arXiv:2303.00594v1 [math.CA] 1 Mar 2023

极大振荡粗糙奇异积分算子的稀疏界

SURJEET SINGH CHOUDHARY、SAURABH SHRIVASTAVA 和 KALACHAND SHUIN

Abstract. 我们证明了极大振荡粗糙奇异积分算子的稀疏界

$$T^P_{\Omega,*}f(x) := \sup_{\epsilon>0}\left|\int_{|x-y|>\epsilon} e^{\iota P(x,y)}\frac{\Omega((x-y)/|x-y|)}{|x-y|^n}f(y)dy\right|,$$

其中， $P(x,y)$是定义在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的实值多项式，且 $\Omega\in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$是零次齐次函数，满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\ d\theta=0$。由此可得该算子$T^P_{\Omega,\ *}$的加权 L^p–估计。此外，范数$\|T^P{}_{\Omega\,*}\|_{L^p\to L^p}$仅取决于多项式$P(x,y)$的总次数，而与 $P(x,y)$的系数无关。最后，我们将说明，这些方法同样适用于获得振荡粗糙奇异积分算子T^P_Ω在 $\Omega\in L^q(\mathbb{S}^{n-1})1<q\le\infty$下的稀疏界。

1. Introduction

振荡奇异积分的研究起源于偏微分方程、奇异拉东变换以及沿曲线的希尔伯特变换的研究。为说明研究振荡奇异积分的动机，我们简要介绍拉东变换和沿曲线的希尔伯特变换的情形。具体而言，考虑一点 $P=(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}$，其中 $x\in\mathbb{R}^n$且 $t\in\mathbb{R}$，并令 $L_{(x,t)}\colon y\to(x+y,t+\langle Bx,y\rangle)$, $y\in\mathbb{R}^n$ 为线性映射，其中 $B=(b_{jk})$ 是实值双线性形式。注意，$L_{(x,t)}$ 的像定义了 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中经过 P 的一个超曲面。与 $\mathbb{R}^n$ 上的适当核 K 相联系的拉东变换定义为

$$\mathcal{R}u(x,t)=\int_{\mathbb{R}^n}u(L_{(x,t)}(y))K(y)\ dy.=\int_{\mathbb{R}^n}u(x+y,t+\langle Bx,y\rangle)K(y)\ dy.$$

利用傅里叶变换，我们可以将算子 $\mathcal{R}$ 表示为

$$\begin{aligned}\mathcal{R}u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{\iota\lambda t}\int_{\mathbb{R}^n}e^{\iota\lambda\langle Bx,y\rangle}K(y)\hat{u}(x+y,\lambda)\ dyd\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}}e^{\iota\lambda t}e^{-\iota\lambda\langle Bx,x\rangle}(T_\lambda\hat{u}(\cdot,\lambda))(x)\ d\lambda,\end{aligned}$$

其中

$$T_\lambda f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{\iota\lambda\langle Bx,y\rangle}K(y-x)f(y)\ dy,$$

对于 $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$。运用普朗歇尔定理，通过证明算子 T_λ 的 L^2-估计，可以推出拉东变换 $\mathcal{R}$ 的 L^2-估计。注意，算子 T_λ 的核带有一个振荡因子。更多细节请参阅 Phong 和 Stein [20] 。

我们回顾通过沿曲线的希尔伯特变换研究振荡奇异积分的另一个有趣方面。例如，回顾一下，沿一条适当平面曲线的希尔伯特变换

Date：2023年3月2日。2010 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：42B20；42B25。*Key words and phrases.* 粗糙奇异积分、稀疏支配、加权估计。

$\Gamma = \{(t, \gamma(t)) : \ t \in \mathbb{R}\}$ 定义为

$$H_\gamma f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}} f(x_1 - t, x_2 - \gamma(t)) \frac{dt}{t}.$$

特别地，若我们考虑 $\gamma(t) = t^\alpha, 0 < \alpha \neq 1$，并取 $f(x_1, x_2) = g(x_1) e^{\iota x_2} \chi_{\{|x_2| \leq R\}}$，则 $R \to \infty$ 的情形对应于对与核 $\frac{e^{\iota |x|^\alpha}}{x}$ 相关联的振荡奇异积分的研究。关于 $\gamma(t) = t^\alpha, 0 < \alpha \neq 1$ 时的 H_γ，更多详情请参阅 Chanillo、Kurtz 和 Sampson [5, 6] 。

接下来，我们简要回顾振荡奇异积分算子相关估计方面的一些重要进展。Ricci 和 Stein [21] 首次获得了振荡奇异积分算子的相关结果

$$T_K^P f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\iota P(x,y)} K(x,y) f(y) \ dy, \ x \notin supp(f), \tag{1.1}$$

其中 $K \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 是一个 Calder´on-Zygmund 核。他们证明，对所有 $1 < p < \infty$， T_K^P 都可以扩张为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上的有界算子。此外，范数 $\|T_K^P\|_{L^p \to L^p}$ 仅取决于多项式 $P(x, y)$ 的总次数，而与 $P(x, y)$ 的系数无关。随后，Chanillo 和 Christ [4] 证明该算子 T_K^P 属于弱型 (1, 1)。Al-Qassem、Cheng 和 Pan [3, 2]将这些估计推广到核满足 H¨older 型正则性条件的振荡积分。在 [3] 中，他们证明了振荡因子为 $e^{\iota B(x,y)}$ 时的结果，其中 $B(x, y)$ 是实值双线性形式。后来，在 [2] 中，他们成功证明了振荡因子为 $e^{\iota P(x,y)}$ 时的界，其中 $P(x, y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 中的实值多项式。之后，Lacey 和 Spencer [16]为 Calder´on-Zygmund 核 $K \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ 对应的算子 T_K^P 建立了稀疏界。对于 Calder´on-Zygmund 核 $K \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$，最大截断振荡奇异积分 $T_{K,*}^P$ 的稀疏界是在 [14] 中得到的。我们在此指出， [14] 中的稀疏界蕴含 $T_{K,*}^P$ 的弱型 (1, 1) 有界性。

本文研究具有粗糙核的振荡奇异积分算子。设 Ω 是单位球面 $\mathbb{S}^{n-1} n \geq 2$ 上的零次齐次函数，且均值为零，即 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(\theta) \ d\theta = 0$。记 $K(y) = \Omega(y') |y|^n, y' = y/|y| \in \mathbb{S}^{n-1}$。设 $P(x, y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的实值多项式。与核 K 和多项式 ~~P~~ 相关联的振荡奇异积分算子定义为

$$T_\Omega^P f(x) := p.v \int_{\mathbb{R}^n} e^{\iota P(x,y)} K(x - y) f(y) \ dy, \tag{1.2}$$

