 κ 的作用中，群 S_n 是 $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)$ 的置换群，而 $(Z_2)^n \rtimes S_n$ 是对 κ 的分量进行任意置换和符号变化的群，$(Z_2)^{n-1} \rtimes S_n$ 则是其中符号变化次数为偶数的子群。

W_G 的作用由关于垂直于单根 $\alpha \in \Pi_G$的超平面 w_α 中的反射生成。对于任意 $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n)$，这些反射对 $w_\alpha(\kappa+\rho_G) - \rho_G$的作用在表 2 中明确给出，其中由 . . . 表示的任何分量在反射下均保持不变。

G	单根 $\alpha \in \Pi_G$	$w_\alpha(\kappa+\rho_G) - \rho_G$ 与 $\kappa = (\kappa_1, \ldots, \kappa_i, \kappa_{i+1}, \ldots, \kappa_n)$
$GL(n)$	$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ 与 $1 \le i < n$	$(\ldots, \kappa_{i+1}-1, \kappa_i+1, \ldots)$
$SO(2n+1)$	$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ 与 $1 \le i < n$ $\alpha_n = \epsilon_n$	$(\ldots, \kappa_{i+1}-1, \kappa_i+1, \ldots)$ $(\ldots, -\kappa_n - 1)$
$Sp(2n)$	$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ 与 $1 \le i < n$ $\alpha_n = 2\epsilon_n$	$(\ldots, \kappa_{i+1}-1, \kappa_i+1, \ldots)$ $(\ldots, -\kappa_n - 2)$
$SO(2n)$	$\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1}$ 与 $1 \le i < n$ $\alpha_n = \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$	$(\ldots, \kappa_{i+1}-1, \kappa_i+1, \ldots)$ $(\ldots, -\kappa_n - 1, -\kappa_{n-1} - 1)$

TABLE 2. 经典李群的单根 $\alpha \in \Pi$ 及其作用 $w_\alpha(\kappa+\rho_G) - \rho_G$。

3. General linear group character identities

固定 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$，并令 $\mathrm{ch}^{\lambda}_{GL(n)}(\mathbf{x})$ 表示 $GL(n)$的最高权为 λ的不可约表示的特征标，该特征标取值于一个特征值为 $\mathbf{x}$ 的群元素上。

定理 3.1 （[KWY] 情形见（5.11）。）对于所有 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$，我们有

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\sum_{r=0}^{n-p-q} a_3^p\, \psi_{q,r}(\mathbf{a})\, a_0^{n-p-q-r}\, \mathrm{ch}^{GL(n)}_{(3^p,2^q,1^r)}(\mathbf{x})\,, \tag{3.1}$$

其中

$$\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = Q_q\, R_r - a_0 a_3\, Q_{q-1}\, R_{r-1}\,, \tag{3.2}$$

分别在 $q < 0$ 和 $r < 0$ 时为 $Q_q = 0$ 和 $R_r = 0$，而

$$Q_0 = 1 \ \textit{and}\ Q_q = a_2\, Q_{q-1} - a_1 a_3\, Q_{q-2} + a_0 a_3^2\, Q_{q-3} \ \textit{for}\ q \geq 1\,, \tag{3.3}$$

and

$$R_0 = 1 \ \textit{and}\ R_r = a_1\, R_{r-1} - a_0 a_2\, R_{r-2} + a_0^2 a_3\, R_{r-3} \ \textit{for}\ r \geq 1\,. \tag{3.4}$$

证明：对于 n-无关情形，KWY [中已给出了 $\mathbf{a} = (1, a, b, c)$ 的证明，其中展开系数由式 (5.11) 中的 $g_{pqr}(abc)$ 给出。只需利用各种 a_i 总幂的齐次性，即可恢复适用于所有 a_0 的完整结果。不过，此处仍以一种更明显适合推广到其他经典李群（包括正交群和辛群）的特征标情形的方式，重现这一推导。

首先注意到

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3) = \sum_{\kappa} a_3^k\, a_2^\ell\, a_1^m\, a_0^{n-k-\ell-m}\mathbf{x}^\kappa \tag{3.5}$$

其中，当 $j = 1 = 2, \ldots, n$ 时，$\kappa_j \in \{0, 1, 2, 3\}$，并且

$$\begin{aligned} k &= \#\{\kappa_j = 3 | j = 1, 2, \ldots, n\}, \\ \ell &= \#\{\kappa_j = 2 | j = 1, 2, \ldots, n\}, \\ m &= \#\{\kappa_j = 1 | j = 1, 2, \ldots, n\}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

显然，(3.5) 的左边在对 x_i 进行置换时保持不变，因此满足命题 2.1 的魏尔群不变性假设。由此可知，在 (3.5) 的右边，$\mathbf{x}^\kappa$ 可以替换为 $\mathrm{ch}^{GL(n)}_{\kappa}(\mathbf{x})$。此外，根据 (2.3)，对于任意置换 w，$\mathrm{ch}^{GL_{(n)}}{}_{\kappa}(\mathbf{x})$ 本身也可以替换为 $\mathrm{sgn}(w)\mathrm{ch}^{GL_{(n)}}{}_{w\cdot\kappa}$，其中 $w\cdot\kappa$ 表示 $w(\kappa+\rho) - \rho$，且 $\rho = (n-1, \ldots, 1, 0)$。魏尔群的这一点作用由 w_α 的点作用生成，其中 α 是表 2 中给出的一个单根。在 $GL(n)$ 的情形下可以看出，将 κ 的分量限制为 $\{3, 2, 1, 0\}$ 后，$\kappa \in \Lambda$ 中所有严格递增的连续分量对（而非 $\lambda \in \Lambda^+$ 所要求的弱递减顺序）在 w_{α_i} 的点作用下变换如下：

(κ_i, κ_{i+1})	(0, 3)	(1, 3)	(2, 3)	(0, 2)	(1, 2)	(0, 1)
$(\kappa_{i+1} - 1, \kappa_i + 1)$	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(1, 1)	(1, 2)	(0, 1)

(3.7)

迭代这些变换并跟踪其符号因子，可以发现一般而言，$\lambda \in \Lambda^+_{GL(n)}$ 具有一般形式 $(3^p, 2^q, 1^r, 0^{n-p-q-r})$，且只能由子序列 $\tau = w \cdot \sigma$ 构成，其中包含 κ的某些特定初等子序列。为方便起见，记 $\tau = w\cdot\sigma$，若 $w((\ldots,\sigma,\ldots)+\rho)-\rho = (\ldots,\tau,\ldots)$。这些子序列及符号 $\mathrm{sgn}\,(w)$，还有 $a(\sigma)$ 对$a(\kappa)$ 的相应贡献，均列于表 3。 κ 的所有其他子序列 σ 均不允许出现，因为在迭代过程的某个阶段，必须得出 $\mathrm{ch}^{GL(n)}_{\kappa} = 0$；这是由于出现了连续分量对 (2, 3)、(1, 2) 或 (0, 1) 中的某一对，而这些分量对在 w_α 的点作用下保持不变，且 $\mathrm{sgn}\,(w_\alpha) = -1$。

σ	$\tau = w\cdot\sigma$	符号函数 (w) $a(\sigma)$
(3)	(3)	$+a_3$
(2)	(2)	$+a_2$
(1, 3)	(2, 2)	$-a_1a_3$
(0, 3, 3)	(2, 2, 2)	$+a_0a_3^2$
(2, 1)	(2, 1)	$+a_2a_1$
(0, 3)	(2, 1)	$-a_0a_3$
(1)	(1)	$+a_1$
(0, 2)	(1, 1)	$-a_0a_2$
(0, 0, 3)	(1, 1, 1)	$+a_0^2a_3$
(0)	(0)	$+a_0$

TABLE 3. 初等子序列 $\tau = w\cdot\sigma$ of λ 以及符号函数 (w) 和 $a(\sigma)$ 对 $a(\kappa)$ 的贡献，其中情形为 $GL(n)$。

由 3 构成的初始子序列和由 0 构成的末尾子序列在重新排序变换下保持不变，因此产生了 (3.1) 右侧出现的因子 a_3^p 和 $a_0^{n-p-q-r}$。λ 的子序列 $\tau = (3, 2)$ 和 $(1, 0)$ 只能以一种方式形成，而 $\tau = (2, 1)$ 则不同，它既可以由 $\sigma = (2, 1)$ 形成，也可以由 (0, 3) 形成。这一观察解释了表 3 中出现的两项。考虑表 3 中每个子序列的权重符号函数 (w) $a(\sigma)$，以及 λ 中 3、2、1 和 0 所需的项数，便可得到递推关系 (3.3) 和 (3.4)，从而完成对展开式 (3.1) 的推导。□

在通过设定以下参数得到的特殊情 况中，$a_2 = a_3 = 0$ 或仅设定 $a_3 = 0$，定理 3.1 给出 e

推论 3.2. 对于一个 $= (a_0, a_1)$ 和一个 $= (a_0, a_1, a_2)$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_1x_i) = \sum_{r=0}^{n} a_1^r\, a_0^{n-r}\ \mathrm{ch}^{GL(n)}_{(1^r)}(\mathbf{x})\,; \tag{3.8}$$

$$.\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2) = \sum_{q=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-q} a_2^q\,\phi_r(\mathbf{a})\, a_0^{n-q-r}\ \mathrm{ch}^{GL(n)}_{(2^q,1^r)}(\mathbf{x})\,, \tag{3.9}$$

其中

$$\phi_0(\mathbf{a}) = 1,\ \phi_1(\mathbf{a}) = a_1 \ \textit{and}\ \phi_r(\mathbf{a}) = a_1\phi_{r-1}(\mathbf{a}) - a_0a_2\phi_{r-2}(\mathbf{a}) \ \textit{for}\ r \geq 2\,. \tag{3.10}$$

或者等价地

$$\phi_r(\mathbf{a}) = [t^r]\, 1/(1 - a_1\, t + a_0a_2\, t^2) \ \textit{for all}\ r \geq 0\,. \tag{3.11}$$

其中，$[t^r]\,P(t)$表示将 $P(t)$展开为关于 t的幂级数时，t^r 的系数。

推论 3.2 和定理 3.1 中的递推关系在某些特定的 $\mathbf{a} = (1, a_1, a_2)$ 和 $\mathbf{a} = (1, a_1, a_2, a_3)$ 取值下得到的结果，分别列于表 4 和表 5 中。这些结果主要是此前在 [KWY、YW] 中得到的结果，以及通过不同方法在 [LO2]中得到的结果。这些表格采用了以下记号：

$$\begin{array}{ll} (i) & F_0 = 1,\ F_1 = 1 \text{ and } F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{ for } k \geq 2; \\ (ii) & G_0 = 0,\ G_1 = 0,\ G_2 = 1 \text{ and } G_k = G_{k-1} + G_{k-2} + G_{k-3} \text{ for } k \geq 3; \\ (iii) & H_0 = 0,\ H_1 = 0,\ H_2 = 1 \text{ and } H_k = -H_{k-1} - H_{k-2} + H_{k-3} \text{ for } k \geq 3, \end{array} \tag{3.12}$$

参见 [OEIS] (i) A000045、(ii) A000073、(iii) A57597，其中 F_k 是斐波那契数，G_k是特里波那契数，而 H_k 是后一种数列的一个变体。

$\mathbf{a}$	$a_2^q\phi_{q,\,r}(\mathbf{a})$	
(1, 0, 1)	$(-1)^{r/2}$ 若 $r = 0 \bmod 2$ 若 $r = 1 \bmod 2$，则为 0	[YW] 表 2 V^+ [LO2] (3.2)
(1, 0, 1)	$(-1)^q$ 若 $r = 0$ 为偶数 若 $r = 1$ 为偶数，则为 0	[YW]表 1 V [LO2] (3.6)
(1, 1, 1)	若 $r = 0$，则为 1 0 若 $r = 2$，模 6 余 1，模 6 余 5 -1 若 $r = 3$，模 6 余 4	[YW] (33)
(1, 1, 1)	若 $r = 0 \bmod 3$，则为 1 若 $r = 2 \bmod 3$，则为 0 -1 若 $r = 1 \bmod 3$	[YW] (34)
(1, 1, 1)	$(-1)^q\, F_{r+1}$	[KWY] (5.23)
(1, 1, 1)	$(-1)^{q+r}\, F_{r+1}$	
(1, 2, 1)	$r + 1$	[洛2] (3.11)
$(1, \sqrt{2}, 1)$	若 $r = 0$，则为 1，模 8 余 2 若 $r = 1$ 模 8，则为 $\sqrt{2}$ 若 $r = 3$，模 8，则为 0 若 $r = 4$，则为 -1，6 模 8 $-\sqrt{2}$ 如果 $r = 5$ 模 8	
(1, 3, 1)	F_{2r+2}	

TABLE 4. 不同 $\mathbf{a} = (1, a_1, a_2$ 下，(3.9) 中的 $GL(n)$ 系数 $\phi_r(\mathbf{a})$　　)

a	$\psi_{q,\ r}$(a)	
(1, 0, 0, 1)	$\begin{cases} 1 \text{ 若 } q=0 \text{ 模 3 且 } r=0 \text{ 模 3} \\ -1 \text{ 若 } q=1 \text{ 模 3 且 } r=1 \text{ 模 3} \\ 0 \text{ 否则} \end{cases}$	[YW] (29a)
(1, 0, 0, $\overline{1}$)	$\begin{cases} (-1)^{(3p+r)/3} \text{ 若 } q=0 \text{ 模 3 且 } r=0 \text{ 模 3} \\ (-1)^{(3p+r-1)/3} \text{ 若 } q=1 \text{ 模 3 且 } r=1 \text{ 模 3} \\ 0 \text{ 否则} \end{cases}$	[YW] (29b)
(1, 1, 1, 1)	$\psi_{q+4,\ r}=\psi_{q,\ r+4}=\psi_{q,\ r}$ 其中 $\psi_{q,r}=$	[KWY] (5.15) [LO2] (4.8)
(1, $\overline{1}$, $\overline{1}$, 1)	$\psi_{q+2,\ r}=\psi_{q,\ r+2}=\psi_{q,\ r}$ 其中 $\psi_{q,r}=$	[KWY] (5.21) 另见 [LO2] (4.18)
(1, $\overline{1}$, 1, $\overline{1}$)	$G_{q+2}H_{r+2}-G_{q+1}H_{r+1}$	
(1, 1, $\overline{1}$, $\overline{1}$)	$H_{q+2}G_{r+2}-H_{q+1}G_{r+1}$	
(1, 2, 2, 1)	$\psi_{q+6,\ r}=\psi_{q,\ r+6}=\psi_{q,\ r}$ 其中 $\psi_{q,r}=$	
(1, 3, 3, 1)	$(q+r+2)(q+1)(r+1)/2$	

$q\backslash r$	0	1
0	1	1	0	0
1	1	0	−1	0
2	0	−1	−1	0
3	0	0	0	0

$q\backslash r$	0	1
0	$(q+r+2)/2$	$-(r+1)/2$
1	$-(q+1)/2$	0

$q\backslash r$	0	1	2	3	4	5
0	1	2	2	1	0	0
1	2	3	2	0	−1	0
2	2	2	0	−2	−2	0
3	1	0	−2	−3	−2	0
4	0	−1	−2	−2	−1	0
5	0	0	2	1	0	0

TABLE 5. 式 (3.1) 中针对不同 a 的 $GL(n)$ 系数 $\psi_{q,r}(\mathbf{a})\ =(1,a_1,a_2,a_3\qquad)$

原则上，可以通过利用由 (1.5) 给出的对偶柯西恒等式 [Mac, BG] 得到所有这些结果。在 $m=2$ 和 $a_2=1$ 的情形下，有

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0+a_1x_i+x_i^2)=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{2}(x_i+y_j)=\sum_{\lambda\in(2^n)}\mathrm{ch}^{GL(n)}_{\lambda}(\mathbf{x})\ \mathrm{ch}^{GL(2)}_{\tilde{\lambda}}(y_1,y_2) \tag{3.13}$$

其中 $a_0=y_1y_2$ 和 $a_1=(y_1+y_2)$。显然，λ 必然具有 $(2^q,1^r)$ 的形式，其中$\tilde{\lambda}=(s+r,s)$，且 $s=n-q-r$。在这种情况下，$\mathrm{ch}^{GL}{}_{(2)\ (s+r,\ s)}(y_1,y_2)\ =(y_1y_2)^s\mathrm{ch}^{GL}{}_{(2)\ (r)}(y_1,y_2)\ =$

$a_0^{n-q-r}\phi_r(\mathbf{a})$，因此在 (3.9) 的记号下，$a_2 = 1$

$$\phi_r(\mathbf{a}) = \mathrm{ch}\,{}^{GL(2)}_{(r)}(y_1, y_2) = \sum_{j=0}^{r} y_1^{r-j}\, y_2^{j}\,. \tag{3.14}$$

令 $y_1 = e^{i\pi/k}$ 和 $y_2 = e^{-i\pi/k}$ 满足 $k = 1$，2、3、4 和 6，即可得到表4中 $\mathbf{a} = (1, a_1, 1)$ 且 $a_1 = -2$、0、1、$\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{3}$的情形下的结果；而更简单的情形 $y_1 = y_2 = 1$对应于 $a_1 = 2$。

