arXiv:2303.00618v3 [quant-ph] 3 Dec 2024

量子算法对相干控制误差的鲁棒性

Julian Berberich*University of Stuttgart, Institute for Systems Theory and Automatic Control, 70569 Stuttgart, Germany**

Daniel Fink 和 Christian Holm*University of Stuttgart, Institute for Computational Physics, 70569 Stuttgart, Germany*(日期：2024年12月4日)

相干控制误差是指理想哈密顿量受到未知乘性噪声项扰动，这类误差是实现可靠量子计算的主要障碍。本文提出了一个利用利普希茨界分析量子算法对相干控制误差鲁棒性的框架。我们推导出最坏情况保真度界，表明量子算法抵御相干控制误差的韧性主要受生成各个量子门的哈密顿量范数影响。即使对于大型量子线路，这些界也可以明确计算，并可通过阈值定理用于保障容错。此外，我们运用这一理论框架，为鲁棒量子算法设计和转译推导出一条新的指导原则，即降低哈密顿量的范数。我们以三量子比特量子傅里叶变换为例，证明与现有基于电路深度或门数的原则相比，这条原则能更有效地提升鲁棒性。此外，我们还运用该框架研究参数正则化对变分量子算法的影响。通过模拟实现和在量子计算机上的实现，展示了理论结果的实用性。

I. 引言

量子计算已成为一种强大的工具，能够克服经典计算的局限，并解决以往难以处理的问题。大量研究致力于开发能够相较于经典对应算法实现可证明加速的算法，例如整数分解 [1] 或搜索算法 [2]。然而，要在实际中成功实现这些算法并处理相关规模的问题，往往需要规模庞大的电路，且包含许多可靠的量子比特和量子门，而这些在当前含噪中等规模量子（NISQ）时代尚不可用 [3]。尤其是，当前的量子电路受到大量噪声的影响，这给展示任何量子优势带来了重大挑战。

量子设备中的噪声可分为非相干误差和相干误差。若误差可表示为一个酉算子，则称其为相干误差，否则称为非相干误差。本文讨论相干控制误差，这是一种重要的相干误差类型。从数学上看，相干控制误差可描述为一种扰动

$$e^{-i(1+\varepsilon)H} = e^{-iH}e^{-i\varepsilon H} \tag{1}$$

理想量子门 e^{-iH}，其中 $H = H^\dagger$ 是生成该量子门的哈密顿量。此外，$\varepsilon \in \mathbb{R}$ 是一个未知的噪声项，可能具有随机性和／或随时间变化。在硬件层面，这类误差可能由不精确的经典控制引起，例如校准不当或驱动不完善。相干控制误差已被认为是当前量子硬件上的重要误差来源 [4–6]。因此，人们提出了多种研究和补偿相干控制误差的方法，例如使用复合脉冲 [7–10], 动态纠错量子门 [11], 量子纠错 [12–16], 随机化编译 [17], 门集层析 [18], 隐藏逆操作 [19], 或实验校准 [20]。尽管独立的相干控制误差尤其有害 [4], , 上述方法大多关注系统误差，即式（1）中 ε 的精确值在时间上以及不同量子门之间保持不变的误差。

本文基于利普希茨界，提出了一个用于分析量子算法在相干控制误差下鲁棒性的框架。我们提供了关于此类误差影响的新颖理论见解，可用于定量评估并提升量子算法固有的鲁棒性。下面通过图 1 所示的示例来说明该框架。假设我们要应用以下旋转序列

$$U_{\text{ideal}} = R_{\text{z}}\Big(\frac{\pi}{4}\Big)R_{\text{y}}\Big(\frac{\pi}{2}\Big) \tag{2}$$

到 $|0\rangle$ 上，其中 $R_{\text{y}}(\theta_{\text{y}})$ 表示绕 y 轴旋转 θ_{y} 角度，$R_{\text{z}}(\theta_{\text{z}})$ 也同理。或者，也可以通过应用以下操作得到相同的最终量子态（相差一个全局相位）

$$U'_{\text{ideal}} = R_{\text{z}}\Big(-\frac{3\pi}{4}\Big)R_{\text{y}}\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) \tag{3}$$

到 $|0\rangle$。图 1 展示了两个量子电路的演化过程。我们看到，在没有噪声的情况下，两个电路都会产生相同的最终量子态 $|\psi\rangle$ 。从纯计算或代数的角度来看，无法立即看出哪一个更优，例如，二者使用的

* julian.berberich@ist.uni-stuttgart.de

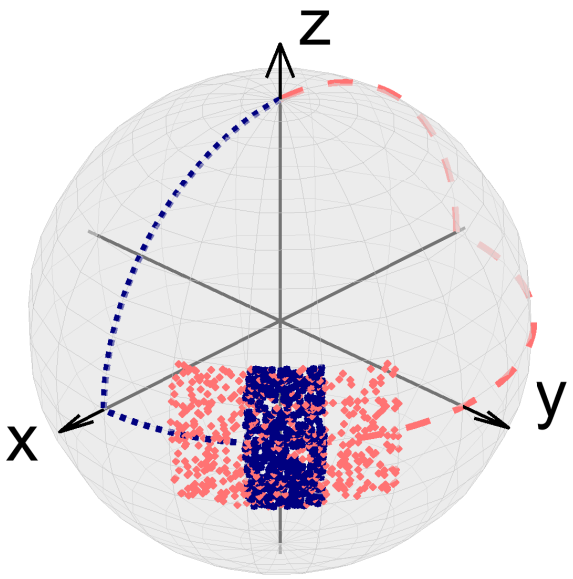


图1：该图展示了将 $U_{\text{ideal}} = R_z(\frac{\pi}{4})R_y(\frac{\pi}{2})$（蓝色、点划线）和 $U'_{\text{ideal}} = R_z(-\frac{3\pi}{4})R_y(-\frac{\pi}{2})$（红色、虚线）作用于 $|0\rangle$ 后量子态的演化。此外，还展示了两条电路在相干控制误差的随机实现下的最终状态（分别以蓝色和红色表示）。

是相同的门集合（y 旋转和 z 旋转），且门数和电路深度也相同。

现在，让我们比较这些电路的鲁棒性。更准确地说，我们假设所有涉及的量子门都受到独立相干控制误差的影响；也就是说，我们无法实现 $R_y(\theta_y)$ 和 $R_z(\theta_z)$，而只能实现

$$R_y(\theta_y(1+\varepsilon_y)) = e^{-i(1+\varepsilon_y)\frac{1}{2}\theta_y Y}, \tag{4}$$
$$R_z(\theta_z(1+\varepsilon_z)) = e^{-i(1+\varepsilon_z)\frac{1}{2}\theta_z Z}, \tag{5}$$

其中，$\varepsilon = (\varepsilon_y, \varepsilon_z) \in \mathbb{R}^2$ 包含如（1）中所述的未知噪声项。图 1 展示了分别应用这两个幺正算子

$$U_{\text{noisy}}(\varepsilon) = R_z\Big(\frac{\pi}{4}(1+\varepsilon_z)\Big)R_y\Big(\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon_y)\Big) \tag{6}$$

and

$$U'_{\text{noisy}}(\varepsilon') = R_z\Big(-\frac{3\pi}{4}(1+\varepsilon'_z)\Big)R_y\Big(-\frac{\pi}{2}(1+\varepsilon'_y)\Big) \tag{7}$$

于 $|0\rangle$ 的 500 个不同 ε，$\varepsilon' \in \mathbb{R}^2$ 值所得到的最终状态；这些值从 $[-0.2, 0.2] \times [-0.2, 0.2]$上的均匀分布中随机采样。

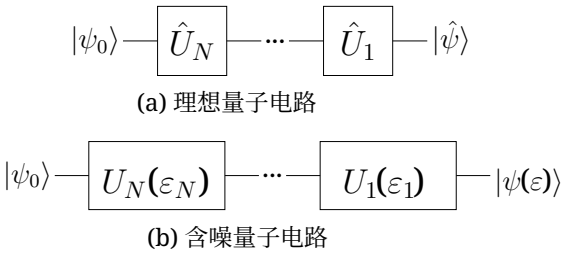
虽然在没有噪声的情况下，量子线路 U_{ideal} 和 U'_{ideal} 完全相同，但相干控制误差会造成显著差异。具体而言，与 U_{noisy}相比，U'_{noisy} 围绕 z轴的过旋转或欠旋转幅度明显更大。我们还可以通过计算以下保真度进行定量比较：

$\tilde{}$ $\hat{}$每个受扰动的最终量子态 $|\psi\rangle$ 相对于理想量子态 $|\psi\rangle$的保真度，$\tilde{}$ $\hat{}$即 $|\langle\psi|\psi\rangle|$，并确定在全部 500 个噪声实现中的最小保真度。U_{noisy} 的结果为 0.985，而 U'_{noisy} 的最小保真度为 0.965。这表明，由相干控制误差的最坏情况实现导致的 U'_{noisy} 保真度损失，是 U_{noisy}的两倍多；也就是说，后者量子线路对这类误差的鲁棒性显著更强。本文所展示的结果不仅能够解释这一现象，还能解释更一般的情形：通过精确量化量子算法的鲁棒性如何取决于其中涉及的量子门。

贡献

本文提出了一个框架，用于分析量子算法抵御相干控制误差的鲁棒性。具体而言，我们利用利普希茨界推导出针对相干控制误差的最坏情况保真度界；这些界仅取决于给定量子线路的组成部分，且可显式计算。特别是，我们证明，量子线路抵御相干控制误差的韧性主要取决于哈密顿量的范数，以及依次施加的门之间的耦合。所提出的结果适用于相当一般的条件：我们允许存在影响量子门的独立噪声项，允许用任意幺正算子定义量子门，并且不要求对噪声的性质作出任何假设，例如噪声足够小，或服从某种特定的概率分布。

我们将理论框架应用于以下问题。首先，我们推导出相干控制误差的显式最坏情况界，可用于量子纠错（QEC）阈值定理。此外，我们提出了一项全新的鲁棒量子算法设计与转译指南，其核心是降低相关哈密顿量的范数。与文献中电路优化和转译领域常用的、基于电路深度或门数的现有指标相比，哈密顿量的范数能够提供更准确的鲁棒性度量 [21–28]。因此，这项指南能够生成固有地更能抵抗相干控制误差的量子电路，从而更容易在近期实现。我们通过研究三量子比特量子傅里叶变换（QFT）转译为不同基本门集时的鲁棒性，来阐明这一原则。最后，我们将研究结果应用于变分量子算法（VQAs），并证明参数正则化能够提升对相干控制误差的鲁棒性。我们的理论发现得到了模拟以及在 *ibmnairobi*量子计算机上的实现验证 [29]。



(a) 理想量子电路

(b) 含噪量子电路

图 2：理想量子电路和含噪量子电路。

大纲

在第 II 节中，我们基于利普希茨界，推导出受相干控制误差影响的量子电路的最坏情况保真度界。这些理论结果与容错量子计算的阈值定理相关联（第 III 节），并用于推导鲁棒量子算法设计与转译的新指南（第 IV 节）。在第 V 节中，我们运用理论框架分析三量子比特量子傅里叶变换的不同基本门分解的鲁棒性。第 VI 节验证了我们在量子计算机上得到的结果，第 VII 节讨论了变分量子算法中的参数正则化。最后，我们在第 VIII 节总结全文。所有已开展实验的源代码均可在 GitHub 上公开获取 [30]。