其中 f 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的紧支撑光滑函数。最大截断振荡奇异积分算子定义为

$$T_{\Omega,*}^P f(x) := \sup_{\epsilon > 0} \Big| \int_{|x-y| > \epsilon} e^{\iota P(x,y)} K(x - y) f(y) dy \Big|.$$

如前所述，我们关注具有粗糙核的算子 T_Ω^P，也就是说，假设 Ω 属于某个 $L^q(\mathbb{S}^{n-1})$ $1 \leq q \leq \infty$，且不满足任何正则性条件。与此类 Ω 相关联的核 K 称为粗糙核，相应的算子称为粗糙奇异积分算子。

注意，若多项式 $P(x, y)$ 具有 $P_1(x) + P_2(y)$ 的形式，其中 P_1 和 P_2 分别是关于 x 和 y 的多项式，则 $T^{P_\Omega} f$ 和 $T_{\Omega,*}^P f$ 的 L^p 估计可直接由

相应粗糙奇异积分算子的估计得出

$$T_\Omega f(x) := p.v \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)\ dy, \tag{1.3}$$

and

$$T_{\Omega,*} f(x) := \sup_{\epsilon>0} \Big| \int_{|x-y|>\epsilon} K(x-y)f(y)dy \Big|.$$

鉴于这一备注，以下我们假设多项式 $P(x,y)$ 不具有 $P_1(x) + P_2(y)$ 的形式。关于粗糙奇异积分算子 T_Ω （即不含振荡因子的算子），已有大量文献。关于粗糙奇异积分算子的系统介绍（包括最新进展），请参阅 Calder´on 和 Zygmund [1], Christ 和 Rubio de Francia [9], Hofmann、[12], Seeger、[23], Conde-Alonso 等人，以及 Hyt´onen 等人的著作 [8] [10] 。

我们在此特别指出，与具有连续核的情形不同，粗糙核的 L^p 估计对于 T_Ω^P 而言尚未得到充分理解。Shanzhen 和 Yan [24] 在这方面得到了如下 L^p–估计。

定理 1.1. [24] 设 $\Omega \in L^q(\mathbb{S}^{n-1})$ $1 < q \le \infty$。则对于所有$1 < p < \infty$， T_Ω^P在 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 上有界，且其算子范数 $T^P\Omega$ 与 $P(x,y)$ 的系数无关。

在同一篇论文中，Shanzhen 和 Yan [24] 还证明了 $T_{\Omega,\ *}^P$ 在 $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 的条件下有界于 $L^p(\mathbb{R}^n)$ $1 < p < \infty$。Jiang 和 Lu [13] 将定理 1.1 中 $\Omega \in L^q(\mathbb{S}^{n-1})$ $1 < q \le \infty$ 这一条件改进为 $\Omega \in L\log L(S^{n-1})$。最近，Chen 和 Tao [7] 针对算子 $T_{\Omega,\ *}^P$ 在 $\Omega \in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 的条件下获得了加权 L^p–估计。受这些关于振荡粗糙奇异积分的进展启发，我们研究振荡粗糙奇异积分算子 $T^P\Omega$ 和 $T_{\Omega,\ *}^P$的稀疏界。

1.1. 主要结果。本文旨在为振荡粗糙奇异积分算子 T_Ω^P和 $T_{\Omega,\ *}^P$建立稀疏界。众所周知，稀疏界强化了算子的加权L^p–估计，并对算子范数给出定量界限，进而可推出向量值结果。本节将陈述本文所研究算子的稀疏界主要结果。为此，我们需要做一些准备。

立方体的稀疏族：令 $\mathcal{D}_t, 1 \le t \le 3^n$ 表示平移二进立方体的集合。我们知道，该集合

$$\{\tfrac{1}{3}Q\ :\ Q \in \mathcal{D}_t,\ l(Q) = 2^j\}$$

对每个 j构成 $\mathbb{R}^n$ 的一个划分。我们将 $\mathcal{D}_t$ 中的立方体简称为二进立方体，并使用一个固定的集合 $\mathcal{D}_t$。读者可参阅 [18] ，了解有关二进立方体的详细信息。

设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的二进立方体族，且 $\eta \in (0,1)$。若对于每个 $Q \in \mathcal{S}$ ，都存在一个子集 $E_Q \subseteq Q$ ，使得 $|E_Q| > \eta|Q|$ 且集合$\{E_Q\}$ 两两不交，则称 $\mathcal{S}$ 为一个 η–稀疏立方体族。我们将 η– 稀疏族简称为稀疏族。

给定一个稀疏族 $\mathcal{S}$ 和指数 $1 \le r, s < \infty$，(r,s)–稀疏双线性形式定义为

$$\Lambda_{\mathcal{S},r,s}(f,g) := \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q| \Big(\frac{1}{|3Q|}\int_{3Q} |f(x)|^r dx\Big)^{1/r} \Big(\frac{1}{|3Q|}\int_{3Q} |g(x)|^s dx\Big)^{1/s},$$

其中 f 和 g 是紧支集有界函数。

A_p 权重。设 ω 是一个非负局部可积函数。那么，对于 $1<p<\infty$，有 $\omega\in A_p$，如果存在一个常数 $C>0$ 使得

$$[\omega]_{A_p}:=\sup_Q\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\omega(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q\sigma(x)\,dx\right)^{p-1}<C,$$

其中 $p'=\frac{p}{p-1}$ 和 $\sigma(x)=\omega(x)^{1-p'}$。$A_\infty$ 权特征由 Fujii [11]和 Wilson [27]引入。其定义如下

$$[\omega]_{A_\infty}:=\sup_Q\Big(\int_Q\omega(x)\,dx\Big)^{-1}\int_Q M(\chi_Q\omega)(x)\,dx,$$

其中 M 是 Hardy-Littlewood 极大函数。

我们对极大算子 $T^P_{\Omega,*}$ 有如下稀疏界。

定理 1.2. 设 $\Omega\in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 是一个零次齐次函数，且满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\,d\theta=0$。设 $P(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的总次数为 d的实值多项式。那么对于任意满足 $1<r<2$ 的指数 r以及紧支撑有界函数 f 和 g，以下稀疏支配成立

$$|\langle T^P_{\Omega,*}f,g\rangle|\le C\sup_{\mathcal{S}}\Lambda_{\mathcal{S},r,r}(f,g). \tag{1.4}$$

这里常数 $C=C(\|T_{\Omega,*}\|_{L^p\to L^p},d,n,r)$ 与 $P(x,y)$ 的系数无关。

下一个结果证明了算子 T^P_Ω 的稀疏支配。

定理 1.3. 设 $\Omega\in L^p(\mathbb{S}^{n-1})$ $p>1$ 是一个零次齐次函数，且满足 $\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\,d\theta=0$。设 $P(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上总次数为 d 的实值多项式。那么对于任意的 r,s，满足 $(2p)'<r<2$，$p'\le s$，以及紧支撑有界函数 f 和 g，以下稀疏支配结果成立

$$|\langle T^P_\Omega f,g\rangle|\le C\sup_{\mathcal{S}}\Lambda_{\mathcal{S},r,s}(f,g). \tag{1.5}$$