类似地，在 $m = 3$ 和 $a_3 = 1$ 的情形下，有

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + x_i^3) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{3}(x_i + y_j) = \sum_{\lambda\in(3^n)} \mathrm{ch}\,{}^{GL(n)}_{\lambda}(\mathbf{x})\ \mathrm{ch}\,{}^{GL(3)}_{\tilde{\lambda}}(y_1, y_2, y_3) \tag{3.15}$$

其中 $a_0 = y_1y_2y_3$、$a_1 = y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3$ 和 $a_1 = y_1 + y_2 + y_3$。这次，λ 具有~的形式 $(3^p, 2^q, 1^r)$，其中 $\lambda = (s+q+r, s+r, s)$，且 $s = n-p-q-r$。在此情形下，$\mathrm{ch}\,{}^{GL}{}_{(3)\,(s+q+r,s+r,s)}(y_1, y_2, y_3) = (y_1y_2y_3)^s \mathrm{ch}\,{}^{GL(3)}{}_{(q+r,r)}(y_1, y_2, y_3) = a_0^{n-q-r}\psi_{q,r}(\mathbf{a})$，因此在 (3.1) 的记号下，$a_3 = 1$

$$\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = \mathrm{ch}\,{}^{GL(3)}_{(q+r,r)}(y_1, y_2, y_3)\,. \tag{3.16}$$

一般而言，要对所有 (q, r) 求出此式并不容易。尤其是，它不太适合用于求出表5中 $\mathbf{a} = (1, -1, 1, 1)$ 和 $(1, 1, -1, 1)$ 两种情形下的 $\psi_{q,r}(\mathbf{a})$。不过，在令 $(y_1, y_2, y_3) = (1, e^{i2\pi/k}, e^{-i2\pi/k})$、其中 $k = 2$ 取 3、4 和 6 所得到的周期情形中，可以分别恢复表5中 $\mathbf{a} = (1, a, a, 1)$、$a = -1$ 取 0、1 和 2 时的结果；此外还有更简单的情形 $y_1 = y_2 = y_3$，它对应于 $a = 3$。在这种情况下，$\psi_{q,r}(\mathbf{a})$ 就是最高权为 $(q + r, r)$ 的 $GL(3)$ 表示的维数。

4. Symplectic group character identities

令 $n \in \mathbb{N}$ 固定，并令 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 和 $\mathbf{x} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$，其中 $\overline{x}_i = x_i^{-1}$ for $i = 1, 2, \ldots, n$，并令 $\mathrm{ch}\,{}^{Sp\ (2n)\ \lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ 表示最高权为 λ 的 $Sp(2n)$的不可约表示的特征标，在特征值为 $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ 的群元素上取值。于是有以下

定理4.1. 对所有 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2)$，我们有

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_1(x_i + \overline{x}_i) + a_2(x_i^2 + \overline{x}_i^2)) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p} \delta_{r,n-p-q}\ a_2^p\ \psi_{q,r}(\mathbf{a})\ \mathrm{ch}\,{}^{Sp(2n)}_{(2^p,1^q,0^r)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})\,, \tag{4.1}$$

其中

$$\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = \chi_{q,r}(\mathbf{a}) - \chi_{q,r-1}(\mathbf{a})\, a_2\,, \tag{4.2}$$

with

$$\chi_{q,r}(\mathbf{a}) = Q_q\, R_r + a_2^3\, Q_{q-2}\, R_{r-1} + a_1\, Q_{q-1} \sum_{s=1}^{r}(-a_2)^s\, R_{r-s}\,, \tag{4.3}$$

其中，若 $q<0$， $Q_0=1$ 且

$$Q_q = a_1\,Q_{q-1} - a_0a_2\,Q_{q-2} + a_1a_2^2\,Q_{q-3} - a_2^4\,Q_{q-4} \ \textit{if}\ q\geq 1\,, \tag{4.4}$$

当 $R_r=0$ 若 $r<0$, $R_0=1$ 且

$$R_r = a_0\,R_{r-1} - a_1^2\,R_{r-2} - a_0a_2^2\,R_{r-3} + a_2^4\,R_{r-4} - 2a_1^2\sum_{s=1}^{r-2}(-a_2)^s\,R_{r-s-2} \ \textit{if}\ r\geq 1\,. \tag{4.5}$$

证明:

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0+a_1(x_i+\overline{x}_i)+a_2(x_i^2+\overline{x}_i^2)) = \sum_{\kappa} a_2^k\,a_1^\ell\,a_0^{n-k-\ell}\mathbf{x}^\kappa\,, \tag{4.6}$$

其中 $\kappa_j\in\{\overline{2},\overline{1},0,1,2\}$ 对于 $j=1,2,\dots,n$ 且

$$\begin{aligned} k &= \#\{\kappa_j\in\{2,\overline{2}\}|j=1,2,\dots,n\};\\ \ell &= \#\{\kappa_j\in\{1,\overline{1}\}|j=1,2,\dots,n\}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

(4.6) 的左边显然在对 x_i 进行置换及其分量符号变化下保持不变，因此满足命题 2.1 的魏尔群不变性假设。由 (2.7) 可知，在 (4.6) 的右边，$\mathbf{x}^\kappa$ 可替换为 $\mathrm{ch}^{\,Sp_{(2n)}\,\kappa}(\mathbf{x},\mathbf{x})$。

参照表 2 的 $Sp(2n)$ 情形，可知 κ 中非标准顺序排列的连续分量对在 w_{α_i} 的点作用下变换如下，其中 $i=1,2,\dots,n-1$:

(κ_i,κ_{i+1})	$(\overline{2},0)$	$(\overline{2},1)$	$(\overline{2},2)$	$(\overline{1},1)$	$(\overline{1},2)$	$(0,2)$
$(\kappa_{i+1}-1,\kappa_i+1)$	$(\overline{1},\overline{1})$	$(0,\overline{1})$	$(1,\overline{1})$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1,1)$
(κ_i,κ_{i+1})	$(\overline{2},\overline{1})$	$(\overline{1},0)$	$(0,1)$	$(1,2)$		
$(\kappa_{i+1}-1,\kappa_i+1)$	$(\overline{2},\overline{1})$	$(\overline{1},0)$	$(0,1)$	$(1,2)$		

(4.8)

而 w_{α_n} 对 κ 的第 n 个分量的点作用，经 $\alpha=2\epsilon_n$ 作用后变换如下:

$(\dots,\kappa_n)$	$(\dots,\overline{2})$	$(\dots,\overline{1})$
$(\dots,-\kappa_n-2)$	$(\dots,0)$	$(\dots,\overline{1})$

(4.9)

变换 (4.8) 和 (4.9) 必然导出表6中给出的初等子序列的变换和权重，其中 t 可以是任意正整数。

从 (4.8) 推导表6中依赖于 t 的变换时，应注意到 $(\overline{2},2)^t$ 映射为 $(1,1)^t$，其符号因子为 $(-1)^t$；而 $(1,1)^t$ 映射为 $(0,0)^t$，符号因子同样为 $(-1)^t$。

κ 中任意以 2 开头的序列，在 w_{α_i} 对所有 i 的点作用下保持不变。这就是 (4.1) 右侧因子 a_2^p 的由来。

(4.9) 的变换意味着，在 (4.6) 中，所有以 1 结尾的序列 κ 都可以忽略；而任何以 2 结尾的序列 κ 所产生的贡献，等于将 2 替换为 0 时所得贡献的相反数。定义 (4.2) 中的第二项已体现了这一点：$\psi_{q,\,r}(\mathrm{a})$。

表6中 τ 形式为（1^ℓ，0^m）的项给出了用 $Q_{q-\ell}$ 和 R_{r-m} 表示 $\chi_{q,\,r}(\mathrm{a})$ 的表达式（4.3），而后两者的表达式则由相应条目推导得出

σ	$\tau = w \cdot \sigma$	符号函数 (w) $a(\sigma)$
(2)	(2)	$+a_2$
$(2, 1)$	$(2, 1)$	$+a_1a_2$
(1)	(1)	$+a_1$
$(0, 2)$	$(1, 1)$	$-a_0a_2$
$(\overline{1}, 2, 2)$	$(1, 1, 1)$	$+a_1a_2^2$
$(\overline{2}, 2, 2, 2)$	$(1, 1, 1, 1)$	$-a_2^4$
$(1, 0)$	$(1, 0)$	$+a_0a_1$
$(\overline{1}, 2)$	$(1, 0)$	$-a_1a_2$
$(\overline{2}, 2, 2)$	$(1, 1, 0)$	$+a_2^3$
$((\overline{2}, 2)^t, 1)$	$(1, 0^{2t})$	$+a_1a_2^{2t}$
$((\overline{2}, 2)^t, 1, \overline{2})$	$(1, 0^{2t+1})$	$-a_1a_2^{2t+1}$
(0)	(0)	$+a_0$
$(\overline{1}, 1)$	$(0, 0))$	$-a_1^2$
$(\overline{2}, 0, 2)$	$(0, 0, 0))$	$-a_0a_2^2$
$(\overline{2}, \overline{2}, 2, 2)$	$(0, 0, 0, 0))$	$+a_2^4$
$(\overline{1}, (\overline{2}, 2)^t, 1, \overline{2})$	(0^{2t+3})	$+a_1^2a_2^{2t+1}$
$(\overline{2}, 1, (\overline{2}, 2)^t, 1)$	(0^{2t+3})	$+a_1^2a_2^{2t+1}$
$(\overline{1}, (\overline{2}, 2)^{t+1}, 1)$	(0^{2t+4})	$-a_1^2a_2^{2t+2}$
$(\overline{2}, 1, (\overline{2}, 2)^t, 1, \overline{2})$	(0^{2t+4})	$-a_1^2a_2^{2t+2}$

TABLE 6. $\tau = w \cdot \sigma$的初等子序列 λ，以及符号函数 sgn (w) 和 $a(\sigma)$对 $a(\kappa)$的贡献，适用于情形 $Sp(2n)$。

分别对应表6中 τ 形式为（1^ℓ）和（0^m）的项。这些观察完成了对（4.1）的推导。□

令 $a_2 = 0$ 和 $a_1 = 0$，即可得到定理4.1的特殊情形:

推论 4.2. 对于一个 $= (a_0, a_1)$ 和一个 $= (a_0, 0, a_2)$，我们有

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_1(x_i + \overline{x}_i)) = \sum_{q=0}^{n} \delta_{r,n-q}\, a_1^q\, \phi_r(\mathbf{a})\, \mathrm{ch}\,{}^{Sp(2n)}_{(1^q,0^r)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})\,; \tag{4.10}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_2(x_i^2 + \overline{x}_i^2)) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p} \delta_{r,n-p-q}\, a_2^p\, \psi_{q,r}(\mathbf{a})\, \mathrm{ch}\,{}^{Sp(2n)}_{(2^p,1^q,0^r)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})\,, \tag{4.11}$$

with

$$\phi_0(\mathbf{a}) = 1, \phi_1(\mathbf{a}) = a_0 \ \textit{and}\ \phi_r(\mathbf{a}) = a_0\, \phi_{r-1}(\mathbf{a}) - a_1^2\, \phi_{r-2}(\mathbf{a})\,, \tag{4.12}$$

and

$$
\begin{aligned}
&\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = 0 \ \textit{if}\ q<0 \ \textit{or}\ q = 1 \bmod 2 \ \textit{or}\ r<0\,;\\
&\psi_{0,0}(\mathbf{a}) = 1 \ \textit{and}\ \psi_{0,1}(\mathbf{a}) = a_0 - a_2\,;\\
&\psi_{0,r}(\mathbf{a}) = a_0\psi_{0,r-1}(\mathbf{a}) - a_0a_2^2\psi_{0,r-3}(\mathbf{a}) + a_2^4\psi_{0,r-4}(\mathbf{a}) \ \textit{for}\ r\geq 2\,;\\
&\psi_{2,r}(\mathbf{a}) = -a_0a_2\psi_{0,r}(\mathbf{a}) + a_2^3\psi_{0,r-1} \ \textit{for}\ r\geq 0\,;\\
&\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = -a_0a_2\psi_{q-2,r}(\mathbf{a}) - a_2^4\psi_{q-4,r}(\mathbf{a}) \ \textit{for}\ q = 0 \bmod 2 \ \textit{with}\ q\geq 4 \ \textit{and}\ r\geq 0\,.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

证明：第一种情形对应于在 (4.1) 中令 $a_2 = 0$。由此立即得到 $\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = Q_qR_r$，其中 $Q_q = a_1^q$ 且 $R_r = a_0R_{r-1} - a_1^2R_{r-2}$，因此 $\psi_{q,r} = a_1^q\phi_q(\mathbf{a})$，其中 $\phi_0(\mathbf{a}) = 1$ 且 $\phi_r(\mathbf{a}) = a_0\,\phi_{r-1}(\mathbf{a}) - a_1^2\,\phi_{r-2}(\mathbf{a})$，如所需。

在第二种情形中，将 $a_1 = 0$ 代入 (4.1)。由此得到 (i) $\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = \chi_{q,r}(\mathbf{a}) - a_2\chi_{q,r-1}(\mathbf{a})$；(ii) $\chi_{q,r}(\mathbf{a}) = Q_qR_r + a_2^3Q_{q-2}R_{r-1}$；(iii) $Q_q = -a_0a_2Q_{q-2} - a_2^4Q_{q-4}$ 对于 $q\geq 1$；(iv) $R_r = a_0R_{r-1} - a_0a_2^2R_{r-3} + a_2^4R_{r-4}$ 对于 $r\geq 1$。由于 $Q_q = 0$ 对于 $q<0$，且 $R_r = 0$ 对于 $r<0$，由 (i) 和 (ii) 可得，若 $q<0$ 或 $r<0$，则 $\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = 0$。由 (iii) 以及 $Q_1 = a_1 = 0$ 这一事实可知，若 q 为奇数，则 $Q_q = 0$。接着，(i) 和 (ii) 推出，若 q 为奇数，则 $\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = 0$。此时，条件 $Q_0 = R_0 = 1$ 足以确保 $\phi_{0,r}(\mathbf{a}) = R_r$ 且 $\psi_{0,r}(\mathbf{a}) = R_r - a_2R_{r-1}$。对于 R_r 的递推关系，(iv) 随即直接给出所需的 $\psi_{0,r}(\mathbf{a})$ 表达式，对所有 $r\geq 0$ 均成立。由 $Q_2 = -a_0a_2$ 和 $Q_0 = 1$ 可知 $\chi_{2,r}(\mathbf{a}) = -a_0a_2R_r + a_2^3R_{r-1}$，因此由 (i) 得 $\psi_{2,r}(\mathbf{a}) = -a_0a_2R_r + a_2^3R_{r-1} + a_0a_2^2R_{r-1} - a_2^4R_{r-2} = -a_0a_2\psi_{0,r}(\mathbf{a}) + a_2^3\psi_{0,r-1}(\mathbf{a})$，同样符合要求。最后，由 (i) 和 (ii) 可得 $\psi_{q,r}(\mathbf{a}) + a_0a_2\psi_{q-2,r}(\mathbf{a}) + a_2^4\psi_{q-4,r}(\mathbf{a}) = Z_qR_r + a_2^3Z_{q-2}R_{r-1} - a_2Z_qR_{r-1} - a_2^4Z_{q-2}R_{r-2}$，其中依据 (iii)，对所有 $q\geq 1$，$Z_q = Q_q + a_0a_2Q_{q-2} + a_2^4Q_{q-4} = 0$。这便给出了对所有 $r\geq 0$ 和 $q\geq 3$ 均成立的 $\psi_{q,r}(\mathbf{a})$ 所需的递推关系；也就是说，对于 $q\geq 4$，因为我们只需要 $q = 0$ 模 2 的情形。□

定理4.1 和推论 4.2 对 $\mathbf{a} = (a_0, 1)$、$(a_0, 0, 1)$ 和 $(a_0, 1, 1)$ 的若干特定取值所得的一些结果，分别列于表 9、10 和 11 中。

5. Odd orthogonal group character identities

对于任意分拆 λ，令 $\mathrm{ch}_\lambda^{SO(2n+1)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}, 1)$ 表示 $SO(2n+1)$ 的最高权为 λ 的不可约表示的特征标在特征值为 $(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}, 1)$ 的群元素上的取值。则有

定理 5.1. 对所有 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2)$

$$
\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_1(x_i + \overline{x}_i) + a_2(x_i^2 + \overline{x}_i^2)) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\delta_{r,n-p-q}\ a_2^p\ \psi_{q,r}(\mathbf{a})\ \mathrm{ch}_{(2^p,1^q,0^r)}^{SO(2n+1)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}, 1)\,,
\tag{5.1}
$$

其中

$$
\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = \sum_{s=0}^{r}\chi_{q,r-s}(\mathbf{a})\,S_s \ + \ \chi_{q-1,0}(\mathbf{a})\,(-a_2)^{r+1}\,,
\tag{5.2}
$$

其中 $\chi_{q,r}(\mathbf{a})$ 的定义与 (4.3) 中相同，其表达式由 Q_q 和 R_r 给出，分别见 (4.4) 和 (4.5)，并且

$$
S_0 = 1,\ S_1 = -a_1,\ S_2 = 2a_1a_2 - a_2^2,\ \textit{and}\ S_s = -2a_1(-a_2)^{s-1}\ \textit{if}\ s\geq 3\,.
\tag{5.3}
$$

