arXiv:2303.00581v2 [math.RA] 4 May 2023

通过斜括号研究 Yang–Baxter 方程的解，并将其应用于具有阿贝尔置换群的不可分解对合解

M. CASTELLI 和 S. TRAPPENIERS

摘要。我们将 Yang–Baxter 方程集合论解的性质与其置换斜括号的性质联系起来。特别地，我们提出了解的多置换层级的一种变体，并证明它与置换斜括号的多置换层级一致；这与通常的解的多置换层级所满足的不等式不同。我们将解的轨道数与其置换斜括号的生成元联系起来，并探讨斜括号生成集的不同概念。此外，我们通过解的置换斜括号研究其自同构群。作为应用，我们得到了关于多置换解的子解的一个出人意料的结果，并给出了所有具有阿贝尔置换群的有限不可分解对合 Yang–Baxter 方程解的描述。对于多置换层级为 3 的情形，我们得出了这类给定大小的解的同构类的确切数量。

1. 引言

受 1992 年 Drinfel'd 提出的 Yang–Baxter方程集合论解研究的启发 [Dri 92]，，文献中相当一部分内容致力于研究斜括号。斜括号是 Rump 在 [Rum07a] 中引入的代数结构，后来 Guarnieri 和 Vendramin 在 [GV17]中将其推广到非交换情形。正如[Bac18, BCJ16, Rum07a], 中发展的理论所强调的，斜括号的分类是非退化集合论 Yang–Baxter方程解（下文简称解）分类的一个里程碑；事实上，斜括号能够构造出解，反过来，每个解也都源自一个斜括号。甚至在斜括号问世之前，就已有多位作者专注于研究 Yang–Baxter方程的解。Gateva-Ivanova 与 Van den Bergh [GIVdB98]以及 Etingof、Schedler 和 Soloviev [ESS99] 的开创性论文引起了人们对对合解的关注。在这一方向上，一种成功的方法见于 [ESS99, 本节 2],，作者们在其中发展了一种扩张工具，能够从所谓的不可分解解出发构造每一个对合非退化解。鉴于此，不可分解对合解的分类

2020 数学主题分类。16T25, 20N99, 81R50。关键词和短语。Yang–Baxter 方程、斜括号、集合论解、不可分解解、多置换解。作者是 GNSAGA（INdAM）的成员。作者获得了弗拉芒科学研究基金资助，资助编号1160522N。

是对合解分类问题的第一步。近年来，多位作者发展了不同的技术来研究不可分解解。在 [ESS99, 定理 2.13]中，作者利用双射 1-余循环，对所有元素个数为素数的不可分解对合解进行了分类。在 [CCP19],中，第一作者与 Catino 和 Pinto 一同为不可分解对合解发展了循环集理论。此外，Jedlička、Pilitowska 和 Zamojska-Dzienio 使用 2-约化左拟群（另见 [JPZD20]）描述了多置换层级至多为 2 [JP22] 的所有不可分解对合解，并在其中对具有任意基数且置换群为阿贝尔群的解进行了分类 [JPZD21]。然而，括号理论使我们能够在这一领域取得更多重要成果。事实上，Cedó 和 Okniński 在 [CO22a] 中利用置换括号描述了具有无平方因子阶的不可分解对合解；而在 [CJO22], 中，他们与 Jespers 合作，对置换群为本原置换群的对合非退化解进行了分类。在 [Rum20a, SS18], 中，作者证明了若干关于不可分解对合多置换解与单生成括号的结果。运用这一理论，置换群为循环置换群的不可分解对合解已在 [JPZD22]中得到完整分类。括号在理解一类特殊的不可分解解——所谓的单解——方面尤其有用：事实上，近期研究者借助括号研究了这些解 [CO21, CO22b] ，并在[Cas22]中对其作了完整描述。关于不可分解对合解的其他近期结果，请参阅 [RV22, Ram22, DG23, LRV22]。近期，一些作者开始借助适用于对合情形中所用工具的推广，研究非对合不可分解解；相关文献请见[ESG01, CMS22, GI21, CFT22, CSV19, CJK$^+$23]。

本文的研究结果由两个问题推动，其中第一个问题是当前大多数关于斜括号和 Yang–Baxter 方程的研究中的核心问题之一。

(1) 能从解的置换斜括号中恢复关于该解的哪些信息，反之亦然？(2) 我们能否对置换群为阿贝尔群的不可分解对合解进行分类?

在第 2 节介绍重要的定义、构造和结果之后，我们在第 3 节得到了一些初步的新结果。本节引入解的多置换层级的一种轻微变体。关于本节的主要结果——定理 3.10——我们证明，这一变体能够以精确的方式与置换斜括号的多置换层级联系起来，这与通常的多置换层级相反。在第 4 节中，我们将斜括号的传递循环基的存在性（它们与不可分解解有内在联系）同有关斜括号生成元的结果联系起来。通过这种方式，我们将 [SS18、Rum20b] 的结果推广到非对合情形，并将循环基的存在性与斜括号的权联系起来，而斜括号的权是在 [JKVAV21] 中引入的。作为斜括号生成元相关结果的一个出人意料的应用，我们在第 5 节得到：有限多置换层级的不可分解解没有真子解。这意味着，有限多置换层级的有限不可分解解的所有端同态都是双射，从而为 [JPZD21, 命题 5.1] 提供了有力的推广。在第 6 节中，我们考察具有正则置换群的不可分解对合解的自同构群。我们得到

了关于自同构群的阶和结构的两个结果，推广了 [JPZD21] 中的一些结果。对于那些具有阿贝尔置换群且多置换层级为 2 的不可分解对合解，我们证明其自同构群同构于置换括号的加法群。在第 7 节中，我们转而讨论上述提到的第二个问题。本节将某些矩阵与具有阿贝尔置换群的有限不可分解对合解联系起来，并证明每个这样的解都可以通过这种方式得到。然而，由不同矩阵得到的解可能彼此同构。当多置换层级为 2 或 3 时，我们能够考虑这些同构，并明确计算同构类的数量，从而推广 [JPZD21] 中的枚举和分类结果。最后，在第 8 节中，我们利用前一节的一些技术，研究具有阿贝尔置换群和有限多置换层级的无限不可分解对合解。我们证明，每个具有阿贝尔置换群且多置换层级为 2 的无限不可分解对合解，都同构于 [JPZD21] 中构造的某个例子，并得到关于具有无挠阿贝尔置换群的无限不可分解对合解的结果。

2. 预备知识

一个斜（左）括号是一个三元组 $(A,+,\circ)$，其中 A 是一个集合，$+$ 和 $\circ$ 是二元运算，且 $(A,+)$ 和 $(A,\circ)$ 是群，并且等式

$$a\circ(b+c)=a\circ b-a+a\circ c, \tag{2.1}$$

对所有 $a,b,c\in A$ 都成立。这里，$-a$ 表示 a 在群 $(A,+)$ 中的逆元，并且 $\circ$ 的运算优先于 $+$。元素 $a\in A$ 相对于群 $(A,\circ)$ 的逆元记为 a^{-}。群 $(A,+)$ 是 A 的加法群，而 $(A,\circ)$ 是 A 的乘法群。由 (2.1) 可直接推出，$(A,+)$ 和 $(A,\circ)$ 的单位元相同，此元素记为 0。对于斜括号 A 和 B，映射 $f\colon A\to B$ 是斜括号同态，当且仅当对所有 $a,b\in A$，$f(a+b)=f(a)+f(b)$ 且 $f(a\circ b)=f(a)\circ f(b)$。$A$ 的斜括号自同构群记为 $\mathrm{Aut}(A,+,\circ)$。加法群为阿贝尔群的斜括号称为括号。若对于斜括号 A，也

$$(a+b)\circ c=a\circ c-c+b\circ c,$$

对所有的 a、b、$c\in A$，则称 A 为一个双侧斜左括号。注意，任何乘法群为阿贝尔群的斜括号尤其都是双侧的。对于任意群 $(A,\circ)$，我们可以将 A 构造成一个双侧斜左括号 $(A,\circ,\circ)$。这种两个运算一致的斜括号称为平凡的。

对于任意 $a\in A$，映射

$$\lambda_a:A\to A,\quad b\mapsto -a+a\circ b,$$

是 $(A,+)$ 的一个自同构，此外我们得到一个群同态

$$\lambda:(A,\circ)\to\mathrm{Aut}(A,+),\quad a\mapsto\lambda_a,$$

称为 A [GV17] 的 λ-映射。如果 $\lambda\colon(A,+)\to\mathrm{Aut}(A,+)$ 是一个群同态，那么我们称 A 是 λ-同态的。如果一个斜括号 $(A,+,\circ)$ 同时满足 $(A,\circ,+)$ 是一个斜括号，则称其为双斜 括号。双斜括号是

恰好满足对所有$a \in A$而言， λ_a 都是斜 brace 自同构的斜括号。

$(A,+)$ 的子群 I，若对所有 $a \in A$ 都有 $\lambda_a(I) \subseteq I$，则称为一个左理想。强左理想 是一个左理想，此外它还是 $(A,+)$ 的正规子群。A 的理想 是一个强左理想，此外它还是 $(A,\circ)$ 的正规子群。对于一个理想I，可以用自然的方式定义商斜置换簇 A/I。斜括号 A 的一个重要理想例子是底层，

$$\mathrm{Soc}(A) = \{x \in A \mid x \circ a = x + a = a + x \text{ for all } a \in A\}.$$

如果 A 是一个括号，那么 $\mathrm{Soc}(A) = \ker \lambda$。更一般地，我们可以定义斜括号 A 的底层级数：$\mathrm{Soc}_0(A) = 0$，而 $\mathrm{Soc}_{n+1}(A)$ 是包含 $\mathrm{Soc}_n(A)$ 的理想，满足 $\mathrm{Soc}_{n+1}(A)/\mathrm{Soc}_n(A) = \mathrm{Soc}(A/\mathrm{Soc}_n(A))$，其中 $n \geq 0$。如果存在某个 n 使得 $\mathrm{Soc}_n(A) = A$，则称斜括号 A 为多置换偏斜括号。在 [CJK+23] 中，若存在这样的最小 n，则称其为 A的底层长度。不过，我们将其称为 A 的多置换层级，并记为 $\mathrm{mpl}(A)$。原因如下；在介绍解的多置换层级后，这一点会更加清楚：我们可以将斜括号的约化定义为 $\mathrm{Ret}(A) = A/\mathrm{Soc}(A)$。通过归纳法，令 $\mathrm{Ret}^0(A) = A$，且对于 $n \in \mathbb{N}$，令 $\mathrm{Ret}^{n+1}(A) = \mathrm{Ret}(\mathrm{Ret}^n(A))$。那么显然，$\mathrm{Ret}^n(A) \cong A/\mathrm{Soc}_n(A)$，因此 $\mathrm{Ret}^n(A) = 0$ 当且仅当 $\mathrm{Soc}_n(A) = A$。

容易验证，$\theta_{(a,b)}(x) = a + \lambda_b(x) - a$ 给出了一个良定义的作用θ：$(A,+) \rtimes (A,\circ) \to \mathrm{Aut}(A,+)$。在半直积中，$(A,\circ)$ 通过 λ 作用于 $(A,+)$。于是，我们可以将 A 的强左理想视为 $(A,+)$ 的子群，且这些子群在 θ 的作用下映为自身。此外，A 的底层恰好包含所有满足 $(x,0)$、$(0,x) \in \ker\theta$ 的元素 $x \in A$。

在任意斜括号 A 上，我们定义一个新运算 $*$ 为 $a*b = -a+a\circ b-b$，它可视为 $a\circ b$ 与 $a+b$ 之间差异的一种度量。若 A 是一个双侧 brace，则 $(A,+,*)$ 是一个雅各布森根环；按定义，它是一个与其自身雅各布森根重合的环。反之，每个雅各布森根环 $(A,+,*)$ 都给出一个双侧 brace $(A,+,\circ)$，其中 $a\circ b = a+a*b+b$ [Rum07a]。双侧 brace 的理想与其相关雅各布森根环的理想一致。对于一般的斜括号 A，该运算 $*$ 同样有用：对于 $X,Y \subseteq A$，我们将 $X*Y$ 定义为由 $\{x*y \mid x \in X, y \in Y\}$ 生成的 A 的加法子群。遵循 [Rum07a, Smo18], ，我们引入两个子偏斜括号的下降级数。令 $A^{(1)} = A^1 = A$。斜括号 A 的左级数定义为 $A^{n+1} = A*A^n$，其中 $n \geq 1$。若对某个 n 有 $A^n = 0$，则称 A 是左幂零的。类似地，斜括号 A 的右级数定义为 $A^{(n+1)} = A^{(n)}*A$，其中 $n \geq 1$。所有 $A^{(n)}$，特别是 $A^{(2)} = A^2$，都是理想。若对某个 n 有 $A^{(n)} = 0$，则称 A 是右幂零的。类似地，注意对于双侧括号，左幂零性和右幂零性与相关雅各布森根环的幂零性一致。在 [CSV19] 中证明，斜括号是多置换的，当且仅当它是右幂零的且其加法群为幂零群。根据 [Car20, ST23] 中的结果，我们得到以下命题。

命题 2.1。对于括号 A，以下各项等价：

(1) A 是双斜 *brace*，(2) A是 λ-同态的，(3) 多项式增长级$(A) \leq 2$，(4) $A^{(3)} = 0$，(5) λ_a 对每个 $a \in A$ 都是斜 *brace* 自同构。

如果一个斜括号是左幂零且多置换的，我们就称它为湮灭子幂零。这并非 [JVAV22]，中的原始定义，但由于 [JVAV22，推论 2。15]，它与他们的定义一致。

一个*Yang–Baxter* 方程的集合论解是一个二元组 (X, r)，其中 X 是非空集合，$r\colon X^2 \to X^2$ 是满足辫子方程的双射

$$r_1 r_2 r_1 = r_2 r_1 r_2,$$

其中 $r_1 = r \times \mathrm{id}_X$ 且 $r_2 = \mathrm{id}_X \times r$。在任意非空集合 X上，映射 $(x, y) \mapsto (y, x)$ 满足辫子方程，这样的解称为平凡解。若映射 $\sigma_x, \tau_x\colon X \to X$ 由 $r(x, y) = (\sigma_x(y)\ \tau_y(x))$ 定义且为双射，则称解为非退化解。在本节余下部分，我们将简要地把 Yang–Baxter 方程的非退化集合论解称为解。此外，若一个解满足 $r^2 = \mathrm{id}$，则称其为对合解。对于一个对合解 (X, r)，映射τ_x 完全由映射 σ_x 确定，即对所有 $x, y \in X$，$\tau_x(y) = \sigma^{-1}_{\sigma_x(y)}(x)$。因此，描述对合解时只需给出映射 σ_x。