这里的常数 $C=C(\|T_\Omega\|_{L^p\to L^p},d,n,r)$ 与 $P(x,y)$ 的系数无关。

如前所述，稀疏支配蕴含底层算子的加权估计和向量值估计。我们在此记录极大算子 $T^P_{\Omega,\ *}$ 的加权结果，该结果可由定理 1.2 推出。关于如何由稀疏支配得到向量值结果，请参阅 [19]。

推论 1.4. 设 $1<p<\infty$ 且 $\omega\in A_p$。设 $\Omega\in L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ 为满足$\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\Omega(\theta)\,d\theta=0$ 的齐次函数，并设 $P(x,y)$ 是定义在 $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上的实值多项式。则有

$$\|T^P_{\Omega,*}f\|_{L^p(\omega)}\le C[\omega]_{A_p}^{1/p}\big([\omega]_{A_\infty}^{1/p'}+[\sigma]_{A_\infty}^{1/p}\big)\max\{[\sigma]_{A_\infty},[\omega]_{A_\infty}\}\|f\|_{L^p(\omega)}.$$

上述定理中关于权特征的定量界由 [10] 推出。注意，这恢复了 [7] 中证明的加权估计。

2. Auxiliary results

定理 1.2 中稀疏支配结果的证明运用了 Lacey 和 Spencer [16] 的思想。不过请注意，在 Lacey 和 Spencer [16] 中，核 K 满足远离原点处的 C^1 正则性条件至关重要。对于粗糙核，这种正则性性质并不成立。我们借助 Shanzhen 和 Yan [24] 的思想来克服这一困难。

首先，我们回顾一个关于稀疏双线性型的众所周知的事实。我们的证明将用到这一结果。

命题 2.1（[15], 第 4 节）。给定 $1 \le r$、$s < \infty$ 以及紧支撑有界函数f、g，存在一个稀疏型 $\Lambda_{\mathcal{S}_0,\ r,\ s}$ 使得

$$\sup_{\mathcal{S}} \Lambda_{\mathcal{S},r,s}(f,g) \lesssim \Lambda_{\mathcal{S}_0,r,s}(f,g).$$

本节将给出证明定理 1.2 和 1.3 所需的结果。为证明所需的 L^p 界，我们将原算子分解为远离原点的二进块。更确切地说，我们写成

$$\chi_0 + \sum_{j=2}^{\infty} \chi_j = 1,$$

其中，对于 $j \ge 2$ 和 $\chi_0 = \chi_{[0,2)}$，有 $\chi_j = \chi_{[2^{j-1},2^j)}$。这将算子 $T_\Omega^P = T_0^P + \sum_{j\ge 2} T_j^P$ 分解开来。处理极大算子时也采用相同的分解。我们将证明每个部分 T_j^P, $*$ 满足适当的估计。

我们先考虑截断极大粗糙奇异积分算子所定义情形下的局部版本

$$T_{\Omega,*}^0 f(x) := \sup_{0<\epsilon<2} \Big| \int_{\epsilon<|x-y|<2} \frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n} f(y)\ dy \Big|,$$

其中 f 是一个紧支撑光滑函数。算子 $T_{\Omega,\ *}^0$ 满足以下稀疏支配结果。

引理 2.2. 给定 $1 < r < 2$ 以及紧支撑有界函数 f 和 g，存在一个正常数 C，使得下述稀疏支配成立

$$|\langle T_{\Omega,*}^0 f, g\rangle| \le C \sup_{\mathcal{S}} \sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q| \langle f\rangle_{Q,r} \langle g\rangle_{Q,r}. \tag{2.1}$$

证明. 本结果的证明采用了 [24]中的思路。我们将函数 f 适当地分解为三部分。这样便可以将 $T_{\Omega,\ *}^0$ 的奇异部分与相应的粗糙奇异积分算子（不含振荡因子）进行比较。我们运用 [10] 中的粗糙奇异积分算子 $T_{\Omega,\ *}$ 的稀疏支配结果，得到奇异部分所需的界。其余部分则直接利用核估计处理。具体而言，我们考虑如下情况。

固定 $h \in \mathbb{R}^n$，将 $f = f_1 + f_2 + f_3$分解为，其中 $f_1(y) = f(y)\chi_{\{|y-h|<1\}}$，$f_2(y) = f(y)\chi_{\{1<|y-h|<5/2\}}$ 以及 $f_3(y) = f(y)\chi_{\{|y-h|\ge 5/2\}}$。记 $g_h(x) = g(x)\chi_{\{|x-h|<1/2\}}$。

首先注意，对于 $|x-h| < 1/2$，我们有 $T_{\Omega,*}^0 f_3(x) = 0$。因此，这部分所需的估计显然成立。

接下来，考虑 $T^0\Omega_* f_2$。注意，对于 $|x-h| < 1/2$和 $1 \le |y-h| < 5/2$，我们得到 $1/2 < |y| < 3$。因此，

$$\begin{aligned} |T_{\Omega,*}^0 f_2(x)| &\le \int_{1/2<|y|<3} \frac{|\Omega(y')|}{|y|^n} |f_2|(x-y)\ dy \\ &\le 2^n \|\Omega\|_\infty \Big(\int_{|y|<3} |f_2(x-y)|\ dy \Big) \\ &\le C_n \|\Omega\|_\infty M f_2(x), \end{aligned}$$

其中 M 表示 Hardy-Littlewood 极大函数。利用 Hardy-Littlewood 极大函数的稀疏支配，我们得到

$$|\langle T^0_{\Omega,*} f_2, g_h\rangle| \leq C_n\|\Omega\|_\infty \sum_{Q\in\mathcal{S}_0} |Q|\langle f_2\rangle_{Q,1}\langle g_h\rangle_{Q,1}.$$

由于上述估计对 h 一致成立，通过写成 $g = \sum_{h\in\mathbb{Z}^n} g_h$，我们便得到函数 g 的结果，即有

$$|\langle T^0_{\Omega,*} f_2, g\rangle| \leq C_n\|\Omega\|_\infty \sum_{Q\in\mathcal{S}_0} |Q|\langle f\rangle_{Q,1}\langle g\rangle_{Q,1}. \tag{2.2}$$

最后，我们考虑项 $T^0_{\Omega,*} f_1$。注意到，对于 $|x-h|<1/2$，容易验证

$$T^0_{\Omega,*} f_1(x) = T_{\Omega,*} f_1(x).$$

对每个固定的 $1<r<2$，调用 [10], 中关于 $T_{\Omega,*}$ 的稀疏支配，我们得到

$$\begin{aligned} |\langle T^0_{\Omega,*} f_1, g_h\rangle| &= |\langle T_{\Omega,*} f_1, g_h\rangle| \\ &\leq C\sup_{\mathcal{S}}\sum_{Q\in\mathcal{S}} |Q|\langle f_1\rangle_{Q,r}\langle g_h\rangle_{Q,r}. \end{aligned}$$