证明：与辛情形一样，我们有

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0+a_1(x_i+\overline{x}_i)+a_2(x_i^2+\overline{x}^2))=\sum_{\kappa}a_2^k\,a_1^\ell\,a_0^{n-k-\ell}\mathbf{x}^\kappa\,, \tag{5.4}$$

其中 $\kappa_j\in\{\overline{2},\overline{1},0,1,2\}$ 对于 $j=1$，2，....., n 和

$$\begin{aligned} k &= \#\{\kappa_j\in\{2,\overline{2}\}|j=1,2,\dots,n\};\\ \ell &= \#\{\kappa_j\in\{1,\overline{1}\}|j=1,2,\dots,n\}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

由于 $SO(2n+1)$ 与 $Sp(2n)$ 具有相同的魏尔群，(5.4) 左边再次满足命题 2.1 的魏尔群不变性假设。因此，右边的 $\mathbf{x}^\kappa$ 可以替换为 $\mathrm{ch}^{SO(2n+1)}_{\kappa}(\mathrm{x},\mathrm{x},1)$。此外，(4.8) 中的变换及其迭代推论（见表6）仍然适用。

然而，$SO(2n+1)$ 情形的不同之处在于 w_{α_n} 的作用。在这种情形下，$\alpha_n=\epsilon_n$，且 w_{ϵ_n} 的点作用会变换 κ 的第 n 个分量，如图所示，同时保持所有其他分量不变。

$$\begin{array}{|l|ll|}\hline (\dots,\kappa_n) & (\dots,\overline{2}) & (\dots,\overline{1})\\ (\dots,-\kappa_n-1) & (\dots,1) & (\dots,0)\\ \hline\end{array} \tag{5.6}$$

这意味着，所有以 2 或 1 结尾的序列 κ 都可以分别替换为以 1 或 0 结尾的序列，同时保留一个额外的符号因子 -1。

将关于任意序列 κ的最后一项或终止项的这些观察与 (4.8) 结合起来，便可得到表7所列的终端子序列变换，其中 t 可以是任意正整数。这里在表格的上半部分

σ	$\tau=w\cdot\sigma$	符号函数 (w) $a(\sigma)$
$(\cdots,\overline{2})$	$(\cdots,1)$	$-a_2$
$(\dots,\overline{2},2)$	$(\dots,1,0)$	$+a_2^2$
$(\dots,(\overline{2},2)^t,\overline{2})$	$(\cdots,1,0^{2t})$	$-a_2^{2t+1}$
$(\cdots,(\overline{2},2)^{t+1})$	$(\cdots,1,0^{2t+1})$	$+a_2^{2t+2}$
$(\cdots,\overline{1})$	$(\cdots,0)$	$-a_1$
$(\dots,\overline{1,2})$	$(\dots,0,0)$	$+a_1a_2$
$(\dots,\overline{2},1)$	$(\dots,0,0)$	$+a_1a_2$
$(\dots,\overline{2},\overline{2})$	$(\dots,0,0)$	$-a_2^2$
$(\dots,\overline{2},1,\overline{2})$	$(\dots,0,0,0)$	$-a_1a_2^2$
$(\dots,\overline{1},(\overline{2},2)^t)$	$(\dots,0^{2t+1})$	$-a_1a_2^{2t}$
$(\dots,\overline{1},(\overline{2},2)^t,\overline{2})$	$(\dots,0^{2t+2})$	$+a_1a_2^{2t+1}$
$(\dots,\overline{2},1,(\overline{2},2)^t)$	$(\dots,0^{2t+2})$	$+a_1a_2^{2t+1}$
$(\dots,\overline{2},1,(\overline{2},2)^t,\overline{2})$	$(\cdots,0^{2t+3})$	$-a_1a_2^{2t+2}$

TABLE 7. λ 的终止子序列 $\tau=w\cdot\sigma$，以及在情形 $SO(2n+1)$ 下，符号函数 (w) 和 $a(\sigma)$ 对 $a(\kappa)$ 的贡献。

$(\cdots,)$ 表示任何可借助 Weyl变换 写成如下形式的初始子序列

$(2^p, 1^q, 0^s)$，而在下半部分则必须为 $(2^p, 1^{q-1})$ 的形式，且末尾不得有 0。包含符号因子的连续变换可由一个与 t 无关的情形加以说明：$(\cdots, 2, 1, 2) \mapsto -(\cdots, 0, 1, 2) \mapsto (\cdots, 0, 1, 1) \mapsto -(\cdots, 0, 0, 0)$，其中第二步见表7，第一步和第三步见式 (4.8)。与辛情形一样，关键在于 $(2, 2)^t$ 映射为带有符号因子 $(-1)^t$ 的 $(1, 1)^t$，而 $(1, 1)^t$ 映射为带有相同符号因子 $(-1)^t$ 的 $(0, 0)^t$。例如，$(\cdots, (2, \underline{2})^t, \underline{2}) \mapsto (-1)^t(\cdots, (1, 1)^t, 2) = (-1)^{t+1}(\cdots, (1, 1)^t, 1) \mapsto (-1)^{t+1}(\cdots, 1, (1, 1)^t) \mapsto -(\cdots, 1, (0, 0)^t) = -(\cdots, 1, 0^{2t})$。

正如表6中的变换蕴含了Q_q、R_r 和$\chi_{q,r}(\mathbf{a})$的递推关系成立一样，表7中的变换也表明，为了涵盖所有导出 λ 形式为$(\cdots, 1, 0^r)$和$(\cdots, 0^s)$的贡献项，必须按照(5.2)定义$\psi_{q,r}(\mathbf{a})$，其中 $\cdots$ 表示由$\chi_{q-1,0}(\mathbf{a}) = Q_{q-1}$ 和$\chi_{q,r-s}(\mathbf{a})$分别列举的所有项。□

作为定理 5.1 的特例，我们有

推论5.2。

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_1(x_i + \overline{x}_i)) = \sum_{q=0}^{n} \delta_{r,n-q}\, a_1^q\, \phi_r(\mathbf{a})\, \mathrm{ch}\, {}^{SO(2n+1)}_{(1^q,0^r)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}, 1)\,; \tag{5.7}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_2(x_i^2 + \overline{x}_i^2)) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p} \delta_{r,n-p-q}\, a_2^p\, \psi_{q,r}(\mathbf{a})\, \mathrm{ch}\, {}^{SO(2n+1)}_{(2^p,1^q,0^r)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}, 1)\,, \tag{5.8}$$

with

$$\phi_0(\mathbf{a}) = 1,\ \phi_1 = a_0 - a_1 \ \textit{and}\ \phi_r(\mathbf{a}) = a_0\, \phi_{r-1}(\mathbf{a}) - a_1^2\, \phi_{r-2}(\mathbf{a}) \ \textit{for}\ r \geq 2\,, \tag{5.9}$$

and

$$\psi_{0,0}(\mathbf{a}) = 1,\ \psi_{0,1}(\mathbf{a}) = a_0 \ \textit{and}\ \psi_{0,r}(\mathbf{a}) = a_0\psi_{0,r-1}(\mathbf{a}) - a_2^2\psi_{0,r-2}(\mathbf{a}) \ \textit{for}\ r \geq 2\,;$$

$$\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = \begin{cases} (-a_2)^{q/2}\, \psi_{0,(q+2r)/2}(\mathbf{a}) & \textit{for all}\ q, r \geq 0 \ \textit{if}\ q = 0 \bmod 2\,; \\ (-a_2)^{(q+1+2r)/2}\, \psi_{0,(q-1)/2}(\mathbf{a}) & \textit{for all}\ q, r \geq 0 \ \textit{if}\ q = 1 \bmod 2\,. \end{cases} \tag{5.10}$$

证明：在整个证明过程中，应当记住，若 $q < 0$，则 $Q_q = 0$；若 $r < 0$，则 $R_r = 0$；$Q_0 = R_0 = S_0 = 1$ 且 $S_1 = -a_1$。

情形 $a_2 = 0$：在 (5.1) 中令 $a_2 = 0$，只留下含有 $p = 0$ 的项，并分别得到：对于 $r \geq 1$，有 $R_r = a_0 R_{r-1} - a_1^2 R_{r-2}$；对于 $q \geq 1$，有 $Q_q = a_1 Q_{q-1} = a_1^q$；以及 $\chi_{q,r}(\mathbf{a}) = Q_q R_r$，分别代入 (4.5)、(4.4) 和 (4.3)。此外，(5.3) 蕴含对于 $s \geq 2$ 有 $S_s = 0$，因此由 (5.2) 得到 $\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = Q_q R_r - a_1 Q_q R_{r-1} = a_1^q \phi_r(\mathbf{a})$，其中对于所有 q，$r \geq 0$，均有 $\phi_r(\mathbf{a}) = R_r - a_1 R_{r-1}$。特别地，$\phi_0(\mathbf{a}) = 1$ 且 $\phi_1(\mathbf{a}) = a_0 - a_1$。对于 $r \geq 2$，R_r 和 R_{r-1} 的递推关系确保 $\phi_r(\mathbf{a}) = a_0\, \phi_{r-1}(\mathbf{a}) - a_1^2\, \phi_{r-2}(\mathbf{a})$，从而完成 (5.9) 的证明。

情形 $a_1 = 0$：在 (5.3) 中令 $a_1 = 0$，则剩下 $S_0 = 1$、$S_1 = 0$ 和 $S_2 = -a_2^2$，其中对所有 $s \geq 3$，$S_s = 0$ 成立。因此，由 (5.2) 得到 (i) $\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = (-a_2)^{r+1}\chi_{q-1,0}(\mathbf{a}) + \chi_{q,r}(\mathbf{a}) - a_2^2\chi_{q,r-2}(\mathbf{a})$，其中 q、$r \geq 0$。此外，在此情形下还可推出 $a_1 = 0$，即 (ii) $\chi_{q,r}(\mathbf{a}) = Q_q R_r + a_2^3 Q_{q-2} R_{r-1}$，其中

q、$r \geq 0$；(iii) 对 $q \geq 1$，$Q_q = -a_0 a_2 Q_{q-2} - a_2^4 Q_{q-4}$ 成立；以及 (iv) 对 $r \geq 1$，$R_r = a_0 R_{r-1} - a_0 a_2^2 R_{r-3} + a_2^4 R_{r-4}$ 成立。

作为进一步的特殊情形，我们有 $\psi_{0,\,r}(\mathbf{a}) = \chi_{0,\,r}(\mathbf{a}) - a_2^2 \chi_{0,\,r-2} = R_r - a_2^2 R_{r-2}$，由此得到（5.10）的第一部分，即 $\psi_{0,\,0}(\mathbf{a}) = 1$ 和 $\psi_{0,\,1} = a_0$这一事实；此外，还有递推关系 $\psi_{0,\,r}(\mathbf{a}) = a_0 \psi_{0,\,r-1}(\mathbf{a}) - a_2^2 \psi_{0,\,r-2}(\mathbf{a})$，这是 (iv) 对 $r \geq 3$ 的直接推论，并且也适用于 $r = 2$ 的情形，此时 $\psi_{0,\,2} = a_0^2 - a_2^2$。

若 $q = 2k+1$ 且 $k \geq 0$，则所需的结果 $\psi_{2k+1,\,r}(\mathbf{a}) = (-a_2)^{r+k+1} \psi_{0,\,k}(\mathbf{a})$ 可如下得到。首先应注意，由 (iii) 可知，$Q_q = 0$ 不仅对 $q = 1$ 成立，而且对所有满足 $k \geq 0$ 的 $q = 2k+1$ 都成立。然后 (i) 和 (ii) 表明，对于所有 $k \geq 0$，都有 $\psi_{2k+1,\,r}(\mathbf{a}) = (-a_2)^{r+1} Q_{2k}$。因此，只需证明对所有 $k \geq 0$，$Q_{2k} = (-a_2)^k \psi_{0,\,k}(\mathbf{a})$。根据（5.10）的第一部分以及 $Q_0 = 1$、$Q_2 = -a_0 a_2$ 和 $Q_4 = (a_0^2 - a_2^2) a_2^2$ 这一事实，可见它对 $k = 0$、1 和 2 成立。此外，（5.10）将推出

$$(-a_2)^k \psi_{0,k}(\mathbf{a}) = -a_0 a_2 (-a_2)^{k-1} \psi_{0,k-1}(\mathbf{a}) - a_2^4 (-a_2)^{k-2} \psi_{0,k-2}(\mathbf{a}) \text{ for } k \geq 3\,. \tag{5.11}$$

关于 $(-a_2)^k \psi_{0,k}(\mathbf{a})$ 的递推关系与 (iii) 中给出的 Q_{2k} 的递推关系一致，因此对 k 进行归纳可知，所需的 $(-a_2)^k \psi_{0,k}(\mathbf{a})$ 与 Q_{2k} 之间的恒等式对所有 $k \geq 0$ 均成立。

现在考虑 $q = 2k$ 且 $k \geq 0$ 的情形，此时所需证明的结果为 $\psi_{2k,r}(\mathbf{a}) = (-a_2)^k \psi_{0,k+r}(\mathbf{a})$。当 $k = 0$ 时显然成立。对于 $k = 1$，由 (i) 和 (ii) 可得

$$\psi_{2,r}(\mathbf{a}) = -a_0 a_2 R_r + a_2^3 R_{r-1} + a_0 a_2^3 R_{r-2} - a_2^5 R_{r-3} \text{ for } r \geq 0\,. \tag{5.12}$$

再次由 (i) 和 (ii) 可得 $\psi_{0,r+1} = R_{r+1} - a_2^2 R_{r-1}$，将递推关系 (v) 应用于 R_{r+1} 后，便得到

$$(-a_2)\psi_{0,r+1} = (-a_2)(a_0 R_r - a_0 a_2^2 R_{r-2} + a_2^4 R_{r-3}) - (-a_2) a_2^2 R_{r-1} \text{ for } r \geq 0\,, \tag{5.13}$$

但这等于 (5.12) 中给出的 $\psi_{2,r}(\mathbf{a})$，正如所需。

当 $r = 0$ 时，这一结论成立，因为 (i) 和 (ii) 给出 $\psi_{2k,0}(\mathbf{a}) = Q_{2k}$，而如上所示，$Q_{2k} = (-a_2)^k \psi_{0,k}(\mathbf{a})$。对所有 $k \geq 0$ 都有 $Q_{2k-1} = 0$ 这一事实意味着，由 (i) 和 (ii) 可得 $\psi_{2k,r}(\mathbf{a}) = Q_{2k}(R_r - a_2^2 R_{r-2}) + a_2^3 Q_{2k-2}(R_{r-1} - a_2^2 R_{r-3})$，对所有 $k \geq 0$ 和 $r \geq 1$ 均成立。于是，由 Q_q 在 $q = 2k \geq 1$ 且 $q = 2k-2 \geq 1$ 时的递推关系 (iii) 可推出，对于 $k \geq 2$ 和 $r \geq 1$，有 $\psi_{2k,r}(\mathbf{a}) = -a_0 a_2 \psi_{2k-2,r}(\mathbf{a}) + a_2^4 \psi_{2k-4,r}(\mathbf{a})$。鉴于 $k = 0$ 和 $k = 1$ 两种情形均成立，我们可以通过归纳得出，对于 $k \geq 2$ 和 $r \geq 1$

$$\begin{aligned} \psi_{2k,r}(\mathbf{a}) &= (-a_0 a_2)(-a_2)^{k-1} \psi_{0,k-1+r}(\mathbf{a}) + a_2^4 (-a_2)^{k-2} \psi_{0,k-2+r}(\mathbf{a}) \\ &= (-a_2)^k (a_0 \psi_{0,k-1+r}(\mathbf{a}) + a_2^2 \psi_{0,k-2+r}(\mathbf{a}) = (-a_2)^k \psi_{0,k+r}(\mathbf{a})\,, \end{aligned} \tag{5.14}$$

正如所需，最后一步由（5.11）得出，因为 $k + r \geq 3$。 □

定理 5.1 和推论5.2 针对若干特定的 $\mathbf{a} = (a_0, 1)$、$(a_0,0,1)$、$(a_0,1,-1,1)$ 和 $(a_0,1,1)$ 所得的一些结果，分别见表 9、12、13 和 14。

6. Even orthogonal group identities

对于每个长度为 $\ell(\lambda) \le n$ 的分拆 λ，都对应着 $O(2n)$ 的一个最高权为 λ 的不可约表示。限制到 $SO(2n)$ 后，若 $\ell(\lambda) < n$，该表示仍为不可约；否则，它分解为 $SO(2n)$ 的两个不可约表示之和，其最高权分别为 $\lambda_+ = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ 和 $\lambda_- = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, -\lambda_n)$。相应地，用特征标表示，我们有

$$\mathrm{ch}\,{}^{O(2n)}_{\lambda}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) = \begin{cases} \mathrm{ch}\,{}^{SO(2n)}_{\lambda}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) & \text{if } \ell(\lambda) < n; \\ \mathrm{ch}\,{}^{SO(2n)}_{\lambda_+}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) + \mathrm{ch}\,{}^{SO(2n)}_{\lambda_-}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) & \text{if } \ell(\lambda) = n, \end{cases} \tag{6.1}$$

其中，$O(2n)$ 的特征标是在特征值为 $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ 的群元素上取值的，而这些特征值必然属于子群 $SO(2n)$。记住这一记号后，我们有