给定两个解 (X, r) 和 (Y, s)，若映射 $f\colon X \to Y$是一个解的同态，则称之为解的同态，当且仅当 $(f \times f)r = s(f \times f)$。可以证明，此时 f的像是 (Y, s) 的一个子解，即 s限制为 $f(X) \times f(X)$。双射解同态称为解的同构。

给定一个斜括号 A，定义

$$r_A\colon A^2 \to A^2, \quad (a, b) \mapsto (\lambda_a(b), \lambda^{-1}_{\lambda_a(b)}(-(a \circ b) + a + (a \circ b))).$$

则有序对 (A, r_A) 是一个解 [LYZ00, GV17]。这一构造具有函子性：斜括号同态 $f\colon A \to B$ 诱导出解的同态 $f\colon (A, r_A) \to (B, r_B)$。

按照 [ESS99] 的定义，解 (X, r) 的结构群为

$$G(X, r) = \langle X \mid x \circ y = \sigma_x(y) \circ \tau_y(x) \text{ for all } x, y \in X \rangle.$$

对于每个解 (X, r)，还可以将其导出结构群定义为

$$A(X, r) = \langle X \mid x + y = y + \sigma_y \tau_{\sigma_x^{-1}(y)}(x) \rangle.$$

可以构造 $A(X, r)$ 与 $G(X, r)$ 之间的一个双射，使得将 $A(X, r)$ 的群结构转移到 $G(X, r)$ 上后，得到一个斜括号 $(G(X, r)\ +, \circ)$。当且仅当 (X, r) 是可逆的，这个斜括号才是括号；参见 [Sol00, LV19]。在这个双射下，$A(X, r)$ 中与某个元素 $x \in X$ 对应的生成元，被映射到 $G(X, r)$ 中与 x 对应的生成元。我们定义 $\iota\colon X \to G(X, r)$ 为典范映射，它将每个元素映射到与之对应的生成元。因此，我们发现 $\iota(X) \subseteq (G(X, r)\ +, \circ)$ 同时生成加法群和乘法群。此外，斜括号 $(G(X, r)\ +, \circ)$ 满足如下性质：ι 是解的同态 $\iota\colon (X, r) \to (G(X, r)\ r_{G(X,r)})$。特别地，这意味着对所有 $x, y \in X$，等式 $\iota(\sigma_x(y)) = \lambda_{\iota(x)}(\iota(y))$ 在 $G(X, r)$ 中成立。若 ι 是单射映射，则称一个解是单射解；并且可以证明，可逆解总是单射的。映射 ι 还满足以下泛性质：若 A 是任意一个斜括号，且 $f\colon (X, r) \to (A, r_A)$ 是解的同态，则存在唯一的斜括号同态 $\overline{f}\colon G(X, r) \to A$，使得 $f = \overline{f}\pi$。由泛性质可知，单射解正是那些作为某个斜括号 A 的子解出现在 (A, r_A) 中的解。对于任意解 (X, r)

可以将其关联到单射化 $\mathsf{Inj}(X,r)$，它是同态 $\iota\colon (X,r) \to (G(X,r)^{r_{G(X,r)}})$ 的像。显然，$G(\mathsf{Inj}(X,r))$ 与 $G(X,r)$ 作为斜括号是同构的，因此 $\mathsf{Inj}(X,r)$ 确实是一个单射解。

群 $(G(X,r)\ \circ)$ 作用于 X，其中对于所有 $x,y \in X$，$\iota(x)$ 将 y 映射到 $\sigma_x(y)$。此外，群 $(G(X,r)\ +)$ 作用于 X，其中 $\iota(x)$ 将 $\sigma_x\tau_{\sigma_y^{-1}(x)}(y)$ 映射到 y。这些作用是相容的，因为我们可以将它们合并为 $(G(X,r)\ +) \rtimes (G(X,r)\ \circ)$ 在 X 上的一个作用，其中 $(G(X,r)\ \circ)$ 通过 λ 作用于 $(G(X,r)\ +)$。注意，若 (X,r) 是单射，并将 $\iota(X)$ 与 X 等同，则 $(G(X,r)\ +)\rtimes(G(X,r)\ \circ)$ 在 $G(X,r)$ 上的作用 θ 限制到 $\iota(X)$，且这一限制与上述作用一致。上述作用的轨道简称为 (X,r) 的轨道。若 X 由单个轨道构成，则解 (X,r) 是不可分解的。尽管我们使用的作用略有不同，这一定义与 [ESG01], 中不可分解解的定义一致。理解解 (X,r) 的轨道或许更直观的一种方式是，将其视为 X 的最小划分，使其在 $x \in X$ 时对所有映射 $\sigma_x, \sigma_x^{-1}, \tau_x, \tau_x^{-1}$ 均保持不变。

按照 [Sol00], ，我们也可以为任意解 (X,r) 关联一个**置换群**，其定义为

$$\mathcal{G}(X,r) = \langle (\sigma_x, \tau_x^{-1}) \mid x \in X \rangle \subseteq \mathrm{Perm}(X) \times \mathrm{Perm}(X).$$

存在唯一的满群同态 $\pi\colon G(X,r) \to \mathcal{G}(X,r)$，满足 $\pi(\iota(x)) = (\sigma_x, \tau_x^{-1})$。可以证明，此映射 π 的核 Γ 是 $(G(X,r)\ +,\circ)$ 的一个理想，因此存在自然的斜括号结构 $(\mathcal{G}(X,r)\ +,\circ)$，使得 π 是一个斜括号同态。我们称之为置换斜括号。理想 Γ 包含于 $\mathsf{Soc}(G(X,r))$ 中；若 (X,r) 是单射，则$\Gamma = \mathsf{Soc}(G(X,r))$。特别地，注意对于任意对合（因而是单射）解 (X,r)，我们有 $\Gamma = \ker(\lambda)$。对于对合解 (X,r)，如果 $(\mathcal{G}(X,r)\ \circ)$ 在 X 上的作用（由 $(G(X,r)\ \circ)$ 在 X 上的作用导出）是正则的，就称其具有正则置换群。由于由斜括号构造关联解的过程具有函子性，我们得到一个解的同态 $\pi\iota\colon (X,r) \to (\mathcal{G}(X,r)^{r_{\mathcal{G}(X,r)}})$。此同态的像称为 (X,r) 的约化，记作 $\mathsf{Ret}(X,r)$。约化 $\mathsf{Ret}(X,r)$ 也可以视为等价关系所给出的等价类上的诱导解，该等价关系定义为

$$x \sim y \iff \sigma_x = \sigma_y \text{ and } \tau_x = \tau_y,$$

这是文献中采用的原始定义；参见 [ESS99, CJK+23]。我们归纳地定义 $\mathsf{Ret}^0(X,r) = (X,r)$ 和 $\mathsf{Ret}^{n+1}(X,r) = \mathsf{Ret}(\mathsf{Ret}^n(X,r))$，其中 $n \geq 0$。如果存在某个 n 使得 $\mathsf{Ret}^n(X,r)$ 的大小为 1，我们就称 (X,r) 为多置换解。此时，(X,r) 的多置换层级记为 $\mathsf{mpl}(X,r)$，它是使 $\mathsf{Ret}^n(X,r)$ 的大小为 1 的最小 n 。多置换层级为 1 的解称为置换解。等价地，若对所有 $x,y \in X$，$\sigma_x = \sigma_y$ 且$\tau_x = \tau_y$ ，则解 (X,r) 是置换解。正如 [CJK+23 的注 4.4], 所述，对于任意斜括号 A，我们有 $\mathsf{Ret}_n(A, r_A) = (\mathsf{Ret}_n(A)^{r_{\mathrm{Ret}_n(A)}})$；因此，斜括号 A 是多置换的，当且仅当 (A, r_A) 是多置换解且 $\mathsf{mpl}(A) = \mathsf{mpl}(A, r_A)$。

设 A 是一个斜括号。非空集合 $X \subseteq A$ 若是作用 θ 下若干轨道的并，且 X 生成 A 的加法群（或等价地，乘法群），则称其为一个 **循环基** 。如果 X 由单个轨道构成，那么 X 就是一个 **传递循环基**。括号的循环基与文献中的通用定义一致。对于

斜括号而言，这是一个新概念，其定义已在文献中出现过（例如 [Bac18]），但尚未被明确命名。如果 (X, r) 是一个解，那么 $\iota(X)$ 是 $G(X, r)$ 的一个循环基，因此，典范映射 $(X, r) \to \mathcal{G}(X, r)$ 的像也是一个循环基。

Bachiller 在 [Bac18] 中说明了如何从斜括号 A的循环基 X 构造一个解，使得其置换斜括号恰好为A，并在此证明，每个解都可以通过这种方式从其置换斜括号构造出来。在此构造下，不可分解解只能由传递循环基得到，而每个传递循环基都会产生一个不可分解解。我们提及 [Bac18, Theorems 3.19 and 3.20] 的以下更严格版本（这些版本也可由 [BCJ16, Theorems 3.1 and 4.1] 或 [Rum19b, Rum23] 中的结果推出）。

定理 2.2。设 A 是一个括号。那么对于 A 和$x \in X$的任意传递循环基 X，(A, r_x) 满足

$$r_x(a, b) = (\sigma_a(b), \sigma^{-1}_{\sigma_a(b)}(a)),$$

其中 $\sigma_a(b) = \lambda_a(x) \circ b$ 是一个具有正则置换群的不可分解解，并且 $\mathcal{G}(A, r) \cong A$ 作为括号成立。此外，任何具有正则置换群且满足 $\mathcal{G}(Y, s) \cong A$ 的不可分解解 (Y, s) 都与这样的解同构。

给定元素 $z \in A$，则将 $(A, \circ)$ 中由 z 给出的右平移记为 t_z。

定理 2.3。设 A 是一个左括号，并设 (A, r_x) 和 (A, r_y) 是定理 *2.2* 中得到的解。给定 $z \in A$ 以及 A 的自同构 ψ，使得 $\psi(x) = \lambda_z(y)$，则

$$t_z \circ \psi : (A, r_x) \to (A, r_y), \quad a \mapsto \psi(a) \circ z$$

这是一个解的同构，而且 (A, r_x) 与 (A, r_y) 之间的每个同构都由此方式得到。

若 X 是斜括号 A 的若干轨道之并，则解 (A, r_A) 可限制为解 $(X, r_A|_{X\times X})$。此外，若 X 是一个循环基，则 $(X, r_A|_{X\times X})$ 的轨道与 A 中 X 的轨道一致，因为 X 同时生成 $(A, +)$ 和 $(A, \circ)$。

3. 多置换层级的一种变体

本节中，我们介绍解的多置换层级的一种变体，并说明与通常的多置换层级相比，它与相应斜括号的多置换层级关系更为密切。

定义 3.1. 设 (X, r) 是一个多置换解。我们将 $\mathrm{mpl}'(X, r)$ 定义为使 $\mathrm{Ret}^n(X, r)$ 成为平凡解（其大小可能为 > 1）的最小 n。

如果 (X, r) 是一个层级为 n 的多置换解，那么 $\mathrm{Ret}^n(X, r)$ 的大小为 1，因此是平凡解。还要注意，如果 (X, r) 是一个解，且 $\mathrm{Ret}^n(X, r)$ 是一个平凡解，那么 (X, r) 是一个多置换解，因为 $|\mathrm{Ret}^{n+1}(X, r)| = 1$。这证明了以下结果。

引理 3.2. 对于(X, r) 多置换解，我们有

$$\mathrm{mpl}'(X, r) \le \mathrm{mpl}(X, r) \le \mathrm{mpl}'(X, r) + 1. \tag{3.1}$$

命题 3.3. 设(X,r) 是一个具有有限多置换级数的不可分解解，则多项式增长级′(X,r) $=$多项式增长级(X,r)。

证明。 设 n 使得 Ret$^n(X,r)$ 是一个平凡解。由于不可分解性在约化下保持不变，Ret$^n(X,r)$ 也不可分解，因此 $|\mathrm{Ret}^n(X,r)|=1$。由此即可得出该结论。□

作为对 [GI18, Definition 4.3], 的推广，我们引入以下条件。

定义 3.4。 设 (X,r) 是一个解。若对于每个 $x\in X$，都存在 $y,y'\in X$，使得 $\sigma_y(x)$ $=x$ 且 $\tau_{y'}(x)=x$，则称 (X,r) 满足条件 $(*)$。

容易看出，对于所有 $x\in X$，满足 $r(x,x)=(x,x)$ 的解 (X,r)（也称为无平方解）满足条件 $(*)$。此外，与斜括号 A 相关联的解 (A,r_A) 也满足条件 $(*)$，因为 $\sigma_0=\tau_0=\mathrm{id}$。

命题 3.5。 设$(X,\ r)$ 是一个满足条件 $|X|>1$ 和性质$(*)$的多置换解。那么多项式增长级$(X,\ r)$ $=$多项式增长级′$(X,\ r)+1$。

证明。 设 $n=$多项式增长级(X,r)。由于 $|X|>1$，我们知道 $n\geq 1$，因此 Ret$^{n-1}(X,r)$ 定义良好，且必定是定义在大小大于 1 的集合上的置换解。条件 $(*)$ 在约化下保持不变，而满足该条件的置换解必定是平凡解。因此，Ret$^{n-1}(X,r)$ 是一个平凡解，且多项式增长级′(X,r) $\leq n-1$，结合引理 3.2 即得结论。□

以下引理在 [CJK$^+$23] 中以命题 4.8 的形式出现，但其中关于多项式增长级′(X,r) 的不等式除外；不过其证明与关于多项式增长级 (X,r) 的证明相同。

引理 *3.6.* 设 $f:(X,r)\to(Y,s)$ 是解的满同态，则 f 诱导出一个解的满同态 $\overline{f}:$ *Ret*$(X,r)\to$ *Ret*(Y,s)。若 (X,r) 是多置换解，则 (Y,s) 也是多置换解，并且 *mpl*$(Y,s)\leq$*mpl*(X,r)，且 *mpl*′$(Y,s)\leq$*mpl*′(X,r)。

推论 3.7. 设(X,r) 是一个多置换解，则

$$\mathrm{mpl}(X,r)-1\leq \mathrm{mpl}\,\mathrm{Inj}(X,r)\leq \mathrm{mpl}(X,r),$$
$$\mathrm{mpl}'(X,r)-1\leq \mathrm{mpl}'\,\mathrm{Inj}(X,r)\leq \mathrm{mpl}'(X,r).$$