这里的常数 C 与 h 无关。

回忆一下，我们需要对任意紧支集有界函数 g 证明上述估计。不同于上述 $T^0_{\Omega,*} f_2$ 情形，这里我们得到了 g_h 的 L^r 个平均值，其中 $r>1$。在这种情况下，从 g_h 过渡到 g 需要做一些工作。

应用命题 2.1，我们得到存在一个稀疏族 $\mathcal{S}_0$，使得

$$\begin{aligned} |\langle T^0_{\Omega,*} f_1, g_h\rangle| &\leq C\sum_{Q\in\mathcal{S}_0} |Q|\langle f_1\rangle_{Q,r}\langle g_h\rangle_{Q,r} \\ &= \sum_{k\geq 1}\sum_{Q\in\mathcal{S}_0,|Q|=2^{kn}} |Q|\langle f_1\rangle_{Q,r}\langle g_h\rangle_{Q,r} + \sum_{Q\in\mathcal{S}_0,|Q|\leq 1} |Q|\langle f_1\rangle_{Q,r}\langle g_h\rangle_{Q,r} \end{aligned}$$

由于 $\mathrm{supp}(f_1)\subset B(h,1)$，且 $\mathrm{supp}(g_h)\subset B(h,1/2)$，我们注意到，长度为 $2^k, k\geq 1$ 的立方体与 $\mathrm{supp}(f_1)$ 和 $\mathrm{supp}(g_h)$ 有非平凡交集的次数至多为 2^n 次。对于任意这样的立方体 Q，我们都可以找到一个立方体 $Q_0\subset Q$，使得 $l_{Q_0}\leq\sqrt{2}$，从而

$$\mathrm{supp}(f_1)\cap Q\subset \mathrm{supp}(f_1)\cap Q_0 \text{ and } \mathrm{supp}(g_h)\cap Q\subset \mathrm{supp}(g_h)\cap Q_0.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} |Q|\langle f_1\rangle_{Q,r}\langle g_h\rangle_{Q,r} &\leq C_n 2^{kn}|Q_0|\left(\frac{1}{2^{kn}|Q_0|}\int_{Q_0}|f_1|^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{2^{kn}|Q_0|}\int_{Q_0}|g_h|^r\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq C_n 2^{kn(1-\frac{2}{r})}|Q_0|\langle f_1\rangle_{Q_0,r}\langle g_h\rangle_{Q_0,r} \end{aligned}$$

由此得到以下估计

$$\begin{aligned} |\langle T^0_{\Omega,*} f_1, g_h\rangle| &\lesssim \sum_{k\geq 1}\sum_{Q\in\mathcal{S},l_Q=\sqrt{2}} 2^{kn(1-\frac{2}{r})}|Q|\langle f_1\rangle_{Q,r}\langle g_h\rangle_{Q,r} + \sum_{Q\in\mathcal{S},l_Q\leq 1}|Q|\langle f_1\rangle_{Q,r}\langle g_h\rangle_{Q,r} \\ &\lesssim \sum_{Q\in\mathcal{S},l_Q\leq\sqrt{2}} |Q|\langle f_1\rangle_{Q,r}\langle g_h\rangle_{Q,r}. \end{aligned}$$

这里我们用到了 $1<r<2$。仿照前一种$h\in\mathbb{Z}^n$情形，写出 $g=\sum_{h\in\mathbb{Z}^n} g_h$，即可完成证明。

□

接下来，我们考虑每个 $j \geq 2$ 对应的算子。我们需要引入一些记号。设 Q 是 $\mathbb{R}^n$ 中边长为 $l_Q = 2^{j+2}$ 的二进立方体，其中 $j \in \mathbb{Z}$。考虑

$$I_Q f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\iota P(x,x-y)} \frac{\Omega(y)\chi_j(|y|)}{|y|^n} \left(\chi_{\frac{1}{3}Q} f\right)(x-y)\, dy.$$

注意到 $supp(I_Q f) \subset Q$。利用极分解，我们可以写成

$$I_Q f(x) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y') \int_{2^{j-1}\leq r<2^j} e^{\iota P(x,x-ry')} \frac{f\chi_{\frac{1}{3}Q}(x-ry')}{r}\, dr d\sigma(y')$$

注意，对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和固定的 $y' \in \mathbb{S}^{n-1}$，存在一个超平面 Y，它垂直于向量 y' 且经过原点，使得对于 $z \in Y$和 $s \in \mathbb{R}$，有 $x = z + sy'$。因此，我们可以写成

$$\begin{aligned} I_Q f(x) &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y') \int_{2^{j-1}\leq r<2^j} e^{\iota P(z+sy',z+sy'-ry')} \frac{f\chi_{\frac{1}{3}Q}(z+sy'-ry')}{r}\, dr d\sigma(y') \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y') \int_{2^{j-1}\leq s-t<2^j} e^{\iota P(z+sy',z+ty')} \frac{f\chi_{\frac{1}{3}Q}(z+ty')}{s-t}\, dr d\sigma(y') \\ &= \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \Omega(y') N_Q[f(z+\cdot y')](s). \end{aligned} \tag{2.3}$$

我们有如下关于上述定义的算子 N_Q 的 L^2 界。

引理 2.3. 设 $P(x,y) = \sum a_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta$是定义在 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$上的实值多项式。$|\alpha|\leq m, |\beta|\leq l$T

at

则对于任意边长为 $l_Q = 2^{j+2}$的二进立方体 Q，存在一个 $\delta > 0$ 使得

$$\|N_Q\|_{L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})} \lesssim 2^{-j\delta/2} \left| \sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l} a_{\alpha,\beta} y'^{\alpha+\beta} \right|^{-\delta/2m},$$

其中 $y' = y/|y| \in \mathbb{S}^{n-1}$。

证明。证明基于 T^*T 论证。我们借鉴 [24] 中的思路来完成证明。令 N_Q^* 表示线性算子 N_Q的伴随算子。注意，复合算子$N_Q^* N_Q$ 的核为

$$\mathcal{K}_Q(u,v) := \int_{\substack{2^{j-1}\leq r-v<2^j \\ 2^{j-1}\leq r-u<2^j}} e^{\iota\left(P(z+ry',z+vy')-P(z+ry',z+uy')\right)} \frac{1}{(r-u)(r-v)}\, dr.$$

通过变量代换论证，我们可以写成

$$\mathcal{K}_Q(u,v) = \int_{\substack{1/2\leq r<1 \\ 2^{j-1}\leq 2^j r+v-u<2^j}} e^{\iota\left(P(z+2^j ry'+vy',z+vy')-P(z+2^j ry'+vy',z+uy')\right)} \psi(r)\, dr,$$