定理 6.1. 对所有 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2)$

$$\prod_{i=1}^{n} \big(a_0 + a_1(x_i + \overline{x}_i) + a_2(x_i^2 + \overline{x}_i^2) \big) = \sum_{p=0}^{n} \sum_{q=0}^{n-p} \delta_{r,n-p-q}\; a_2^p\; \psi_{q,r}(\mathbf{a})\; \mathrm{ch}\,{}^{O(2n)}_{(2^p, 1^q, 0^r)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})\,, \tag{6.2}$$

其中

$$\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = \sum_{t=0}^{r} \chi_{q,r-t}(\mathbf{a})\, S_t + \chi_{q-1,0}(1 - \delta_{r0}) a_1 (-a_2)^r + \chi_{q-2,0}(-\delta_{r,0}\, a_2^2 + \delta_{r,1}\, a_2^3)\,, \tag{6.3}$$

其中 $\chi_{q,\,r}$ 按 (4.3) 中以 Q_q 和 R_r 表示的方式定义，后两者分别由 (4.4) 和 (4.5) 给出，并且

$$\begin{aligned} &S_0 = 1,\ S_1 = 0,\ S_2 = a_0 a_2 - a_1^2,\ S_3 = -a_0 a_2^2 + 2 a_1^2 a_2 - 2 a_2^3,\ S_4 = -2 a_1^2 a_2^2 + a_2^4 \\ &\textit{and } S_t = -2 a_1^2 (-a_2)^{t-2} \textit{ for } t \ge 5\,. \end{aligned} \tag{6.4}$$

证明：(6.2) 左侧的乘积显然在对 x_i 的 $i = 1$、2、. . .、n 进行置换，以及对 x_i 的一个或多个指数进行符号变化时保持不变。这种对称性比 $W_{SO(2n)}$ 更大，后者只包括对 x_i 的指数进行偶数次变化，因此保证了该乘积在魏尔群作用下不变。此外，它展开为形如 $\mathbf{x}^\kappa$ 的项之和，其中 $\kappa_j \in \{\overline{2}, \overline{1}, 0, 1, 2\}$，对于 $j = 1$、2、. . .、n，并且每个 κ 都属于 $\Lambda_{SO(2n)}$。由此可知，命题 2.1 适用，因此该展开可以重新表示为特征标 $\mathrm{ch}\,{}^{SO}_{(2n)\,\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ 之和，其中 $\lambda \in \Lambda^+$。

为确定可能出现的 λ 以及从 $a(\kappa)$ 继承而来的相关权重，可以像在辛情形和奇数维正交情形中那样，利用表6中的变换和权重；这些变换和权重由对 κ 的子序列各分量进行置换而产生。

偶数维正交情形存在两个显著差异：首先，形如 $(2, \dots, 2, 2)$ 和 $(2, \dots, 2, 1, \dots, 1, 1)$ 的权属于 $\Lambda^+_{SO(2n)}$。然而，(6.2) 左端乘积关于指数符号变化的对称性，对于 x_i 的所有 $i = 1$、2、. . .、n 而言，足以确保在其展开以及随后对 κ 进行标准化时，指数为 (2^n) 和 $(2^{n-1}, 2)$ 且满足 $n > 0$ 的项的重数相同；同样，指数为 (2^p)、$1^{n-p})$ 和 $(2^p$、$1^{n-p-1}, 1)$ 且满足的项的重数也相同，

$n > p > 0$。这就导致 (6.2) 右端 ch $^{SO_{(2n)\,2^n)}}$(x, x) 与 ch $^{SO(2n)}{}_{(2^{n-1},2}$(x, x) 的系数相同，从而说明它们的贡献已合并到 ch $^{O_{(2n)\,2^n)}}$(x, x) 中的各项里；对于 ch $^{O_{(2n)\,2^p,1^{n-p}}}$(x, x) 中各项的来源，也可作类似论证。

第二个区别是，在偶数维正交情形中，w_{α_n} 对 κ 通过$\alpha_n = \epsilon_{n-1} + \epsilon_n$ 的点作用现在会变换 κ 的最后两个非标准分量，同时保持所有其他分量不变，如下所示：

(6.5)

$(\ldots, \kappa_{n-1}, \kappa_n)$ $(\ldots, -\kappa_n - 1, -\kappa_{n-1} - 1)$	$(\ldots, \overline{2}, \overline{2})$ $(\ldots, \overline{1}, 1)$	$(\ldots, \overline{2}, 0)$ $(\ldots, \overline{1}, 1)$	$(\ldots, \overline{1}, \overline{2})$ $(\ldots, \overline{1}, 0)$	$(\ldots, \overline{1}, 1)$ $(\ldots, 0, 0)$	$(\ldots, 0, \overline{2})$ $(\ldots, 1, \overline{1})$
$(\ldots, \kappa_{n-1}, \kappa_n)$ $(\ldots, -\kappa_n - 1, -\kappa_{n-1} - 1)$	$(\ldots, \overline{2}, 1)$ $(\ldots, \overline{2}, 1)$	$(\ldots, \overline{1}, 0)$ $(\ldots, \overline{1}, 0)$	$(\ldots, 0, \overline{1})$ $(\ldots, 0, \overline{1})$	$(\ldots, 1, \overline{2})$ $(\ldots, 1, \overline{2})$	$(\ldots, \overline{2}, \overline{1})$ $(\ldots, 0, 1)$

因此，含有 $\kappa = (\ldots, 2, \overline{1})$、$(\ldots, 1, 0)$、$(\ldots, 0, \overline{1})$ 或 $(\ldots, \overline{1}, \overline{2})$ 的项没有贡献。对于 $(\ldots, 2, \overline{1})$ 也是如此，因为根据 (4.8)，它等价于 $(\ldots, 0, \overline{1})$ 对应项的相反数，而后者为零。此外，$\kappa = (\ldots, 2, 0)$ 对应的项等价于 $(\ldots, 1, \overline{1})$ 对应项的相反数；根据 (4.8)，后者又等价于 $(\ldots, 0, 0)$ 对应项的相反数，但它们分别带有不同的权重 $a_0 a_2$、$-a_1^2$ 和 a_0^2。

很容易验证 $\lambda = (2^n)$ 和 $(2^{n-1}, 2)$ 的系数相同，因为不存在分量限制在 $\{\overline{2}, \overline{1}, 0, 1, 2\}$ 中的 κ，能够在魏尔群的点作用下变为 $(\overline{2}^n)$ 和 $(2^{n-1}, \overline{2})$，除了它们本身 $(\overline{2}^n)$ 和 $(2^{n-1}, \overline{2})$ 之外；而它们的权重相同，即 a_2^n。同样的论证适用于 $\lambda = (2^{n-1}, 1)$ 和 $(2^{n-1}, \overline{1})$ 的情形，但涉及 $\lambda = (2^p, 1^{n-p})$ 和 $(2^p, \overline{1}^{n-p-1}, 1)$ 的情况，也就是 $\lambda = (\ldots, 1, \overline{1})$ 和 $(\ldots, 1, 1)$ 中带有 $\overline{\ldots} = (2^p, 1^{n-p-2})$ 的 $0 \le p \le n - 2$，就不那么显而易见了。然而，正如从 (4.8) 和 (6.5) 可见，$\kappa = (\ldots, 2, \overline{2})$ 和 $(\ldots, 2, 2)$ 对 $\lambda = (\ldots, 1, \overline{1})$ 和 $(\ldots, 1, 1)$ 的贡献项相同，二者各自的权重均为 $-a_2^2$。类似地，$\kappa = (\ldots, 0, \overline{2})$ 和 $(\ldots, 0, 2)$ 的权重也相同，均为 $-a_0 a_2$；而 $\kappa = (\ldots, 1, \overline{1})$ 和 $(\ldots, 1, 1)$ 的权重均为 a_1^2。因此，在每种情形下，$\lambda = (\ldots, 1, \overline{1})$ 和 $(\ldots, 1, 1)$ 的系数相等，正如上文所预期的那样。

将关于任意序列 κ中末尾项或终止项的这些观察与 (4.8) 中的观察结合起来，便得到表8所列的终端子序列变换，其中 t 可以是任意正整数。

与辛群和奇正交群的情形一样，表6中的变换意味着递推关系 Q_q、R_r 和 $\chi_{q,r}$(a) 成立；因此，表8中的变换意味着必须按照 (6.3) 定义 $\psi_{q,r}$(a)，以纳入所有导致 λ具有 $(\cdots, 0^s)$、$(\cdots, 1, 0^r)$ 和 $(\cdots, 1, 1, 0^r)$ 形式的贡献项，其中 $\cdots$表示分别由 $\chi_{q,r-s}$(a)、$\chi_{q-1,0}$(a) 和 $\chi_{q-2,0}$(a) 枚举的所有项。□

定理 6.1 的特殊情形包括以下内容

σ	$\tau = w \cdot \sigma$	符号函数 (w) $a(\sigma)$
$(\dots, \overline{2}, \overline{2})$	$(\dots, 1, 1)$	$-a_2^2$
$(\dots, \overline{2}, 2, \overline{2})$	$(\dots, 1, 1, 0)$	$+a_2^3$
$(\dots, \overline{1}, 2)$	$(\dots, 1, 0)$	$-a_1 a_2$
$(\dots, (\overline{2}, 2)^t, \overline{1})$	$(\dots, \mathbf{1}, 0^{2t})$	$+a_1 a_2^{2t}$
$(\dots, (\overline{2}, 2)^t, \overline{1}, \overline{2})$	$(\dots, \mathbf{1}, 0^{2t+1})$	$-a_1 a_2^{2t+1}$
$(\dots, \overline{2}, 0)$	$(\dots, 0, 0)$	$+a_0 a_2$
$(\dots, \overline{1}, \overline{1})$	$(\dots, 0, 0)$	$-a_1^2$
$(\dots, \overline{2}, 0, \overline{2})$	$(\dots, 0, 0, 0)$	$-a_0 a_2^2$
$(\dots, \overline{1}, \overline{1, 2})$	$(\dots, 0, 0, 0)$	$+a_1^2 a_2$
$(\dots, \overline{2}, \overline{1, 1})$	$(\dots, 0, 0, 0)$	$+a_1^2 a_2$
$(\dots, \overline{2}, \overline{2, 2})$	$(\dots, 0, 0, 0)$	$-a_2^3$
$(\dots, \overline{2}, \overline{2, 2})$	$(\dots, 0, 0, 0)$	$-a_2^3$
$(\dots, \overline{1, 2}, \overline{2, 1})$	$(\dots, 0, 0, 0, 0)$	$-a_1^2 a_2^2$
$(\dots, \overline{2, 1}, \overline{1, 2})$	$(\dots, 0, 0, 0, 0)$	$-a_1^2 a_2^2$
$(\dots, \overline{2, 2}, \overline{2, 2})$	$(\dots, 0, 0, 0, 0)$	$+a_2^4$
$(\dots, \overline{1}, (\overline{2}, 2)^t, \overline{1, 2})$	$(\dots, 0^{2t+3})$	$+a_1^2 a_2^{2t+1}$
$(\dots, \overline{2}, 1, (\overline{2}, 2)^t, \overline{1})$	$(\dots, 0^{2t+3})$	$+a_1^2 a_2^{2t+1}$
$(\dots, \overline{1}, (\overline{2}, 2)^{t+1}, \overline{1})$	$(\dots, 0^{2t+4})$	$-a_1^2 a_2^{2t+2}$
$(\dots, \overline{2}, 1, (\overline{2}, 2)^t, \overline{1, 2})$	$(\dots, 0^{2t+4})$	$-a_1^2 a_2^{2t+4}$

TABLE 8. 基本终止子序列 $\tau = w(\sigma)$ of λ，以及 w 的符号函数和 $a(\sigma)$ 对 $a(\kappa)$ 的贡献，情形为 $SO(2n)$。

推论6.2。

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_1(x_i + \overline{x}_i)) = \sum_{q=0}^{n} \delta_{r,n-q}\, a_1^q\, \phi_r(\mathbf{a})\, \mathrm{ch}^{\,O(2n)}_{(1^q,0^r)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})\,; \tag{6.6}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_2(x_i^2 + \overline{x}_i^2)) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p} \delta_{r,n-p-q}\, a_2^p\, \psi_{q,r}(\mathbf{a})\, \mathrm{ch}^{\,O(2n)}_{(2^p,1^q,0^r)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}})\,, \tag{6.7}$$

with

$$\phi_0(\mathbf{a}) = 1, \phi_1 = a_0, \phi_2 = a_0^2 - 2a_1^2 \text{ and } \phi_r(\mathbf{a}) = a_0\,\phi_{r-1}(\mathbf{a}) - a_1^2\,\phi_{r-2}(\mathbf{a}) \text{ for } r \geq 3, \tag{6.8}$$

and

$$\begin{aligned}
\psi_{q,r}(\mathbf{a}) &= 0 \text{ if } q < 0,\ q = 1 \bmod 2 \text{ or } r < 0\,,\\
\psi_{0,0}(\mathbf{a}) &= 1,\ \psi_{0,1}(\mathbf{a}) = a_0,\ \psi_{0,2}(\mathbf{a}) = a_0^2 + a_0 a_2\,,\\
\psi_{0,3}(\mathbf{a}) &= a_0^3 + a_0^2 a_2 - 2a_0 a_2^2 - 2a_2^3\,, \psi_{0,4}(\mathbf{a}) = a_0^4 + a_0^3 a_2 - 3a_0^2 a_2^2 - 2a_0 a_2^3 + 2a_2^4\,,\\
\psi_{0,r}(\mathbf{a}) &= a_0\psi_{0,r-1}(\mathbf{a}) - a_0 a_2^2 \psi_{0,r-3}(\mathbf{a}) + a_2^4 \psi_{0,r-4}(\mathbf{a}) \text{ for } r \geq 5\,,\\
\psi_{2,0}(\mathbf{a}) &= -a_0 a_2 - a_2^2,\ \psi_{2,1}(\mathbf{a}) = -a_0^2 a_2 + 2a_2^3\,,\\
\psi_{2,r}(\mathbf{a}) &= -a_0 a_2 \psi_{0,r}(\mathbf{a}) + a_2^3 \psi_{0,r-1}(\mathbf{a}) \text{ for } r \geq 2\,,\\
\psi_{q,r}(\mathbf{a}) &= -a_0 a_2 \psi_{q-2,r}(\mathbf{a}) - a_2^4 \psi_{q-4,r}(\mathbf{a}) \text{ for } q = 0 \bmod 2 \text{ and } q \geq 4 \text{ and } r \geq 0\,.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

证明：(6.8) 和 (6.9) 的证明与 (4.12) 和 (4.13) 的证明方法相同。唯一的区别在于适用于 q 和 r 取较小值的情形，这些情形已通过直接计算得到确立。□

由定理 6.1 和推论6.2 得到的若干结果分别列于表 9、15 和 16，涉及 a $=(a_0, 1)$、$(a_0, 0, 1)$ 和 $(a_0, 1, 1)$ 的各种特定取值。

7. 展开为自旋特征标

对于 $SO(2n+1)$ 和 $SO(2n)$，迄今考察的情形中，乘积仅涉及分量全为整数的权空间向量；然而，这些群的所有有限维不可约表示中，也包括权涉及分量全为半奇整数的向量的表示。这类表示通常称为自旋表示，因为它们是 $SO(2n+1)$ 和 $SO(2n)$ 的自旋覆盖群的忠实不可约表示。对于每个长度为 ℓ 的分拆 μ，$\mu \le n$，都存在一个 $SO(2n+1)$ 的不可约表示，其最高权为 $\lambda = \Delta + \mu$，其中 $\Delta = (1\,2, 1\,2, \ldots, 1\,2)$ 的长度为 n。$O(2n)$ 的情形也相同，但限制到 $SO(2n)$ 后，该表示分解为两个不可约表示之和，其最高权分别为 $\lambda_+ = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \lambda_n)$ 和 $\lambda_- = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, -\lambda_n)$

$SO(2n+1)$ 和 $O(2n)$ 的最高权为 $\lambda = \Delta + \mu$ 的特征标，在限制到特征值为 (x, x, 1) 和 (x, x) 的群元素时，分别记为 ch $^{SO}{}_{(2n+1)\,\Delta+\mu}$ (x, x, 1) 和 ch$^{O(2n)}_{\Delta+\mu}$ (x, x)。特别地，$SO(2n+1)$ 和 $O(2n)$ 的基本自旋表示具有相同的最高权 $\Delta = (1\,2, 1\,2, \ldots, 1\,2)$，且特征标相同

$$\mathrm{ch}\,{}^{SO(2n+1)}_{\Delta}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}, 1) = \mathrm{ch}\,{}^{O(2n)}_{\Delta}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) = \prod_{i=1}^{n} (x_i^{\frac{1}{2}} + x_i^{-\frac{1}{2}})\,. \tag{7.1}$$

通过考察如下形式的乘积，可以弥补自旋特征标相关恒等式的缺失：

$$\prod_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_{k+\frac{1}{2}} (x_i^{k+\frac{1}{2}} + x_i^{-k-\frac{1}{2}}) = \sum_{\kappa} a(\kappa)\, \mathbf{x}^{\kappa} \tag{7.2}$$