证明。 若将引理 3.6 应用于以下满同态

$$(X,r)\to \mathrm{Inj}(X,r)\to \mathrm{Ret}(X,r),$$

我们得到 mpl(Ret(X,r)) $\leq$mpl(Inj(X,r)) $\leq$mpl(X,r)，且 mpl′(Ret(X,r)) $\leq$mpl′(Inj(X,r)) $\leq$mpl′(X,r)。接下来只需注意到，不等式 mpl(X,r) $\leq$mpl(Ret(X,r)) $+1$ 以及 mpl′(X,r) $\leq$mpl′(Ret(X,r)) $+1$ 成立。□

命题 3.8。 设 A 为一个斜括号，X 是 A 的循环基，并令 $(X,\ r)$ 表示 $(A,\ r_A)$ 在 X 上的限制。则 $\mathcal{G}(X,\ r)\cong\mathrm{Ret}(A)$。

证明。 $\mathcal{G}(X,r)$ 的泛性质给出一个满射斜括号同态 $f:\ G(X,r)\to A$，它在集合 $\iota(X)$ 上是单射。我们断言，f^{-1}(Soc(A)) $=\Gamma$，其中 Γ 是典范斜括号同态 $\pi:\ G$ $(X,r)\to\mathcal{G}(X,r)$ 的核，由此即可推出该结论。注意，(X,r) 是单射，因此 $\Gamma=$ Soc$(G(X,r))$。由此可得从右向左的包含关系。现在令 $g\in\mathcal{G}(X,r)\setminus\Gamma$。由于 $\iota(X)$ 是 $(G(X,r)\ +)$ 的传递循环基

存在某些 $x, y \in X, x \neq y$，使得 $\theta_{(g,0)}(\iota(x)) = \iota(y)$ 或 $\theta_{(0,g)}(\iota(x)) = \iota(y)$。由于 $f(\iota(x)) \neq f(\iota(y))$，这意味着 $f(g) \notin \mathrm{Soc}(A)$，从而证明了剩下的包含关系。□

推论 3.9. 设 (X, r) 是一个解，则 $\mathcal{G}(\mathrm{Ret}(X, r)) \cong \mathrm{Ret}(\mathcal{G}(X, r))$。

证明。设 (X, r) 是一个解，则我们知道，X 在 $\mathcal{G}(X, r)$ 中的典范像是一个循环基，其关联的解同构于 $\mathrm{Ret}(X, r)$。命题 3.8 表明 $\mathcal{G}(\mathrm{Ret}(X, r)) \cong \mathrm{Ret}(\mathcal{G}(X, r))$。□

现在我们得到了本节的主要结果。

定理 3.10. 设 (X, r) 是一个解，则

$$\mathrm{mpl}'(X, r) = \mathrm{mpl}(\mathcal{G}(X, r)).$$

证明。由推论 3.9 可知，一般而言 $\mathcal{G}(\mathrm{Ret}^n(X, r)) \cong \mathrm{Ret}^n(\mathcal{G}(X, r))$。注意，一个解是平凡的，当且仅当其置换斜括号是零环面，由此可得该等式。□

由于 $\mathrm{mpl}(X, r)$ 可以在 $\mathrm{mpl}'(X, r)$ 和 $\mathrm{mpl}'(X, r)+1$ 之间变化，因此不存在用 $\mathrm{mpl}(X, r)$ 直接表示 $\mathrm{mpl}(\mathcal{G}(X, r))$ 的一般方法。这表明 $\mathrm{mpl}'(X, r)$ 相较于 $\mathrm{mpl}(X, r)$ 的主要优势。如果 (X, r) 是不可分解的，则由命题 3.3 得到以下结果。

推论 3.11。设 (X, r) 是一个不可分解多置换解，则多项式增长级$(X, r) =$ 多项式增长级$(\mathcal{G}(X, r))$。

推论 3.12。设 (X, r) 是一个对合解。那么，以下条件等价：

(1) 多项式增长级$'(X, r) = 2$,(2) $\mathcal{G}(X, r)$ 是一个非平凡的 λ-同态双斜 *brace*。

证明。这由定理 3.10 以及以下事实推出：对于一个括号 A，$\mathrm{mpl}(A) \leq 2$当且仅当 A 是一个 λ-同态双斜 brace。□

定理 3.13。设(X, r) 是一个多置换解，且 $|X| > 1$，则

$$\mathrm{mpl}(G(X, r)) - 1 \leq \mathrm{mpl}'(X, r) \leq \mathrm{mpl}(G(X, r))$$

此外，若(X, r) 是单射，则多项式增长级$'(X, r) + 1 = \mathrm{mpl}(G(X, r))$。

证明。若 (X, r) 是单射，则 $\mathcal{G}(X, r) = \mathrm{Ret}(G(X, r))$，因此该命题的第二部分由定理 3.10 推出。第一部分现在由推论 3.7 以及以下事实推出：$G(X, r) = G(\mathrm{Inj}(X, r))$。□

因此，我们得到 [CJK+23 推论 4.16] 和 [GI18 定理 5.15] 的以下推广。

推论 3.14. 设 (X, r) 是一个单射多置换解，则

$$\mathrm{mpl}(G(X, r)) - 1 \leq \mathrm{mpl}(X, r) \leq \mathrm{mpl}(G(X, r)).$$

此外，若 (X, r) 满足条件 $(*)$，则 多项式增长级$(X, r) =$ 多项式增长级$(G(X, r))$。

证明。这直接由引理 3.2 和定理 3.13 得出。第二部分由命题 3.5 和定理 3.13 得出。□

4. 斜括号的生成元

设给定一个斜括号 A。鉴于不可分解解与传递循环集之间的联系，自然会想到，我们能否轻松地刻画 A 何时具有传递循环基。更一般地，我们可以探究 A 的循环基所能包含的最少轨道数。本节首先将这个问题完全转化为关于 A的强左理想的问题。随后，我们将其与斜括号 A 的生成元数量及其权联系起来。

定义 4.1. 设 A 是一个斜括号。对于集合 $X \subseteq A$，由 X 生成的 A 的子偏斜括号、强左理想或理想，分别是包含 X的 A 中最小的子偏斜括号、强左理想或理想。如果 A 作为斜括号、强左理想或理想分别有一个单元素生成集，则称 A 作为斜括号、强左理想或理想是单生成的。如果 A作为斜括号是单生成的，我们也称 A 为单生成元斜括环。

对于斜括号 A的某个子集 X，我们用 $\langle X\rangle_+$表示由 X 生成的 $(A,+)$的子群。

引理 4.2. 设 A 是一个斜括号，且 $X \subseteq A$。由X 生成的强左理想为 $L(X) = \langle \theta_{(a,b)}(x) \mid x \in X,\ a,\ b \in A\rangle_+$。

证明。 显然，任何 $L(X)$都包含于任何包含 X的强左理想中。此外，对于所有 a、$b \in A$，$\theta_{(a,b)}(L(X)) \subseteq L(X)$，因此 $L(X)$本身就是一个强左理想。□

由引理 4.2，我们立即得到以下结果，该结果使我们能够将问题“ A的一个循环基中包含的轨道的最小数量是多少？”转化为“作为强左理想生成 A 所需元素的最小数量是多少？”

命题 4.3。 设 A 是一个非零斜括号。若 X 是 A 的一个循环基，且Y 是 X中各轨道的一个代表元集，则 Y 作为强左理想生成 A 。反之，若 $Y \subseteq A$ 作为强左理想生成 A ，则 Y 中各元素的轨道之并构成 A的一个循环基。

特别地，我们得到以下推论。

推论 4.4。 设 A 是一个斜括号。如果 X 是 A 的传递循环基，那么 X 的每个元素都生成 A 作为强左理想。

在本节的其余部分，我们研究 A 作为斜括号、强左理想和理想的生成元之间的关系。受 [Smo18、Rum20b] 中结果的启发，我们首先考虑多置换斜括环。之后，左幂零性或湮灭子幂零性也会作为一个自然的假设出现。下面的定理推广了[Smo18、定理 5.4] 以及 [Rum20b、命题 10]。

定理 4.5。 设 A 是一个多置换偏斜括号。如果 X 作为强左理想生成 A ，那么 X 作为斜括号生成 A 。

证明。 我们将对 A 的多置换层级进行归纳，以证明这一断言。如果A 是平凡括号，那么该断言显然成立。现在假设 A 不是平凡括号，并令 $A(X)$ 表示由 X 生成的 A 的子偏斜括号。由归纳假设可知，$A = A(X) + \mathrm{Soc}(A)$。由于 X 作为强左理想生成 A ，我们知道 $A = L(X)$，其中 $L(X)$ 如引理 4.2 所述。对于任意的 a、$b \in A$，我们

可以写成 $a = a_1 + a_2$ 和 $b = b_1 + b_2$，其中 a_1、$b_1 \in A(X)$，且 a_2、$b_2 \in \mathrm{Soc}(A)$。这便意味着，对于所有 $x \in X$， $\theta_{(a,b)}(x) = \theta_{(a_1,b_1)}(x) \in A(X)$，因此$A = L(X) \subseteq A(X)$。□

推论 4.6。 设 A是一个多置换斜括号。以下条件等价:

(1) A 作为斜括号是单生成的，(2) A 作为强左理想是单生成的。

特别地，若 $x \in A$ 作为强左理想生成 A，则它作为斜括号生成 A。

我们得到以下推论，它推广了 [Rum20b，定理 3]。为简便起见，若解 (X, r) 是斜括号 A 的循环基，意指 X 是 A的循环基，且将 (A, r_A) 限制到 X后恰好得到 (X, r)。

推论 4.7。 设 $(X$<*style id='6'*, $r)$ 是一个单射多置换解。以下陈述等价。

(1) (X, r) 是不可分解的，(2) 每个以(X, r) 为循环基的斜括号都由任意一个 $x \in X$生成，(3) 每个 $x \in X$ 都生成一个斜括号 A，使得 X 是 A中 x 的轨道。(4) 存在一个由某个 $x \in A$生成的斜括号，使得 X 是 A中 x的轨道。

证明。 我们首先证明从 1 到 2 的蕴含关系。回顾一下，每个单射解 (X, r) 都是 $G(X, r)$ 的循环基。此外，如果 (X, r) 是多置换的，那么根据定理 3.13， $G(X, r)$ 也是多置换的。如果 (X, r) 是不可分解的，那么 (X, r) 是 $G(X, r)$ 的传递循环基，因此根据推论 4.4， $G(X, r)$ 由 X 中的任意元素生成。根据 $G(X, r)$ 的泛性质可知，每个以 (X, r) 为循环基的斜括号 A 都是 $G(X, r)$ 的同态像（其中循环基 $X \subseteq G(X, r)$ 映射到循环基 $X \subseteq A$）。因此， A 也由任意一个 $x \in X$生成。

从 2 到 3 的蕴含再次由 (X, r) 嵌入$G(X, r)$ 得出。从 3 到 4 的蕴含是显然的。为证明 4 蕴含 1，注意到X 是 A 的传递循环基，因此 (X, r) 必定不可分解。□

接下来，我们研究生成斜括号的集合分别作为理想和强左理想时二者之间的关系。以下结果已在 [JKVAV21],中证明，它为确定一大类斜括号作为理想的最小生成元个数提供了一种简便方法。对于斜括号 A，记 $\omega(A)$为 A 的子集的最小（可能为无限）基数，使得该子集作为理想生成 A。此外，仿照[BFP22, LV22] ，对于任意斜括号 A，我们定义 A' 为由 A^2 和 $(A, +)$ 的交换子子群生成的理想，并将其称为 A的交换子。

定理 4.8。 设 A 是一个斜括号，满足 $\omega(A) < \infty$，且其理想满足降链条件。则 $\omega(A) = \omega(A/A^2) = \omega(A/A')$。

下面的例子表明，一般而言，斜括号若作为理想由一个元素生成，并不意味着它也能作为强左理想由一个元素生成。因此，若要使这一结论成立，我们需要对 A施加额外条件。

例 4.9. </style}设 $A = \mathrm{Triv}(\mathbb{Z}/2)$ 和 $B = \mathrm{Triv}(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p)$，其中某个素数$p$ 为奇数，并考虑半直积 $C = A \ltimes B$，其定义参见 [SV18, Corollary

3.36],其中 A 通过取逆作用。具体而言，

$$\begin{aligned}(n,m,l)+(n',m',l') &= (n+n',m+m',l+l'),\\ (n,m,l)\circ(n',m',l') &= (n+n',m+(-1)^n m',l+(-1)^n l'),\\ \lambda_{(n,m,l)}(n',m',l') &= (n',(-1)^n m',(-1)^n l').\end{aligned}$$

于是我们得到 $C^2 = B$，因此 $(C/C^2,+) \cong \mathbb{Z}/2$ 是循环的，由定理 4.8 可知 $\omega(A) = 1$。我们断言，C 不是作为强左理想的单生成对象。若确实如此，则该生成元的像应生成 C/C^2，因此它具有 $(1,l,m)$ 的形式，其中 $l,m \in \mathbb{Z}/p$。然而，我们很容易看出，对于 $l,m \in \mathbb{Z}/p$ 的任意取值，集合 $\{(n,rm,rl) \mid n \in \mathbb{Z}/2, r \in \mathbb{Z}/p\}$ 是一个包含 $(1,l,m)$ 且指数为 p 的强左理想。因此，C 不是作为强左理想的单生成对象。

定理 4.10。设 A 是一个左幂零斜括号，X 是 A 的一个子集。如果 X 在 A/A^2 中的像作为强左理想生成 A/A^2，那么 X 作为强左理想生成 A。

证明。令 $L = L(X)$ 表示由 X 生成的 A 的强左理想。我们将对 n 使用归纳法，证明 $L + A^n = A$，从而得到该结论。由于 X 在 A/A^2 中的自然像作为强左理想生成 A/A^2，我们得到 $L + A^2 = A$。现在令 $n \geq 2$，并假设 $L + A^n = A$。对于 a，由 b、$c \in A$ 可知 $a * (b + c) = a * b + b + a * c - b$，因此我们得到

$$A^2 = A * (L + A^n) = A * (A^n + L) \subseteq A^{n+1} + L.$$

然而我们知道 $L + A^2 = A$，因此 $A \subseteq L + A^{n+1}$。 □

推论 4.11。设 A 是一个满足理想上的降链条件（以下简称 *DCC*）的有限权左幂零斜括号。A 作为强左理想的最小生成元个数等于 $\omega(A)$。

证明。只需证明 A 可由 $\omega(A)$ 个元素作为强左理想生成。由定理 4.8 可知，$\omega(A) = \omega(A/A^2)$。由于 A/A^2 中的每个强左理想都是理想，因此 $\omega(A/A^2)$ 也是 A/A^2 作为强左理想的最小生成元个数；由定理 4.10，我们于是得到一个大小为 $\omega(A)$ 的生成集，该生成集作为强左理想生成 A。□