记号

我们用 $\|x\|_p$ 表示向量 $x \in \mathbb{C}^N$ 的 p-范数，用$\|A\|_2$ 表示矩阵 $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$的诱导2-范数（即最大奇异值）。此外，厄米矩阵 $A = A^\dagger$ 的最大特征值记为$\lambda_{\max}(A)$。我们用 I_N表示 N维单位矩阵，用 $\mathbb{U}^N$表示 N维酉群。

II. 相干控制误差的最坏情况界

考虑以下理想 量子电路

$$|\hat{\psi}\rangle = \hat{U}_1 \cdots \hat{U}_N |\psi_0\rangle , \tag{8}$$

由作用于初始态 $|\psi_0\rangle$ 的 N 酉算子 $\hat{U}_i \in \mathbb{U}^{2^n}$ 组成，参见图 4 (a)。这些幺正算子也可写作 $\hat{U}_i = e^{-iH}$，其中哈密顿量$H_i = H_i^\dagger$ 生成量子门 $\hat{U}_i$。当上述量子线路在真实的量子计算机上运行时，将会遭遇误差。本文重点研究相干控制误差，此时执行的是受扰动的量子线路

$$|\psi(\varepsilon)\rangle = U_1(\varepsilon_1) \cdots U_N(\varepsilon_N) |\psi_0\rangle \tag{9}$$

如图 4 (b) 所示，其中含噪门$U_i(\varepsilon_i)$ 的形式为

$$U_i(\varepsilon_i) = e^{-i(1+\varepsilon_i)H_i}. \tag{10}$$

这里，ε_i 是实值噪声向量$\varepsilon \in \mathbb{R}^N$的分量。将噪声设为零，即$U_i(0) = \hat{U}_i$，则含噪量子电路 (9) 与无噪量子电路 (8) 相关联，其中 $i = 1, \ldots N$满足 $|\psi(0)\rangle = |\hat{\psi}\rangle$。

在全文中，我们假设噪声的大小由某个标量 $\bar{\varepsilon} > 0$ 有界，即 $|\varepsilon_i| \le \bar{\varepsilon}$ for$i = 1, \ldots\ldots, N$，或等价地，$\|\varepsilon\|_\infty \le \bar{\varepsilon}$。除存在这样的界之外，我们不作进一步假设。特别是，我们不 假设误差彼此相同，即 $\varepsilon_i = \varepsilon_j$ for $i \neq j$，也不假设界 $\bar{\varepsilon}$ 足够小（这两点是常见的假设，例如复合脉冲文献 [7, 8, 10] 中便采用了这些假设）。我们同样不假设相干控制误差遵循某些统计规律，例如 [31] 在量子强化学习背景下所作的假设。

本节基于利普希茨界，为含噪量子电路（9）推导最坏情况保真度界。为此，我们首先在第 IIA 节证明，映射 $\varepsilon \mapsto |\psi(\varepsilon)\rangle$ 的利普希茨界蕴含一个最坏情况保真度界。接下来，我们分别基于哈密顿量的范数（第 II B 节）以及后续量子门之间的耦合（第 II C 节）推导利普希茨界。

A. 通过利普希茨界给出最坏情况保真度界

考虑以下问题：如何界定 (9) [32] 的最坏情况保真度。

问题 II.1. 给定 $\bar{\varepsilon} \ge 0$，求 $M(\bar{\varepsilon}) \ge 0$，使得对于任意满足 $\|\varepsilon\|_\infty \le \bar{\varepsilon}$ 的 $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ 以及任意初始态 $|\psi_0\rangle$，均有

$$|\langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle| \ge 1 - M(\bar{\varepsilon}). \tag{11}$$

界 (11) 量化了噪声导致的保真度损失。请注意，这是一个最坏情况界，既适用于相干控制误差（对任意满足$\|\varepsilon\|_\infty \le \bar{\varepsilon}$的 $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ 均成立），也适用于初始态（对任意初始态 $|\psi_0\rangle$均成立）。下文将说明，若根据$|\psi(\varepsilon)\rangle$ 的利普希茨界选择 M，则 (11) 成立。

定义 II.1. 若标量 $L > 0$ 满足利普希茨界 $|\psi\rangle$，则称其为 $|\psi\rangle$ 的利普希茨界

$$\||\psi(\varepsilon)\rangle - |\psi(\varepsilon')\rangle\|_2 \le L\|\varepsilon - \varepsilon'\|_\infty \tag{12}$$

for all $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathbb{R}^N$ *[33].*

根据定义，利普希茨界 L 限制了扰动 ε 对最终量子态 $|\psi(\varepsilon)\rangle$产生的最差情况放大效应。利普希茨界与菱形距离 [34]密切相关。这种联系

及其影响将在第三节中详细讨论。

以下结果表明，可以利用利普希茨界推导最坏情况保真度界，如问题 II.1 中所示。

定理 II.1. 假设 L 是 $|\psi\rangle$的利普希茨界。那么，对于任意满足 $\|\varepsilon\|_\infty \leq \bar{\varepsilon}$ 的 $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ （其中某个$\bar{\varepsilon} \geq 0$），以及任意初始态 $|\psi_0\rangle$，有

$$|\langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle| \geq 1 - \frac{L^2\bar{\varepsilon}^2}{2}. \tag{13}$$

证明. 注意

$$\begin{aligned} & 2 - 2|\langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle| \\ \leq & 2 - 2\,\mathrm{Re}\{\langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle\} \\ = & \langle\psi(\varepsilon)|\psi(\varepsilon)\rangle - \langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle - \langle\hat{\psi}|\psi(\varepsilon)\rangle + \langle\hat{\psi}|\hat{\psi}\rangle \\ = & \||\psi(\varepsilon)\rangle - |\hat{\psi}\rangle\|_2^2. \end{aligned} \tag{14}$$

由于 $|\psi\rangle = |\psi(0)\rangle$，我们可以在 $\varepsilon' = 0$ 的条件下应用式 (12)，得到

$$2 - 2|\langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle| \leq L^2\|\varepsilon\|_\infty^2 \leq L^2\bar{\varepsilon}^2, \tag{15}$$

最后一步中我们使用了 $\|\varepsilon\|_\infty \leq \bar{\varepsilon}$ 。重新整理各项即可得到式 (13)。 □

因此，如果已知映射$\varepsilon \mapsto |\psi(\varepsilon)\rangle$的利普希茨界 L ，那么由不超过 $\bar{\varepsilon} > 0$ 的噪声导致的最坏情况保真度损失可直接计算为 $\frac{L^2\bar{\varepsilon}^2}{2}$ 。反向结论同样重要：如果我们希望保证最坏情况保真度不低于 $\mathcal{F}$，即对于任意满足 $\|\varepsilon\|_\infty \leq \bar{\varepsilon}$的 $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ 以及任意初始态 $|\psi_0\rangle$， $|\langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle| \geq \mathcal{F}$，那么误差界必须足够小，具体而言

$$\bar{\varepsilon} \leq \frac{\sqrt{2}}{L}\sqrt{1-\mathcal{F}}. \tag{16}$$

B. 基于范数的利普希茨界

我们在上一节中已经看到， $\varepsilon \mapsto |\psi(\varepsilon)\rangle$ 的利普希茨界使我们能够计算最坏情况保真度界。基于这一点，我们现在转而研究如何推导利普希茨界。以下结果表明，可以根据生成量子门的哈密顿量的范数来实现这一点。

定理 II.2. 对于任意的 ε、$\varepsilon' \in \mathbb{R}^N$ 以及任意初始态$|\psi_0\rangle$，我们有

$$\||\psi(\varepsilon)\rangle - |\psi(\varepsilon')\rangle\|_2 \leq \sum_{i=1}^{N}\|H_i\|_2|\varepsilon_i - \varepsilon_i'|. \tag{17}$$

特别地， $\sum_{i=1}^{N}\|H_i\|_2$ 是 $|\psi\rangle$ 的利普希茨界，并且对于任意满足 $\|\varepsilon\|_\infty \leq \bar{\varepsilon}$ 的 $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ 以及任意初始态 $|\psi_0\rangle$，有

$$|\langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle| \geq 1 - \left(\sum_{i=1}^{N}\|H_i\|_2\right)^2\frac{\bar{\varepsilon}^2}{2}. \tag{18}$$

定理 II.2 的证明见附录 A。根据该结果，相干控制误差引起的保真度损失可由两个因素界定：相关哈密顿量 $\|H_i\|_2$ 的范数和噪声界 $\bar{\varepsilon}$。特别地，若范数 $\|H_i\|_2$ 减小，则量子线路的鲁棒性会提高，反之亦然。

直观而言，可以通过考虑单量子比特旋转来解释这一点。假设量子线路仅由一个Z旋转构成，其角度为 θ，即 $\hat{U} = R_z(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}Z}$。受到相干控制误差影响时，扰动后的量子线路形式为 $U(\varepsilon) = e^{-i(1+\varepsilon)\frac{\theta}{2}Z}$，其中 $\varepsilon \in \mathbb{R}$。应用 (18)，我们可以直接推得

$$|\langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle| \geq 1 - \frac{\theta^2\varepsilon^2}{8}. \tag{19}$$

该公式体现了一个直观事实：由于噪声的乘性影响，当 θ 的值较小时，保真度对噪声的敏感度会降低；而当 $\theta = 0$ 时，这种敏感度会消失。

我们将定理 II.2 应用于第 I 节中的示例，以比较两个电路 $\hat{U} = R_z(\frac{\pi}{4})R_y(\frac{\pi}{2})$ 和 $\hat{U}' = R_z(-\frac{3\pi}{4})R_y(-\frac{\pi}{2})$ 的鲁棒性。通过计算所有相关哈密顿量的范数并运用定理 II.2，我们得出 U 关于相干控制误差的利普希茨界为 $\frac{3\pi}{8}$ ，而 U' 的利普希茨界为$\frac{5\pi}{8}$ 。因此， U' 的最差情况保真度界（18）小于 U 的，这解释了为什么后者对于相干控制误差更具鲁棒性，正如第 I 节中观察到的那样。还请注意，利普希茨界的差异源于 z 旋转幅度不同，这也是 U' 较高的敏感度仅表现为绕 z 轴的过旋转／欠旋转的原因，参见图 1。

定理 II.2 不仅适用于单量子比特操作，也适用于多量子比特门。尤其是，即使对于大型且可能具有高维数的系统，也可以轻松计算界（17）和（18），因为哈密顿量 H_i 通常是稀疏的，详情参见附录 B。

注释 II.1. 由于在量子计算中全局相位不可观测，生成给定酉矩阵 $\hat{U} = e^{-iH}$ 的哈密顿量 H 并不唯一。更准确地说，存在一族由参数 $\varphi \in \mathbb{R}$ 表示的哈密顿量$H_\varphi = H + \varphi I$ ，其中每个元素生成的幺正算子都相同（相差全局相位 φ）：

$$e^{-iH_\varphi} = e^{-i\varphi}e^{-iH}. \tag{20}$$

正如预期的那样，相干控制误差对量子线路的影响与 H_φ 的具体选择无关，因为

$$e^{-iH_\varphi(1+\varepsilon)} = e^{-i\varphi(1+\varepsilon)}e^{-iH(1+\varepsilon)}. \tag{21}$$