其中，右侧展开中的 κ 各分量现在均为半整数，或者更准确地说，是奇数的一半。

命题 2.1 对 $SO(2n+1)$ 和 $SO(2n)$ 均仍然适用，对应魏尔群生成元在 κ 上的点作用也同样适用；该点作用列于表 2。例如，若仅考虑 $m = 1$ 的情形，则上述乘积按 $SO(2n+1)$ 的特征标展开为

定理 7.1。对于一个 $=(a_{\frac{1}{2}}, a_{\frac{3}{2}})$

$$\prod_{i=1}^{n} \left(a_{\frac{1}{2}} (x_i^{\frac{1}{2}} + x_i^{-\frac{1}{2}}) + a_{\frac{3}{2}} (x_i^{\frac{3}{2}} + x_i^{-\frac{3}{2}}) \right) = \sum_{q=0}^{n} \delta_{r,n-q}\, a_{\frac{3}{2}}^{q}\, \phi_r(\mathbf{a})\, \mathrm{ch}\,{}^{SO(2n+1)}_{(\frac{3}{2}^q, \frac{1}{2}^r)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}, 1)\,, \tag{7.3}$$

其中

$$\phi_0(\mathbf{a})=1,\phi_1(\mathbf{a})=a_{\frac12}-a_{\frac32},\phi_2(\mathbf{a})=a_{\frac12}^2-2a_{\frac12}a_{\frac32}\ and \tag{7.4}$$
$$\phi_r(\mathbf{a})=a_{\frac12}\phi_{r-1}(\mathbf{a})-a_{\frac12}a_{\frac32}\phi_{r-2}(\mathbf{a})+a_{\frac32}^3\phi_{r-3}(\mathbf{a})\ if\ r\geq 3.$$

证明：适用于 $SO(2n+1)$ 的 (4.8) 和 (5.6) 的半奇整数版本，可由表 2 中的公式推出。它们的形式为

(7.5)

(κ_i,κ_{i+1})	$(\overline{\frac32},\overline{\frac12})$	$(\overline{\frac32},\frac12)$	$(\overline{\frac32},\frac32)$	$(\overline{\frac12},\frac12)$	$(\overline{\frac12},\frac32)$	$(\frac12,\frac32)$
$(\kappa_{i+1}-1,\kappa_i+1)$	$(\overline{\frac32},\frac12)$	$(\overline{\frac12},\frac12)$	$(\frac12,\frac12)$	$(\overline{\frac12},\frac12)$	$(\frac12,\frac12)$	$(\frac12,\frac32)$

and

(7.6)

$(\dots,\kappa_n)$	$(\dots,\overline{\frac32})$	$(\dots,\overline{\frac12})$
$(\dots,-\kappa_n-1)$	$(\dots,\frac12)$	$(\dots,\frac12)$

这些直接导出初等子序列和终止子序列的下列变换:

(7.7)

σ	$\tau=w\cdot\sigma$	符号函数 (w) $a(\sigma)$
$(\dots,\frac12\dots)$	$(\dots,\frac12\dots)$	$+a_{\frac12}$
$(\dots,\overline{\frac12},\frac32\dots)$	$(\dots,\frac12,\frac12\dots)$	$-a_{\frac12}a_{\frac32}$
$(\dots,\overline{\frac32},\frac32,\frac32\dots)$	$(\dots,\frac12,\frac12,\frac12\dots)$	$+a_{\frac32}^3$

and

(7.8)

σ	$\tau=w\cdot\sigma$	符号函数 (w) $a(\sigma)$
$(\dots,\overline{\frac32})$	$(\dots,\frac12)$	$-a_{\frac32}$

由此可推出所需递推关系（7.4）的有效性。 □

同样，对于 $SO(2n)$，相应的结果可写成

定理 7.2。对于一个 $=(a_{\frac12},a_{\frac32})$

$$\prod_{i=1}^n\Big(a_{\frac12}(x_i^{\frac12}+x_i^{-\frac12})+a_{\frac32}(x_i^{\frac32}+x^{-\frac32})\Big)=\sum_{q=0}^n\delta_{r,n-q}\,a_{\frac32}^q\,\phi_r(\mathbf{a})\,\mathrm{ch}^{\,O(2n)}_{(\frac32{}^q,\frac12{}^r)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\,, \tag{7.9}$$

其中

$$\phi_0(\mathbf{a})=1,\phi_1(\mathbf{a})=a_{\frac12},\phi_2(\mathbf{a})=a_{\frac12}^2-a_{\frac12}a_{\frac32}-a_{\frac32}^2\ and \tag{7.10}$$
$$\phi_r(\mathbf{a})=a_{\frac12}\phi_{r-1}(\mathbf{a})-a_{\frac12}a_{\frac32}\phi_{r-2}(\mathbf{a})+a_{\frac32}^3\phi_{r-3}(\mathbf{a})\ if\ r\geq 3$$

证明：表 2 中的 $SO(2n)$ 公式再次给出了变换（7.5），但现在还需补充以下变换:

(7.11)

$(\dots,\kappa_{n-1},\kappa_n)$	$(\dots,\overline{\frac32},\overline{\frac32})$	$(\dots,\overline{\frac12},\overline{\frac32})$	$(\dots,\frac12,\overline{\frac32})$	$(\dots,\overline{\frac12},\overline{\frac12})$
$(\dots,-\kappa_n-1,-\kappa_{n-1}-1)$	$(\dots,\frac12,\frac12)$	$(\dots,\frac12,\overline{\frac12})$	$(\dots,\frac12,\frac32)$	$(\dots,\overline{\frac12},\frac12)$

这些变换导出了（7.7）中给出的初等子序列的变换，以及以下终止子序列的变换：

(7.12)

σ	$\tau = w \cdot \sigma$	符号函数 (w) $a(\sigma)$
$(\ldots, \overline{\frac{3}{2}}, \overline{\frac{3}{2}})$	$(\ldots, \underline{\frac{1}{2}}, \underline{\frac{1}{2}})$	$-a_{\frac{3}{2}}^2$
$(\ldots, \overline{\frac{1}{2}}, \overline{\frac{3}{2}})$	$(\ldots, \frac{1}{2}, \overline{\frac{1}{2}})$	$-a_{\frac{1}{2}} a_{\frac{3}{2}}$

Ta合在一起，便依次得到所需的递推关系（7.10）　　. □

虽然 $SO(2n+1)$ 自旋特征标 $m=1$ 递推关系（7.4）似乎与相应的 $Sp(2n)$ 递推关系（4.12）有所不同，但通过显式计算不难看出，奇正交自旋情形中的 $\phi_r(a_{\frac{1}{2}}, 1)$ 与辛情形中的$\phi_r(a_{\frac{1}{2}} - 1, 1)$ 相同。另一方面， $O(2n)$ 自旋特征标 $m=1$递推关系（7.10）与相应的 $SO(2n+1)$ 递推关系（5.9）不同。然而，显式计算表明，偶正交自旋情形中的 $\phi_r(a_{\frac{1}{2}}, 1)$ 与奇数维正交情形中的 $(-1)^r \phi_r(-a_{\frac{1}{2}} + 1, 1)$ 相同。

当然，这些巧合并非偶然，将在下一节关于群的对偶对中加以解释。此外，类似的巧合适用于 m 的所有取值，因此原则上可以根据辛情形和普通非自旋奇正交情形中出现的展开系数，求出自旋正交情形中的所有展开系数。因此，通过递推关系推导 $m=2$ 正交自旋特征标恒等式的内容被放在附录A中；届时将看到，即使在最简单的 $m=2$情形中，若 $=(a_{\frac{1}{2}}, 0, a_{\frac{5}{2}})$，也会遇到更高程度的复杂性。

8. Dual pair approach

求普通特征标级数和自旋特征标级数生成函数的另一种方法，是利用恒等式 [Bau, Mor, JM, Has] ；这些恒等式与对偶柯西恒等式（1.5）类似。

$$
\begin{aligned}
\mathrm{ch}_{\Delta}^{O(4nm)}((\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\times(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}})) &= \sum_{\lambda\in(m^n)} \mathrm{ch}_{\lambda}^{Sp(2n)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\,\mathrm{ch}_{\tilde{\lambda}}^{Sp(2m)}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}});\\
\mathrm{ch}_{\Delta}^{O(4nm+2m)}((\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}},1)\times(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}})) &= \sum_{\lambda\in(m^n)} \mathrm{ch}_{\lambda}^{SO(2n+1)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}},1)\,\mathrm{ch}_{\Delta+\tilde{\lambda}}^{O(2m)}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}});\\
\mathrm{ch}_{\Delta}^{O(4nm)}((\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\times(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}})) &= \sum_{\lambda\in(m^n)} \mathrm{ch}_{\lambda}^{O(2n)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\,\mathrm{ch}_{\tilde{\lambda}}^{O(2m)}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}});\\
\mathrm{ch}_{\Delta}^{O(4nm+2n)}((\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\times(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}},1))) &= \sum_{\lambda\in(m^n)} \mathrm{ch}_{\Delta+\lambda}^{O(2n)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\,\mathrm{ch}_{\tilde{\lambda}}^{SO(2m+1)}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}},1);\\
\mathrm{ch}_{\Delta}^{O(4nm+2n+2m+1)}((\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}},1)\times(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}},1)) &= \sum_{\lambda\in(m^n)} \mathrm{ch}_{\Delta+\lambda}^{SO(2n+1)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}},1)\,\mathrm{ch}_{\Delta+\tilde{\lambda}}^{SO(2m+1)}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}},1),
\end{aligned}
\tag{8.1}
$$

其中 (x, x)×(y, y) $=(\ldots, x_i y_j, x_i\overline{y}_j, \overline{x}_i y_j, \overline{x}_i\overline{y}_j, \ldots)$，而 (x, x, 1)×(y, y) 和 (x, x)×(y, y, 1) 分别包含额外项 $(\ldots, y_j, \overline{y}_j, \ldots)$ 和 $(\ldots, x_i, \overline{x}_i, \ldots)$，并且 (x, x, 1) ×

$(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}},1)$ 同时包含这两者以及 $\mathbf{1}$，它们都带有 $i=1$、2、…、n 和 $j=1$、2、…、m。这些都源于正交群的基本自旋表示的分支规则对偶性，$O(NM)$，到由一对辛子群的直积 $Sp(N)\times Sp(M)$ 或一对正交子群的直积 $O(N)\times O(M)$ 构成的子群；每对中的各个子群在基本自旋表示中彼此对易，并且相互中心化。

利用（7.1），这些恒等式（8.1）的左端可表示为乘积。于是得到以下展开式

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i+\overline{x}_i+y_j+\overline{y}_j)=\sum_{\lambda\in(m^n)}\mathrm{ch}^{Sp(2n)}_{\lambda}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\,\mathrm{ch}^{Sp(2m)}_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}})\,; \tag{8.2}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i+\overline{x}_i+y_j+\overline{y}_j)=\sum_{\lambda\in(m^n)}\mathrm{ch}^{SO(2n+1)}_{\lambda}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}},1)(-1)^{|\lambda|}\,\mathrm{ch}^{SO(2m+1)}_{\tilde{\lambda}}(-\mathbf{y},-\overline{\mathbf{y}},1)\,; \tag{8.3}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i+\overline{x}_i+y_j+\overline{y}_j)=\sum_{\lambda\in(m^n)}\mathrm{ch}^{O(2n)}_{\lambda}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\,\mathrm{ch}^{O(2m)}_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}})\,; \tag{8.4}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i+\overline{x}_i+y_j+\overline{y}_j)\prod_{i=1}^{n}(x_i^{\frac{1}{2}}+\overline{x}_i^{\frac{1}{2}})=\sum_{\lambda\in(m^n)}\mathrm{ch}^{O(2n)}_{\Delta+\lambda}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\,\mathrm{ch}^{SO(2m+1)}_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}},1)\,; \tag{8.5}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x_i+\overline{x}_i+y_j+\overline{y}_j)\prod_{i=1}^{n}(x_i^{\frac{1}{2}}+\overline{x}_i^{\frac{1}{2}})=\sum_{\lambda\in(m^n)}\mathrm{ch}^{SO(2n+1)}_{\Delta+\lambda}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}},1)\,\mathrm{ch}^{Sp(2m)}_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}}), \tag{8.6}$$

其中利用了恒等式

$$\begin{aligned}&\mathrm{ch}^{O(2m)}_{\Delta+\tilde{\lambda}}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}})\big/\mathrm{ch}^{O(2m)}_{\Delta}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}})=\mathrm{ch}^{O(2m+1))}_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}},-1)=(-1)^{|\tilde{\lambda}|}\,\mathrm{ch}^{SO(2m+1))}_{\tilde{\lambda}}(-\mathbf{y},-\overline{\mathbf{y}},1);\\ &\mathrm{ch}^{SO(2m+1)}_{\Delta+\tilde{\lambda}}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}},1)\big/\mathrm{ch}^{SO(2m+1)}_{\Delta}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}},1)=\mathrm{ch}^{Sp(2m)}_{\tilde{\lambda}}(\mathbf{y},\overline{\mathbf{y}})\,,\end{aligned} \tag{8.7}$$

在上述展开中，左边是本文始终讨论的那类魏尔群对称乘积。(8.2)–(8.6) 最引人注目的含义是：若将它们视为秩为n的辛群和正交群的特征标级数的生成函数，那么展开系数本身就是秩为 m 的辛群和正交群的特征标。不仅如此，(8.6) 中的展开系数与 (8.2) 中的展开系数一致，而 (8.5) 中的展开系数则可以很容易地由 (8.3) 中的系数计算得出。

为与我们先前的记号建立联系，不妨指出，在$m=1$ 和 $m=2$ 这两种情形下，这些乘积的形式为

$$
\begin{aligned}
&\prod_{i=1}^{n}(a_0+a_1(x_i+\overline{x}_i)) \text{ with } a_0=y_1+\overline{y}_1 \text{ and } a_1=1;\\
&\prod_{i=1}^{n}(a_{\frac{1}{2}}(x_i^{\frac{1}{2}}+\overline{x}_i^{\frac{1}{2}})+a_{\frac{3}{2}}(x_i^{\frac{3}{2}}+\overline{x}_i^{\frac{3}{2}})) \text{ with } a_{\frac{1}{2}}=y_1+\overline{y}_1+1 \text{ and } a_{\frac{3}{2}}=1;\\
&\prod_{i=1}^{n}(a_0+a_1(x_i+\overline{x}_i)+a_2(x_i^2+\overline{x}_i^2))\\
&\text{with } a_0=(y_1+\overline{y}_1)(y_2+\overline{y}_2)+2,\ a_1=(y_1+\overline{y}_1+y_2+\overline{y}_2) \text{ and } a_2=1;\\
&\prod_{i=1}^{n}(a_{\frac{1}{2}}(x_i^{\frac{1}{2}}+\overline{x}_i^{\frac{1}{2}})+a_{\frac{3}{2}}(x_i^{\frac{3}{2}}+\overline{x}_i^{\frac{3}{2}})+a_{\frac{5}{2}}(x_i^{\frac{5}{2}}+\overline{x}_i^{\frac{5}{2}}))\\
&\text{with } a_{\frac{1}{2}}=(y_1+\overline{y}_1)(y_2+\overline{y}_2)+(y_1+\overline{y}_1+y_2+\overline{y}_2)+2\\
&\qquad a_{\frac{3}{2}}=(y_1+\overline{y}_1+y_2+\overline{y}_2)+1 \text{ and } a_{\frac{5}{2}}=1,
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

分别。

在同样的两种情形下，$m=1$ 和 $m=2$，(8.2)–(8.6) 式的右端是按最高权为 λ或 $\Delta+\lambda$的群特征标展开的，其中 $\lambda=(1^q,0^r)$ 和 $(2^p,1^q,0^r)\tilde{}$ $\tilde{}$的系数本身是最高权为 λ 的对偶群特征标，分别带有 $\lambda=(r)$ 和 $(q+r,r)$。只要适当地满足 $a_1=1$、$a_{\frac{3}{2}}=1$、$a_2=1$或 $a_{\frac{5}{2}}=1$，就可以将定理和第4至7节推论中出现的展开参数 ϕ_r(a) 和 $\psi_{q,\,r}$(a) 识别为 Sp(2)、SO(3) 或 O(2) 的相当简单的特征标（当 $m=1$时），以及 Sp(4)、SO(5) 或 O(4) 的特征标（当 $m=2$时）。这种识别方法无法用于推导这些节中给出的递推关系，但确实能够利用递推关系，对相当大范围内的 p、q 和 r的各种 a 值所得到的结果进行检验。

式 (8.6) 与 (8.2) 中展开系数的吻合，以及式 (8.5) 与 (8.3) 中展开系数之间的密切关系，使得使用式 (8.8) 可推出

$$
\begin{aligned}
\phi_r^{SO(2n+1)}(a_{\frac{1}{2}},1) &= \phi_r^{Sp(2n)}(a_{\frac{1}{2}}-1,1)\,;\\
\phi_r^{O(2n)}(a_{\frac{1}{2}},1) &= (-1)^r\,\phi_r^{SO(2n+1)}(-a_{\frac{1}{2}}+1,1)\,;\\
\psi_{q,r}^{SO(2n+1)}(a_{\frac{1}{2}},a_{\frac{3}{2}},1) &= \psi_{q,r}^{Sp(2n)}(a_{\frac{1}{2}}-a_{\frac{3}{2}}+1,a_{\frac{3}{2}}-1,1)\,;\\
\psi_{q,r}^{O(2n)}(a_{\frac{1}{2}},a_{\frac{3}{2}},1) &= (-1)^q\,\psi_{q,r}^{SO(2n+1)}(a_{\frac{1}{2}}-a_{\frac{3}{2}}+1,-a_{\frac{3}{2}}+1,1)\,.
\end{aligned}
\tag{8.9}
$$