推论 4.12。设 A 是一个左幂零斜括号，且 A 满足理想上的降链条件，则以下条件等价：

(1) A 作为强左理想是单生成的，(2) A 作为理想是单生成的，(3) $(A/A', +)$ 是循环的。

证明。由推论 4.11 可知，条件 1 与条件 2 等价。由定理 4.8 可知，条件 2 与条件 3 等价。□

引理 4.13。设 A 是一个斜括号，满足 $(A/A', +)$ 是循环的，且 $(A, +)$ 或 $(A, \circ)$ 是幂零的，则 $A^2 = A'$。

证明。考虑商群 A/A^2，并将其底层群记作 G。那么 G 是幂零的，且 G/G' 是循环的，但一个简单的练习表明，这意味着 G 是循环的。特别地，A/A^2 是一个平凡括号，因此 $A' \subseteq A^2$。□

命题 4.14。 设 A 是一个湮灭子幂零斜括号。以下条件等价：

(1) A 是单生成斜括号，(2) A 是单生成强左理想，(3) A 是单生成理想，(4) $(A/A^2,+)$ 是循环的。

在这种情况下，对于元素 $x \in X$，以下条件等价：

(1) x 生成 A 作为斜括号，(2) x 生成 A 作为强左理想，(3) x生成 A 作为理想，(4) $x + A^2$ 生成 $(A/A^2,+)$。

证明。 第一部分由推论 4.6、推论 4.12 和引理 4.13 得出。再结合定理 4.10，即可得到第二部分。□

命题 4.14 的第一部分推广了 [Rum23，推论 1]。在同一篇论文中，Rump 在命题 5 中证明，对于乘法群为阿贝尔群的单生成括号，传递循环基恰好是生成 A/A^2的 A^2 陪集。注意，乘法群为阿贝尔群的有限括号是有限双侧 brace，这意味着它是湮灭子幂零的，因此人们可能会预期，类似结论对所有湮灭子幂零括号都成立。下面的例子表明，即使是与这一类非常相似的斜括号——本例中为具有阿贝尔置换群的湮灭子幂零括号和湮灭子幂零斜括号——也不具备类似性质。

例 4.15。设 $(A,+) = (\mathbb{Z}/p)^n$，其中 p 是素数，且 $2 \le n < p$ ，并令$\phi \in \mathrm{Aut}(A,+)$为由大小为 n 的 Jordan 块给出的自同构（其中我们将 $(\mathbb{Z}/p)^n$ 视为列向量）。令 $\lambda : (A,+) \to \mathrm{Aut}(A,+)$由 $(a_1, ..., a_n) \mapsto \phi^{a_n}$给出。特别地，我们发现 $\ker \lambda = (\mathbb{Z}/p)^{n-1} \times \{0\} = \{\phi(a) - a \mid a \in A\}$。因此，由 [ST23，定理 6.6] 可得一个双斜 brace $(A,+,\circ)$，其中$a \circ b = a + \lambda_a(b)$。容易看出，$(A,\circ)$为阿贝尔群当且仅当 $n = 2$。注意， A 是 2 阶右幂零的，因此它特别是一个双斜 brace。它是左幂零的，因为其阶为素数幂（见 [CSV19，命题 4.4]），故 A 是一个湮灭子幂零括号。由于$(A,\circ)/\ker\lambda$是一个 p 阶循环群，我们看到所有传递循环基的大小均为 p。因为 $|A^2| = p^{n-1}$，传递循环基是 A^2 的陪集当且仅当 $n = 2$；在这种情况下，$(A,\circ)$是阿贝尔群。

例4.16. 对于任意素数 p 和 $2 \le n < p$，例 4.15 中的斜括号 $(A,+,\circ)$ 都是双斜 brace；我们也可以考虑斜括号 $(A,\circ,+)$，它仍然是湮灭子幂零的。现在，它的乘法群总是阿贝尔群，而它的加法群是阿贝尔群当且仅当 $n = 2$。由于这个斜括号中元素 $a \in A$ 的 λ-映射由 λ_a^{-1}给出，其中 λ_a 是$(A,+,\circ)$中 a 的 λ-映射，并且$(A,\circ,+)^2 = (A,+,\circ)^2$,，我们得到与前一种情况相同的结论：$(A,\circ,+)$的传递循环基是$(A,\circ,+)^2$ 的陪集，当且仅当 $n = 2$，因此当 A 时它是一个括号。

5. 有限多置换级解的一个应用

在 [JPZD21 中，命题 5.1], Jedlička、Pilitowska 和 Zamojska-Dzienio 证明了，具有阿贝尔置换群且多置换级 2 的有限不可分解对合解，其自同构群与整个

自同态半群相同。在下面的定理中，我们将证明一个显著的事实：不可分解多置换解没有子解。因此，我们将上述关于自同态半群的结果推广到所有具有有限多置换级的有限不可分解对合解。

定理 5.1。 设 $(X,\ r)$ 是一个有限多置换级的不可分解解，则$(X,\ r)$ 不包含非平凡子解。

证明。 设 $(Y,s)\ =(Y,r_{Y\times Y})$ 是 (X,r) 的一个子解。注意，结构斜括号 $G(Y,s)$ 的加法群和乘法群的定义关系，分别包含于结构斜括号 $G(X,r)$ 的加法群和乘法群的定义关系中。因此，我们得到一个良定义的斜括号同态 $\phi:\ G(Y,s)\ \to G(X,r)$。由于 ϕ的像包含传递循环基 $\iota(X)$ 中的元素，而该传递循环基的每个元素根据定理 4.5 都生成 $G(X,r)$，我们发现 ϕ 是满射的。由于 ϕ 是一个斜括号同态，它诱导出一个同态

$$\phi' : (G(Y,s),+)\rtimes(G(Y,s),\circ)\to(G(X,r),+)\rtimes(G(X,r),\circ),\quad (a,b)\mapsto(\phi(a),\phi(b)),$$

它通过对 X 的作用，将 $(G(Y,s)\ +)\ \rtimes(G(Y,s)\ \circ)$ 的作用分解为 $(G(X,r)\ +)\rtimes(G(X,r)\ \circ)$ 的作用。特别地，我们知道 $(G(Y,s)\ +)\rtimes(G(Y,s)\ \circ)$ 具有传递性。注意，在此作用下，一个元素的像完全可以由置换 σ_y、σ_y^{-1}、τ_y、τ_y^{-1} 表示，其中 $y\in Y$。由于 $r(Y\times Y)\ \subseteq Y\times Y$，这意味着 $Y=X$。□

推论 5.2。 设 $(X,\ r)$ 是一个不可分解多置换解，则 $(X,\ r)$ 的每个自同态都是满射。特别地，如果 $|X|<\infty$，则 $(X,\ r)$ 的每个自同态都是自同构。

证明。 只需回顾一下，自同态在 X 上的像是 X 的子解。□

下面的例子表明，关于多置换层级的假设不可省略。

例 5.3。 设 $X:=\{1,2,3,4\}$，且 r 是如下给出的对合解：$\sigma_1:=$(3 4)，$\sigma_2:=$(1 3 2 4)，$\sigma_3:=$(1 4 2 3)，$\sigma_4:=$(1 2)，对所有 $x,y\in X$ 均成立。则集合 $Y:=\{1\}$ 是 X 的子解。

在 [Bon22], Bonatto 研究了一类特殊的左拟群，称为超连通 左拟群。回顾一下，左拟群是一种只有一个二元运算的代数结构，且所有左乘映射均可逆。沿用 [Bon22], 的术语，若由左乘映射生成的群 $\mathcal{G}(X)$ 在 X 上传递作用，则称左拟群为连通；若每个子左拟群都是连通的，则称其为超连通。不可分解对合解通过运算 $x\cdot y:=\sigma_x^{-1}(y)$（对所有 $x,y\in X$）可导出连通左拟群（更多细节参见 [Rum05]）。作为定理 5.1 的进一步推论，我们得到以下结果。

推论 5.4. 设 (X,r) 是一个具有有限多置换级的不可分解对合非退化解。那么，与 X 相关联的左拟群没有非平凡子左拟群。特别地，X 是超连通的。

6. 解的自同构群

本节中，我们研究具有正则置换群的不可分解对合解的自同构群。特别地，我们重新得到并推广了 [JPZD21 的本节 5], 中包含的一些结果；该文详细研究了具有阿贝尔置换群且多置换级为 2 的不可分解对合解的自同构群。

备注 6.1. 本节我们只考虑置换群为正则群的不可分解对合解。根据定理 2.2，在本节余下部分中，不妨假设 $(X,r) = (A,r_x)$，其中 x 是斜括号 A 的传递循环基中的一个元素。

首先，我们借助左括号描述置换群为正则群（不一定是阿贝尔群）的不可分解解的自同构群。回顾一下，对于斜括号 A 和 $z \in A$， t_z 是乘法群中由 z 给出的右平移。

命题 6.2. 设 A 是一个括号， $x \in A$ 属于一个传递循环基，并且$(X,r) := (A,r_x)$。那么，

$$\mathrm{Aut}(X,r) = \{t_z \circ \psi \mid \psi \in \mathrm{Aut}(A,+,\circ), z \in A, \psi(x) = \lambda_z(x)\}.$$

此外，如果 X具有有限多置换级，则有 $|$自同构群$(X,\ r)| \leq |X|$。

证明。 根据定理 2.3，若 (A,r_x) 和 (A,r_y) 是两个同构解，且$x,y \in X$，而 F是从 (A,r_x) 到 (A,r_y) 的一个同构，则存在 $\psi \in Aut(A,+,\circ)$ 和 $z \in A$，使得 $\psi(x) = \lambda_z(y)$ 且 $F = t_z \circ \psi$。因此，令 $x = y$，即可得到论断的第一部分。对于最后一部分，只需注意，若 $\psi, \psi' \in \mathrm{Aut}(A,+,\circ)$ 满足 $\psi(x) = \psi'(x)$，由于根据我们的假设，由推论 4.6 可知， A 由 x 作为斜括号生成，因此可得 $\psi = \psi'$。□

注记 6.3. Rump 的一项著名结果 [Rum07b] 指出，若 A 是一个乘法群为阿贝尔群的有限 brace，那么作为左括号，它同构于其加法群的 Sylow p-子群的直积。结合前一个命题，这一事实意味着，计算具有阿贝尔置换群的有限不可分解对合解的自同构群，可以归约为计算素数幂阶解的自同构群。

设 A 是一个具有传递循环基 Y的斜括号。我们将 $\mathrm{Aut}(A,Y)$ 定义为由所有斜 brace 自同构 $\psi : A \to A$ 组成的群，其中 $\psi(Y) \subseteq Y$。进一步推论如下。

推论 6.4. 设 A 是一个括号， Y 是 A, $x \in Y$ 的传递循环基，且$(X,r) := (A,r_x)$。那么 $\mathrm{Aut}(X,r)$ 有一个正规子群，同构于 $(\mathrm{Soc}(A)\ \circ)$，且其商群同构于 $\mathrm{Aut}(A,Y)$。

证明。 令 ϕ: 自同构群$(X,r) \to$自同构群(A,Y) 为映射，将 $t_z \circ \psi \in$自同构群(X,r) 映至 ψ。这是一个定义良好的群同态，其核恰为 $\{t_z \mid z \in \mathrm{Soc}(A)\}$。此外，自同构群$(A,Y)$ 的定义保证 ϕ 是满射。□

6.1. **具有阿贝尔置换群和多置换层级 2的不可分解解**。现在，我们研究具有阿贝尔置换群且多置换层级为 2 的不可分解解。

引理 6.5。 设 A 是一个具有传递循环基 X 的括号。此外，假设 A 的多置换层级为 2。则 自同构群$(A, X) = \{\lambda_a \mid a \in A\}$。

证明。 由于根据推论 3.11 和推论 3.12 A 是一个双斜 brace，我们发现对于每个 $a \in A$， λ_a 都是一个斜 brace 自同构。特别是，因为 A 具有有限多置换级，根据推论 4.6，我们知道每个元素 $x \in X$都生成一个作为括号的 A 。因此，对于每个 $\psi \in \mathrm{Aut}(A, X)$，我们发现 $\psi(x) = \lambda_a(x)$，其中某个 a，于是 $\psi = \lambda_a$。□

在此背景下，不可分解解的自同构群的描述可以简化，正如下一个结果所示。

推论 6.6。 设 A 是一个括号， $x \in A$ 包含在一个传递循环基中，并且$(X, r) := (A, r_x)$。此外，假设多项式增长级$(X, r) = 2$。那么，

$$\mathrm{Aut}(X, r) = \{t_a \circ \lambda_a \mid a \in A\}.$$

证明。 证明由推论 3.11、命题 6.2 和引理 6.5 得出。 □

在下一个定理中，即本节的主要结果，我们借助置换括号给出具有阿贝尔置换群和多置换级 2 的不可分解对合解的自同构群结构。

定理 6.7。 设 A 为一个乘法群是阿贝尔群的括号， $x \in A$ 包含于一个传递循环基中，且 $(X, r) := (A, r_x)$。此外，假设 $\mathrm{mpl}(X, r) = 2$。则其自同构群 $\mathrm{Aut}(X, r)$ 同构于加法群$(A, +)$。

证明。 令 Φ 为从 $\mathrm{Aut}(X, r)$ 到 $(A, +)$ 的函数，其定义为：对所有 $a \in A$， $\Phi(t_a \circ \lambda_a) := a^-$（注意，根据推论 6.6，在我们的假设下，$\mathrm{Aut}(X, r)$ 的每个元素都具有 $t_a \circ \lambda_a$ 的形式）。则 Φ 是一个双射，且

$$\Phi(t_a \circ \lambda_a \circ t_b \circ \lambda_b) = \Phi(t_{a \circ \lambda_a(b)} \circ \lambda_{a \circ b}) = (a \circ \lambda_a(b))^-$$

对所有 $a, b \in B$ 均成立。现在，由推论 3.12 $\lambda_a \in Aut(A, \circ)$，并根据假设 $(A, \circ)$ 是阿贝尔群，因此我们有

$$(a \circ \lambda_a(b))^- = a^- \circ \lambda_a(b^-) = a^- + b^- = \Phi(t_a \circ \lambda_a) + \Phi(t_b \circ \lambda_b)$$