特别是，误差 ε 对哈密顿量为 H_φ 的电路的影响，与其对 H的影响完全相同，二者仅相差全局相位 φ（$1+\varepsilon$）。不过，值得注意的是，本文推导出的理论界（定理 *II.2* 以及下一节中的定理 *II.3*）

取决于 φ的具体选择。显然，对于任意 $\varphi \neq 0$, $\|H\|_2 \neq \|H+\varphi I\|_2$。当哈密顿量 H_i 替换为任意 $\varphi_i \in \mathbb{R}$对应的 $H_i+\varphi_i I$ 时，定理 *II.2* 以及本文后续的所有结论仍然成立。特别是，将 H_i 替换为 $H_i+\varphi_i^*$时，可得到最紧的$|\psi\rangle$ 利普希茨界（因而也得到最紧的最坏情况保真度界），其中 φ_i^*使

$$\min_{\varphi_i\in\mathbb{R}} \|H_i+\varphi_i I\|_2. \tag{22}$$

注 II.2。为了对变分量子算法进行收敛性分析，文献 *[35]* 得到了形式为 $\sqrt{N}\max_i\|H_i\|_2$ 的利普希茨界。本文采用定理 *II.2* 中推导出的界，因为它明确涉及量子电路的所有元素；正如我们将在本文后文所见，这为鲁棒性分析提供了灵活的基础。此外，我们注意到， *[36]* 中的结果意味着一种类似于(17)的基于范数的利普希茨界，适用于只有一个量子门的情形。

一个值得探讨的问题是定理 II.2 中的界有多紧，也就是说，它们与可能的最小利普希茨界—— $|\psi\rangle$ 的利普希茨常数——以及真实的最坏情况保真度有多接近。在附录 C 中，我们证明，对于 $N=1$，最坏情况保真度界 (18) 是真实最坏情况保真度的良好近似，并且比替代界更准确。

需要注意的是，利普希茨界 (17) 本身通常并不紧，例如，它没有考虑依次施加的门之间的耦合。下一小节中，我们将推导结构化的利普希茨界，其中涉及成对的依次施加的哈密顿量，以求得到可能更紧的界。

C. 成对利普希茨界

以下结果给出了 $|\psi\rangle$的利普希茨界，并考虑了后续量子门之间的耦合。

定理 II.3。 以下是$|\psi\rangle$ 的利普希茨界:

- 如果幺正算子 N 的数量为偶数:

$$\sqrt{2}\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\|\begin{pmatrix}H_{2i-1} & H_{2i}\end{pmatrix}\|_2. \tag{23a}$$

- 如果幺正算子 N 的数量为奇数:

$$\|H_N\|_2+\sqrt{2}\sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}}\|\begin{pmatrix}H_{2i-1} & H_{2i}\end{pmatrix}\|_2. \tag{23b}$$

定理 II.3 的证明见附录 D。首先，我们注意到，该界可以很容易地修改为 $\|H_i\|_2$ 的任意 1 对和 2 对之和。例如，当 $N=4$ 时，$|\psi\rangle$ 可能的利普希茨界为

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\|\begin{pmatrix}H_1 & H_2\end{pmatrix}\|_2+\|H_3\|_2+\|H_4\|_2,\\ &\|H_1\|_2+\sqrt{2}\|\begin{pmatrix}H_2 & H_3\end{pmatrix}\|_2+\|H_4\|_2, \text{ etc.}\end{aligned}$$

这些都是有效的利普希茨界，且根据哈密顿量的具体形式，它们可能彼此不同。

此外，将定理 II.3 与定理 II.1（对于 N 为偶数的情况）结合起来，我们得到最坏情况保真度界

$$|\langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle| \geq 1-\left(\sum_{i=1}^{N}\|\begin{pmatrix}H_{2i-1} & H_{2i}\end{pmatrix}\|_2\right)^2\bar{\varepsilon}^2 \tag{24}$$

对于任意满足 $\|\varepsilon\|_\infty\leq\bar{\varepsilon}$ 的 $\varepsilon\in\mathbb{R}^N$。这表明，任意两个依次施加的哈密顿量之间的耦合会影响系统对相干控制误差的鲁棒性。

为更详细地研究这一点，我们来分析定理 II.3 中的成对界在什么条件下有益。对于任意两个矩阵 H_1、 H_2，有

$$\begin{aligned}\|\begin{pmatrix}H_1 & H_2\end{pmatrix}\|_2=&\sqrt{\lambda_{\max}(H_1^\dagger H_1+H_2^\dagger H_2)}\\ \leq&\sqrt{\lambda_{\max}(H_1^\dagger H_1)+\lambda_{\max}(H_2^\dagger H_2)}\\ \leq&\sqrt{\lambda_{\max}(H_1^\dagger H_1)}+\sqrt{\lambda_{\max}(H_2^\dagger H_2)}\\ =&\|H_1\|_2+\|H_2\|_2.\end{aligned} \tag{25}$$

不等式（25）在几乎所有情况下都是严格的。具体而言，可能造成差距的主要因素有两个。我们先来看（25）中的第二个不等式，它对任意 $a,\ b\geq 0$ 使用 $\sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$。当 $a,\ b>0$ 时，该不等式是严格的，即 $\sqrt{a+b}<\sqrt{a}+\sqrt{b}$。最佳可能改进，也就是最大差距 $\sqrt{2}$，出现在 $a=b$ 时。另一方面，（25）中的第一个不等式使用

$$\begin{aligned}&\lambda_{\max}(H_1^\dagger H_1+H_2^\dagger H_2)\\ \leq&\lambda_{\max}(H_1^\dagger H_1)+\lambda_{\max}(H_2^\dagger H_2).\end{aligned} \tag{26}$$

当对应于 $H_1^\dagger H_1$ 和 $H_2^\dagger H_2$ 的最大特征值的特征向量线性无关时，该不等式是严格的。这些发现揭示了关于鲁棒性的以下一般性原则：对两个幺正算子 $U_{i+1}(\varepsilon_{i+1})U_i(\varepsilon_i)$ 进行顺序应用所得到的 Lipschitz 界不仅受哈密顿量 $\|H_i\|_2+\|H_{i+1}\|_2$ 各自的范数影响，还受结构化成对范数界 $\|\begin{pmatrix}H_i & H_{i+1}\end{pmatrix}\|_2$的影响。特别是，当对应于$H_{i+1}$ 和 H_i 的最大奇异值的奇异向量线性无关时，保真度损失会降低。需要特别强调的是，即使不同幺正算子中的噪声项 ε_i彼此独立，这一结论仍然成立。在

本文的其余部分，我们主要关注定理 II.2 中基于范数的界，但利用定理 II.3 中的成对界得出类似结论，是未来研究中一个有趣的问题。

III. 容错量子计算的最坏情况界

阈值定理给出了实现容错量子计算 [32, 34, 37, 38] 时每个量子门所需精度的基本界。所需精度通常通过误差 $\mathcal{E}$ 相对于恒等算符 I的菱形距离 [34] 来量化，其定义为

$$\|\mathcal{E}-I\|_\diamond=\sup_\psi\|(\mathcal{E}\otimes I_d-I_{d^2})(\psi)\|_1. \tag{27}$$

此处， d 表示 $\mathcal{E}$ 所作用的底层系统的维数。为了保证实现容错量子计算，要求对于某个足够小的 $\eta>0$ [38], 满足 $\|\mathcal{E}-I\|_\diamond\leq\eta$。

现在，假设如文中前面所述， $\mathcal{E}$ 具有相干控制误差的形式，即 $\mathcal{E}(\varepsilon)=e^{-i\varepsilon H}$，其中 $\varepsilon\in\mathbb{R}$，且 $H=H^\dagger$是某个哈密顿量。显然，对于映射 $\varepsilon\mapsto\mathcal{E}(\varepsilon)$ 的任何利普希茨界 L，也会给出式（27）中菱形距离的一个上界，即

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{E}(\varepsilon)-I\|_\diamond\\=&\sup_\psi\|(\mathcal{E}(\varepsilon)\otimes I_d-I_{d^2})(\psi)\|_1\\=&\sup_\psi\|((\mathcal{E}(\varepsilon)-\mathcal{E}(0))\otimes I_d)(\psi)\|_1\\\leq&\|\mathcal{E}(\varepsilon)-\mathcal{E}(0)\|_1\leq\sqrt{d}\|\mathcal{E}(\varepsilon)-\mathcal{E}(0)\|_2\\\leq&\sqrt{d}L\|\varepsilon\|_\infty.\end{aligned} \tag{28}$$

因此，第 II 节的结果为相干控制误差的菱形距离提供了可明确计算且富有启发性的界。

下面我们来讨论这一见解与现有结果之间的联系。首先，我们注意到，在实验上确定相对于恒等操作的菱形距离可能颇具挑战 [39]。因此，人们提出了不同的方法来计算或估计菱形距离。例如，可以先确定（平均）保真度，参见例如 [40, 41], ，然后利用它来界定相干误差的菱形距离 [42–47]。文献 [17]还推导了使用随机化编译时存在相干误差情况下的菱形距离界。与这些研究不同，我们的框架针对相干控制误差提供了量身定制的界限，这些界限可以显式计算，直接取决于量子线路的组成元素，并且在相当一般的假设下成立，例如，不要求误差的统计特性或大小，也适用于独立误差。最后，我们指出，定理 II.2 也适用于包含许多量子门的情形，此时我们的界限仍然易于计算（参见附录 B）。

IV. 稳健量子算法设计与转译的新准则

本节将讨论如何利用第 II 节中的理论结果，推导出一套系统且灵活的指南，用于设计和转译量子算法，从而增强其抵御相干控制误差的韧性。

由于噪声是实际展示量子优势的一大障碍，人们开发了量子纠错（QEC）[48–50]和量子误差缓解（QEM, 近期综述见 [51] ）来应对噪声。在量子纠错中，理想的无噪声电路会通过添加额外的电路元素进行扩展，以检测和/或补偿可能出现的误差。尽管可以对这类量子纠错方法的成功作出强有力的理论论断（参见第三节中的讨论），但量子纠错会带来大量额外的量子比特和量子门开销，因此在当前含噪中等规模量子设备上的实际应用颇具挑战。在量子误差缓解中，人们不在电路级纠正不可避免的误差，而是保持量子电路不变，通过经典后处理来降低噪声的影响。尽管量子误差缓解在当前 NISQ 时代具有实际优势，但仍面临诸多未解决的挑战，尤其是一些根本性限制 [52, 53]。

由于目前量子纠错和量子误差缓解尚无法彻底消除误差，因此在量子算法的设计或转译过程中还需要进行额外的量子电路优化。用于表征量子电路鲁棒性的重要度量包括量子电路的深度、门数或纠缠门数量。基于这一动机，人们开发了多种优化量子电路的方法，例如在转译阶段进行优化，以减少这些指标 [21–28]。此类方法能够显著降低量子电路的复杂度，从而提升其对噪声的鲁棒性，并使其更容易在含噪中等规模量子硬件上实现。