这里我们自行在 ϕ_r(a) 和 $\psi_{q,r}$(a) 上添加了上标，以标明每个展开所依据的特征标所属的 n-相关群。

前两个恒等式解释了第7节末尾指出的 $m=1$ 对 ϕ_r(a) 求值时出现的巧合，而后两个恒等式还表明，在 $m=2$ 对 $\psi_{q,\,r}$(a) 求值时，可以通过使用更为

简单的第4节和第5节中的递推关系来避免复杂的递推关系。这种复杂性甚至会出现在最简单的 $m = 2$ 情形中，即具有 $= (a_1,0,1)$ 的情形，附录 A 对此作了明确说明。

9. Symplectic and orthogonal group identities

对于群 ps $G = Sp(2n)$、$SO(2n+1)$ 和 $O(2n)$，$m = 1$ 是一个 $= (a_0, a_1)$ 展开 s

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0 + a_1(x_i + \overline{x}_i)) = \sum_{q=1}^{n} \delta_{r,n-q}\, a_1^q\, \phi_r(\mathbf{a})\, \mathrm{ch}\, {}^{G}_{(1^q,0^r)}(\mathbf{x}, \overline{\mathbf{x}}) \tag{9.1}$$

涉及系数 $\phi_r(a)$，这些系数由 (4.12)、(5.9) 和 (6.8) 中的递归关系确定。结果可总结如下:

(9.2)

G	$\phi_0(a)$	$\phi_1(a)$	$\phi_2(a)$	$\phi_r(a)$ 对所有 $r \geq 3$
$Sp(2n)$	1	a_0	$a_0^2 - a_1^2$	$a_0\,\phi_{r-1}(a) - a_1^2\phi_{r-2}(a)$
$SO(2n+1)$	1	$a_0 - a_1$	$a_0^2 - a_0a_1 - a_1^2$	$a_0\,\phi_{r-1}(a) - a_1^2\phi_{r-2}(a)$
$O(2n)$	1	a_0	$a_0^2 - 2a_1^2$	$a_0\,\phi_{r-1}(a) - a_1^2\phi_{r-2}(a)$

或者等价地,

$$\begin{array}{lrcl} Sp(2n) & \phi_r(\mathbf{a}) & = & [t^r]\, 1/(1 - a_0\, t + a_1^2\, t^2) \\ SO(2n+1) & \phi_r(\mathbf{a}) & = & [t^r]\, (1 - a_1\, t)/(1 - a_0\, t + a_1^2\, t^2) \\ O(2n) & \phi_r(\mathbf{a}) & = & [t^r]\, (1 - a_1^2\, t^2)/(1 - a_0\, t + a_1^2\, t^2) \end{array} \tag{9.3}$$

更明确地说，对于所有 a $= (a_0,1)$，我们有 $\phi_0(a) = 1$，其中 $\phi_r(a)$ 对所有 $r > 0$ 及 a_0 的各种取值均列于表9。

a	$Sp(2n)$ $\phi_r(a)$	$SO(2n+1)$ $\phi_r(a)$	$O(2n)$ $\phi_r(a)$	
(0, 1)	$r = 0$时为 1 $r = 1,3$ 时为 0 若 $r = 2$, 则为 -1	若 $r = 0$, 则为 1 若 $r = 1$, 则为 -1	若 $r = 0$, 则为 2 若 $r = 1$, 则为 0,3 若 $r = 2$, 则为 -2	模 4
(1, 1)	$r = 0$ 时为 1 0 若 $r = 2$, 则为 -1 若 $r = 3,4$	$r = 0$ 时为 1 0 若 $r = 1$, 4 -1 若 $r = 2,3$	2 若 $r = 0$ 1 若 $r = 1,5$ -1 若 $r = 2,4$ -2 若 $r = 3$	模 6
$(-1, 1)$	若 $r = 0$, 则为 1 若 $r = 1$, 则为 0 -1 若 $r = 2$	若 $r = 0$, 则为 1 -2 如果 $r = 1$	2 如果 $r = 0$ -1 如果 $r = 1,2$	模 3
(2, 1)	$r + 1$	1	2	所有 r
$(-2, 1)$	$(-1)^r(r + 1)$	$(-1)^r(2r + 1)$	$(-1)^r 2$	所有 r
(3, 1)	F_{2r+2}	F_{2r+1}	$F_{2r+2} - F_{2r-2}$	所有 r
$(-3, 1)$	$(-1)^r F_{2r+2}$	$(-1)^r(F_{2r+2} + F_{2r})$	$(-1)^r(F_{2r+2} - F_{2r-2})$	所有 r

Table 9. 各种 $= (a_0, 1)$ 对应的系数 $\phi_r(a)$，其中 F_k 是第 k 个斐波那契数

对于 $Sp(2n)$ i 在 $m=2$ 的特殊情形下，$a_1=0$，即 a $=(a_0,0,a_2)$，展开式

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0+a_2(x_i^2+\overline{x}_i^2))=\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n-p}\delta_{r,n-p-q}\,a_2^p\,\psi_{q,r}(\mathbf{a})\,\mathrm{ch}\,{}^{Sp(2n}_{(2^p,1^q,0^r)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}}) \tag{9.4}$$

涉及系数 $\psi_{q,r}$(a)，可利用 (4.13) 递归求得。以此方法得到的各种 a $=(a_0,0,1)$ 的值列于表10。这些结果包括 Lee 和 Oh [LO1] 先前得到的结果。

再举一个 $Sp(2n)$例子，对于 a $=(a_0,1,1)$，定理4.1可给出式中系数$\psi_{q,r}$(a)的显式结果:

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0+(x_i+\overline{x}_i)+(x_i^2+\overline{x}_i^2))=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\delta_{r,n-p-q}\;\psi_{q,r}(\mathbf{a})\;\mathrm{ch}\,{}^{Sp(2n)}_{(2^p,1^q,0^r)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\,, \tag{9.5}$$

其中一些结果列于表11。将 (a_0,a_1,a_2) 映射为 $(a_0,-a_1,a_2)$，等价于将 x 映射为 $-$x，并将 x 映射为 $-$x。不过，与 $GL(n)$ 情形不同，ch ${}^{Sp}{}_{(2n)\,\lambda}$(x, x) 中出现的项，在 x 的各分量上并非齐次。尽管如此，对于 x 和 x 的各分量构成的每一个多项式，x_i for $i=1,2,\ldots,n$ 的所有指数之和的奇偶性，均与 $|\lambda|$ 的奇偶性相同。因此，$\psi_{q,r}(a_0,-a_1,1)=(-1)^q\,\psi_{q,r}(a_0,a_1,1)$。由此，表11的结果可通过将 $a_1=1$ 改为 $a_1=-1$ 并加入额外因子 $(-1)^q$ 来推广。

对于 $SO(2n+1)$ 的情形 $m=2$ 以及 $=(a_0,0,1)$，展开中出现的系数 $\psi_{q,\,r}$(a)

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0+(x_i^2+\overline{x}_i^2))=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\delta_{r,n-pq}\;\psi_{q,r}(\mathbf{a})\;\mathrm{ch}\,{}^{SO(2n+1)}_{(2^p,1^q,0^r)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}},1)\,, \tag{9.6}$$

可根据推论5.2的第二部分求得。这类例子见表12。

类似地，对于 a $=(a_0,1,1)$ 的情形，在以下表达式中出现的 $SO(2n+1)$ 展开系数 $\psi_{q,\,r}$(a)

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0+x_i+\overline{x}_i+x_i^2+\overline{x}_i^2)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\delta_{r,n-p-q}\;\psi_{q,r}(\mathbf{a})\;\mathrm{ch}\,{}^{SO(2n+1)}_{(2^p,1^q,0^r)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}},1)\,, \tag{9.7}$$

表13列出了各种 a_0 对应的具体形式。与 $Sp(2n)$ 的情况不同，改变 a_1 的符号并不会仅仅多出一个因子 $(-1)^q$。还必须同时对 $\psi_{q,\,r}$ 作更大幅度的修改，如表14中的例子所示。

对于 $O(2n)$，推论6.2可用于求得展开

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0+x_i^2+\overline{x}^2)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\delta_{r,n-p-q}\;a_2^p\,\psi_{q,r}(\mathbf{a})\;\mathrm{ch}\,{}^{O(2n)}_{(2^p,1^q,0^r)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\,. \tag{9.8}$$

在 $m=2$ 且 $=(a_0,0,1)$ 的情况下。对于 $Sp(2n)$，只有当 $q=2k$ 为偶数时，系数才可能非零。于是令 $q=2k$，例如即可得到表15中列出的各种 a $=(a_0,0,1)$ 的结果

最后，fr 根据定理 6.1，我们可以计算展开式中的系数 $\psi_{q,\ r}$(a)

$$\prod_{i=1}^{n}(a_0+x_i+\overline{x}_i+x_i^2+\overline{x}^2)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}\ \delta_{r,n-p-q}\ a_2^p\,\psi_{q,r}(\mathbf{a})\ \mathrm{ch}^{\,O(2n)}_{(2^p,1^q,0^r)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\,. \tag{9.9}$$

表 16 展示了它们中一些在不同 a $=(a_0, 1, 1)$ 下的取值。

a	$\psi_{2k,\ r}$(a) 与 $\psi_{2k+1,\ r}$(a) $=0$	
(0, 0, 1)	$\psi_{2k+8,\ r}=\psi_{2k,\ r+4}=\psi_{2k,\ r}$ 和 $\psi_{2k,r}=$ $k\backslash r$ | 0 | 1 | 2 | 3 0 | 1 | −1 | 0 | 0 1 | 0 | 1 | −1 | 0 2 | −1 | 1 | 0 | 0 3 | 0 | −1 | 1 | 0	[洛1] $\psi_4(k,r)$ 见表 5.3
(1, 0, 1)	$\psi_{2k,r}$ 其中对所有 $k,r\geq 0$ $\psi_{2k+6,\ r}=-\psi_{2k,\ r+3}=\psi_{2k,\ r}$ 和 $\psi_{2k,r}=$ $k\backslash r$ | 0 | 1 | 2 0 | 1 | 0 | 0 1 | −1 | 1 | 0 2 | 0 | −1 | 0	[LO1] $\psi_3(k,r)$ 见表 5.3
(1, 0, 1)	$\psi_{2k,r}$ 其中对所有 $k,r\geq 0$ $\psi_{2k,\ r+6}=-\psi_{2k+6,\ r}=\psi_{2k,\ r}$ 和 $\psi_{2k,\ r}=$ $k\backslash r$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 0 | 1 | −2 | 2 | −1 | 0 | 0 1 | 1 | −1 | 0 | 1 | −1 | 0 2 | 0 | 1 | −2 | 2 | −1 | 0	[LO1] ψ_6（k, r） 在表 5.3 中
（2, 0, 1）	$(-1)^{\ k}\ (2k+r+2)\ /2$，若 $r=0$ 模 2 $(-1)^{\ k}\ (r+1)\ /2$ 如果 $r=1$ mod 2	[LO1] $\psi_2(k,r)$ (5.9)
(2, 0, 1)	$(-1)^r\,(r+1)(2k+r+2)/2$	[LO1] $\psi_1(k,r)$ (5.8)
(3, 0, 1)	$(-1)^k\,F_{r+1}\,F_{2k+r+2}$	
(3, 0, 1)	$(-1)^r\ \left(F_{2k+2r+3)}-F_{2k+1}\right)$	

TABLE 10. 对于各种 a, $Sp(2n)$ 系数 $\psi_{2k,\ r}$(a) $=(a_0, 0, 1)$

10. CONCLUSION

一些已知恒等式可表示为乘积展开成以 n 个不定元 $\mathbf{x}=(x_1,\ x_2,\ .....,\ x_n)$ 为变量的舒尔函数之和；这些恒等式的推导已被置于李群理论框架之中。这使得我们能够为每个秩为 n 的经典李群，在 n 的所有取值下建立许多类似的恒等式。所采用的方法基于

a | $\psi_{q,\ r}$(a)

(0, 1, 1)

$\psi_{q,r}$ 对所有 $q, r \geq 0$ 满足 $\psi_{q,r} =$

$q \backslash r$	模 3 余 0	模 3 余 1	模 3 余 2
模 3 余 0	$(q+2r+3)/3$	$-(q+r+2)/3$	$-(r+1)/3$
模 3 余 1	$-(q+r+2)/3$	$-(q+2r+3)/3$	$(r+1)/3$
模 3 余 2	$(q+1)/3$	$-(q+1)/3$	0

(1, 1, 1)

$\psi_{q,r}$ 对所有 $q, r \geq 0$

$\psi_{q,r+5} = -\psi_{q+5,r} = \psi_{q,r}$ 和

$\psi_{q,r} =$

$q \backslash r$	0	1	2	3	4
0	1	0	−1	0	0
1	1	−1	0	0	0
2	0	0	1	−1	0
3	0	1	0	−1	0
4	0	0	0	0	0

(2, 1, 1)

$\psi_{q,r}$ 对所有 $p, q, r \geq 0$

$\psi_{q+12,\ r} = -\psi_{q,\ r+6} = \psi_{q,\ r}$ 和

$\psi_{q,r} =$

$q \backslash r$	0	1	2	3	4	5
0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0	0
2	−1	−1	0	−1	1	0
3	−2	0	−1	0	1	0
4	0	1	−1	1	−1	0
5	2	0	0	0	−2	0
6	1	−1	1	−1	0	0
7	−1	0	1	0	2	0
8	−1	1	0	1	1	0
9	0	0	−1	0	−1	0
10	0	−1	−1	−1	−1	0
11	0	0	0	0	0	0

TABLE 11. $Sp(2n)$ 系数 $\psi_{q,\ r}$(a) 是 (9.5) 中针对 $\mathsf{a} = (a_0, 1, 1)$ 的

命题 2.1 以及魏尔群对任意权向量 κ 的作用（见表 2），已被证明会导致关于李群 $G = GL(n)$、$Sp(2n)$、$SO(2n+1)$ 和 $SO(2n)$ 的不可约表示特征标的最高权参数，产生逐渐复杂的递推关系。这种复杂性的增加源于相关李群的魏尔群第 n 个生成元 W_G 的性质各不相同；对于除 $GL(n)$ 之外的所有情形，κ 的不同基本子序列变换数量无界但可数无穷，表6–8中参数 t 必须取遍所有正整数值，便可见一斑。迄今为止，这一现象似乎尚未被认识到。尽管如此，事实证明，对于由参数序列指定的魏尔群对称乘积的展开，这一过程仍然是可处理的

<table>
<tr><th>a</th><th>$c_{q,\ r}$(a)</th></tr>
<tr><td>(0, 0, 1)</td><td>$\psi_{q,\ r}$ 其中对于所有 $q, r \geq 0$
$\psi_{q,\ r+4} = -\psi_{q+4,\ r} = \psi_{q,\ r}$ 和
$\psi_{q,r} =$
<table>
<tr><th>$q\backslash r$</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>−1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>−1</td><td>1</td><td>−1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>(1, 0, 1)</td><td>$\psi_{q,\ r}$ 其中对所有 $q, r \geq 0$
$\psi_{q+6,\ r} = -\psi_{q,\ r+3} = \psi_{q,\ r}$ 并且
$\psi_{q,r} =$
<table>
<tr><th>$q\backslash r$</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>−1</td><td>1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>−1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>−1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>(1̄, 0, 1)</td><td>$\psi_{q,\ r}$ 其中对所有 $q, r \geq 0$
$\psi_{q,\ r+6} = -\psi_{q+6,\ r} = \psi_{q,\ r}$ 和
$\psi_{q,\ r} =$
<table>
<tr><th>$q\backslash r$</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>−1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>−1</td><td>1</td><td>−1</td><td>1</td><td>−1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>−1</td><td>1</td><td>0</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>−1</td><td>1</td><td>−1</td><td>1</td><td>−1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>$(2, {}^{0,}_{1})$</td><td>$(-1)^{q/2}(q+2r+2)/2$ 若 $q=0$ 除以 2
$(-1)^{(q+2r+1)/2}(q+1)/2$ 若 $q=1$ 除以 2</td></tr>
<tr><td>$(\overline{2}, 0, 1)$</td><td>$(-1)^r(q+2r+2)/2$ 若 $q=0$ 为偶数
$(-1)^{r+1}(q+1)/2$ 若 $q=1$ 为偶数</td></tr>
<tr><td>(3, 0, 1)</td><td>$(-1)^{q/2} F_{q+2r+2}$ 如果 $q=0$ 模 2
$(-1)^{(q+2r+1)/2} F_{q+1}$ 如果 $q=1$ 模 2</td></tr>
<tr><td>(3̄, 0, 1)</td><td>$(-1)^r F_{q+2r+2}$ 如果 $q=0$ 模 2
$(-1)^{r+1} F_{q+1}$ 如果 $q=1 \bmod 2$</td></tr>
</table>