因此结论成立。 □

作为第一个应用，我们可以给出 [JPZD21，命题 5.1] 的一个更简短的证明。

推论 6.8。 设 A 是一个乘法群为阿贝尔群的括号， $x \in A$ 包含于一个传递循环基中，且$(X, r) := (A, r_x)$。此外，假设多项式增长级$(X, r) = 2$。那么，其自同构群自同构群(X, r) 是一个正则阿贝尔群。

证明。 由于对所有 $a \in A$， $t_a(\lambda_a(0)) = a$ ，我们有 $\mathrm{Aut}(X, r)$ 是传递的；并且根据前述定理，$\mathrm{Aut}(X, r)$ 是一个阿贝尔群，且 $|\mathrm{Aut}(X, r)| = |X|$。□

在 [JPZD21 中，命题 5.3], 给出了关于具有多项式增长级 $\mathrm{mpl}(X, r) = 2$ 且置换群为循环群的不可分解对合解（X, r）的大小的充要条件，以说明 $\mathrm{Aut}(X, r)$ 何时为循环群。下面，当（X, r）具有循环置换群时，我们给出 $\mathrm{Aut}(X, r)$ 的确切结构。

推论 6.9。 设（X， r）是一个置换群为循环群、大小为 p^n 、其中某个素数为 p 的不可分解对合解。此外，假设多项式增长级$(X, r) = 2$。那么，$\mathrm{Aut}(X, r)$ 同构于大小为 p^n 的循环群，如果（p， n）$\neq (2, 2)$；否则同构于克莱因四元群。

证明。 由定理 6.7，Aut(X, r) 同构于 $(\mathcal{G}(X, r), +)$；根据 [BCJ16，命题 5.4]，当 $(p, n) \neq (2, 2)$ 时，它是循环的。若 $p = n = 2$，则根据 [Bac15] 中给出的大小为 p^2 的括号分类，结论成立。□

推论 6.10。 设(X, r) 是一个不可分解对合解，其置换群为阿贝尔非循环群，大小为某个素数 p^n p。此外，假设多项式增长级$(X, r) = 2$。那么，当且仅当$(p, n) = (2, 2)$时，自同构群 (X, r) 是循环的。

证明。 若 Aut(X, r) 是循环群，则由定理 6.7， $\mathcal{G}(X, r)$ 的加法群是循环群；又因 $\mathcal{G}(X, r)$ 是双斜 brace，所以 $(\mathcal{G}(X, r), \circ, +)$ 是一个括号，因此根据 [BCJ16，命题 5.4]，必有 $p = n = 2$。反过来，由 [Bac15] 中给出的大小为 p^2 的左 brace 分类可得结论。□

我们以说明自同构群 Aut(X, r) 的结构限制来结束本节。

推论 6.11. 设(X, r) 是一个具有阿贝尔置换群的不可分解对合解。此外，假设多项式增长级$(X, r) = 2$。那么，自同构群(X, r) 至多可由两个元素生成。

证明。 令 $(\mathcal{G}(X, r), +, \circ)$ 为 X 的置换 brace。由推论 3.12，$(\mathcal{G}(X, r), +, \circ)$ 是一个多置换级 2 的双斜 brace；此外，$(\mathcal{G}(X, r), +, \circ)$ 的一个传递循环基也是 $(\mathcal{G}(X, r), \circ, +)$ 的传递循环基，这意味着 $(\mathcal{G}(X, r), \circ, +)$ 是一个具有多置换级 2 的不可分解解的置换 brace。因此，由 [JPZD21，命题 4.1], $(\mathcal{G}(X, r), +)$ 至多可由两个元素生成，故由定理 6.7 可得结论。□

6.2. **具有循环置换群的不可分解对合解**。本节考察具有循环置换群的不可分解对合解的自同构群。如果一个不可分解对合解 (X, r) 的置换 brace 是循环的，即具有循环加法群，那么我们可以更明确地描述 Aut(X, r)。

命题 6.12。 设 A 是一个循环括号， $x \in A$ 包含于传递循环基中，且 (X, r):$= (A, r_x)$。则其自同构群 $\mathrm{Aut}(X, r)$ 等于集合

$$\mathrm{Aut}(X, r) = \{t_a \circ \lambda_a \mid a \in A, \lambda_a \in Aut(A, \circ)\}.$$

证明。 在我们的假设下， x 是 $(A, +)$ 的一个生成元：事实上，如果由 x 生成的加法子群等于 $(mA, +)$，其中某个 $m \in \mathbb{N}$，并且Z 是包含 x 的传递循环基，我们得到 $A = \langle Z \rangle_+ \subseteq mA$，因此必然有 $m = 1$。所以，如果 $\psi \in Aut(A, +, \circ)$ 和 $a \in A$ 满足$\lambda_a(x) = \psi(x)$，那么 $\psi = \lambda_a$，从而由命题 6.2 可得结论。□

在给出以下结果之前，我们回顾一下：如果 $(A, +, \circ)$ 是一个阶为素数幂 p^n 的括号，其加法群是循环群（我们将其视为 $\mathbb{Z}/p^n$），且乘法群是阿贝尔群，那么根据 [Rum07a]，存在 $k \in \mathbb{N}$，使得$a \circ b = a + b + p^k ab$ 对所有 $a, b \in A$ 均成立。

在 [JPZD21 第 5] 节中，证明了一个多置换层级 $\mathrm{mpl}(X,r) = 2$ 、具有阿贝尔置换群的不可分解对合解，其自同构群是阿贝尔群；并确定了同时具有循环自同构群和循环置换群的那些解。下文中，我们将计算推广到具有循环置换群和任意多置换层级的不可分解对合解的 $\mathrm{Aut}(X,r)$。

定理 6.13。 设 A 是一个大小为 p^n 的括号，其中加法群和乘法群都是循环群，$x \in A$ 包含于一个传递循环基中，且$(X,r) := (A, r_x)$。此外，设 $k \in \mathbb{N}$ 满足：对于所有$a, b \in A$，都有 $a \circ b := a + b + abp^k$。那么，自同构群$(X,r)$ 与 $(A,+)$ 同构，当且仅当 $k = 0$ 或 $k \geq \frac{n}{2}$；否则，它与 $(p^{n-2k}A,+)$ 同构。

证明。 设 Φ 是从 $\mathrm{Aut}(X,r)$ 到 $(A,+)$ 的函数，定义为 $\Phi(t_a \circ \lambda_a) := a^-$，对所有 $a \in A$均成立。与定理 6.7 中一样，可以证明 Φ 是一个同态。此外， Φ 是单射。现在，通过标准计算可得，若 $z \in A$，则 $\lambda_z \in Aut(A,\circ)$ 当且仅当 $k = 0$、$k \geq \frac{n}{2}$ 或 p^{n-2k} 整除 z。由此可知， Φ 的像为 A 当且仅当 $k = 0$ 或 $k \geq \frac{n}{2}$；否则， $\Phi(A)$ 等于 $(p^{n-2k}A,+)$。□

由于根据 [BCJ16, 命题 5.4], , 除 $p^n = 4$ 情形外，每个素数幂阶为 p^n 且乘法群为循环群的括号都具有循环加法群，因此，结合前述定理以及推论 6.9（用于涵盖 $p^n = 4$ 情形），即可计算每个具有循环置换群的不可分解对合解的自同构群的同构类。

推论 6.14。 设 (X,r) 是一个具有循环置换群且阶为 p^n 的不可分解对合解，其中 p 为素数。那么，当 $(|X|, \text{多项式增长级}(X,r)) \neq (4,2)$ 时，自同构群(X,r) 是 $|X|$ 阶的循环群；否则，它与克莱因四元群同构。

证明。 若 $(|X|, \text{多项式增长级}(X,r)) \neq (4,2)$，则根据 [BCJ16, 命题 5.4]，$(\mathcal{G}(X), +, \circ)$ 是一个括号，其中加法群和乘法群均为循环群，因此由前述定理可得结论。若 $(|X|, \text{多项式增长级}(X,r)) = (4,2)$，则由推论 6.9 可得结论。□

在 [JPZD21 中，命题 5.1] 证明了：如果 X 是具有阿贝尔置换群的不可分解解，且 $\mathrm{mpl}(X,r) \leq 2$，那么 $\mathrm{Aut}(X,r)$ 是一个阿贝尔群，并且在 X 上传递作用。我们以本节的如下结论作结：如果进一步假设 X 具有循环置换群，那么即使不限制多置换层级，仍可证明 $\mathrm{Aut}(X,r)$ 的阿贝尔性。

推论6.15。 设(X, r) 是具有循环置换群的不可分解对合解。那么，自同构群(X, r) 是一个阿贝尔群；此外，它在 X 上传递作用，当且仅当 X 的多置换层级至多为2。

证明。 该陈述的第一部分由注 6.3 和推论 6.14 得出；第二部分由命题 6.2 和推论6.8 得出。□

7. 阿贝尔置换群下的有限不可分解对合解

本节研究阿贝尔置换群的不可分解解，并在一定程度上对其进行分类和计数。我们从

命题 7.1 开始，它是 [Rum23 的推论 2] 的一个略微变体。令 AbBr 为一个范畴，其对象是具有阿贝尔乘法群并带有指定传递循环基 X 的括号 A。我们将这样的对象记为 (A, X)。态射 $(A, X) \to (B, Y)$ 是括号态射 $f\colon A \to B$，满足 $f(X) \subseteq Y$。此外，令 AbSol 为由阿贝尔置换群的不可分解对合解及解的同态构成的范畴。注意，对于 AbBr 中的对象 $(A, X) \in$，Aut(A, X) 与上一节中的定义一致。

命题 7.1. AbSol 的同构类与AbBr中的同构类之间存在双射对应。此外，在此对应下，对象的大小和多置换层级均保持不变。

在此对应下，以(A, X) 为代表元的AbBr中的一个同构类，被映射到解(A, r_x) 的同构类，其中 $x \in X$ 可任意选取。

证明。 回顾定理 2.2，每个具有阿贝尔置换群的不可分解对合解都可以写成 (A, r_x)，其中 $(A, X) \in$ AbBr 且$x \in X$。此外，由定理 2.3 可知，(A, r_x) 的同构类不依赖于 $x \in X$ 的选择。根据定理 2.3，我们还发现，与 (A, X)、$(B, Y) \in$AbBr 相关联的解同构，当且仅当 (A, X) 与 (B, Y) 同构。显然，此对应保持对象的大小；定理 3.10 和推论 3.11 保证多置换层级也保持不变。□

根据下面的引理，我们可以将对有限对象 $(A, X) \in$AbBr 的研究限制在素数幂阶的对象上。

引理 7.2。 每个有限大小的对象 $(A, X) \in \mathbf{AbBr}$ m 都同构于$\prod_{p|m}(A_p, X_p)$，其中 A_p 是 $(A, +)$ 的 *Sylow* p-子群，而 X_p 是 X 在 A_p上的投影。

证明。 这直接由 [Rum07b，命题 3] 和 [Rum23，命题3]得出。□

回顾定理 4.5，具有阿贝尔乘法群且存在传递循环基的多置换括号必定是单生成括号。在雅各布森根环与双侧括号的对应关系下，作为环单生成通常不同于作为斜括号单生成；后者的条件较弱，因为雅各布森根环的子环在运算 $\circ$下是幺半群，但不一定是群。然而，对于幂零环，尤其是幂零双侧括号 A，这两个概念一致，因为 $a^- = \sum_{i=1}^{\infty}(-a)^i$ 对任意 $a \in A$ 均成立。

设 A 是一个乘法群为阿贝尔群且生成元为 $x \in A$ 的单生成多置换 brace。由于 A 是单生成环，每个元素 $a \in A$ 都具有形式 $\sum_{i=1}^{n} a_i x^i$，其中 $n \geq 0$ 和 $a_i \in \mathbb{Z}$ 满足条件，且 x^n 是 n 个 x 的 $*$-积。更一般地，每个元素 $a \in A^k$ 都可写成 $\sum_{i=k}^{n} a_i x^n$，其中 $n \geq 0$ 和 $a_i \in \mathbb{Z}$ 满足条件；等价地，对于 $k > 1$，有 $A^k = \{x^{k-1} * a \mid a \in A\}$。由于 $*$-乘法是 $(A, +)$ 的自同态，因此我们得到以下结果。

引理 7.3. 设 A 是由 $x \in A$ 生成且乘法群为阿贝尔群的括号。则我们有一系列满群同态

$$(A/A^2, +) \to (A^2/A^3, +) \to (A^3/A^4, +) \to ...$$

其中，对所有 $i \geq 1$，映射 $A^k/A^{k+1} \to A^{k+1}/A^{k+2}$ 由 $a + A^{k+1} \mapsto x * a + A^{k+2}$ 给出。

定义 7.4。对于一个乘法群为阿贝尔群的有限 brace（泡利群） A，若 $|A^i/A^{i+1}| = m_i$ 对于 $1 \leq i < n$ 和 $A^n + 1 = 0$ 成立，则称 A 对于 $m_1, ..., m_n \geq 1$ 为类型 $(m_1, ..., m_n)$。我们将 AbBr$(m_1, ..., m_n)$ 定义为 AbBr 的满子范畴，其对象为 (A, X)，且 A 的类型为 $(m_1, ..., m_n)$。

由引理 7.3 可直接得出，若多置换 brace（泡利群） A 的类型为 $(m_1, ..., m_n)$，则必有 $m_{i+1}|m_i$ 对于 $0 \leq i < n$ 成立。此外，众所周知，有限雅各布森根环是幂零的，因此 AbBr 中的每个有限对象都属于某种类型。特别地，若对于某个素数 p 有 $|A| = p^d$，则 A 的类型为 $(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$，其中 $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n \geq 0$ 满足 $d = d_1 + ... + d_n$。

定义 7.5. 对于有限多置换解 (X, r)，如果 $|\operatorname{Ret}^{i-1}(X, r)|/|\operatorname{Ret}^i(X, r)| = m_i$ 对 $1 \leq i < n$ 成立，且 $|\operatorname{Ret}^n(X, r)| = 1$成立，我们称 (X, r) 的类型为 $(m_1, ..., m_n)$，其中 $m_1, ..., m_n \geq 1$。我们将 AbSol$(m_1, ..., m_n)$ 定义为由对象 (X, r) 构成的满子范畴，其中 (X, r) 的类型为 $(m_1, ..., m_n)$，且 $\in$ AbSol。

以下结果推广了 Rump 的观察：对于乘法群为循环群的有限 brace A，$|A^2||\operatorname{Soc}(A)| = |A|$；这一点曾在 [Rum23] 的引言中提及，并可由方程 (15) 和 [Rum19a] 中的命题 9 推出。