其中，对于固定的 u 和 v，记

$$\psi(r) = \psi_{u,v}(r) = \frac{1}{r(2^j r + v - u)}.$$

现在，很容易验证以下估计成立。

$$|\mathcal{K}_Q(u,v)| \leq \frac{C}{2^j} \chi_{[0,2^{j-1}]}(|v-u|). \tag{2.4}$$

接下来，我们通过如下方式写出多项式 $P(x,y)$，以此整理 $\mathcal{K}_Q$ 中的振荡因子

$$P(x,y) = \sum_{|\alpha|=m} x^\alpha Q_\alpha(y) + R(x,y),$$

其中， $R(x,y)$ 是关于变量 x 的次数小于 m 的多项式，而 $Q_\alpha(y)$ 是关于变量 y 的次数为 l 的多项式。因此，我们可以写成

$$\mathcal{K}_Q(u,v)=\int_{\substack{\frac{1}{2}\le r<1\\ 2^{j-1}<2^j r+v-u\le 2^j}} e^{\iota(E+F)}\psi(r)dr,$$

其中

$$E=(2^j r)^m\sum_{|\alpha|=m} y'^{\alpha}[Q_\alpha(z+vy')-Q_\alpha\left(z+uy'\right)],$$

且 F 是关于变量 r的次数小于 m 的多项式。

[25] 中的范德科普特引理给出了如下估计。

$$\left|\int_{1/2}^1 e^{\iota(E+F)}dr\right|\le C\left(2^{jm}\left|\sum_{|\alpha|=m} y'^{\alpha}[Q_\alpha(z+vy')-Q_\alpha(z+uy')]\right|\right)^{-\frac{1}{m}}$$

接下来，通过分部积分可得到关于核的如下估计。

$$\begin{aligned}|\mathcal{K}_Q(u,v)| &\le C\left(2^{jm}\left|\sum_{|\alpha|=m} y'^{\alpha}[Q_\alpha(z+vy')-Q_\alpha(z+uy')]\right|\right)^{-\frac{1}{m}}\left(\|\psi\|_\infty+\int_{\substack{1/2\le r<1\\ 2^{j-1}\le 2^j r+v-u<2^j}}|\psi'|dr\right)\\ &\le C2^{-j}\left(2^{jm}\left|\sum_{|\alpha|=m} y'^{\alpha}[Q_\alpha(z+vy')-Q_\alpha(z+uy')]\right|\right)^{-\frac{1}{m}}\end{aligned}$$

上述不等式结合估计式 (2.4) 表明，在 $\delta\in(0,1]$, 中一致地有

$$|\mathcal{K}_Q(u,v)|\le C2^{-j}\left(2^{jm}\left|\sum_{|\alpha|=m} y'^{\alpha}[Q_\alpha(z+vy')-Q_\alpha(z+uy')]\right|\right)^{-\frac{\delta}{m}}\chi_{[0,2^{j-1}]}(|v-u|).$$

因此，

$$\begin{aligned}\int|\mathcal{K}_Q(u,v)|dv &= \int_{|v-u|<2^{j-1}}|\mathcal{K}_Q(u,v)|dv\\ &\le C2^{-j}2^{-j\delta}\int_{|v-u|<2^j}\left|\sum_{|\alpha|=m} y'^{\alpha}[Q_\alpha(z+vy')-Q_\alpha(z+uy')]\right|^{-\frac{\delta}{m}}dv\\ &= C2^{-j\delta}\int_{|v|<1}\left|\sum_{|\alpha|=m} y'^{\alpha}[Q_\alpha\left(z+2^j\left(v+\frac{u}{2^j}\right)y'\right)-Q_\alpha(z+uy')]\right|^{-\frac{\delta}{m}}dv.\end{aligned}$$

与 [24], 中一样，我们使用 [21] 中的以下结果来估计上述不等式中的积分。

引理 2.4. [21] 假设 $p(x)=\sum a_\alpha x^\alpha$ 是次数为 l 且 $\varepsilon<1/l$ 的多项式。那么$|\alpha|\le d$

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\int_{|x|\le 1}|p(x-y)|^{-\varepsilon}dx\le A_\varepsilon\left(\sum_{|\alpha|=l}|a_\alpha|\right)^{-\varepsilon}.$$

在选择满足 $\frac{\delta}{m} < \frac{1}{l}$ 的 $\delta \in (0,1]$ 后应用此结果，我们得到

$$\begin{aligned}\int |\mathcal{K}_Q(u,v)|dv &\leq C2^{-j\delta}\left|\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l} a_{\alpha,\beta}y'^{\alpha+\beta}\right|^{-\frac{\delta}{m}} 2^{-jl\frac{\delta}{m}} \\ &\leq C2^{-j\delta}\left|\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l} a_{\alpha,\beta}y'^{\alpha+\beta}\right|^{-\frac{\delta}{m}}\end{aligned}$$

注意到

$$\|N_Q^* N_Q\|_{L^2(\mathbb{R})\to L^2(\mathbb{R})} \leq \|\mathcal{K}_Q\|_1 \lesssim 2^{-j\delta}\left|\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l} a_{\alpha,\beta}y'^{\alpha+\beta}\right|^{-\frac{\delta}{m}},$$

其中 $0 < \delta < \frac{m}{l}$。引理得证。 □

3. Proof of Theorem 1.2

根据命题 2.1，只需证明对于 $1 < r < 2$ 我们有

$$|\langle T^P_{\Omega,*} f, g\rangle| \lesssim \sup_{\mathcal{S}} \Lambda_{\mathcal{S},r,r}(f,g). \tag{3.1}$$

证明采用关于 x 个和 y 个变量中的多项式次数的归纳论证。设 m和 l 为自然数。假设当多项式 P 是由次数在 x 中小于 m 且次数在 y 中为任意有限正整数的单项式之和时，$T^P_{\Omega,*}$ 满足所需的稀疏支配。类似地，我们假设当 P 是由次数在 y 中小于 l 且次数在 x 中为任意正整数的单项式之和时，$T^P_{\Omega,*}$ 满足稀疏支配；也就是说，我们假设对于上述两种情形下的多项式，都有

$$|\langle T^P_{\Omega,*} f, g\rangle| \lesssim \sup_{\mathcal{S}} \Lambda_{\mathcal{S},r,r}(f,g), \text{ for any } 1 < r < 2.$$

我们考虑多项式 $P(x,y)$，并将其改写为如下形式 $P(x,y) = \sum a_{\alpha,\beta}x^\alpha y^\beta + R_0(x,y)$，其中多项式 R_0 满足归纳假设。我们将证明与 P相关的 $T^P\Omega*$的稀疏支配。