定理 II.2 可用于推导一项新颖的定量指南，以便在设计或转译阶段提升量子算法的鲁棒性。具体而言，不等式 (18) 表明，由相干控制误差导致的最坏情况保真度损失取决于定义该量子电路的哈密顿量的范数 H_i。因此，范数较小 $\|H_i\|_2$ 意味着对这类误差具有更好的鲁棒性。这意味着，只要算法设计者或转译流程可以在不同哈密顿量之间进行选择，选择范数较小的量子电路就能提升鲁棒性。

第 I 节中的量子线路提供了一个具体示例，展示了如何将这一指导原则用于算法设计。我们在模拟中看到，$U=R_{\mathrm{z}}(\frac{\pi}{4})R_{\mathrm{y}}(\frac{\pi}{2})$ 相较于 $\hat{}U'=R_{\mathrm{z}}(-\frac{3\pi}{4})R_{\mathrm{y}}(-\frac{\pi}{2})$，对相干控制误差具有更强的鲁棒性。这一观察可以通过我们的框架加以解释：带噪版本 $U(\varepsilon)$ 相对于 $\hat{}U$ 的相干控制误差，其推导出的利普希茨界大于

$U'(\varepsilon')$（参见定理 II.2 下方的讨论）。因此，我们可以得出结论：实现 Uˆ而不是 U'，对于提高鲁棒性（应对相干控制误差）总是有益的。

需要注意的是，无法从上述现有的量子线路优化方案中得出这一结论：这两个量子线路的电路深度和门数完全相同。然而， $U(\varepsilon)$ 的保真度损失是 $U'(\varepsilon)$ 的两倍多。这表明，利普希茨界为评估量子算法在存在相干控制误差时的鲁棒性提供了更准确的定量度量。当然，对于第 I 节中的简单示例，无需使用定理 II.2 也能得出相同结论，例如通过图 1 所示的仿真，或仅凭直觉即可。不过，对于更复杂的情形，哪种门序列能提供最鲁棒的解决方案，可能并非一目了然。另一方面，所提出的框架仍可用于评估鲁棒性。尤其对于大型算法，量子线路尽可能鲁棒非常重要；否则，误差可能会迅速累积，从而妨碍可靠执行。

再举一个例子，假设我们想实现一个非平凡的量子算法，并且有该算法的不同实现方式或不同的通用门集可供选择。此时，我们只需将所有 N 相关哈密顿量的范数相加，计算每种配置的利普希茨界，就能找到鲁棒性最高的实现。即使对于非常大的电路，这项计算的代价也很低，参见附录 B。计算每个量子线路的利普希茨界后，根据定理 II.2，结果最小的量子线路对相干控制误差具有最佳韧性。在第 V 节中，我们将沿用这一思路，研究将三量子比特量子傅里叶变换编译为不同基本门集时的鲁棒性。

V. 不同基本门集下量子傅里叶变换的鲁棒性

下面，我们通过解决以下问题来展示所提出理论框架的实际潜力：研究三量子比特量子傅里叶变换在不同基本门集实现下的鲁棒性。为此，我们考虑以下门集：

- 门集 A:$\sqrt{X}$, X, R_z, CX(IBM [54]使用)
- 门集 B:$R_x(\pm\frac{\pi}{2})$， $R_x(\pm\pi)$, R_z， CZ(Rigetti [55]使用)
- 门集 C:U_1 ， U_2, U_3, CX（IBM [56]曾使用）
- 门集 D：$\sqrt{i}$SWAP、FSIM、PhasedXZ、 X, Y, Z（Google [57]使用）
- 门集 E：$R_{xy}(\frac{\pi}{2})$， $R_{xy}(\pi)$， R_z， U_{zz}（由 Honeywell [58]使用）

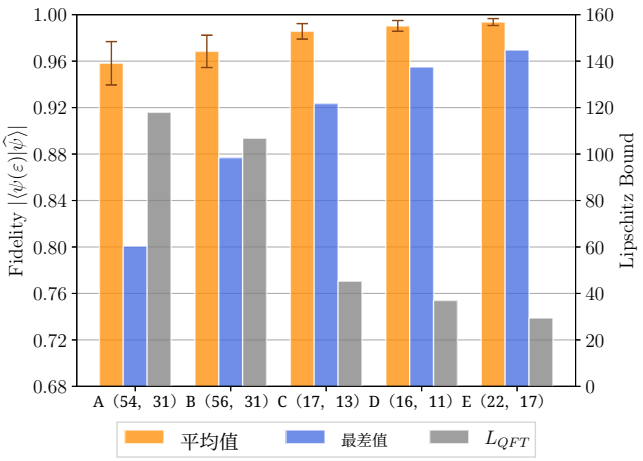


图 3：受相干控制误差影响的三量子比特量子傅里叶变换的五种基本门集实现的保真度、利普希茨界、门数量和电路深度。对于每个门集，图中展示了平均保真度及其标准差（左柱，橙色）、最坏情况保真度（中柱，蓝色）、利普希茨界（右柱，灰色）、门数（括号内左侧数字）以及电路深度（括号内右侧数字）。

下文中，我们针对这五种门集合中的每一种，对三量子比特量子傅里叶变换的量子电路进行转译，并从理论和模拟两方面研究其相对于相干控制误差的鲁棒性。转译使用伯克利量子综合工具包（BQSKit） [59], 完成，并采用最高优化级别。三量子比特量子傅里叶变换的教科书电路以及按照门集 A–E 转译得到的五个电路见附录 E。

我们首先根据定理 II.2，计算每个转译后量子线路的利普希茨界 L_{QFT}。结果见图 3。请注意，门集 E 得到的利普希茨界最小，其次是门集 D，依此类推。因此，根据最坏情况保真度界 (18)，我们预计对应于门集 E 的量子线路对相干控制误差具有最佳鲁棒性。接下来，我们将在模拟中验证这一理论分析。

具体而言，我们在相干控制误差存在的情况下，模拟每个量子线路（采用门集 A/B/C/D/E 的量子傅里叶变换），即将每个量子线路中出现的每个无噪声门e^{-iH_i} 替换为 $e^{-i(1+\varepsilon_i)H_i}$ ，其中包含相互独立的噪声项 ε_i，这些噪声项均匀采样自

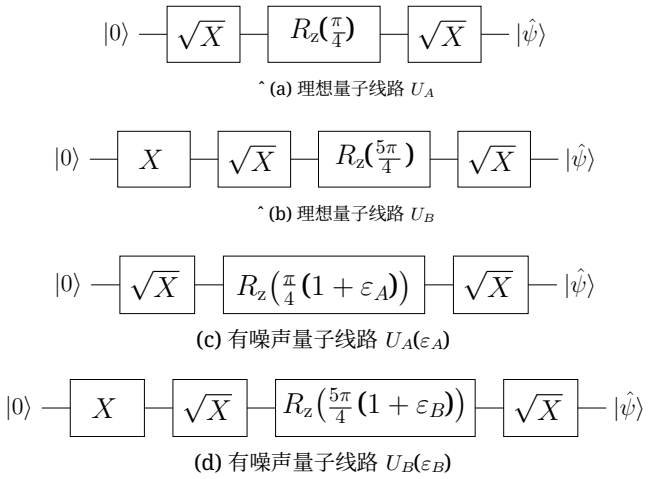
$[-0.05, +0.05]$。此外，为了估计最坏情况保真度，我们从 Haar 测度中均匀随机抽取初始态 $|\psi_0\rangle$。图 3 展示了基于每种算法在不同噪声实现下运行 40,000 次所得到的最坏情况保真度、平均保真度和标准差。请注意，较小的利普希茨界与较大的保真度（平均值和最差值）之间存在很强的相关性，这验证了上述分析。特别是，门集 E 的最坏情况保真度最大，而利普希茨界最大的门集 A 的鲁棒性最差。

比较上述量子线路的门数量和电路深度也很有意义，它们是现有电路优化方法中常用的鲁棒性量化指标（参见第四节的讨论）。图 3 也展示了这些指标。请注意，对于上述量子线路，量子门较少或电路深度较低并不一定意味着鲁棒性更好。例如，门集 C 的最坏情况保真度损失是门集 E 的两倍多，尽管基于门集 E 的实现所用量子门多出近 30%。比较电路深度时也能得出类似的观察结果。这与“量子门越少，鲁棒性越好”的普遍观点相悖，也表明利普希茨界确实是衡量抵抗相干控制误差的鲁棒性时更准确的量化指标。

最后，对于上述量子线路，最坏情况保真度界（18）较为保守，而且在五个量子线路中有四个得到的界甚至为负。然而，如图 3 所示，利普希茨界仍为比较这些量子线路的鲁棒性提供了一种简单且定量的衡量方式。

总而言之，我们的理论结果为鲁棒量子算法设计与转译提供了新见解，使我们能够比较不同电路的鲁棒性，从而有依据地选择鲁棒性最高的实现。这对于大型量子算法尤为重要：若量子算法要产生任何形式的量子优势，就不可能通过经典方式高效模拟，因此也无法像图 3 那样进行统计分析。另一方面，计算利普希茨界非常简单，也容易扩展，参见附录 B。

应当强调，我们的主要贡献不是比较基本门集的鲁棒性本身。特别是，我们并未声称门集 E 通常优于其他门集。例如，完全有可能存在一个基于门集 D 的量子线路来实现量子傅里叶变换，其鲁棒性优于附录 E 中展示的基于门集 E 的量子线路。我们的主要贡献是提出这种可能性：对于给定的一组量子电路，可以进行上述理论分析。无需借助仿真或实验，我们就能利用利普希茨界，先验地保证量子电路对相干控制误差的鲁棒性。这些见解为算法设计者或电路优化方法提供了一个有前景的工具，



ˆ (a) 理想量子线路 U_A

ˆ (b) 理想量子线路 U_B

(c) 有噪声量子线路 $U_A(\varepsilon_A)$

(d) 有噪声量子线路 $U_B(\varepsilon_B)$

图 4：理想量子线路 U_A 和 U_B，以及它们的有噪声版本 $U_A(\varepsilon_A)$ 和 $U_B(\varepsilon_B)$。)

以便在设计或转译阶段直接提升鲁棒性。

为了说明这些理论发现确实能够在实践中转化为可测量的鲁棒性优势，我们在第VI节中，在一台真实的量子计算机上比较了具有不同利普希茨界的两条量子线路的实现。

VI. 在量子计算机上进行验证

接下来，我们在 *ibm nairobi* 量子计算机 [29]上进行实现，以验证我们的理论发现。为此，我们考虑图 4 (a) 和 (b) 中分别描绘的两个量子线路 ˆ U_Aˆand U_B 。不难验证，这两个量子线路都会产生相同的输出量子态 $|\psi\rangle$。

接下来，我们使用定理 II.2 证明，与 U_B 相比，U_A 对相干控制误差更具鲁棒性，并通过在量子计算机上的实现来验证这一结论。具体而言，我们考虑 R_z-量子门分别受到相干控制误差 ε_A 和 ε_B 影响的情形，参见图 4 (c) 和 (d)。我们不考虑 X 和 $\sqrt{X}$ 量子门的相干控制误差，因为 *ibm nairobi* 可实现的基本门集不包含 R_x-旋转。