引理 7.6. 设 A 是一个乘法群为阿贝尔群的有限单生成 *brace*，则 $|Soc_k(A)||A^{k+1}| = |A|$，或者等价地，对所有 $k \geq 0$，$|A^k| = |\operatorname{Ret}^{k-1}(A)|$。

证明。我们用归纳法证明：对于所有的 $k \geq 1$ 和 $a \in A$，$x^k * a = 0$ 当且仅当 $a \in \operatorname{Soc}_k(A)$。对于 $k = 1$，注意到 $x^k * a = 0$ 当且仅当 $a * A = A * a = 0$，而后者等价于 $a \in \operatorname{Soc}(A)$。现在假设该命题对$k \geq 1$成立。那么 $x^{k+1} * a = x^k * (x * a) = 0$ 当且仅当 $x * a \in \operatorname{Soc}_k(A)$。然而，由于 $x + \operatorname{Soc}_k(A)$ 生成 $A/\operatorname{Soc}_k(A)$，情形 $k = 1$ 表明后者等价于 $a+\operatorname{Soc}_k(A) \in \operatorname{Soc}(A/\operatorname{Soc}_k(A))$，因此 $a \in \operatorname{Soc}_{k+1}(A)$。现在注意到$x^k * a = 0$当且仅当 a包含在由乘以 x^k 给出的满同态 $(A, +) \to (A^{k+1}, +)$ 的核中。由于 $A^{k+1} = \{x^k * a \mid a \in A\}$，结论即得。□

命题 7.7. 设 $m_1,..., m_n \geq 1$。命题 *7.1* 中的双射对应限制为$\mathbf{AbSol}(m_1, ..., m_n)$ 的同构类与$\mathbf{AbBr}(m_1,..., m_n)$的同构类之间的双射对应。

证明。这直接由推论 3.9 和引理 7.6 得出。□

推论 7.8. 设 $m_1, ..., m_n \geq 1$ 和(X, r)属于$\mathbf{AbSol}(m_1, ..., m_n)$，则

$$|\operatorname{Aut}(X, r)| = m_1 |\operatorname{Aut}(\mathcal{G}(X, r), X')|$$

其中 X' X 在 $\mathcal{G}(X, r)$ 中的像。

证明。 由推论 6.4 可知，自同构群 Aut(X,r) 有一个正规子群同构于 Soc$(\mathcal{G}(X,r))$，且其商群同构于 Aut$(\mathcal{G}(X,r)\ X')$。由于 $m_1 = |A/A^2|$，而这又由引理 7.6 等于 $|$ Soc$(A)|$ ，故结论成立。□

注意，如果我们想研究 AbBr 的有限对象，那么根据引理 7.2 可直接推出，只需研究所有素数 p 和 $d_1 \geq ... \geq d_n \geq 0$ 下的 AbBr$(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$。这正是本节其余部分的目标。在本节的剩余部分中，我们约定 n 是一个非零正整数， p 是一个素数，d_1、...、 d_n 是满足 $d_1 \geq ... \geq d_n \geq 0$ 和 $d = \sum_{i=1}^{n} d_i$ 的整数。

例 7.9。 考虑环 $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$。令 F_n 表示由 x 生成的子环。显然， F_n 是幂零的，特别地 $F_n^n \neq 0$ ，但 $F_n^{n+1} = 0$。由此可得， F_n 是一个具有阿贝尔乘法群的单生成括号。容易看出， x 的轨道是陪集 $x + F_n^2$，并且是 F_n 的传递循环基。

从现在起，$(F_n, x + F_n^2) \in$ AbBr 将记作 F_n^*。若 I是 F_n的理想，则 $x + F_n^2$ 在 F_n/I 中的像是 F_n/I的传递循环基，而 F_n/I 与此循环基一起将记作 $(F_n/I)^*$。

下述命题很容易验证，并表明 F_n 可视为幂零类为 n 且乘法群为阿贝尔群的自由单生成元括号。

命题 7.10。 设 A 是一个多置换层级至多为 n 的单生成元双侧 ***brace***，且 $y \in A$ 是一个生成元，则存在唯一的满射 ***brace*** 同态 $f\colon F_n \to A$ ，将 x 映射到 y。

推论 7.11。 设 $(A, Y) \in \mathbf{AbBr}$ ，其中 A 的多置换层级至多为 n，则存在一个满同态 $f\colon F_n^* \to (A, Y)$。特别地，(A, Y)与 $(F_n/$核 $f)^*$同构。

推论 7.12。 与一个多置换层级为 n 的不可分解对合解相关的置换群至多由 n 个元素生成。

证明。 由于对于所有 $1 \leq k \leq n$，$(F_n^k/F_n^{k+1}, \circ) \cong \mathbb{Z}$，且 $(F_n, \circ)$ 是阿贝尔群，我们发现 $(F_n, \circ)$ 是秩为 n 的自由阿贝尔群。由推论 7.11 即得结论。□

注记 7.13。 对于 $n = 2$ ，前一个推论已在 [JPZD21] 中得到证明。

由推论 7.11 可知，AbBr$(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 中的每个有限对象都同构于 $(F_n/I)^*$ ，其中 I 是某个理想。因此，如果我们想研究 AbBr$(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 中的有限对象，只需研究形如 $(F_n/I)^*$ 的对象即可。由此产生了两个自然问题：我们能否确定 F_n 的所有理想 I ，使得 $(F_n/I)^* \in$AbBr$(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$，以及我们能否确定两个这样的理想何时给出同构的商群？我们首先回答第一个问题。

我们定义群自同态 $s^+, s^-\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$，使得 $s^+(v_1, ..., v_n) = (0, v_1, ..., v_{n-1})$，且 $s^-(v_1, ..., v_n) = (v_2, ..., v_n, 0)$。

定义 7.14. 令 $\mathcal{M}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 为所有满足以下条件的 $n \times n$ 矩阵 M

(1) M 是上三角的；(2) M 仅包含正整数元素；(3) M 的每个对角元素都严格大于同一列中的其他所有元素，

(4) 对于满足 $1 \leq k \leq n$ 的每个 k， M 的第 k 行在 s^+ 下的像包含于由 $\mathbb{Z}^n$ 的第 $k+1$ 行至第 n 行生成的子群中；(5) M 的对角线为 $(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$。

命题 7.15. 在$\mathcal{M}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 中的矩阵与 I在 F_n 中的理想之间存在双射对应，使得 F_n/I 的类型为$(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$。

证明. 设 $\mathcal{M}'$ 为满足定义 7.14 中条件 (1)–(3) 且对角线仅含非零元素的 $n \times n$-矩阵类。容易看出，每个秩为 n 的整数 $n \times n$-矩阵都行等价于 $\mathcal{M}'$中的唯一矩阵。由线性代数的基本方法可知， $\mathcal{M}'$ 中的矩阵与 $\mathbb{Z}^n$ 的有限指数子群 I 之间存在双射对应，其中对矩阵 $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}'$ ，我们将 M的行所生成的子群与之对应。由于元素 $x, x^2, ..., x^n$ 构成了$(F_n, +)$的一组基，我们得到$\mathcal{M}'$ 中的矩阵与$(F_n, +)$的有限子群之间的对应关系。

我们断言，当且仅当 M满足（4）时， I_M是一个理想。设 f_1，...， $f_n \in F_n$是与 M的各行相对应的 I_M 的生成元。为了使 I_M 成为一个理想，我们需要对所有 $1 \leq k \leq n$都有 $x * f_k \in I_M$。由于 f_k的前 k 个坐标为 0，我们发现后者等价于 $x * f_k \in \langle f_k + 1$，...， $f_n \rangle_+$。因为

用 x 对 f_k 进行 $*$-乘法等同于将其坐标向右移动，因此我们得到了所需的等价关系。

最后，我们证明，当且仅当 M 满足条件（5）时， F_n/I的下中心列的类型为（p^{d_1}，...，p^{d_n}）。为此，只需注意到 F_n^i 是前 $i-1$ 个坐标均为 0 的所有元素，因此（F_n/I）^{i}/（F_n/I）$^{i+1}$的加法群同构于 $\mathbb{Z}/m_{i,\ i}$，由此可得该命题的最后一部分。□

定理 7.16. 设 $M \in \mathcal{M}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 且设 $A = F_n/I_M$。则 (A, r_{x+I_M})是 $\mathbf{AbSol}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 中的一个解，并且 $\mathbf{AbSol}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 中的每个解都与这样的解同构。

证明。 这由推论 7.11 和命题 7.15 得出。 □

注 7.17. 若将 A 中元素的代表元视为它们关于基 $x, ..., x^n$ 的坐标，其中基属于 $(F_n, +)$，则对于 $a = (a_1, ..., a_n)$ $b = (b_1, ..., b_n) \in F_n$，我们发现定理 7.16 中解 (A, r_{x+I_M}) 的 σ-映射由 $\sigma_{a+I_M}(b + I_M) = (c_1(a, b) ..., c_n(a, b)) + I_M$ 给出，其中 $c_1(a, b) = b_1 + 1$，且

$$c_i(a, b) = a_{i-1} + b_{i-1} + b_i + \sum_{1 \leq k < i} a_k b_{i-k}.$$

命题 7.18。集合 $\mathcal{M}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 的大小为 p^{d-d_1}。

证明。 我们将对 n 使用归纳法来证明这一点。如果 $n = 1$ ，则结论显然成立。现在设 $n \geq 2$。令 $M' \in \mathcal{M}(p^{d_2}, ..., p^{d_n})$。我们将计算有多少个矩阵$M \in \mathcal{M}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$，使得从 M 中删去第一行和第一列后，得到 M'。

令 $f_i \in \mathbb{Z}^n$ 为此类 M 的第 i 行。那么 f_2、...、 f_n 完全由 M' 确定，因此我们需要计算 f_1 的选择数。下面考察定义 7.14 中的条件对 f_1 有何影响：条件 (1) 不对 f_1 施加限制；条件 (4) 意味着 $s^+(f_1) \in \langle f_2$、 ... 、 $f_n \rangle_+$ ；条件 (5) 意味着 f_1 的第一个坐标是 p^{d_1}。条件 (2) 和 (3) 意味着我们可以在 $\mathbb{Z}^n/\langle f_2$、...、 $f_n \rangle_+$ 中将 f_1 确定到等价关系意义下，因为这些条件随后会确保代表元的选取唯一。注意，考虑 f_1

在此等价关系意义下，不会与 (4) 和 (5) 所施加的限制产生任何冲突。

显然，$H = \langle s^-(f_3), ..., s^-(f_n)\rangle + \mathbb{Z}x^n$ 是 $\mathbb{Z}^n$ 的最大子群，使得$s^+(H) \subseteq \langle f_3, ..., f_n\rangle_+$，因此特别有 $\langle f_2, ..., f_n\rangle_+ \subseteq H$。那么，条件$s^+(f_1) \in \langle f_2, ..., f_n\rangle_+$ 等价于 $f_1 \in p^{d_1-d_2}s^-(f_2) + H$。因此，$f_1$ 的选择数恰好等于陪集 $p^{d_1-d_2}s^-(f_2) + H$模 $\langle f_2, ..., f_n\rangle_+$中的元素个数，但这恰好是指数 $|H\colon \langle f_2, ..., f_n\rangle_+|$，我们可以将其计算为

$$\frac{|s^+(F_n) : \langle f_2, ..., f_n\rangle_+|}{|s^+(F_n) : H|} = \frac{p^{d-d_1}}{p^{d-d_1-d_2}} = p^{d_2}.$$

我们得出结论，$|\mathcal{M}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})| = p^{d_2}|\mathcal{M}(p^{d_2}, ..., p^{d_n})|$，根据归纳假设，这等于 p^{d-d_1}。
□

推论 7.19。 $\mathbf{AbSol}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 至多包含 p^{d-d_1} 个同构类。

证明。 这直接由定理 7.16 和命题 7.18 得出。 □

既然我们已经知道如何描述和计数 F_n 的有限理想，现在我们关注此前提出的第二个问题；我们通过某个群作用的轨道来描述 F_n 的商群的同构类。我们先处理一般的商群，然后将其限制到如上所述的一个更具体的情形。

引理 7.20。 对于每个 $y \in x + F_n^2$，都存在唯一的自同构，将 x 映射到 y。

证明。 设 $y \in x + F_n^2$。显然 $y^n = 0$，因此存在唯一的环自同态 $\phi_y\colon F_n \to F_n$，满足 $\phi_y(x) = y$。由命题 4.14，y 作为括号生成 F_n，因此 ϕ_y 是满射。由于 $(F_n, +)$ 是有限秩自由的，故 ϕ_y 是 F_n 的自同构；根据构造，它也是 F_n^* 的自同构。
□

推论 7.21. 设 I 和 J 是 F_n 的理想，且 $\phi : (F_n/I)^* \to (F_n/J)^*$ 是一个$\hat{}$同构，则存在一个自同构 $\phi\colon F_n^* \to F_n^*$，使得 $\phi(I) = J\hat{}$，并且 ϕ 是 ϕ 的提升，即下图交换。

$$\begin{array}{ccc} F_n & \xrightarrow{\hat{\phi}} & F_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_n/I & \xrightarrow{\phi} & F_n/J \end{array}$$

证明。 设 $y \in \phi(x + I)$，其中 $y \in x + F_n^2$。特别地，这意味着对于任意元素 $\sum_{i=1}^n a_i x^i \in I$，其中 $a_i \in \mathbb{Z}$，当且仅当 $\sum_{i=1}^n a_i y^i \in J$。现在定义$\hat{}\phi\colon F_n \to F_n$ 为将 x 映射到 y的自同构，该自同构由前一个引理保证存在。于是特别地，$\hat{}\,\phi(I) \subseteq I = J$，因此$\hat{}\,\phi$ 符合上图。□

考虑 $\mathrm{Aut}(F_n^*)$ 在 F_n的理想上的作用，其中 $\phi \in \mathrm{Aut}(F_n^*)$ 将理想 I 映射为 $\phi(I)$。由此得到以下结果。

命题 7.22。 F_n^*的商群的同构类与 F_n 的理想在$)$自同构群作用下的轨道之间存在双射对应。在此对应下，理想 I 的轨道映射到$(F_n/I)^*$的同构类。

证明。设 I、J 是 F_n的理想。假设存在同构 $\theta : (F_n/I)^* \to (F_n/J)^*$。那么，利用推论 7.21，我们发现 ϕ 可提升为 F_n^*的一个自同构 ϕ，使得 $\phi(I) = J$。反过来，任何将I 映射到 J 的 F_n^*的自同构都会诱导出 F_n/I 与 F_n/J之间的同构。□