首先注意到，不失一般性，我们可以假设 $\sum |a_{\alpha,\beta}| > 0$。此外，利用标准伸缩论证很容易看出，只需在假设 $\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l} |a_{\alpha,\beta}| = 1$ 的条件下证明该结论即可。具体而言，令 $A = \left(\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l} |a_{\alpha,\beta}|\right)^{\frac{1}{l+m}}$，并将多项式改写为

$$P(x,y) = \sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l} \frac{a_{\alpha,\beta}}{A^{l+m}}(Ax)^\alpha (Ay)^\beta + R_0\left(\frac{Ax}{A}, \frac{Ay}{A}\right) = Q(Ax, Ay)$$

另外，注意到

$$T^P_{\Omega,\epsilon} f(x) = T^Q_{\Omega,\frac{\epsilon}{A}} f\left(\frac{\cdot}{A}\right)(Ax).$$

我们使用伸缩后的函数进行稀疏支配，并注意到稀疏支配与伸缩无关，从而得出该断言。

设 $\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l} |a_{\alpha,\ \beta}| = 1$ 并考虑

$$\begin{aligned} T^P_{\Omega,*}f(x) &\leq \sup_{0<\epsilon<2}\left|\int_{|x-y|>\epsilon} e^{\iota P(x,y)}\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n}f(y)\ dy\right| \\ &\quad + \sup_{\epsilon\geq 2}\left|\int_{|x-y|>\epsilon} e^{\iota P(x,y)}\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n}f(y)\ dy\right| \\ &\leq \sup_{0<\epsilon<2}\left|\int_{\epsilon<|x-y|<2} e^{\iota P(x,y)}\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n}f(y)\ dy\right| \\ &\quad + \left|\int_{|x-y|\geq 2} e^{\iota P(x,y)}\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n}f(y)\ dy\right| \\ &\quad + \sup_{\epsilon\geq 2}\left|\int_{|x-y|>\epsilon} e^{\iota P(x,y)}\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n}f(y)\ dy\right| \\ &= T^P_{0,*}f(x) + T^P_{\infty}f(x) + T^P_{\infty,*}f(x) \end{aligned}$$

我们将分别证明上述每一项所需的结果。设 $h \in \mathbb{R}^n$。注意，我们可以将该多项式重写为

$$P(x,y) = \sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l} a_{\alpha,\beta}(x-h)^\alpha(y-h)^\beta + R(x,y,h),$$

其中多项式 R 满足归纳假设。我们首先处理局部部分。我们将其进一步分解如下。

$$T^P_{0,*}(f)(x) := T^P_{01,*}(f)(x) + T^P_{02,*}(f)(x), \tag{3.2}$$

其中

$$T^P_{01,*}(f)(x) = \sup_{0<\epsilon<2}\left|\int_{\epsilon<|x-y|<2} e^{\iota[R(x,y,h)+\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l}a_{\alpha,\beta}(y-h)^{\alpha+\beta}]}\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n}f(y)\ dy\right|$$

and $$T^P_{02,*}f(x) := \sup_{0<\epsilon<2}\left|\int_{\epsilon<|x-y|<2}\left(e^{\iota P(x,y)} - e^{\iota[R(x,y,h)+\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l}a_{\alpha,\beta}(y-h)^{\alpha+\beta}]}\right)\frac{\Omega((x-y)')}{|x-y|^n}f(y)\ dy\right|.$$

注意，引理 2.2 给出了第一项所需的稀疏界，即我们得到

$$|\langle T^P_{01,*}f, g\rangle| \lesssim \sup_{\mathcal{S}} \Lambda_{\mathcal{S},r,r}(f,g).$$

对于第二项 $T^P_{02,*}f$，注意到若 $|x-h| < 1/2$ 且 $|x-y| < 2$，则有 $|y-h| < 5/2$。由此可得

$$\left|e^{\iota P(x,y)} - e^{\iota[R(x,y,h)+\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l}a_{\alpha,\beta}(y-h)^{\alpha+\beta}]}\right| \leq C\sum_{|\alpha|=m,|\beta|=l}|a_{\alpha,\beta}||x-y| \leq C|x-y|.$$

因此，项 $T^P_{02,*}f$ 可由 Hardy-Littlewood 极大函数控制，即有$T^P_{02,*}f(x) \lesssim Mf_h(x)$，其中 $f_h = f\chi_{B(h,\frac{9}{4})}$。因此

$$|\langle T^P_{02,*}f_h, g\chi_{B(h,\frac{1}{2})}\rangle| \lesssim \Lambda_{\mathcal{S}_0,1,1}(f_h,g).$$

由于该估计对 h 一致成立，采用与上一节相同的论证，我们得到

$$|\langle T^P_{02,*}f, g\rangle| \lesssim \sup_{\mathcal{S}} \Lambda_{\mathcal{S},1,1}(f,g). \tag{3.3}$$

接下来, 我们需要处理项 $T_\infty^P f$ 和 $T_{\infty,\ *}^P f$。我们将算子 T_∞^P 分解为

$$T_\infty^P = \sum_{j\geq 2} T_j^P.$$

由于 $\epsilon \geq 1$，我们可以选择 $J \in \mathbb{N}$ 使得 $2^{J-1} \leq \epsilon < 2^J$。因此，我们可以写成

$$\begin{aligned} T_{\infty,*}^P f(x) &\leq \sup_{J\geq 1} \int_{2^{J-1}\leq|y|<2^J} \frac{|\Omega(y)|}{|y|^n} |f(x-y)|\ dy \\ &\quad + \sup_{J\geq 1} \sum_{j=\geq J+1} \left| \int_{2^{j-1}\leq|x-y|<2^j} e^{\iota P(x,y)} \frac{\Omega(x-y)}{|x-y|^n} f(y)\ dy \right| \\ &\leq \|\Omega\|_{L^\infty} Mf(x) + \sum_{j\geq 2} |T_j^P f(x)| \end{aligned}$$

另外，注意到 $T_\infty^P f(x) \leq \sum_{j\geq 2} |T_j^P f(x)|$。因此，我们需要证明算子$\sum_{j\geq 2} |T_j^P f(x)|$的稀疏界。

对于每个固定的 $j \geq 2$，我们研究算子 T_j^P。设 Q 为一个边长为$l_Q = 2^{j+2}$ 的二进立方体，并回顾算子

$$I_Q f(x) := \int_{2^{j-1}\leq|y|<2^j} e^{\iota P(x,x-y)} \frac{\Omega(y)}{|y|^n} \left(\chi_{\frac{1}{3}Q} f\right)(x-y)\ dy.$$

注意到 $I_Q f$ 支撑于 Q。由于每个由边长为$l_Q = 2^{j+2}$、包含于 $\mathbb{R}^n$ 中的立方体构成的二进网格 $\mathcal{D}_t$ 都是 $\mathbb{R}^n$的一个划分，因此算子 T_j^P可以表示为 $T_j^P f := \sum_{Q\in\mathcal{D}_t} I_Q f$。于是