利用定理 II.2，我们可以计算 U_A 和 U_B 关于误差 ε_A 和 ε_B 的利普希茨界：

$$L_A = \frac{\pi}{8} \quad \text{and} \quad L_B = \frac{5\pi}{8}, \tag{29}$$

分别为 [60]。图 5 根据 (18) 显示了所得最差值保真度界，其中 U_A 的界明显大于 U_B 的界。因此，定理 II.2 预测，U_A 比 U_B 更能抵御相干控制误差。

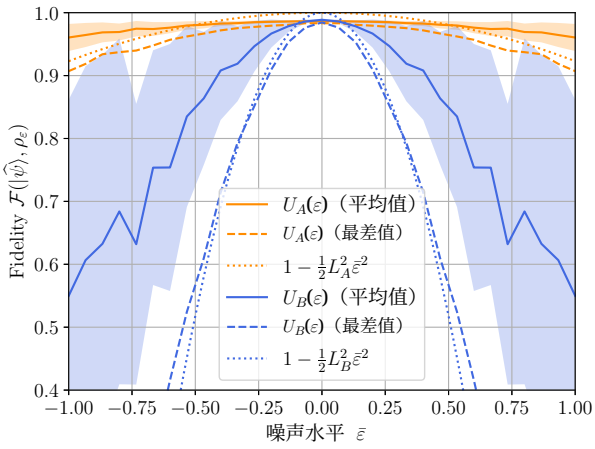


图 5：量子线路 U_A（橙色）和 U_B（蓝色）在不同噪声水平下的保真度：平均值（实线）、标准差（阴影区域）和最差值（虚线）；在*ibm nairobi* 上，每个噪声水平 $\bar{\varepsilon}$ 均使用 80 个噪声样本进行测试；定理 II.2 给出的最坏情况界以点线表示。

对于在 *ibm nairobi* 上的实现，我们运行电路 $U_A(\varepsilon_A)|0\rangle$ 和 $U_B(\varepsilon_B)|0\rangle$，对应 16 个等间距的噪声水平 $\bar{\varepsilon} \in [0,1]$。对于每个噪声水平，我们分别从 $[-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ 中随机抽取 80 组 ε_A 和 ε_B。由于无法直接在量子计算机上测量保真度，我们采用一种简单的量子态层析（QST）流程来估计相应的密度矩阵 $\hat{\rho}_\varepsilon$，并据此计算保真度 $\mathcal{F}(|\psi\rangle, \rho_\varepsilon)$。附录 F 概述了我们采用的单量子比特 QST 流程。

图 5 展示了两个电路在不同噪声水平下的平均保真度和最坏情况保真度。首先，我们观察到，在非平凡噪声水平下，量子线路 U_A 的表现确实显著优于量子线路 U_B，这与定理 II.2 的预测一致。此外，噪声水平越高，两者差距越大，而且观测到的最坏情况保真度实际上非常接近理论界（18）。对于 U_A，经验值小于理论下界，这可以用保真度估计过程不精确来解释，也可能是由退相干效应等因素造成的其他误差所致。最后，需要注意的是，U_A 相较于 U_B 稳健性的提升只能用不同的利普希茨界来解释，而不能用量子门数量（3 个与 4 个）等因素来解释，因为在不存在相干控制误差时，即对于 $\bar{\varepsilon} = 0$，两个电路的保真度几乎相同。

最后，[61], 中还为上述理论分析提供了进一步的实验支持，该研究同样表明，利普希茨界较小的实现（在实验设置中通过更小或更短的脉冲实现）确实能带来更高的保真度。

VII. 变分量子算法：通过正则化实现鲁棒性

除了如前文所述将利普希茨界用于量子电路设计和转译外，它们在变分量子算法中也很有用。具体而言，我们将在下文展示，如何利用它们对变分量子算法进行微调，使其输出更加稳健的量子电路。

变分量子算法有望在不久的将来于含噪声中等规模量子设备上实现量子优势 [62]。它们包含参数化量子电路，这些电路会被反复执行，并通过优化方案进行调整。更准确地说，变分量子算法涉及以下形式的参数化幺正算子

$$\hat{U}(\theta) = \hat{U}_1(\theta_1)\cdots\hat{U}_N(\theta_N), \tag{30}$$

其中，$\theta \in \mathbb{R}^N$ 是一个自由参数，而对于哈密顿量 $H_i = H_i^\dagger$、$i = 1$、……、N，$\hat{U}_i(\theta_i) = e^{-i\theta_i H_i}$。其思想是改变 θ，以最小化代价函数 $\mathcal{C}$：$\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$。该函数通常表示在将 $\hat{U}(\theta)$ 应用于初始态 $|\psi_0\rangle$ 后，对某个可观测量 $\mathcal{M}$ 进行测量：

$$\mathcal{C}(\theta) = \langle\psi_0|\hat{U}(\theta)^\dagger \mathcal{M}\hat{U}(\theta)|\psi_0\rangle\,. \tag{31}$$

遵循这一思想的热门算法包括量子近似优化算法（QAOA） [63]，、变分量子本征求解器（VQE） [64]，以及许多其他算法 [65]。预计此类算法对于噪声具有更强的鲁棒性，并且能够在不久的将来实现，因为它们仅使用少量量子比特和量子门便能产生有意义的结果，从而可以在当前可用的硬件上实现。

现在假设受到相干控制误差 $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$的影响，即我们不再使用 $U(\theta)$，而是使用

$$U(\theta,\varepsilon) = e^{-i\theta_1(1+\varepsilon_1)H_1}\cdots e^{-i\theta_N(1+\varepsilon_N)H_N}. \tag{32}$$

定理 II.2 现在表明，对于固定参数$\theta \in \mathbb{R}^N$，$\sum_{i=1}^N |\theta_i|\|H_i\|_2$ 是 $\varepsilon \mapsto U(\theta, \varepsilon)|\psi_0\rangle$的利普希茨界。特别是，$|\theta_i|$ 的值越小，VQA 对相干控制误差的鲁棒性就越好。因此，我们需要求解以下正则化优化问题，以使 θ 的大小尽可能小。

$$\min_{\theta\in\mathbb{R}^N} \mathcal{C}(\theta) + \lambda\|\theta\|_2^2. \tag{33}$$

此处，$\lambda > 0$ 是一个可用于权衡最优性与针对相干控制误差的鲁棒性的参数。对于较大的 λ值，变分量子算法的解将更倾向于提供鲁棒算法的解；而较小的 λ 值则会鼓励获得更好的性能，但可能以鲁棒性变差为代价。我们注意到，对于变分量子算法，已有研究提出对哈密顿量参数进行正则化 [66]

并研究相干控制误差 [31, 67–69]。然而，据我们所知，上述正则化与相干控制误差之间的联系是新的。

如果希望算法能在不同量子设备之间迁移，变分量子算法的鲁棒性就尤为重要。在变分量子算法中加入正则化可以提升鲁棒性，从而促使算法找到一个对训练所用特定硬件依赖较小的最优解。

接下来，我们通过一个示例验证上述讨论，说明对 θ进行正则化确实会得到鲁棒性更强的量子电路。为此，我们针对一个回归任务训练一个简单的量子模型。也就是说，给定数据集 $\mathcal{D} = \{(x,\ y)\}_{i=1}^{n}$，该数据集包含$n$ 实值数据点 $x \in \mathcal{X},\ y \in \mathcal{Y}$，我们的目标是训练模型 f_θ，使其在输入 x_i后输出 $f_\theta(x_i) = \hat{}y_i$，且从均方误差的角度来看，该输出接近于 y_i

$$\mathrm{MSE}(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{f}_\theta(x_i))^2 \tag{34}$$

且均方误差足够小。我们的模型基于 [70]，由一个单量子比特组成。更准确地说，我们采用幺正算子

$$U(\theta, x) = R_{\mathrm{x}}(x)R_{\mathrm{z}}(\theta_1)R_{\mathrm{y}}(\theta_2)R_{\mathrm{z}}(\theta_3) \tag{35}$$

作为试探态。注意，该试探态由一个固定门R_{x}（用于编码输入 x）和三个可训练参数$\theta = (\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3)$组成。对于给定的输入 x_i 和参数集θ，我们按如下方式推断输出：

$$\hat{f}_\theta(x_i) = \langle\psi(\theta, x_i)|\hat{Z}|\psi(\theta, x_i)\rangle\,, \tag{36}$$

其中 $|\psi(\theta,\ x_i)\rangle = U(\theta,\ x_i)\ |0\rangle$，这里我们根据 20,000 次电路评估来估计该期望值。训练时，我们选择 $\mathcal{C}(\theta) = \mathrm{MSE}(\theta)$ 作为代价函数，并应用参数移位法则 [71] 来计算梯度 $\nabla\mathcal{C}(\theta)$。参数从步骤 $i \to i+1$ 开始，基于 ADAM 优化器 [72], 进行更新，即$\theta^{(i+1)} = \theta^{(i)} - \eta^{(i)}\nabla\mathcal{C}(\theta^{(i)})$，其中 $\eta^{(i)}$ 是步骤 i所选的学习率。文献 [70] 表明，上述模型可以表示正弦函数 $f(x) = \sin(x)$。我们通过从 $[0, 2\pi]$中等距选取 $n = 20$ 个点，构建一个简单的训练集 $\mathcal{X}$；目标集为 $\mathcal{Y} = \{\sin(x) : x \in \mathcal{X}\}$。

在评估上述量子电路时，我们假设 R_{y}门和 R_{z}门受到相干控制误差的影响。具体而言，在每次迭代中，可训练参数 R_{y} 和 R_{z} 对应的旋转门会像式 (10) 那样受到扰动，噪声项从 $[-\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}]$ 中均匀采样，且 $\bar{\varepsilon} = 0.05$。

我们考虑正则化参数 $\lambda \in \{0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.5\}$的五种不同取值，并针对每种取值，使用从 [中均匀抽取的不同初始权重训练八个模型

$-2\pi,\ +2\pi]$。最终模型选取 Adam 优化器经过50次迭代后代价最小的模型 $\mathcal{C}(\theta)$。

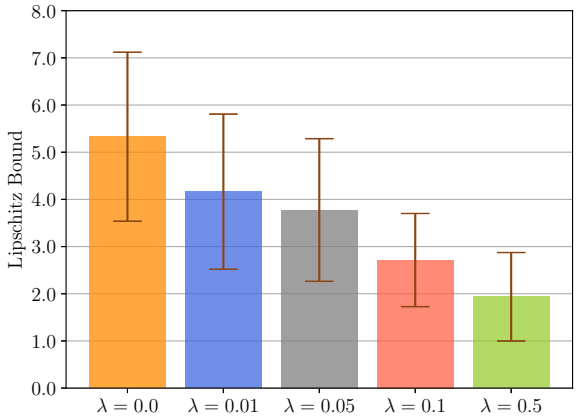


图 6：正则化参数 λ变化时，训练所得量子电路的利普希茨界的平均值和标准差。

采用不同正则化参数训练得到的最终电路的利普希茨界如图 6 所示。我们观察到，较大的正则化参数 λ 确实会带来较低的利普希茨界。根据定理 II.1，这意味着这些电路对相干控制误差具有更强的鲁棒性。因此，我们可以得出结论，在这种设置下，通过参数正则化能够有效提升量子电路的鲁棒性。