为了计数，考虑这一作用的一个轻微变体更为方便，使得我们得到一个作用于有限集上的有限群。为此，我们限制于 I的理想 F_n，使得 F_n/I属于类型（$p^{d_1}, ..., p^{d_n}$）。令（$p^d x$）为由 $p^d x$ 生成的 F_n 的理想，并令 $F_{n,p^d} = F_n/$（$p^d x$）。F_n 的指数为p^d 的理想总是包含 $p^d x$，因此它们与 F_n的指数为p^d的理想 $_{p^d}$ 相对应。滥用记号，我们也将 x 在 F_n中的像 $_{p^d}$ 记作 x；而 $F_n^*{}_{,p^d}$是指 AbBr 中由 F_n、$_{p^d}$ 以及包含 x的传递循环基构成的对象。显然，每个具有 $|A| = p^d$ 的（A, X）$\in$ AbBr 都同构于某个理想 I对应的（$F_{n,p^d}/I$）*。由于 F_n 的每个自同构都将（$p^d x$）映射到自身，我们立即得到引理 7.20和推论 7.21的以下变体。

引理 7.23。对于每个 $y \in x + F_n^2$，都存在唯一的 F_{n,p^d}^*自同构，将 x 映射到 y。

推论 7.24。设 I 和 J 是 F_{n,p^d} 的理想，且 $\phi : (F_{n,p^d}/I)^* \to (F_{n,p^d}/J)^*$是一个同构，则存在自同构 $\phi : F_n^*{}_{,p^d} \to F_n^*{}_{,p^d}$ 使得 $\hat{\phi}(I) = J$，并且 ϕ 是 ϕ 的提升，具体而言，下图交换。

$$\begin{array}{ccc} F_{n,p^d} & \xrightarrow{\hat{\phi}} & F_{n,p^d} \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_{n,p^d}/I & \xrightarrow{\phi} & F_{n,p^d}/J \end{array}$$

考虑 Aut(F_{n,p^d}^*) 在 F_{n,p^d}的理想上的作用，其中 $\phi \in$Aut(F_{n,p^d}^*) 将理想 I 映射为 $\phi(I)$。于是得到命题 7.22 的如下变体。

定理 7.25。$\mathbf{AbBr}(p^{d_1},...,p^{d_n})$ 中的同构类与 F_{n,p^d} 的理想 I 的轨道之间存在双射对应，其中 F_{n,p^d} 属于类型$(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$，且轨道取自 $\mathrm{Aut}(F_n^*{}_{,p^d})$的作用。在此对应下，理想 I 的轨道映射为$(F_{n,p^d}/I)^*$的同构类。

利用命题 7.15 中的双射对应，我们可以得到 Aut(F_{n,p^d}^*) 在 $\mathcal{M}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 上的作用，其中 $\phi \cdot M$ 是 $\mathcal{M}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 中与 $\phi(I_M)$ 对应的唯一矩阵，对任意 $\phi \in$Aut(F_{n,p^d}^*) 和 $M \in \mathcal{M}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 均成立。在此作用下，某个 $M \in \mathcal{M}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$ 的轨道记为 $\mathcal{O}(M)$。我们用 $|$AbSol$(p^{d_1},...,p^{d_n})|$ 表示 AbSol$(p^{d_1},...,p^{d_n})$ 中同构类的数量。由命题 7.1 和定理 7.25，我们得到本节的主要结果。

定理 7.26。$\mathbf{AbSol}(p^{d_1},...,p^{d_n})$ 中的同构类与 $\mathcal{M}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})$上$\mathrm{Aut}(F_n^*{}_{,p^d})$ 的作用轨道一一对应。特别地，

$$|\mathbf{AbSol}(p^{d_1}, ..., p^{d_n})| = \sum_{M \in \mathcal{M}(p^{d_1},...,p^{d_n})} \frac{1}{|\mathcal{O}(M)|},$$

7.1. 显式计算。 接下来，我们将把本节前面的结果明确应用于 $n = 2$ 和 $n = 3$的情形。我们首先讨论$n = 2$的情形，这一情形已在 [JPZD21] 中用不同的方法解决；随后，我们还给出 $|\mathrm{AbSol}(p^{d_1}, p^{d_2}, p^{d_3})|$的一个显式公式。对于 $n > 3$，所用技术似乎无法推广；不过，若借助计算机枚举解的同构类数量，看看多置换层级 n 和大小 p^d 最多能达到多少，将会很有意思。

7.1.1. 情形 $n = 2$。 令 $M \in \mathcal{M}(p^{d_1}, p^{d_2})$。因此 M 具有如下形式

$$M = \begin{pmatrix} p^{d_1} & m \\ 0 & p^{d_2}, \end{pmatrix}$$

其中 m 可以自由选取，使得 $0 \le m < p^{d_2}$。回顾一下，F_{2,p^d}^* 的自同构与陪集 $x + F_{2,p^d}$ 中的元素一一对应；对于该陪集中的每个元素 y，我们关联唯一的自同构 ϕ_y，它将 x映射到 y。容易验证，对任意 $a, b \in \mathbb{Z}/p^d$，都有 $\phi_{x+ax^2} \circ \phi_{x+bx^2} = \phi_{x+(a+b)x^2}$，因此 $\mathrm{Aut}(F_{2,p^2}^*) \cong C_{p^d}$。若令 ϕ_{x+ax^2}作用于 M，则可得结果 $\phi_{x+ax^2} \cdot M$，它是 $\mathcal{M}(p^{d_1}, p^{d_2})$ 中与下式行等价的唯一矩阵

$$M = \begin{pmatrix} p^{d_1} & m + ap^{d_1} \\ 0 & p^{d_2}, \end{pmatrix}.$$

因此，由于 $d_1 \ge d_2$，我们得到 $\phi_{x+ax^2} \cdot M$ 与 M 行等价，从而该作用是平凡的。

定理 7.27。 设 p 为素数，$d_1 \ge d_2 \ge 0$ 且 $0 \le m < p^{d_2}$，令 I 为由 (p^{d_1}, m) 和 $(0, p^{d_2})$生成的 $\mathbb{Z}^2$ 的子群，并且 $A = \mathbb{Z}^2/I$。则

$$\sigma_{a+I}(b + I) = (b_1 + 1, a_1 + b_1 + b_2),$$

得到一个解 $(A, r) \in \mathbf{AbSol}(p^{d_1}, p^{d_2})$。

此外，$\mathbf{AbSol}(p^{d_1}, p^{d_2})$ 中的每个解都同构于这样一个解，其中 d_1, d_2 和 m的取值方式是唯一的。

证明。 该陈述的第一部分是定理 7.16和注记 7.17的特例。第二部分由定理 7.26以及 $\mathcal{M}(p^{d_1}, p^{d_2})$上的作用是平凡的这一事实推出。□

推论 7.28。 设 p 为素数，$d \ge 0$。在 **AbSol** 中，大小为 p^d且多置换层级至多为 *2* 的解的总数为

$$(p^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} - 1)/(p - 1),$$

其中，$\lfloor d/2 \rfloor$ 是满足 $n \le d/2$的最大整数 n。

证明。 这由以下计算得出。

$$\sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1 \ge d_2 \ge 0}} |\mathbf{AbSol}(p^{d_1}, p^{d_2})| = \sum_{\substack{d_1+d_2=d \\ d_1 \ge d_2 \ge 0}} p^{d_2} = \sum_{d_2=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} p^{d_2} = (p^{\lfloor d/2 \rfloor + 1} - 1)/(p - 1).$$

□

注 7.29。 定理 7.27 中的分类也已在 [JPZD21], 中以另一种形式得到。值得注意的是， [JPZD21] 中用于分类的技术与我们的方法大相径庭。我们的方法有一个优点：本节前面提出的一般理论框架不会对置换层数施加任何严格限制；但其不足之处在于，置换括号的乘法群和加法群究竟是什么样子，并不能立即看清。 [JPZD21] 中采用的技术则高度依赖于多置换层级为 2 这一假设，似乎无法推广到更高的多置换层级。不过，通过他们的分类，可以立即看出一个解的置换群是什么样子。

7.1.2. 情形 $n = 3$。 现在让我们计算 AbSol 中给定大小且多置换层级至多为 3 的解的数量。为此，我们首先计算$|\mathrm{AbSol}(p^{d_1}, p^{d_2}, p^{d_3})|$。不妨设 $d_3 > 0$，否则该值可由情形 $n = 2$ 得到。考虑 $\mathcal{M}(p^{d_1}, p^{d_2}, p^{d_3})$ 中的矩阵在行等价关系下的情形（记为 $\sim$）将很方便。这没有问题，因为 $\mathcal{M}(p^{d_1},p^{d_2},p^{d_3})$ 中没有两个矩阵是行等价的，并且可以很容易地从任何一个与 M 行等价的矩阵构造出理想 I_M，因此在 $\mathcal{M}(p^{d_1}, p^{d_2}, p^{d_3})$ 上的作用仍然易于计算。不难验证，所有 $M \in \mathcal{M}(p^{d_1}, p^{d_2}, p^{d_3})$ 都与唯一一个如下形式的矩阵行等价

$$\begin{pmatrix} p^{d_1} & p^{d_1-d_2}m_2 + \alpha p^{d_3} & m_1 \\ 0 & p^{d_2} & m_2 \\ 0 & 0 & p^{d_3} \end{pmatrix},$$

对于 $0 \le m_1$、 $m_2 < p^{d_3}$ 和 $0 \le \alpha < p^{d_2-d_3}$

再一次，对于 $y \in x + F_{3,\ p^d}^2$ 我们用 ϕ_y 表示 $F_{3,\ p^d}^*$中将 x 映射到 y 的唯一自同构。我们需要确定所有满足 ϕ_y 在 M上作用平凡的 $y \in x + F_{3\ ,\ p^d}^2$。设 $y = x + ax^2 + bx^3$。因此 $y^2 = x^2 + 2ax^3$ 和 $y^3 = x^3$ 属于 R。于是我们知道

$$\begin{aligned} \phi_y \cdot M &\sim \begin{pmatrix} p^{d_1} & p^{d_1-d_2}m_2 + \alpha p^{d_3} + ap^{d_1} & m_1 + bp^{d_1} + 2a(p^{d_1-d_2}m_2 + \alpha p^{d_3}) \\ 0 & p^{d_2} & m_2 + p^{d_2} \\ 0 & 0 & p^{d_3} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} p^{d_1} & p^{d_1-d_2}m_2 + \alpha p^{d_3} & m_1 + ap^{d_1-d_2}m_2 \\ 0 & p^{d_2} & m_2 \\ 0 & 0 & p^{d_3} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此我们得出， $\phi_y \cdot M \sim M$ 当且仅当

$$ap^{d_1-d_2}m_2 \equiv 0 \pmod{p^{d_3}} \tag{7.1}$$

若令 $r(M) \in \mathbb{N}$ 为使 (7.1) 对 $a = p^{r(M)}$成立的最小值，则我们得到

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Aut}(R^*)}(M) = \{\phi_{x+ax^2+bx^3} \mid a \in p^{r(M)}\mathbb{Z}/p^d, b \in \mathbb{Z}/p^d\},$$

因此特别有 $|$稳定子群$_{\mathrm{Aut}(R^*)}(M)| = p^{2d-r(M)}$ 从而 $|\mathcal{O}(M)| = p^{r(M)}$。

令 $\nu_p\colon \mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$ 表示 p-赋值。则容易看出$r(M)$ =最大值 $\{0,-d_1+d_2+d_3-\nu(m_2)\}$。定理 7.26 现给出

$$\begin{aligned}|\mathbf{AbSol}(p^{d_1},p^{d_2},p^{d_3})| &= \sum_{M\in\mathcal{M}(p^{d_1},p^{d_2},p^{d_3})} p^{-r(M)}\\ &= \sum_{\substack{0\le m_1,m_2<p^{d_3}\\ 0\le\alpha<p^{d_2-d_3}}} p^{-\max\{0,-d_1+d_2+d_3-\nu(m_2)\}}\\ &= p^{d_2}\sum_{m_2=0}^{p^{d_3}-1} p^{-\max\{0,-d_1+d_2+d_3-\nu(m_2)\}}\end{aligned}$$

容易看出，对于给定的 v，满足 $0\le v<d_3$ 的整数 k 恰有 $p^{d_3-v}-p^{d_3-v-1}$ 个，且满足 $1\le k<p^{d_3}$，使得 $\nu_p(k)=v$。因此我们得到

$$\begin{aligned}|\mathbf{AbSol}(p^{d_1},p^{d_2},p^{d_3})| &= p^{d_2}\left(1+\sum_{v=0}^{d_3-1}\frac{p^{d_3-v}-p^{d_3-v-1}}{p^{\max\{0,-d_1+d_2+d_3-v\}}}\right)\\ &= p^{d_2}\left(1+\sum_{w=0}^{d_3-1}\frac{p^{w+1}-p^{w}}{p^{\max\{0,-d_1+d_2+w+1\}}}\right).\end{aligned}$$

若 $d_1=d_2$，则

$$\begin{aligned}|\mathbf{AbSol}(p^{d_1},p^{d_2},p^{d_3})| &= p^{d_2}\left(1+\sum_{w=0}^{d_3-1}\frac{p^{w+1}-p^{w}}{p^{w+1}}\right)\\ &= p^{d_2}(1+d_3(1-p^{-1})).\end{aligned}$$

若 $d_1>d_2$ 且 $d_1<d_2+d_3$，则

$$\begin{aligned}|\mathbf{AbSol}(p^{d_1},p^{d_2},p^{d_3})| &= p^{d_2}\left(1+\sum_{w=0}^{d_1-d_2-1}(p^{w+1}-p^{w})+\sum_{w=d_1-d_2}^{d_3-1}\frac{p^{w+1}-p^{w}}{p^{-d_1+d_2+w+1}}\right)\\ &= p^{d_2}\left(1+p^{d_1-d_2}-1+p^{d_1-d_2}\sum_{w=d_1-d_2}^{d_3-1}(1-p^{-1})\right)\\ &= p^{d_1}(1+(-d_1+d_2+d_3)(1-p^{-1})).\end{aligned}$$

若 $d_1>d_2$ 且 $d_1\ge d_2+d_3$，则

$$\begin{aligned}|\mathbf{AbSol}(p^{d_1},p^{d_2},p^{d_3})| &= p^{d_2}\left(1+\sum_{w=0}^{d_3-1}p^{w+1}-p^{w}\right)\\ &= p^{d_2}\left(1+p^{d_3}-1\right)\\ &= p^{d_2+d_3}\end{aligned}$$