只需研究算子 I_Q ，而非 T_j^P。

我们断言，对于任意 $1 < r < 2$，都有

$$|\langle I_Q f, g\rangle| \lesssim 2^{-\eta j}|Q|\langle f\rangle_{Q,r}\langle g\rangle_{Q,r}, \tag{3.4}$$

对于某个 $\eta > 0$。

对上述估计中的立方体 Q 和 j 求和，即可得到所需的 $\sum_{j\geq 2} |T_j^P f(x)|$ 的稀疏界。

上述估计是通过在 L^2 和 L^∞ 估计之间进行插值得到的。 L^2估计可按如下方式由引理 2.3 得出。在等式（2.3）中应用闵可夫斯基积分不等式，并利用引理 2.3，可得

$$\begin{aligned} \|I_Q f\|_2 &\leq \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(y')| \left(\int_Y \int_{\mathbb{R}} |N_Q f[z+\cdot y'](s)|^2\ dsdz \right)^{1/2} d\sigma(y') \\ &\lesssim 2^{-\frac{j\delta}{2}} \|f\chi_Q\|_2 \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |\Omega(y')| \left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=l}} a_{\alpha,\beta} y'^{\alpha+\beta} \right|^{-\frac{\delta}{2m}} d\sigma(y') \\ &\lesssim 2^{-\frac{j\delta}{2}} \|\Omega\|_q \|f\chi_Q\|_2 \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \left| \sum_{\substack{|\alpha|=m \\ |\beta|=l}} a_{\alpha,\beta} y'^{\alpha+\beta} \right|^{-\frac{\delta q'}{2m}} d\sigma(y') \right)^{\frac{1}{q'}}. \end{aligned}$$

我们选取 $\delta \in (0,1]$ 使得 $\delta < \min\left\{\frac{m}{l},\ \frac{2m}{(k+l)q'}\right\}$。然后利用引理（2.4）中的估计，可得

$$\|I_Q f\|_2 \lesssim 2^{-\frac{j\delta}{2}} \|\Omega\|_q \|f\chi_Q\|_2. \tag{3.5}$$

接下来，考虑

$$\begin{aligned} |I_Q f(x)| &= \left| \int_{2^{j-1}\le|y|<2^j} e^{\iota P(x,x-y)} \frac{\Omega(y/|y|)}{|y|^n} f\chi_{\frac{1}{3}Q}(x-y)\, dy \right| \\ &\lesssim |Q|^{-1} \int_{2^{j-1}\le|y|<2^j} |\Omega(y/|y|)||f\chi_{\frac{1}{3}Q}(x-y)|\, dy \\ &\lesssim |Q|^{-1} \|\Omega\|_\infty \|f\chi_Q\|_1. \end{aligned}$$

对上面的 L^∞ 估计与 L^2 估计 (3.5) 进行插值，可得对任意 $1 < r < 2$,

$$\|I_Q f\|_{r'} \lesssim 2^{-\delta j(1-\theta)} |Q|^{-\theta} \|\Omega\|_\infty \|f\chi_Q\|_r \tag{3.6}$$

成立，其中 $1/r + 1/r' = 1$ 且 $\theta = 1 - \frac{2}{r'}$。

因此，对任意 $1 < r < 2$，我们有

$$\begin{aligned} |\langle I_Q f, g\rangle| &\lesssim \|I_Q f\|_{r'} \|g\chi_Q\|_r \\ &\lesssim 2^{-\eta j} |Q|^{(-1+\frac{2}{r'})} \|f\chi_Q\|_r \|g\chi_Q\|_r \\ &\lesssim 2^{-\eta j} |Q| \langle f\rangle_{Q,r} \langle g\rangle_{Q,r}, \end{aligned}$$

其中 $\eta > 0$。

定理 1.2 的证明至此完成。 □

4. Proof of Theorem 1.3

定理 1.3 的证明采用与定理 1.2 情形相同的方案。我们在此给出一个简要概述。与之前一样，我们将其分解为

$$T_\Omega^P = T_0^P + T_\infty^P,$$

其中 $T_\infty^P := \sum_{j\ge 2} T_j^P$。

局部部分 T_0^P 的稀疏界可通过与定理 1.2 情形相同的论证得到。

接下来，为了证明算子 $T_j^P(f)$ 所需的估计，我们需要按以下方式分解 Ω。令 $E_0 = \{x' \in \mathbb{S}^{n-1} :\ |\Omega(x')| < 1\}$，并令 $E_k = \{x' \in \mathbb{S}^{n-1} :\ 2^{k-1} \le |\Omega(x')| < 2^k\}$, $k \in \mathbb{N}$。由此可写成 $\Omega(x') = \sum_{k\ge 0} \Omega_k(x')$，其中 $\Omega_k(x') = \Omega(x')\,\chi_{E_k}(x')$。

这给出了

$$T_j^P f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} T_{j,k} f(x),$$

其中 $T_{j,k} f(x) = \int_{2^{j-1}\le|x-y|<2^j} e^{\iota P(x,y)} \Omega_k\left(\frac{x-y}{|x-y|^n}\right) f(y)\, dy$

因此，我们需要进一步将算子 I_Q 分解为

$$I_{Q,k} f(x) := \int_{2^{j-1}\le|y|<2^j} e^{\iota P(x,x-y)} \frac{\Omega_k(y)}{|y|^n} (\chi_{\frac{1}{3}Q} f)(x-y)\, dy, \qquad l(Q) = 2^{j+2}.$$

我们注意到，通过仿照关于 $I_Q f$的论证，可以证明算子 $I_{Q,k} f$ 的估计式 (3.4) 的类似结论。由于这部分可以轻松完成，我们略去细节。对于 $1 < r < 2$，我们得到

$$\|I_{Q,k} f\|_{r'} \lesssim 2^{-\frac{j\delta(1-\theta)}{2}} |Q|^{-\theta} \|\Omega_k\|_q^{1-\theta} \|\Omega_k\|_\infty^{\theta} \|f\chi_Q\|_r,$$

其中 $1/r + 1/r' = 1$ 且 $\theta = 1 - \frac{2}{r'}$。

由于 $\|\Omega_k\|_\infty \leq 2^k$ 且 $\|\Omega_k\|_q \leq \|\Omega_k\|_\infty |E_k|^{\frac{1}{q}}$，我们有

$$\|I_{Q,k} f\|_{r'} \lesssim 2^{-\frac{j\delta(1-\theta)}{2}} |Q|^{-\theta} 2^k |E_k|^{\frac{1-\theta}{q}} \|f\chi_Q\|_r.$$

对 k 求和可得

$$\|I_Q f\|_{r'} \lesssim 2^{-\frac{j\delta(1-\theta)}{2}} |Q|^{-\theta} \|\Omega\|_{L^{\frac{q}{1-\theta},1}\log L} \|f\chi_Q\|_r.$$