最后，在变分量子算法的背景下，利普希茨界除了可用于保证对相干控制误差的鲁棒性外，还有另一项用途：可用于证明变分量子算法训练的收敛性。众所周知，若代价函数的梯度具有利普希茨界 L，则步长小于 $\frac{2}{L}$ 的梯度下降可被证明收敛 [73]。借助类似思路，[35] 研究了存在噪声时变分量子算法优化方案的收敛性。我们在第 II 节中的结果给出了量子态 $|\psi\rangle$的利普希茨界。在不存在相干控制误差时，参数化量子电路也满足完全相同的利普希茨界，即映射 $\theta \mapsto \hat{}U(\theta)\ |\psi_0\rangle$。这些界进而可导出梯度 $\nabla\mathcal{C}$ 的利普希茨界，与 [35]类似。由于定理 II.2 和 II.3 中的界可能比 [35], 中的界更紧，因此它们或许能为优化算法及其收敛性分析提供更多自由度，从而降低保守性并改善变分量子算法训练的收敛性。

VIII. 结论

本文提出了一个用于分析量子算法对相干控制误差鲁棒性的新框架。我们利用利普希茨界推导出最坏情况保真度界，这些界可显式计算，并涉及哈密顿量的范数及其耦合。

我们的框架与量子计算中的几个重要问题相关联：我们展示了如何将所推导的界用于容错量子计算的阈值定理，并为变分量子算法中的参数正则化提供了一种新颖的解释。此外，我们利用理论结果提出了设计和转译鲁棒量子算法的实用指南，即保持哈密顿量的范数较小。通过研究 3 量子比特量子傅里叶变换的不同基本门集实现，我们表明，与门数等现有度量相比，这些范数能够更精确地量化对相干控制误差的鲁棒性。我们在多个模拟应用以及$ibmnairobi$ 量子计算机上验证了该框架的实用性。下一步，研究更多类别的量子算法和门集合对相干控制误差的鲁棒性，将是实现更易于在含噪量子硬件上部署的鲁棒量子线路的有趣方向。特别是，开发旨在降低哈密顿量范数的电路优化或转译流程，是提升量子算法鲁棒性的一个有前景途径。最后，将我们的理论分析扩展到纳入有关误差的随机信息，或许能为本文所考察的最坏情况界提供额外洞见。

致谢

我们感谢 Elies Gil-Fuster 和 Johannes Jakob Meyer 对稿件早期版本提出的宝贵意见。我们感谢本研究使用了 IBM Quantum 服务。文中观点仅代表作者，不反映 IBM 或 IBM Quantum 团队的官方政策或立场。本研究由德国研究联合会（DFG，德国研究联合会）通过德国卓越战略资助，项目编号为 EXC 2075 - 390740016。我们感谢斯图加特模拟科学中心（SimTech）提供的支持。

附录 A：定理 II.2 的证明

证明。对于 $i = 1, \ldots\ldots, N$，我们有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon_i} U_i(\varepsilon_i) = -iH_i e^{-i(1+\varepsilon_i)H_i}.$$

特别地，U_i 的导数一致有界，即

$$\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon_i} U_i(\varepsilon_i) \right\|_2 \leq \|H_i\|_2$$

对所有的 $\varepsilon_i \in \mathbb{R}$ 均成立。这意味着 $\|H_i\|_2$ 是 U_i 的利普希茨界，即

$$\|U_i(\varepsilon_i) - U_i(\varepsilon_i')\|_2 \leq \|H_i\|_2 |\varepsilon_i - \varepsilon_i'| \tag{A1}$$

对所有 $\varepsilon_i,\ \varepsilon_i' \in \mathbb{R}$ 均成立。现在，我们推得

$$\begin{aligned}
&\||\psi(\varepsilon)\rangle - |\psi(\varepsilon')\rangle\|_2 \\
=&\left\| \Big(\prod_{i=1}^{N} U_i(\varepsilon_i) - \prod_{i=1}^{N} U_i(\varepsilon_i') \Big) |\psi_0\rangle \right\|_2 \\
\leq&\left\| \prod_{i=1}^{N} U_i(\varepsilon_i) - \prod_{i=1}^{N} U_i(\varepsilon_i') \right\|_2 \\
=&\Big\| U_1(\varepsilon_1) \Big(\prod_{i=2}^{N} U_i(\varepsilon_i) - \prod_{i=2}^{N} U_i(\varepsilon_i') \Big) \\
&+ (U_1(\varepsilon_1) - U_1(\varepsilon_1')) \prod_{i=2}^{N} U_i(\varepsilon_i') \Big\|_2 \\
\leq&\|U_1(\varepsilon_1) - U_1(\varepsilon_1')\|_2 + \left\| \prod_{i=2}^{N} U_i(\varepsilon_i) - \prod_{i=2}^{N} U_i(\varepsilon_i') \right\|_2,
\end{aligned}$$

其中我们利用了 $|\psi_0\rangle$ 具有单位范数，且 U_i为幺正算子，以及三角不等式和矩阵范数的次乘性。通过归纳推理，可得

$$\||\psi(\varepsilon)\rangle - |\psi(\varepsilon')\rangle\|_2 \leq \sum_{i=1}^{N} \|U_i(\varepsilon_i) - U_i(\varepsilon_i')\|_2. \tag{A2}$$

结合 (A1) 和 (A2)，我们得到

$$\begin{aligned}
\||\psi(\varepsilon)\rangle - |\psi(\varepsilon')\rangle\|_2 &\leq \sum_{i=1}^{N} \|H_i\|_2 |\varepsilon_i - \varepsilon_i'| \qquad \text{(A3)} \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \|H_i\|_2 \|\varepsilon - \varepsilon'\|_\infty,
\end{aligned}$$

这意味着 (17) 和利普希茨界 $\sum_{i=1}^{N} \|H_i\|_2$。此外，定理 II.1 意味着 (18)，由此完成证明。

□

附录 B：定理 II.2 对稀疏电路的可扩展性

下面，我们阐述一个简单但在实践中很重要的观察：利普希茨界 (17) 仅取决于作用于各个量子比特的非平凡量子门分量。

命题 B.1. 假设 U_i 仅作用于所有量子比特的一个子集，即

$$\hat{U}_i = e^{-iH_i} = I_{\otimes j_1} \otimes e^{-i\bar{H}_i} \otimes I_{\otimes j_2}$$

对于某些 j_1, j_2。于是，$\|H_i\|_2 = \|H_i\|_2$。

证明。 注意到

$$\begin{aligned} e^{-iH_i} &= I_{\otimes j_1} \otimes e^{-i\bar{H}_i} \otimes I_{\otimes j_2} \\ &= e^{I_{\otimes j_1} \otimes (-i\bar{H}_i) \otimes I_{\otimes j_2}}. \end{aligned}$$

这意味着

$$\|H_i\|_2 = \|I_{\otimes j_1} \otimes \bar{H}_i \otimes I_{\otimes j_2}\|_2 = \|\bar{H}_i\|_2.$$

□

在量子算法仅由单量子比特门和双量子比特门组成的常见情形下，命题 B.1 意味着，可以通过计算 2×2 或 4×4 矩阵的范数，轻松确定 $\|H_i\|_2$。特别地，计算完整量子线路的定理 II.2 中界的复杂度仅随门数线性增长，因此，该方法很容易扩展到大型量子线路。

附录 C：最坏情况保真度界 (18) 的紧致性

不难证明，对于单个量子门（$N = 1$）的情形以及对于 $\|H\|_2\bar{\varepsilon} \leq \frac{\pi}{2}$，最坏情况保真度等于 $|\cos(\|H\|_2\bar{\varepsilon})|$。这意味着，存在一个初态 $|\psi_0\rangle$ 和一个噪声实现 $\varepsilon \in \mathbb{R}$，满足$|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$，使得

$$|\langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle| = |\cos(\|H\|_2\bar{\varepsilon})|. \tag{C1}$$

因此，对于 $N = 1$，式 (18) 中的保真度下界 $1 - \frac{1}{2}\|H\|_2^2\bar{\varepsilon}^2$ 是精确最坏情况保真度的二阶泰勒近似。这表明，只要乘积 $\|H\|_2\bar{\varepsilon}$ 足够小，该下界就不会过于保守。

另一方面，对于多个量子门，即 $N > 1$，求出最坏情况保真度的显式表达式则更为复杂。作为式 (18) 中下界的替代方案，可以利用 (C1) 推导出如下下界：回顾一下，保真度 $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$ 定义了一个度量 $D(|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) = \sqrt{1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2}$ [32]。因此，我们可以通过反复对该度量应用三角不等式并利用 (C1)，来量化理想态 $|\psi\rangle$ 与含噪态 $|\psi(\varepsilon)\rangle$ 之间的距离，即

$$\begin{aligned} D(|\psi(\varepsilon)\rangle, |\hat{\psi}\rangle) &\leq \sum_{i=1}^{N} \sqrt{1 - |\cos(\|H_i\|_2\bar{\varepsilon})|^2} \\ &= \sum_{i=1}^{N} |\sin(\|H_i\|_2\bar{\varepsilon})|. \end{aligned}$$

这可以转化为保真度界

$$|\langle\psi(\varepsilon)|\hat{\psi}\rangle| \geq \sqrt{1 - \left(\sum_{i=1}^{N} |\sin(\|H_i\|_2\bar{\varepsilon})|\right)^2}, \tag{C2}$$

前提是平方根下的表达式为正。下面比较界 (18) 和 (C2)。当噪声水平 $\bar{\varepsilon}$ 较小时，(C2) 中的 $\sin(\|H_i\|_2\bar{\varepsilon})$ 可以用 $\|H_i\|_2\bar{\varepsilon}$ 代替。定义 $c = \sum_{i=1}^{N}\|H_i\|_2\bar{\varepsilon}$ 后，(C2) 的右侧变为 $\sqrt{1 - c^2}$。另一方面，(18) 的右侧可以写成 $1 - \frac{c^2}{2}$。由于对于任意 $0 < c < 1$，都有 $\sqrt{1 - c^2} < 1 - \frac{c^2}{2}$，因此我们证明了（在噪声水平较小时）界 (18) 比 (C2) 更紧，即它保证了更大的最坏情况保真度。因此，本文始终关注定理 II.2 中推导出的界 (18)。

附录 D：定理 II.3 的证明

证明。 我们只证明（23a），并注意到（23b）经过简单修改即可证明。注意

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}\,|\psi(\varepsilon)\rangle}{\mathrm{d}\varepsilon} \\ &= -i\Big[H_1 \prod_{i=1}^{N} U_i(\varepsilon_i)\,|\psi_0\rangle\,,\, U_1(\varepsilon_1)H_2 \prod_{i=2}^{N} U_i(\varepsilon_i)\,|\psi_0\rangle\,, \\ &\qquad \ldots,\, \prod_{i=1}^{N-1} U_i(\varepsilon_i)H_N U_N(\varepsilon_N)\,|\psi_0\rangle\Big]. \end{aligned} \tag{D1}$$