TABLE 12. 定理 $SO(2n+1)$ 的系数 $\psi_{q,\ r}$（9.6）中的 (a)，其中 a $= (a_0, 0, 1)$

一个 $=(a_0, a_1)$ 和一个 $=(a_0, a_1, a_2)$，用于 $Sp(2n)$、$SO(2n+1)$ 和 $O(2n)$，正如在 $GL(n)$ 的情形中将参数设为 $=(a_0, a_1, a_2, a_3)$ 一样。同样的方法也被应用于某些魏尔群对称乘积的 $SO(2n+1)$ 和 $O(2n)$ 的自旋特征标展开；这些乘积由一个 $=({}^{a_{\frac{1}{2}}}, a_3, {}^{a_{\frac{5}{2}}})$ 参数化，其中或者有 $a_{\frac{5}{2}} = 0$，或者有一个 $_3 = 0$。

<table>
<tr><th>a</th><th>$\psi_{q,\ r}$(a)</th></tr>
<tr><td>(0, 1, 1)</td><td>$\psi_{q,\ r}$ 对所有 $q, r \geq 0$，满足
$\psi_{q,r} =$
<table>
<tr><th>$q\backslash r$</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>−1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>−1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>(1, 1, 1)</td><td>$\psi_{q,\ r}$ 对所有 $q, r \geq 0$
$-\psi_{q+5,\ r} = \psi_{q,\ r+5} = \psi_{q,\ r}$ 和
$\psi_{q,r} =$
<table>
<tr><th>$q\backslash r$</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>−1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>−1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>−1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>(2, 1, 1)</td><td>$\psi_{q,\ r}$ 对所有 $q, r \geq 0$
$\psi_{q+12,\ r} = -\psi_{q,\ r+6} = \psi_{q,\ r}$ 和
$\psi_{q,\ r} =$
<table>
<tr><th>$q\backslash r$</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>−2</td><td>0</td><td>−2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>3</td><td>−1</td><td>−1</td><td>−2</td><td>1</td><td>−1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td><td>−1</td><td>1</td><td>0</td><td>−1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>−2</td><td>0</td><td>−2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>−1</td><td>1</td><td>0</td><td>−1</td><td>1</td><td>−2</td></tr>
<tr><td>7</td><td>−2</td><td>1</td><td>−1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1</td><td>−1</td><td>0</td><td>−1</td><td>−1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0</td><td>−1</td><td>−1</td><td>−2</td><td>−1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>11</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

TABLE 13. 式 SO（$2n+1$）系数 $\psi_{q,\ r}$（9.7）中不同 a 值对应的（a）$=$（a_0，1，1）

由此得到的递推关系展示了 a 取各种特定值时的结果，重点考察了那些导致系数关于出现在最高权规定中的参数 p、q、r 呈周期性的例子。一种基于对偶群对恒等式 (8.1) 存在性的替代方法也已被描述。在这种方法中，所得系数的周期性并不令人意外，因为基础参数全都具有 $e^{i\pi/k}$ 或 $e^{i2\pi/k}$ 的形式，其中 k 为整数。尽管这种方法无法以任何自然的方式导出递推关系，但对偶群对方法的优点在于，它能够检验递推关系的完备性，并表明 $SO(2n+1)$ 和 $O(2n)$ 的自旋特征标恒等式中的展开系数可能会

<table>
<tr><th>a</th><th>$\psi_{q,\ r}$(a)</th></tr>
<tr><td>(0, 1, 1)</td><td>$\psi_{q,\ r}$ 对于所有 $q, r \geq 0$
<table>
<tr><th>$q\backslash r$</th><th>0 模 3</th><th>1 模 3</th><th>模 3 余 2</th></tr>
<tr><td>模 3 余 0</td><td>$(2q+2r+3)/3$</td><td>$(2r+1)/3$</td><td>$(2q+4r+4)/3$</td></tr>
<tr><td>模 3 余 1</td><td>$-(2q+4r+3)/3$</td><td>$-(2r+1)/3$</td><td>$-(2q+2r+3)/3$</td></tr>
<tr><td>模 3</td><td>$(2q+2)/3$</td><td>0</td><td>$(2q+2)/3$</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>(1, 1, 1)</td><td>$\psi_{q,\ r}$ 对所有 $q, r \geq 0$
$\psi_{q+5,\ r} = \psi_{q,\ r+5} = \psi_{q,\ r}$ 和
$\psi_{q,r} =$
<table>
<tr><th>$q\backslash r$</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>−2</td><td>−1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>−2</td><td>0</td><td>2</td><td>−1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td>−1</td><td>2</td><td>0</td><td>−2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>−1</td><td>−2</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>(2, 1, 1)</td><td>$\psi_{q,\ r}$ 对所有 $q, r \geq 0$
$\psi_{q+12,\ r} = -\psi_{q,\ r+6} = \psi_{q,\ r}$ 以及
$\psi_{q,\ r} =$
<table>
<tr><th>$q\backslash r$</th><th>0</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>3</td><td>2</td><td>3</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>−2</td><td>−1</td><td>−1</td><td>−2</td><td>1</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>−4</td><td>0</td><td>−2</td><td>0</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>0</td><td>3</td><td>−3</td><td>0</td></tr>
<tr><td>4</td><td>−2</td><td>3</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>−3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>−2</td><td>−4</td><td>2</td><td>−2</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>−3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0</td><td>3</td><td>−3</td><td>0</td><td>−3</td><td>−3</td></tr>
<tr><td>8</td><td>−2</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1</td><td>−1</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0</td><td>−3</td><td>−2</td><td>−2</td><td>−3</td><td>−1</td></tr>
<tr><td>11</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

TABLE 14. 式 (5.2) 中的 $SO(2n+1)$ 系数 $\psi_{q,\ r}$(a) 可由 $=(a_0, 1, 1)$ 得到

分别从 $Sp(2n)$ 和非自旋 $SO(2n+1)$ 特征标恒等式的系数中获得，过程相对更为简单。

APPENDIXA. APPENDIX

这里我们给出自第8节延后的推导：基于由 $=(a_{\frac{1}{2}}, 0, a_{\frac{5}{2}})$ 参数化的 $m = 2$ 乘积，推导出出现在 $SO(2n+1)$and $O(2n)$ 自旋特征标恒等式中的系数所满足的递推关系。

<table>
<tr><th>a</th><th>$\psi_{2k,\ 0}$(a)</th><th>$\psi_{2k,\ r}$(a) 且 $r \geq 1$</th></tr>
<tr><td>$(0,^{0,\,1})$</td><td>$\psi_{k,\ 0}$ 对所有 $k \geq 0$ 均有
$\psi_{k+4,\ 0} = \psi_{k,\ 0}$ 和
$\psi_{k,0} =$<table><tr><td>$k\backslash r$</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>−1</td></tr><tr><td>2</td><td>−1</td></tr><tr><td>3</td><td>1</td></tr></table></td><td>$\psi_{k,r}$ 对所有 $k \geq 0$ 和 $r \geq 1$
$\psi_{k,\ r+4} = -\psi_{k+2,\ r} = \psi_{k,\ r}$ 和
$\psi_{k,r} =$<table><tr><td>$k\backslash r$</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>−2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>−2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>(1, 0, 1)</td><td>$\psi_{k,\ 0}$ 对所有 $k \geq 1$ 和 $r \geq 0$
$\psi_{k+3,0}(a) = \psi_{k,0}(a)$
$\psi_{k,r}(a) =$<table><tr><td>$k\backslash r$</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>−2</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr></table></td><td>$\psi_{k,\ r}$ 对所有 $k \geq 0$ 和 $r \geq 1$ 满足
$\psi_{k+3,\ r} = -\psi_{k,\ r+3} = \psi_{k,\ r}$ 和
$\psi_{k,r} =$<table><tr><td>$k\backslash r$</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>−2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>−1</td><td>4</td></tr><tr><td>2</td><td>−2</td><td>−1</td><td>−2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>(−1, 0, 1)</td><td>$\psi_{k,\ 0}$ 对所有满足以下条件的 $k \geq 0$
$\psi_{k+3,\ 0} = -\psi_{k,\ 0}$ 且
$\psi_{k,0} =$<table><tr><td>$k\backslash r$</td><td>0</td></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>−1</td></tr></table></td><td>$\psi_{k,\ r}$ 对所有 $k \geq 0$ 和 $r \geq 1$
$\psi_{k,\ r+6} = -\psi_{k+3,\ r} = \psi_{k,\ r}$ 且
$\psi_{k,r} =$<table><tr><td>$k\backslash r$</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>0</td><td>−1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>−2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td><td>−1</td><td>0</td><td>1</td><td>−1</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td><td>−1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>−2</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>(2, 0, 1)</td><td>$(-1)^k\,(2k+1)$</td><td>$(-1)^k\,(4k+2r+2)$ $r = 0$ 模 2
$(-1)^k\,2r$ $r = 1$ 模 2</td></tr>
<tr><td>(2, 0, 1)</td><td>1</td><td>$(-1)^r\,2$</td></tr>
<tr><td>(3, 0, 1)</td><td>$(-1)^k\,(F_{2k+2} + F_{2k})$</td><td>$(-1)^k(F_{2k+2r+2} + F_{2k+2r})$
$+(-1)^{k+r}(F_{2k+2} + F_{2k})$</td></tr>
<tr><td>(3, 0, 1)</td><td>F_{2k+1}</td><td>$(-1)^r\,(F_{2k+2r+1} + F_{2k+1})$</td></tr>
</table>

TABLE 15. 在不同 $\mathsf{a} = (a_0, 0, 1)$ 下，(6.9) 中的 $O(2n)$ 系数 $\psi_{2k,\ r}$(a)

定理 A.1. 在 $\mathsf{a} = (a_{\frac{1}{2}}, 0, a_{\frac{5}{2}})$ 的情形下

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_{\frac{1}{2}}(x_i^{\frac{1}{2}}+x_i^{-\frac{1}{2}}) + a_{\frac{5}{2}}(x_i^{\frac{5}{2}}+x_i^{-\frac{5}{2}})\right) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p} a_{\frac{5}{2}}^{q}\,\psi_{q,r}(\mathbf{a})\,\mathrm{ch}^{\,SO(2n+1)}_{(a_{\frac{5}{2}}^{p},a_{\frac{3}{2}}^{q},a_{\frac{1}{2}}^{r})}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}},1)\,, \tag{A.1}$$

<table>
<tr><th>a</th><th>$\psi_{q,\ 0}$(a)</th><th>$\psi_{q,\ r}$(a), 其中 $r \geq 1$</th></tr>
<tr><td>(0, 1, 1)</td><td>$\psi_{q,\ 0}$ 对于所有 $q \geq 0$，其中
$\psi_{q+3,\ 0} = \psi_{q,\ 0}$ 以及
$\psi_{q,\ 0} =$
<table><tr><th>$q\backslash r$</th><th>0</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr></table></td><td>$\psi_{q,\ r}$ 对所有 $q \geq 0$ 和 $r \geq 1$
$\psi_{q+3,\ r} = \psi_{q,\ r+3} = \psi_{q,\ r}$ 以及
$\psi_{q,\ r} =$
<table><tr><th>$q\backslash r$</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th></tr><tr><td>0</td><td>0</td><td>−2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>−2</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>(1, 1, 1)</td><td>$\psi_{q,\ 0}$ 对所有 $q \geq 1$ 和 $r \geq 0$
$\psi_{q+5,0}(a) = \psi_{q,0}(a)$
$\psi_{q,0}(a) =$
<table><tr><th>$q\backslash r$</th><th>0</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>−1</td></tr><tr><td>3</td><td>−1</td></tr><tr><td>4</td><td>0</td></tr></table></td><td>$\psi_{q,\ r}$ 对于所有 $q \geq 0$ 和 $r \geq 1$，满足
$-\psi_{q+5,\ r} = \psi_{q,\ r+5} = \psi_{q,\ r}$ 以及
$\psi_{q,\ r} =$
<table><tr><th>$q\backslash r$</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>−1</td><td>−2</td><td>2</td></tr><tr><td>1</td><td>−1</td><td>1</td><td>−2</td><td>0</td><td>2</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td><td>2</td><td>−1</td><td>1</td><td>−2</td></tr><tr><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>−1</td><td>−2</td></tr><tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>(2, 1, 1)</td><td>$\psi_{q,\ 0}$ 对于所有满足以下条件的 $q \geq 0$
$\psi_{q+12,\ 0} = \psi_{q,\ 0}$ 且
$\psi_{q,0} =$
<table><tr><th>$q\backslash r$</th><th>0</th></tr><tr><td>0</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>−2</td></tr><tr><td>3</td><td>−3</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td>7</td><td>−3</td></tr><tr><td>8</td><td>−2</td></tr><tr><td>9</td><td>1</td></tr><tr><td>10</td><td>1</td></tr><tr><td>11</td><td>0</td></tr></table></td><td>$\psi_{q,\ r}$ 对于所有 $q \geq 0$ 和 $r \geq 1$
$\psi_{q+12,r} = -\psi_{q,r+6} = \psi_{q,r}$ 和$\psi_{q,r} =$
<table><tr><th>$q\backslash r$</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th></tr><tr><td>0</td><td>2</td><td>4</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>−2</td></tr><tr><td>1</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>2</td><td>0</td><td>−2</td></tr><tr><td>2</td><td>−2</td><td>−2</td><td>−4</td><td>2</td><td>−2</td><td>4</td></tr><tr><td>3</td><td>0</td><td>−6</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>2</td><td>−2</td><td>4</td><td>−4</td><td>2</td><td>−2</td></tr><tr><td>5</td><td>0</td><td>4</td><td>0</td><td>−4</td><td>0</td><td>−8</td></tr><tr><td>6</td><td>−2</td><td>4</td><td>−4</td><td>2</td><td>−2</td><td>−2</td></tr><tr><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>6</td><td>0</td><td>6</td></tr><tr><td>8</td><td>2</td><td>−2</td><td>4</td><td>2</td><td>2</td><td>4</td></tr><tr><td>9</td><td>0</td><td>−2</td><td>0</td><td>−4</td><td>0</td><td>−2</td></tr><tr><td>10</td><td>−2</td><td>−2</td><td>−4</td><td>−4</td><td>−2</td><td>−2</td></tr><tr><td>11</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr></table></td></tr>
</table>

TABLE 16. $SO(2n)$ 系数 $\psi_{q,\ r}$（a）在（9.9）中对应不同的 $\mathsf{a} = (a_0, 1, 1)$

其中 $n = p + q + r$ 和

$$\psi_{q,r}(\mathbf{a}) = \chi_{q,r} - a_{\frac{5}{2}}^2\,\chi_{q,r-2} + \sum_{s=2}^{r} \eta_s\, a_{\frac{1}{2}}\, a_{\frac{5}{2}}^{s-1}\,\chi_{q,r-s} + \zeta_r\, a_{\frac{5}{2}}^{r+1}\,\chi_{q-1,0} + \omega_r\, a_{\frac{5}{2}}^{r+2}\,\chi_{q-2,0}\,,$$

(A.2) *with*

$$\eta_s = \begin{cases} 1 & \text{if } s = 0, 2 \bmod 5; \\ -1 & \text{if } s = 3, 4 \bmod 5; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \zeta_r = \begin{cases} 1 & \text{if } r = 1 \bmod 5; \\ -1 & \text{if } r = 0 \bmod 5; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad \omega_r = \begin{cases} 1 & \text{if } r = 2 \bmod 5; \\ -1 & \text{if } r = 3 \bmod 5; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and

$$\chi_{q,r}(\mathbf{a}) = Q_q R_r + \sum_{s=1}^{r} (\sigma_s\, a_{\frac12}\, a_{\frac52}^{s}\, Q_{q-1} R_{r-s} + \tau_s\, a_{\frac12}\, a_{\frac52}^{s+1}\, Q_{q-2} R_{r-s}) - a_{\frac52}^{4} Q_{q-3} R_{r-1}$$

(A.3)
$$\textit{where } \sigma_s = \begin{cases} 1 & \textit{if } s = 3 \bmod 5; \\ -1 & \textit{if } s = 1 \bmod 5; \\ 0 & \textit{otherwise}, \end{cases} \quad \textit{and } \tau_s = \begin{cases} 1 & \textit{if } s = 3 \bmod 5; \\ -1 & \textit{if } s = 0 \bmod 5; \\ 0 & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

此处 $Q_q = 0$ 和 $R_r = 0$ 分别对应 $q < 0$ 和 $r < 0$，而对于 $q \geq 0$ 和 $r \geq 0$

(A.4)
$$Q_0 = 1 \textit{ and } Q_q = -a_{\frac12} a_{\frac52} Q_{q-2} + a_{\frac12} a_{\frac52}^2 Q_{q-3} + a_{\frac52}^5 Q_{q-5} \textit{ if } q > 0\,;$$

$$R_0 = 1 \textit{ and } R_r = a_{\frac12} R_{r-1} - a_{\frac12} a_{\frac52}^3 R_{r-4} + a_{\frac52}^5 R_{r-5} + \sum_{s=3}^{r} \rho_s\, a_{\frac12}^2\, a_{\frac52}^{s-2}\, R_{r-s} \textit{ if } r > 0\,,$$

(A.5)
$$\textit{where } \rho_s = \begin{cases} 1 & \textit{if } s = 2, 3 \bmod 5; \\ -2 & \textit{if } s = 0 \bmod 5; \\ 0 & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