我们知道，只要满足 $p \leq \frac{q}{1-\theta}$，嵌入 $L^{\frac{q}{1-\theta},\,1}\log\, L(\mathbb{S}^{n-1}) \subseteq L^p(\mathbb{S}^{n-1})$ 就成立。由于 $1 - \theta = \frac{2}{r'}$ 且 $q > 1$，我们得到 $r > (2p)'$。将这些关于 $1 < r < 2$ 的估计合并起来，可得

$$\begin{aligned} |\langle I_Q f, g\rangle| &\lesssim \|I_Q f\|_{r'} \|g\chi_Q\|_r \\ &\lesssim 2^{-\eta j} |Q|^{(-1+\frac{2}{r'})} \|f\chi_Q\|_r \|g\chi_Q\|_r \\ &\lesssim 2^{-\eta j} |Q| \langle f\rangle_{Q,r} \langle g\rangle_{Q,r}, \end{aligned}$$

其中 $\eta > 0$。因此，对 j 和立方体 Q 求和，即可得到所需结果。定理 1.3 的证明至此完成。□

致谢：第一作者获得印度科学与工业研究理事会（CSIR）（NET）资助，档案编号为 09/1020(0182)/2019- EMR-I。第二作者感谢科学与工程研究委员会、科学技术部、印度政府通过核心研究资助计划提供的支持，档案编号为 CRG/2021/000230。第三作者获得大韩民国韩国国家研究基金会（NRF）项目资助（编号：2022R1A4A1018904），以及首尔国立大学的 BK21博士后奖学金。

References

[1] A. P. Calder´on 和 A. Zygmund, *On singular integrals*, 《美国数学杂志》78（1956），289–309。[2] H. Al-Qassem、L. Cheng 和 Y. Pan, *A van der Corput type lemma for oscillatory integrals with Hölder Amplitudes and its applications* 58 2 487 499 2021 , 《韩国数学会杂志》（），–（）。[3] H. Al-Qassem、L. Cheng 和 Y. Pan, *Oscillatory Singular Integral Operators with Hölder Class Kernels*。《傅里叶分析与应用杂志》25，2141–2149（2019）。[4] S. Chanillo 和 M. Christ, *Weak*(1, 1) *bounds for oscillatory singular integral*, 《杜克数学杂志》55（1987），141–155。[5] S. Chanillo、D. Kurtz 和 G. Sampson, *Weighted L^p-estimates for oscillatory kernels*, 《数学档案》21（1983），233–257。[6] S. Chanillo、D. Kurtz 和 G. Sampson, *Weighted weak*(1, 1) *and weighted L^p-estimates for oscillatory kernels*, 《美国数学会汇刊》295（1986），127–145。[7] Y. Chen 和 W. Tao, *Quantitative weighted estimates for oscillatory singular integrals with rough kernels*, 《韩国数学会通报》59（2022），第1期，191–202。[8] J. M. Conde-Alonso, A. Culiuc, F. Di Plinio 和 Y. Ou, *A sparse domination principle for rough singular integrals* 10 2017 5, 1255 1284 , 《分析与偏微分方程》（），第 p. 期，–。[9] M. Christ 和 Rubio de Francia, J.L. *Weak type (1, 1) bounds for rough operators*, II。《数学发明》93（1988），225–237。[10] F. Di Plinio、T. P. Hyt¨onen 和 K. Li, , *Sparse bounds for maximal rough singular integrals via the Fourier transform* 70 2020 5, 1871 1902 《傅里叶研究所年刊》，第（）卷，第（）期，页码–。[11] N. Fujii, *Weighted bounded mean oscillation and singular integrals*, 《日本数学》22（1977/78），第5期，529–534。

[12] S. Hofmann, *Weak type (1, 1) boundedness of singular integrals with nonsmooth kernels*。美国数学会会刊103（1988），260–264。[13] Y.S. Jiang 和 S. Lu, *Oscillatory singular integrals with rough kernel*, 《中国调和分析》，135–145，数学应用丛书，327（1995）。[14] B. Krause 和 M. Lacey, *Sparse bounds for maximally truncated oscillatory singular integrals*, 比萨高等师范学校科学类年刊（5），第XX卷（2020），415–435。[15] M. Lacey 和 D. Mena Aris, *The sharp T1 theorem*, 《休斯敦数学杂志》43(1)（2017）111—127。[16] M. T. Lacey 和 S. Spencer, *Sparse bounds for oscillatory and random singular integrals*, 《纽约数学杂志》23（2017），119–131。[17] A. K. Lerner, *A weak type estimate for rough singular integrals*, 《Rev. Mat. Iberoam.》35（2019），第5期，1583–1602。[18] A. K. Lerner 和 F. Nazarov, *Intuitive dyadic calculus: the basics*, 《Expo. Math.》37（2019），第3期，225–265。[19] E. Lorist 和 Z. Nieraeth, *Sparse domination implies vector-valued sparse domination*, 《Math. Z.》301（2022），第1期，1107–1141。[20] D. H. Phong 和 E. M. Stein, *Hilbert integrals, singular integrals, and Radon transforms I*, 《数学学报》157（1986），第1-2期，99–157。[21] F. Ricci 和 E. M. Stein, *Harmonic analysis on nilpotent groups and singular integrals, I. Oscillatory integrals*, 《函数分析杂志》73（1987），179–194。[22] S. Sato, *Weighted weak type* (1, 1) *estimates for oscillatory singular integrals*, 《数学研究》141（2000），1–24。[23] A. Seeger, *Singular integral operators with rough convolution kernels*, 《美国数学会杂志》9（1996），95–105。[24] L. Shan Zhen 和 Z. Yan, *Criterion on L^p-boundedness for a class of oscillatory singular integral with rough kernels* 8 1992 2, 201 219 ,

《Rev. Mat. Iberoamericana》（ ），第–期。[25] E. M. Stein, *Oscillatory integrals in Fourier analysis, Beijing lectures in Harmonic analysis*（北京，1984）307-355，数学年刊研究丛书112，普林斯顿大学出版社，1986。[26] E. M. Stein 和 S. Wainger, *Oscillatory integrals related to Carleson's theorem*, 数学研究快报8（2001），第5-6期，789–800。[27] J. M. Wilson, *Weighted inequalities for the dyadic square function without dyadic A_∞*, 《杜克数学杂志》55（1987），第1期，19–50。

(Surjeet Singh Choudhary and Saurabh Shrivastava) Department of Mathematics, Indian Institute of Science Education and Research Bhopal, Bhopal-462066, India*Email address*: surjeet19@iiserb.ac.in, saurabhk@iiserb.ac.in

(Kalachand Shuin)Department of Mathematical Sciences, Seoul National University, Seoul 08826,Republic of Korea*Email address*: kcshuin21@snu.ac.kr