由于 H_i 与 $U_i(\varepsilon_i)$ 对易，我们可以将（D1）右侧的前两个分块项改写为

$$\begin{aligned} &\Big[H_1 \prod_{i=1}^{N} U_i(\varepsilon_i)\,|\psi_0\rangle\,, U_1(\varepsilon_1)H_2 \prod_{i=2}^{N} U_i(\varepsilon_i)\,|\psi_0\rangle\Big] \\ &= U_1(\varepsilon_1)\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix}\Big(I_2 \otimes \big(\prod_{i=2}^{N} U_i(\varepsilon_i)\big)\Big)\,|\psi_0\rangle\,. \end{aligned} \tag{D2}$$

利用 $|\psi_0\rangle$ 是一个单位向量且矩阵 $U_i(\varepsilon_i)$ 是幺正算子，（D2）的范数上界为 $\|\begin{pmatrix} H_1 & H_2 \end{pmatrix}\|_2$。因此，类似于定理 II.2 的证明，我们推断，对于任意 $\varepsilon \in \mathbb{R}^N$，

$$\begin{aligned} &\||\psi(\varepsilon)\rangle - |\hat{\psi}\rangle\|_2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \|\begin{pmatrix} H_{2i-1} & H_{2i} \end{pmatrix}\|_2 \left\| \begin{pmatrix} \varepsilon_{2i-1} \\ \varepsilon_{2i} \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &\leq \sqrt{2} \sum_{i=1}^{\frac{N}{2}} \|\begin{pmatrix} H_{2i-1} & H_{2i} \end{pmatrix}\|_2 \|\varepsilon\|_\infty, \end{aligned}$$

其中我们利用了 $\|a\|_2 \leq \sqrt{2}\|a\|_\infty$（若 $a \in \mathbb{R}^2$）。 □

附录 E：3量子比特量子傅里叶变换的电路

下面我们展示第 V 节中所考虑的基本门集对应的 3 量子比特量子傅里叶变换的转译后量子电路。所有电路均经过转译

，使用的是 BQSKit 编译器 [59]。图7展示了 [74]中的原始、未经转译的 3 量子比特量子傅里叶变换量子电路。此外，图8–12展示了使用原生门集 A–E 转译后的电路：门集 A 对应图 8，门集 B 对应图 9，门集 C 对应图10，门集 D 对应图11，门集 E 对应图12。

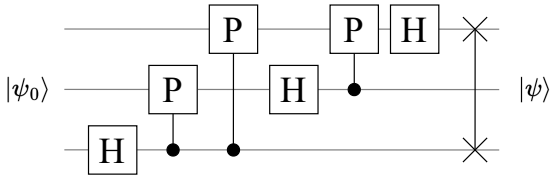


图 7：取自 Qiskit [74] 的三量子比特量子傅里叶变换未转译量子电路。该量子线路共包含三个 Hadamard 门、三个受控相位门和一个交换门。

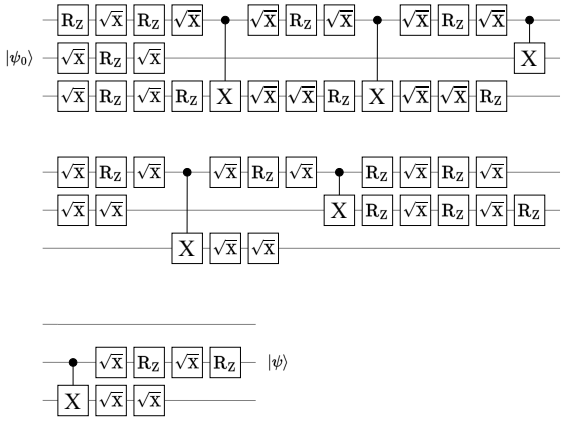


图 8：采用门集 A 的三量子比特量子傅里叶变换转译后的量子电路。该量子线路共包含 18 个R_{Z}、 30 $\sqrt{X}$ 和 6 CX 量子门，其利普希茨界为 $L^{A}_{QFT} = 117.95$。

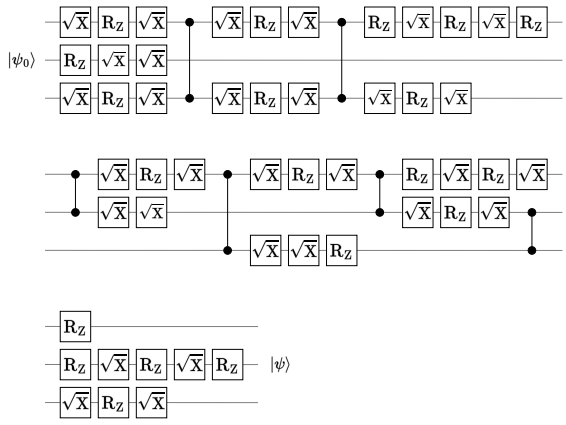


图9：使用门集 B 的三量子比特量子傅里叶变换的转译后的量子电路。该量子电路总共包含 20R_{Z}、 30 $\sqrt{X}$ 和 6 CZ 量子门，其利普希茨界为 $L^{B}_{QFT} = 106.79$。

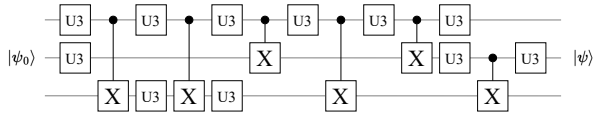


图10：采用门集 C 的三量子比特量子傅里叶变换的转译后量子电路。该量子电路总共包含 11U_3 and 6 CX 个量子门，其利普希茨界为$L^{C}_{QFT} = 45.26$。

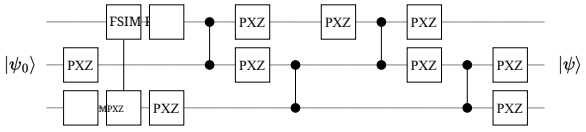


图11：使用门集 D 的三量子比特量子傅里叶变换的转译后的量子电路。该量子电路总共包含 11 个 PhasedXZ 和 4 CZ，以及一个 FSIM门，其利普希茨界为 $L^{D}_{QFT} = 36.95$。

附录 F：单量子比特量子态层析

在第VI节中，我们将一个解析已知的量子态 $|\psi\rangle$ 与一个未知量子态 $|\psi(\varepsilon)\rangle$进行比较，后者是在真实量子计算机 *ibm nairobi* 上执行量子电路得到的输出。由于无法直接测量量子态的振幅，我们需要使用某种技术，仅基于可测量的期望值来重构该量子态。这正是量子态层析（QST）过程 [75] 的目标。

在所考虑的设置中，我们处理的是单量子比特态。因此，相应的密度矩阵可写为

$$\rho = \frac{1}{2}\Big(I + r_x \cdot X + r_y \cdot Y + r_z \cdot Z\Big), \tag{F1}$$

其中，系数 r_x、 r_y、 $r_z \in \mathbb{R}$ 是泡利矩阵的期望值，即:

$$r_x = \mathrm{tr}(X\rho), \tag{F2}$$
$$r_y = \mathrm{tr}(Y\rho), \tag{F3}$$
$$r_z = \mathrm{tr}(Z\rho). \tag{F4}$$

随后，在制备量子态 ρ 多次并测量其在相应坐标轴上的投影 [75]后，我们可以估算这些期望值。给定所得的密度矩阵 ρ 以及纯态 $|\psi\rangle$的解析表达式，我们可以根据下式计算保真度

$$\mathcal{F}(|\psi\rangle, \rho) = \sqrt{|\langle\psi|\rho|\psi\rangle|}. \tag{F5}$$

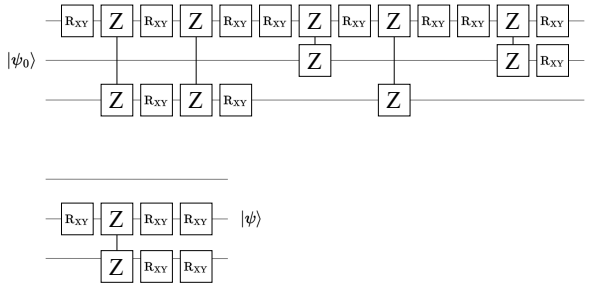


图 12：采用门集 E 的三量子比特量子傅里叶变换转译后的量子电路。该量子线路总共由 16R_{xy} 和 6 U_{zz} 个量子门组成，其利普希茨界为$L^E_{QFT} = 29.42$。

在我们的实验中，给定噪声水平 $\bar{\varepsilon}$，我们抽取一个噪声样本 $\varepsilon \in [-\bar{\varepsilon}, +\bar{\varepsilon}]$，制备量子态 $|\psi(\varepsilon)\rangle$ 20，000 次以获取三个泡利期望值中的每一个，按照 (F1) 重建 ρ_ε，并通过 (F5) 计算保真度。我们针对 16 种不同的噪声水平执行这一流程，每种噪声水平各包含 80 个不同的噪声样本，以收集图 5 所需的统计数据。我们对两个量子电路 U_A 和U_B分别执行整个流程。因此，我们总共在 $ibm\ nairobi$ 上运行了 $2 \cdot 16 \cdot 80 \cdot 3 \cdot 20,\ 000 = 153,\ 600,\ 000$ 个量子电路。

[1] P. Shor，《量子计算机上用于素数因数分解和离散对数的多项式时间算法》，《SIAM评论》**41**，303（1999）。[2] L. K. Grover，《用于数据库搜索的快速量子力学算法》，载于 *Proc. 28th ACM Symposium on the Theory of Computing* 1996 212 219（）第 – 页。[3] J. Preskill，《NISQ时代及以后的量子计算》，Quantum **2**，79（2018）。[4] J. P. Barnes、C. J. Trout 和 D. Lucarelli，《量子纠错失效分布：相干误差模型与随机误差模型的比较》，《物理评论A辑》**95**，062338（2017）。[5] C. J. Trout、M. Li、M. Guti´errez、Y. Wu、S.-T. Wang、L. Duan 和 K. R. Brown，《在线性离子阱中模拟距离为3的表面码的性能》，《新物理学杂志》**20**，043038（2018）。[6] F. Arute、K. Arya、R. Babbush 等，《利用可编程超导处理器实现量子霸权》，《自然》**574**，505（2019）。[7] M. H. Levitt，《复合脉冲》，《核磁共振波谱进展》**18**，61（1986）。[8] J. A. Jones，《用于实用量子计算的鲁棒伊辛门》，《物理评论A辑》**67**，012317（2003）。[9] K. R. Brown、A. W. Harrow 和 I. L. Chuang，《任意精度的复合脉冲序列》，载于*Advances in Chemical Physics* 82 ，第卷（John Wiley & Sons，霍博肯，新泽西州，2014），第2014页。[11] K. Khodjasteh 和 L. Viola，《用于通用量子计算的动态纠错门》，《物理评论快报》**102**，080501（2009）。[12] S. Bravyi、M. Englbrecht、R. K¨onig 和 N. Peard，《利用表面码纠正相干误差》，npj Quantum Information **4**，10.1038/s41534-018-0106-y（2018）。[13] D. M. Debroy、M. Li、M. Newman 和 K. R. Brown，《稳定子切片：低密度奇偶校验稳定子码中的相干误差抵消》，《物理评论快报》**121**，250502（2018）。[14] C. L. Edmunds、C. Hempel、R. J. Harris、V. Frey、T. M. Stace 和 M. J. Biercuk，《动态校正门抑制时空误差关联的测量……