证明：利用附加数据，可以将 (7.5) 和 (7.6) 扩展如下

(A.6)

(κ_i, κ_{i+1})	$(\overline{5}_2, \frac{3}{2})$	$(\overline{5}_2, \frac{1}{2})$	$(\overline{5}_2, \frac{1}{2})$	$(\overline{5}_2, \frac{3}{2})$	$(\overline{5}_2, \frac{5}{2})$
$(\kappa_{i+1} - 1, \kappa_i + 1)$	$(\frac{5}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$
(κ_i, κ_{i+1})	$(\overline{3}_2, \frac{5}{2})$	$(\overline{1}_2, \frac{5}{2})$	$(\overline{1}_2, \frac{5}{2})$	$(\overline{3}_2, \frac{5}{2})$	
$(\kappa_{i+1} - 1, \kappa_i + 1)$	$(\overline{3}_2, \frac{1}{2})$	$(\overline{3}_2, \frac{1}{2})$	$(\overline{3}_2, \frac{3}{2})$	$(\overline{3}_2, \frac{5}{2})$	

这些直接导出了表17中所示的初等子序列变换。同样，来自

(A.7)

$(\ldots, \kappa_n)$	$(\ldots, \overline{\frac{5}{2}})$
$(\ldots, -\kappa_n - 1)$	$(\ldots, \frac{3}{2})$

的数据可以推导出表18中给出的终止子序列变换。

反复使用 (7.5)、(7.6)、(A.6) 和 (A.7)，不仅可以推导出表 17 和表 18 中的所有结果，还表明 $\{\overline{\frac{5}{2}}, \overline{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\}$ 中所有其他非标准子序列所产生的贡献，都会由于在魏尔群反射下发生符号变化而为零。或许值得指出这些表中依赖于 t 的各项的来源。这些子序列或者涉及 $(\overline{5}\,2, 5\,2, 5\,2, 5\,2, 5\,2)^t$，或者涉及 $(\overline{5}\,2, 5\,2, 5\,2, \overline{5}\,2, 5\,2)^t$。它们分别变换为 $(\overline{3}\,2, 1\,2, 1\,2, 1\,2, \overline{1}\,2)^t$ 和 $(\overline{3}\,2, \overline{3}\,2, 1\,2, 1\,\overline{2}, \overline{3}\,2)^t$，而后者可分别改写为 $\overline{3}\,2, (1\,2, 1\,2, \overline{1}\,2, 1\,2, \overline{3}\,2)^{t-1}$，$1\,2, 1\,\overline{2}, 1\,2, 1\,\overline{2}, 1\,2$ 以及 $\overline{3}\,2, 3\,2, (1\,2, 1\,2, 3\,2, \overline{3}\,2, 3\,2)^{t-1}, 1\,\overline{2}, 1\,\overline{2}, \overline{3}\,2$。子序列 $1\,\overline{2}, 3\,\overline{2}$ 和 $3\,\overline{2}, 3\,\overline{2}, 3\,\overline{2}$ 分别变换为 $1\,2, 1\,2$ 和 $1\,2, 1\,2, \overline{1}\,2$，从而在每种情况下都得到形如 $(1\,2, \overline{1}\,2, \overline{1}\,2, 1\,2, 1\,2)^{t-1}$ 的因子，即 $1\,2\,5^{(t-1)}$。考虑到这些子序列首尾处的进一步变换，以及所有相关的符号变化，便得到两个表中所列出的依赖于 t 的结果。正是这些对展开 (A.1) 中所有可能的非零贡献所作的列表，完成了递推关系 (A.2)–(A.5) 的证明。□

σ	$\tau = w\cdot\sigma$	符号函数 $(w)\mathsf{a}(\sigma)$
$(\ldots,\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots,\frac{5}{2}\ldots)$	$+a_{\frac{5}{2}}$
$(\ldots\ldots,\frac{5}{2},\frac{1}{2}\ldots\ldots)$	$(\ldots\ldots,\frac{5}{2},\frac{1}{2}\ldots\ldots)$	$+a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}$
$(\ldots\ldots,\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\ldots\ldots)$	$(\ldots\ldots,\frac{3}{2}^5\ldots\ldots)$	$+a_{\frac{5}{2}}^5$
$(\ldots\ldots,\overline{\frac{1}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\ldots\ldots)$	$(\ldots\ldots,\frac{3}{2}^3\ldots\ldots)$	$+a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^2$
$(\ldots,\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots,\frac{3}{2}^3,\frac{1}{2}\ldots)$	$-a_{\frac{5}{2}}^4$
$(\ldots,\frac{1}{2},\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots\ldots,\frac{3}{2}^2\ldots\ldots)$	$-a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}$
$(\ldots\ldots\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2})^t,\frac{1}{2},\frac{5}{2}\ldots\ldots)$	$(\ldots\ldots,\frac{3}{2}^2,\frac{1}{2}^{5t}\ldots\ldots)$	$-a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+1}$
$(\ldots(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2})^t,\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\overline{\frac{1}{2}},\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots,\frac{3}{2}^2,\frac{1}{2}^{5t+3}\ldots)$	$+a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+4}$
$(\ldots(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},)^t,\overline{\frac{1}{2}},\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}^{5t+1}\ldots)$	$-a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+1}$
$(\ldots(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},)^t,\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots\ldots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}^{5t+3}\ldots\ldots)$	$+a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+3}$
$(\ldots\ldots,\frac{1}{2}\ldots\ldots)$	$(\ldots\ldots,\frac{1}{2}\ldots)$	$+a_{\frac{1}{2}}$
$(\ldots,\overline{\frac{5}{2}},\overline{\frac{1}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots,\frac{1}{2}^4\ldots)$	$-a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^3$
$(\ldots,\overline{\frac{5}{2}},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots,\frac{1}{2}^5\ldots)$	$+a_{\frac{5}{2}}^5$
$(\ldots,\overline{\frac{1}{2}},(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2})^t,\overline{\frac{1}{2}},\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots,\frac{1}{2}^{5t+3}\ldots)$	$+a_{\frac{1}{2}}^2a_{\frac{5}{2}}^{5t+1}$
$(\ldots,\overline{\frac{1}{2}},(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2})^t,\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots,\frac{1}{2}^{5t+5}\ldots)$	$-a_{\frac{1}{2}}^2a_{\frac{5}{2}}^{5t+3}$
$(\ldots,\overline{\frac{5}{2}},\frac{1}{2},\frac{5}{2},(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2})^t,\overline{\frac{1}{2}},\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots,\frac{1}{2}^{5t+5}\ldots)$	$-a_{\frac{1}{2}}^2a_{\frac{5}{2}}^{5t+3}$
$(\ldots,\overline{\frac{5}{2}},\frac{1}{2},\frac{5}{2},(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2})^t,\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{1}{2},\frac{5}{2}\ldots)$	$(\ldots,\frac{1}{2}^{5t+7}\ldots)$	$+a_{\frac{1}{2}}^2a_{\frac{5}{2}}^{5t+5}$

TABLE 17. $\tau = w\cdot\sigma$ 的初等子序列 λ，以及在 $SO(2n+1)$情形下，符号函数(w)和 $a(\sigma)$对 $a(\kappa)$的贡献，其中 $t\geq 0$。

在类似的 $SO(2n)$情形下，我们发现

定理 A.2。在 $\mathsf{a} = (a_{\frac{1}{2}}, 0, a_{\frac{5}{2}})$ 的情况下

$$\prod_{i=1}^{n}\left(a_{\frac{1}{2}}(x_i^{\frac{1}{2}}+x_i^{-\frac{1}{2}})+a_{\frac{5}{2}}(x_i^{\frac{5}{2}}+x_i^{-\frac{5}{2}})\right)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{q=0}^{n-p}a_{\frac{5}{2}}^q\,\psi_{q,r}(\mathbf{a})\,\mathrm{ch}^{O(2n)}_{(a_{\frac{5}{2}}^p,a_{\frac{3}{2}}^q,a_{\frac{1}{2}}^r)}(\mathbf{x},\overline{\mathbf{x}})\,, \tag{A.8}$$

其中 $n=p+q+r$ 和

$$\psi_{q,r}(\mathbf{a})=\chi_{q,r}-a_{\frac{5}{2}}^3\,\chi_{q,r-3}+\sum_{s=2}^{r}\eta_s\,a_{\frac{1}{2}}\,a_{\frac{5}{2}}^{s-1}\,\chi_{q,r-s}+\zeta_r\,a_{\frac{5}{2}}^{r+1}\,\chi_{q-1,0}+\omega_r\,a_{\frac{5}{2}}^{r+2}\,\chi_{q-2,0}\,,$$

$$\text{with}\quad \eta_s=\begin{cases}1 & \text{if } s=1,2 \bmod 5;\\ -1 & \text{if } s=0,3 \bmod 5;\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}\quad \zeta_r=\begin{cases}1 & \text{if } r=3 \bmod 5;\\ -1 & \text{if } r=4 \bmod 5;\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases}\quad \omega_r=\begin{cases}1 & \text{if } r=1 \bmod 5;\\ -1 & \text{if } r=0 \bmod 5;\\ 0 & \text{otherwise,}\end{cases} \tag{A.9}$$

σ	$\tau = w \cdot \sigma$	符号函数 (w)a(σ)
$(\ldots(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2})^t,\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots,\frac{3}{2}^2,\frac{1}{2}^{5t+2})$	$+a_{\frac{5}{2}}^{5t+4}$
$(\ldots\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2})^t,\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2})$	$(\ldots,\frac{3}{2}^2,\frac{1}{2}^{5t+3})$	$-a_{\frac{5}{2}}^{5t+5}$
$(\ldots\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2})^t,\overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}^{5t})$	$-a_{\frac{5}{2}}^{5t+1}$
$(\ldots\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2})^t,\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2})$	$(\ldots,\frac{3}{2},\frac{1}{2}^{5t+1})$	$+a_{\frac{5}{2}}^{5t+2}$
$(\ldots,\overline{\frac{5}{2}},\overline{\frac{5}{2}},)$	$(\ldots,\frac{1}{2}^2)$	$-a_{\frac{5}{2}}^2$
$(\ldots,\overline{\frac{1}{2}},(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2})^t,\overline{\frac{5}{2}},)$	$(\ldots,\frac{1}{2}^{5t+2})$	$+a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+1}$
$(\ldots,\overline{\frac{1}{2}},(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2})^t,\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2})$	$(\ldots,\frac{1}{2}^{5t+3})$	$-a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+2}$
$(\ldots,\overline{\frac{5}{2}},\frac{1}{2},\frac{5}{2},(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},)^t,\overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots,\frac{1}{2}^{5t+4})$	$-a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+3}$
$(\ldots,\overline{\frac{5}{2}},\frac{1}{2},\frac{5}{2},(\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2},\frac{5}{2},)^t,\overline{\frac{5}{2}},\frac{5}{2})$	$(\ldots,\frac{1}{2}^{5t+5})$	$+a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+4}$

TABLE 18. 初等子序列和终止子序列 $\tau = w \cdot \sigma$ 的 λ，以及符号函数 (w) 和 $a(\sigma)$ 对 $a(\kappa)$ 的贡献，适用于情形$SO(2n+1)$，其中 $t \geq 0$。

并且 $\chi_{q,r}$ 仍由 (A.3) 定义。

证明：与定理 A.1 的证明唯一的不同之处在于，必须使用初等魏尔群变换重新计算终止子序列的变换

(A.10)

$(\ldots,\kappa_{n-1},\kappa_n)$	$(\ldots,\overline{\frac{5}{2}},\overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots,\overline{\frac{3}{2}},\overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots,\overline{\frac{1}{2}},\overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots,\frac{1}{2},\overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots,\frac{3}{2},\overline{\frac{5}{2}})$
$(\ldots,-\kappa_n-1,-\kappa_{n-1}-1)$	$(\ldots,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$	$(\ldots,\frac{3}{2},\frac{1}{2})$	$(\ldots,\frac{3}{2},\frac{1}{2})$	$(\ldots,\frac{3}{2},\frac{3}{2})$	$(\ldots,\frac{3}{2},\frac{5}{2})$

这些直接导出了表19中所示的终止子序列变换。该表列直接给出了所需的递推关系 (A.9)，将 $\psi_{q,\ r}$(a) 表示为各种 $\chi_{q,\ r}$ 的形式。由于 $\chi_{q,\ r}$、Q_q 和 R_r 分别由 (A.3)、(A.4) 和 (A.5) 定义，这就完成了 (A.8) 的证明。□

尽管定理 A.1 和 A.2 的递推关系十分复杂，但它们已被用于计算 ψ_{qr}(a)，适用于 $SO(2n+1)$ 和 $O(2n)$，其中 a $=(a_{\frac{1}{2}}, 0, 1)$，且 $a_{\frac{1}{2}} = 0$、1 和 -1。所得结果完全符合 (8.9) 的后两个恒等式的预测。这与其说是 (8.9) 有效性的证据，不如说是对递推关系有效性的检验，

REFERENCES

[Bau] F.L. Bauer，《自旋群理论》，《数学年刊》128（1954），228–256。[BG] D. Bump 和 A. Gamburd，《经典群中特征多项式的平均值》，《数学物理通讯》265（2006），227–274。

σ	$\tau = w \cdot \sigma$	符号函数 (w)a(σ)
$(\ldots(\overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}})^t, \overline{\frac{5}{2}}, \overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots, \frac{3}{2}^2, \frac{1}{2}^{5t})$	$-a_{\frac{5}{2}}^{5t+2}$
$(\ldots(\overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}})^t, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2})$	$(\ldots, \frac{3}{2}^2, \frac{1}{2}^{5t+1})$	$+a_{\frac{5}{2}}^{5t+5}$
$(\ldots(\overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}})^t, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}^{5t+3})$	$+a_{\frac{5}{2}}^{5t+4}$
$(\ldots(\overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}})^t, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}^{5t+4})$	$-a_{\frac{5}{2}}^{5t+5}$
$(\ldots, \overline{\frac{5}{2}}, \overline{\frac{1}{2}})$	$(\ldots, \frac{1}{2}^2)$	$+a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}$
$(\ldots, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{1}{2}, \overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots, \frac{1}{2}^3)$	$-a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^2$
$(\ldots, \overline{\frac{5}{2}}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2})$	$(\ldots, \frac{1}{2}^3)$	$-a_{\frac{5}{2}}^3$
$(\ldots, \overline{\frac{1}{2}}, (\overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})^t, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots, \frac{1}{2}^{5t+5})$	$+a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+4}$
$(\ldots, \overline{\frac{1}{2}}, (\overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})^t, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots, \frac{1}{2}^{5t+6})$	$-a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+5}$
$(\ldots\ldots, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, (\overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2},)^t, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots\ldots, \frac{1}{2}^{5t+7})$	$-a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+6}$
$(\ldots\ldots, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, (\overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2},)^t, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}}, \frac{5}{2}, \overline{\frac{5}{2}})$	$(\ldots\ldots, \frac{1}{2}^{5t+8})$	$+a_{\frac{1}{2}}a_{\frac{5}{2}}^{5t+7}$

TABLE 19. $\tau = w \cdot \sigma$ 的终止子序列，以及 λ 中的符号函数（w）和 a（σ）对 a（κ）的贡献；情形为 $SO(2n)$，其中有 $t \geq 0$。

[ER] O. Egecioglu 和 J.B. Remmel, 《逆Kostka矩阵的一种组合解释》, 《线性与多线性代数》26（1990）, 59–84。[FH] W. Fulton 和 J. Harris, 《表示论：入门课程》, 研究生数学丛书第129卷, Springer, 纽约, 2004。[Has] K. Hasegawa, 《经典Kac-Moody李代数的Weyl互反定理的自旋模版本——分支规则对偶性的一种应用》, 《数学科学研究所刊》25（1989）, 741–828。[Hum] J.E. Humphreys, 《李代数与表示论导论》, 研究生数学丛书第9卷, Springer-Verlag, 纽约, 1972。[JM] M. Jimbo 和 T. Miwa, 《仿射李代数分支规则的一种对偶性》, 《纯数学高级研究》6（1985）, 17–65。[KWY] R.C. King、B.G. Wybourne 和 M. Yang, 《弹簧玩具与某些生成函数的S函数内容》, 《物理学杂志A》22（1989）, 4519–4535。[LP] A. Lascoux 和 P. Pragacz, 《S函数级数》, 《物理学杂志A》21（1988）, 4105–4114。[LO1] K-H. Lee 和 S-J. Oh, 《Sato-Tate分布的自相关函数与辛特征标恒等式》, arXiv:2006.06116, 2020年6月10日。[LO2] K-H. Lee 和 S-J. Oh, 《酉群的自相关函数及涉及舒尔函数的恒等式》, arXiv:2110.00505, 2021年10月1日。[Mac] I.G. Macdonald, 《对称函数与Hall多项式》, 牛津大学出版社, 牛津, 1995。[Mor] A.O. Morris, 《直和与直积的自旋表示》, 《伦敦数学会杂志》33（1958）, 326–333。[OEIS] 在线整数序列百科全书（OEIS）, https://oeis.org[YW] M. Yang 和 B.G. Wybourne, 《新的S函数级数与非紧李群》, 《物理学杂志A》19（1986）, 3513–3515。