我们得到以下结果，其证明已在上文针对 $d_3>0$ 给出，并且对于 $d_3=0$ 可由定理 7.27 得出。

定理 7.30。 设 p 为素数且 $d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq 0$，则
(7.2)

$$|\mathbf{AbSol}(p^{d_1}, p^{d_2}, p^{d_3})| = \begin{cases} p^{d_1}(1 + (-d_1 + d_2 + d_3)(1 - p^{-1})) & \text{if } d_1 < d_2 + d_3 \\ p^{d_2+d_3} & \text{if } d_1 \geq d_2 + d_3 \end{cases}.$$

特别地，**AbSol** 中大小为 p^d 且多置换层级至多为 *3* 的解的同构类数量可以计算为

$$\sum_{\substack{d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq 0 \\ d_1+d_2+d_3=d}} |\mathbf{AbSol}(p^{d_1}, p^{d_2}, p^{d_3})|.$$

8. 一些无限不可分解对合解及其阿贝尔置换群

在 [JPZD21 的定理 6.1] 中，给出了每个 $m \in \mathbb{N}$ 的多置换层级为 2 且置换群为 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m$ 的不可分解对合解。本节将证明它们就是全部这样的解。此外，我们对置换群为无挠阿贝尔群的不可分解对合多置换解进行分类。

命题 8.1. 设 A 是一个乘法群为阿贝尔群且多置换层级为 *2* 的无限单生成括号，并设 X 是 A 的一个传递循环基。那么 (A, X) 与 $(F_2/I_m)^*$ 同构，其中 $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$，且 $I_m = \mathbb{Z}mx^2$。此外，$(F_2/I_m, \circ)$ 与 $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/m)$ 同构。

证明。 根据推论 7.11，我们知道 (A, X) 同构于 $(F_2/I)^*$，其中 I 是某个理想。可能会出现 $I = 0$ 的情况，此时 $I = I_0$。现在假设 $I \neq 0$。我们知道 $(I, +)$ 必须是循环的，否则 $(F_2/I, +)$ 是有限的。令 $lx+mx^2$，其中 l、$m \in \mathbb{Z}$ 和 $m \geq 0$ 是 $(I, +)$ 的一个生成元。那么 $x * (lx + mx^2) = \alpha x^2 \in I$ 是 $lx + mx^2$ 的加法倍数，因此 $l = 0$。由此可得，对于某个 $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$，有 $I = I_m$；因为若 $m = 1$，就意味着 $\mathrm{mpl}(F_n/I) = 1$。由于 $F_2 * F_2^2 = F_2^2 * F_2 = 0$，对于任意选择的 m，我们都发现 I_m 是一个理想。由于 $(F_2/I_m, +) \cong \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/m)$，显然，$m$ 的不同选择会得到非同构的括号 F_2/I_m。

还需证明 $(F_2/I_m, \circ) \cong \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/m)$。为此，只需注意到 $((F_2/I_m)/(F_2/I_m)^2, \circ) \cong \mathbb{Z}$ 且 $((F_2/I_m)^2, \circ) \cong \mathbb{Z}/m$。□

定理 8.2。令 $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ 则 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m$ 其中

$$\sigma_{(a_1,a_2)}(b_1, b_2) = (b_1 + 1, a_1 + b_1 + b_2),$$

是一个置换群同构于 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m$ 且多置换层级为 *2* 的无限不可分解对合解。此外，每个置换群为阿贝尔群且多置换层级为 *2* 的无限不可分解解都同构于这样的解。

证明。 设 $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$。通过简单计算可知，与 $(F_n/I_m)^*$ 相关联的解正是陈述中的解，并且满足所要求的性质。反之，若 (X, r) 是一个具有阿贝尔置换群且多置换层级为 2 的不可分解解，那么其置换括号必满足命题 8.1 的条件，因此结论由命题 7.1 得出。□

命题8.3。 设 A 是一个多置换层级为 n 的括号，具有传递循环基 X，且其乘法群为阿贝尔无挠群。那么 $(A,\ X)$ 与 F_n^* 同构。

证明。 由推论 7.11 可知，对于某个理想 I，$A \cong F_n/I$。假设$I \neq 0$。由于 Soc(F_n) $= F_n^n$，由 CSV19 的定理 2.8] 可得 $I \cap F_n^n \neq 0$ [。若 $I \cap F_n^n \neq F_n^n$，我们发现 x^n 在 $(F_n, \circ)$ 中具有有限阶。这意味着$I \cap F_n^n = F_n^n$，但此时 F_n/I 的多置换层级严格小于 n。因此我们得到 $I = 0$。□

定理8.4。 设 $n \in \mathbb{N}$，且 $n > 1$。那么，解 $(F_n,\ r_x)$ 是具有阿贝尔无挠置换群且多置换层级为 n 的唯一不可分解对合解。

证明。 这是命题 7.1 和命题8.3 的直接推论。 □

注 8.5. 定理8.4中的解可以用 $\mathbb{Z}^n$ F_n的加法群表示为显式形式，就像注 7.17中讨论的解一样。

致谢

作者感谢 Wolfgang Rump 提供 [Rum23] 的预印本，并对他在此处关于等式 $|A| = |A^2||$Soc(A)|的评论作出澄清。

参考文献

[Bac15] David Bachiller，《 p^3阶括号的分类》，Journal Pure Appl. Alg. 219 (2015)，第8期，3568–3603。[Bac18] ———，与斜左括号相关的 Yang–Baxter 方程解及其在架中的应用，J. Knot Theory Ramifications 27 (2018)，第8期，1850055，36。MR 3835326[BCJ16] David Bachiller、Ferran Cedó 和 Eric Jespers，与左括号相关的 Yang–Baxter 方程解，J. Algebra 463 (2016)，80–102。[BFP22] Dominique Bourn、Alberto Facchini 和 Mara Pompili，斜括号范畴 skb 的若干方面，Communications in Algebra 0 (2022)，第0期，1–15。[Bon22] Marco Bonatto，超连通左拟群与对合 quandles，Communications in Algebra 50 (2022)，第9期，3978–3994。[Car20] A. Caranti，双斜括号与全纯群的正则子群，J. Algebra 562 (2020)，647–665。MR 4130907[Cas22] Marco Castelli，有限简单集合论 Yang–Baxter 方程解的一个刻画，Proc. Amer. Math. Soc.（待出版）(2022)。[CCP19] M. Castelli、F. Catino 和 G. Pinto，不可分解对合集合论 Yang-Baxter 方程解，J. Pure Appl. Algebra 220 (2019)，第10期，4477–4493。[CFT22] Ilaria Colazzo、Maria Ferrara 和 Marco Trombetti，关于 Yang–Baxter 方程的导出不可分解解，arXiv 预印本 arXiv:2210.08598 (2022)。[CJK+23] F. Cedó、E. Jespers、Ł. Kubat、A. Van Antwerpen 和 C. Verwimp，关于集合论 Yang-Baxter 方程的结构幺半群与结构群的各种幂零性，J. Pure Appl. Algebra 227 107194, 38 2023 2, 4457900 ( )，第期。论文编号。MR [CJO22] F Cedó、E Jespers 和 J Okniński，Yang–Baxter 方程的本原集合论解，Commu. Cont. Math. (2022)，2150105。[CMS22] Marco Castelli、Marzia Mazzotta 和 Paola Stefanelli，不可分解集合论 Yang–Baxter 方程解的简单性，Forum Mathematicum 34 (2022)，第2期，531–546。[CO21] Ferran Cedó 和 Jan Okniński，构造有限简单的 Yang-Baxter 方程解，Adv. Math. 391 (2021)，107968。

[CO22a] ———, 平方自由基数的 Yang-Baxter 方程不可分解解，arXiv 预印本 arXiv:2212.06753 (2022)。[CO22b] F. Cedó 和 J. Okniński，Yang-Baxter 方程的新简单解及与简单左括号相关的解，J. Algebra 600 (2022)，125–151。[CSV19] Ferran Cedó、Agata Smoktunowicz 和 Leandro Vendramin，幂零型斜左括号，Proc. Lond. Math. Soc. (3) 118 (2019)，第6期，1367–1392。MR 3957824[DG23] Carsten Dietzel 和 Raul Sastriques Guardiola，在大小为 pq的集合上的 Yang–Baxter 方程不可分解集合论解，arXiv 预印本 arXiv:2302.04636 (2023)。[Dri92] V. G. Drinfel'd，量子群理论中的一些未解决问题，Quantum groups (Leningrad, 1990)，Lecture Notes in Math.，第1510卷，Springer，Berlin，1992，第1–8页。MR 1183474[ESG01] Pavel Etingof、Alexander Soloviev 和 Robert Guralnick，在含有素数个元素的集合上的量子 Yang-Baxter 方程不可分解集合论解，J. Algebra **242** 2001 2, 709 719 1848966 ( )，第期–。[99] MR ESS P. Etingof、T. Schedler 和 A. Soloviev，量子 Yang-Baxter 方程的集合论解，Duke Math. J. 100 (1999)，第2期，169–209。[GI18] Tatiana Gateva-Ivanova，Yang–Baxter 方程的集合论解、括号与对称群，Adv. Math 338 (2018)，649–701。[GI21] ———, 处理非对合集合论 Yang-Baxter 方程解的组合方法，Publ. Mat. 65 (2021)，第1-2期，747–808。[GIVdB98] T. Gateva-Ivanova 和 M. Van den Bergh，I型半群，J. Algebra 206 (1998)，第1期，97–112。[GV17] L. Guarnieri 和 L. Vendramin，斜括号与 Yang-Baxter 方程，Math. Comp. **86** 2017 307, 2519 2534 3647970 ( )，第期–。MR JKVAV E. [21] Jespers、Ł. Kubat、A. Van Antwerpen 和 L. Vendramin，斜括号的根与权及其在 Yang-Baxter 方程解的结构群中的应用，Adv. Math. 385 (2021)，论文编号107767，20。MR 4256133[JP22] Přemysl Jedlička 和 Agata Pilitowska，具有多重置换层级2且置换群为非阿贝尔群的 Yang-Baxter 方程不可分解对合解，预印本 arXiv:2207.02944 (2022)。[JPZD20] Přemysl Jedlička、Agata Pilitowska 和 Anna Zamojska-Dzienio，构造层级2的 Yang-Baxter 方程多重置换解，J. Combin. Theory Ser. A 176 (2020)，105295，35。MR 4123749[JPZD21] ———, 具有阿贝尔置换群的层级 2 5、1083 33 2021 1096 4308636的 Yang-Baxter 方程不可分解对合解，Forum Math. ( )，第期–。MR [JPZD22] ———, 余循环括号与 Yang-Baxter 方程的不可分解余循环解，Proc. Amer. Math. Soc. **150** 2022 10, 4223 4239 4470170 [22] ( )，第期–。MR JVAV E. Jespers、A. Van Antwerpen 和 L. Vendramin，斜括号的幂零性与 Yang–Baxter 方程的多重置换解，Communications in Contemporary Mathematics (2022)，2250064。[LRV22] Victoria Lebed、Santiago Ramírez 和 Leandro Vendramin，对合 Yang-Baxter：缆结、可分解性、Dehornoy类，arXiv 预印本 arXiv:2209.02041 (2022)。[LV19] Victoria Lebed 和 Leandro Vendramin，关于集合论 Yang–Baxter 方程解的结构群，Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 62 (2019)，第3期，683–717。MR 3974961[LV22] Thomas Letourmy 和 Leandro Vendramin，斜括号的等中心同构，arXiv:2211.14414 (2022)，1–13。[LYZ00] Jiang-Hua Lu、Min Yan 和 Yong-Chang Zhu，关于集合论 Yang-Baxter 方程，Duke Math. J. 104 (2000)，第1期，1–18。MR 1769723[Ram22] Santiago Ramírez，具有大小为 pq 和 p^2q的置换群的 Yang-Baxter 方程不可分解解，arXiv 预印本 arXiv:2208.06741 (2022)。[Rum05] Wolfgang Rump，平方自由幺解量子 Yang-Baxter 方程的一个分解定理，Adv. Math. 193 (2005)，40–55。[Rum07a] ———, 括号、根环与量子 Yang-Baxter 方程，J. Algebra 307 (2007)，第1期，153–170。MR 2278047

[Rum07b] ———, 循环括号的分类，《纯粹与应用代数杂志》209卷第3期，671–685页（2007年）。
[Rum19a] ———, 循环括号的分类（二），《美国数学会汇刊》372卷第1期，305–328页（2019年）。
[Rum19b] ———, Yang–Baxter方程非对合集合论解的覆盖理论，《代数杂志》520卷（2019年），136–170页。MR 3881192[Rum20a] ———, 不可分解对合集合论解的分类，《数学论坛》32卷（2020年）第4期，891–903页。MR 4116644[Rum20b] ———, 单生成元括号与 Yang–Baxter 方程的不可分解集合论解，《爱丁堡数学会会刊》（2020年），1–21页。[Rum23] ———, 非退化单连通循环集的分类，《太平洋数学杂志》（已接受发表）（2023年）。[RV22] S Ramírez 和 L Vendramin，Yang–Baxter 方程对合解的分解定理，《国际数学研究通知》2022年（2022年）第22期，18078–18091页。[Smo18] Agata Smoktunowicz，关于 Engel群、幂零群、环、括号与 Yang–Baxter 方程，《美国数学会汇刊》370卷（2018年）第9期，6535–6564页。MR 3814340[Sol00] Alexander Soloviev，量子 Yang–Baxter 方程的非幺集合论解，《数学研究快报》7卷（2000年）第5–6期，577–596页。MR 1809284[SS18] Agata Smoktunowicz 和 Alicja Smoktunowicz，Yang–Baxter 方程的集合论解与新型 R矩阵，《线性代数及其应用》546卷（2018年），86–114页。MR 3771874[ST23] L. Stefanello 和 S. Trappeniers，关于双斜括号与括号块，《纯粹与应用代数杂志》227卷（2023年）第5期，论文编号107295，共22页。MR 4521746[SV18] Agata Smoktunowicz 和 Leandro Vendramin，关于斜括号（附录由 N. Byott 和 L. Vendramin 撰写），《组合代数杂志》2卷（2018年）第1期，47–86页。MR 3763907

意大利莱切电子邮箱：marco.castelli@unisalento.it - marcolmc88@gmail.com网址：https://www.researchgate.net/profile/Marco-Castelli-3

布鲁塞尔自由大学数学与数据科学系，Plein- laan 2, 1050 比利时布鲁塞尔电子邮箱：senne.trappeniers@vub.be网址：https://sites.google.com/view/sennetrappeniers/