通过随机基准测试测得，《物理评论研究》**2**，013156（2020）。[15] S. Majumder、L. A. de Castro 和 K. R. Brown，利用旁观量子比特进行实时校准，《npj Quantum Information》**6**，19（2020）。[16] C. Liu，具有相干误差的五量子比特码的精确性能，arXiv:2203 01706 10 48550 2203 01706 2022 . . / arXiv. .（）。[17] J. J. Wallman 和 J. Emerson，通过随机化编译为可扩展量子计算进行噪声整形，《物理评论A辑》**94**，052325（2016）。[18] E. Nielsen、J. K. Gamble、K. Rudinger、T. Scholten、K. Young 和 R. Blume-Kohout，门集层析，《Quantum》**5**，557（2021）。[19] B. Zhang、S. Majumder、P. H. Leung、S. Crain、Y. Wang、C. Fang、D. M. Debroy、J. Kim 和 K. R. Brown，隐藏逆操作：电路级相干误差抵消，《Physical Review Applied》**17**，034074（2022）。[20] A. Maksymov、P. Niroula 和 Y. Nam，囚禁离子量子计算机中的量子门最优校准，《Quantum Science and Technology》**6**，034009（2021）。[21] D. Maslov、G. W. Dueck、D. M. Miller 和 C. Negrevergne，量子电路简化与层压缩，《IEEE Trans. Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems》**27**，436（2008）。[22] M. Arabzadeh、M. Saeedi 和 M. S. Zamani，可逆电路的基于规则的优化，载于 *Proc. 15th Asia and South Pacific Design Automation Conf. (ASP-DAC)*（2010），第849–854页。[23] Y. Nam、N. J. Ross、Y. Su、A. M. Childs 和 D. Maslov，具有连续参数的大型量子电路自动优化，《Quantum Information》**4**，10.1038/s41534-018-0072-4（2018）。[24] M. Amy、P. Azimzadeh 和 M. Mosca，受控非门-相位电路的受控非门复杂度，《Quantum Science and Technology》**4**，015002（2019）。[25] Y. Lee、J. Joo 和 S. Lee，混合量子线性方程算法及其在 IBM Quantum Experience 上的实验测试，《Scientific Reports》**9**，10.1038/s41598-019-41324-9（2019）。[26] R. Duncan、A. Kissinger、S. Perdrix 和 J. van de Wetering，利用 ZX演算进行量子电路的图论简化

, 《Quantum》**4**，279（2020）。[27] T. F¨osel、M. Y. Niu、F. Marquardt 和 L. Li，利用深度强化学习进行量子电路优化，arXiv:2103.07585 10.48550/arXiv.2103.07585（2021）。[28] H. Nagarajan、O. Lockwood 和 C. Coffrin，Quantum-CircuitOpt：用于可证明最优量子电路设计的开源框架，载于 *Proc. 2nd IEEE/ACM Int. Workshop on Quantum Computing Software (QCS)*（2021），第55–63页。[29] IBM Quantum。https://quantum-computing.ibm.com，2021（）。[30] https://github.com/daniel-fink-de/robustness-of-quantum-algorithms。[31] A. Skolik、S. Mangini、T. B¨ack、C. Macchiavello 和 V. Dunjko，硬件错误下量子强化学习的鲁棒性，arXiv:2212 09431 10 48550 2212 09431 2022 . . /arXiv. .（）。[32] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang，*Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*，第10版。（剑桥大学出版社，美国纽约州纽约市，2011）。[33] 在我们的主要技术结果中，为了获得更紧的界，我们对噪声使用 ∞-范数，而不是2-范数。[34]A. Y. Kitaev，量子计算：算法与纠错，《Russian Mathematical Surveys》**52**，1191（1997）。[35] R. Sweke、F. Wilde、J. Meyer、M. Schuld、P. K. F¨ahrmann、B. Meynard-Piganeau 和 J. Eisert，用于混合量子-经典优化的随机梯度下降，《Quantum》**4**，314（2020）。[36] D. A. Lidar、P. Zanardi 和 K. Khodjasteh，量子动力学的距离界，《物理评论A辑》**78**，012308 2008（）。[37] D. Aharonov 和 M. Ben-Or，具有恒定错误的容错量子计算，载于 *Proc. 29th ACM Symposium on the Theory of Computing*（），1997 176第–188页。[38] D. Aharonov 和 M. Ben-Or，具有恒定错误率的容错量子计算，《SIAM J. Comput.》**38**，1207（2008）。[39] R. Blume-Kohout、J. K. Gamble、E. Nielsen、K. Rudinger、J. Mizrahi、K. Fortier 和 P. Maunz，利用门集层析展示严格容错阈值以下的量子比特操作，《自然·通讯》**8**，14485（2017）。[40] M. A. Nielsen，量子动力学操作平均值门保真度的一个简单公式，《Physics Letters A》**303**，249（2002）。[41] J. T. Thomas、M. Lababidi 和 M. Tian，单量子比特几何门对系统误差的鲁棒性，《物理评论A辑》**84**，042335（2011）。[42] S. Beigi 和 R. K¨onig，具有位置型密码学应用的简化瞬时非局域量子计算，《新物理学杂志》**13**，093036（2011）。[43] J. J. Wallman 和 S. T. Flammia，带置信度的随机基准测试，《New Journals of Physics》**16**，103032 2014（）。[44] J. Wallman，量子电路中的错误率，arXiv:1511.00727 10.48550/arXiv.1511.00727（2015）。[45] J. Wallman、C. Granade、R. Harper 和 S. T. Flam|||mia，噪声相干性的估计，《New Journal of Physics》**17** ’ 113020（2015）。[46]R. Kueng、D. M. Long、A. C. Doherty 和 S. T. Flammia，《将实验与容错阈值进行比较》，《物理评论快报》**117**，170502（2016）。[47] Y. R. Sanders、J. J. Wallman 和 B. C. Sanders，《基于报告的平均保真度界定量子门错误率》，《新物理学杂志》**18**，012002（2016）。[48] P. W. Shor，《降低量子计算机存储器退相干的方案》，《物理评论A辑》**52**，R2493（1995）。[49] A. R. Calderbank 和 P. W. Shor，《存在优良的量子纠错码》，《物理评论A辑》**54**，1098（1996）。[50] A. M. Steane，《量子理论中的纠错码》，《物理评论快报》**77**，793（1996）。[51] Z. Cai、R. Babbush、S. C. Benjamin、S. Endo、W. J. Huggins、Y. Li、J. R. McClean 和 T. E. O’Brien，《量子误差缓解》，arXiv:2210 00921 10 48550 2210 00921 2022 . . /arXiv. . ( )。[52] R. Takagi、S. Endo、S. Minagawa 和 M. Gu，《量子误差缓解的基本极限》，Quantum In- formation **8**，10.1038/s41534-022-00618-z（2022）。[53] Y. Quek、D. S. Franca、S. Khatri、J. J. Meyer 和 J. Eisert，《量子误差缓解局限性方面更紧的指数级界》，arXiv:2210 11505 10 48550 2210 11505 2022 . . /arXiv. . ( )。[54] https://quantum-computing.ibm.com/services/ resources ()。[55] https://pyquil-docs.rigetti.com/en/v2.7.0/apidocs/gates.html。[56] https://github.com/Qiskit/ibmq-device-information/blob/master/backends/melbourne/V1/README.md ()。[57] https://quantumai.google/cirq/google/devices# sycamore。[58] J. M. Pino、J. M. Dreiling、C. Figgatt、J. P. Gaebler、S. A. Moses、M. S. Allman、C. H. Baldwin、M. Foss-Feig、D. Hayes、K. Mayer、C. Ryan-Anderson 和 B. Neyen- huis，《囚禁离子量子电荷耦合器件计算机架构的演示》，《自然》**592**，209（2021）。[59] E. Younis、C. C. Iancu、W. Lavrijsen、M. Davis、E. Smith 和美国能源部，《伯克利量子综合工具包（BQSKit）v1》（2021）。[60] 很容易证明，附加的量子门 X 和 $\sqrt{X}$ 不会影响 R_z中关于相干控制误差的利普希茨界。[61] P. Gokhale、A. Javadi-Abhari、N. Earnest、Y. Shi 和 F. T. Chong，《使用 OpenPulse 为近期算法优化量子编译》，arXiv:2004.11205（2020）。[62] M. Cerezo、A. Arrasmith、R. Babbush、S. C. Benjamin、S. Endo、K. Fujii、J. R. McClean、K. Mitarai、X. Yuan、L. Cincio 和 P. J. Coles，《变分量子算法》，《自然综述：物理学》**3**，625（2021）。[63] E. Farhi、J. Goldstone 和 S. Gutmann，《一种量子近似优化算法》，arXiv:1411 4028 10 48550 1411 4028 2014 . . /arXiv. . ( )。[64] A. Peruzzo、J. McClean、P. Shadbolt、M. H. Yung、X. Q. Zhou、P. J. Love、A. Aspuru-Guzik 和 J. L. O’Brien，《光子量子处理器上的变分本征值求解器》，《自然·通讯》**5**，4213（2014）。[65] K. Bharti、A. C.-L. T. H. Kyaw、T. Haug、S. Alperin-Lear、A. Anand、M. Degroote、H. Heimonen、J. S. Kottmann、T. Menke、W.-K. Mok、S. Sim、L.-C. Kwek 和 A. Aspuru-Guzik，《嘈杂中尺度量

子算法》，《现代物理评论》**94**，015004（2022）。[66] J.-E. Park、B. Quanz、S. Wood、H. Higgins 和 R. Harishankar，《量子支持向量机的实际应用改进：从理论到实践》，arXiv:2012 07725 10 48550 2012 07725 2020 . . /arXiv. . ( )。[67] K. J. Sung、J. Yao、M. P. Harrigan、N. C. Rubin、Z. Jiang、L. Lin、R. Babbush 和 J. R. McClean，《利用模型改进变分量子算法的优化器》，Quantum Science and Technology **5**，044008（2020）。[68] K. Ito、W. Mizukami 和 K. Fujii，《变分量子算法中的普适噪声—精度关系》，arXiv:2106.03390 10.48550/arXiv.2106.03390（2021）。[69] D. Rabinovich、E. Campos、S. Adhikary、E. Pankovets、D. Vinichenko 和 J. Biamonte，《论变分量子算法对量子门误差的鲁棒性》，arXiv:2301.00048 10.48550/arXiv.2301.00048（2023）。

[70]M. Schuld、R. Sweke 和 J. J. Meyer，《数据编码对变分量子机器学习模型表达能力的影响》，《物理评论A辑》**103**，032430（2021）。[71] M. Schuld、V. Bergholm、C. Gogolin、J. Izaac 和 N. Killoran，《在量子硬件上评估解析梯度》，Phys. Rev. A **99**，032331（2019）。[72] D. P. Kingma 和 J. Ba，《Adam：一种随机优化方法》（2014）。[73] Y. Nesterov，*Introductory lectures on convex optimization* 87，《应用优化》，第（Springer Science & Business，2004）卷。[74] H. Abraham 等，《Qiskit：一个用于量子计算的开源框架》（2021）。[75] R. Schmied，《单量子比特量子态层析：方法比较》，《现代光学杂志》**63**，1744（2016）。