arXiv:2303.00629v2 [math.RT] 1 Feb 2024

特征 2 下对称群 2-部分自旋表示的分解数

LUCIA MOROTTI

Abstract. 我们给出了显式公式，用于计算由至多含 2 个部件的分拆标记的对称群不可约自旋表示模 2 约化的大多数分解数。对于许多仍未解决的情形，我们还找到了较小的上界。

1. Introduction

设 D 是对称群 S_n的二重覆盖 $\widetilde{\mathsf{S}}_n$ 的一个不可约表示。如果 D 不能同时视为 S_n的表示，我们就称 D 为自旋表示。

众所周知，在特征0下，对称群的（成对）不可约自旋表示由严格分拆标记，也就是说，由互异部件分拆标记，参见 [24, 26]。关于对称群自旋表示的分解矩阵，我们所知甚少。例如，一般而言，甚至连分解矩阵的形状都不知道。

将特征 0 自旋表示模奇素数约化时，所得表示仍是自旋表示。本文不讨论这种情形；关于这类表示的分解数，已有研究考察了极大合成因子（即在指定列序后，分解矩阵每一行中最后一个非零项） [5, 6], 小素数下分解矩阵的形状 [1, 3]，以及某些特定块或模类中的分解数，或小阶对称群 S_n [9, 18, 19, 23, 27, 28]的情形。

另一方面，旋表示的模 2 约化也可以视为对称群的表示。在这种情况下，极大合成因子及其重数已在 [2, 4] 中得到确定。这一结果可用于排除某些特征 2 模是给定旋表示的合成因子的可能性。 [20, 引理 4.2] 对这一方向的结果作出了改进。除小的 n 情形 [10, 16]，外，在这种情况下，已知分解数的其他模类只有基本旋表示和第二基本旋表示 [27]，以及 RoCK 块 [7, 第 5] 节和 [8, 第 5] 节。

对称群模中有一类分解数已知的特殊情形，即由至多含两个部分的分拆标记的 Specht模。对于这一情形，分解数已由

在部分研究工作期间，作者获得德国研究基金会资助，项目编号为 MO 3377/1-2。修订稿撰写期间，作者在约克大学数学系工作，并获得皇家学会 URF\R\221047 项目资助。

James 在 [12, 13]（另见 [14, 定理 24.15]）中求出。相关问题是研究由至多含两个部分的分拆标记的自旋表示模 p 约化后的合成因子； [19] 研究了奇特征下的这一问题。其中，明确描述了那些作为某个（但并非某个特定的）特征为 0 的自旋表示的合成因子的不可约特征 p 自旋表示。此外，研究还表明，分解矩阵中相应的部分是块三角形的（其中各块对应于由同一分拆标记的表示）。

本文将研究特征 2 下的上述问题，描述某些至多含 2 个部分的旋表示模 2 约化后的合成因子模，并给出计算相应分解数中大部分数值的公式。

对于任意 2-正则分拆 $\lambda \vdash n$，令 D^λ 为对称群 S_n 的相应特征 2 不可约表示，令 $S(\lambda, \varepsilon)$ 为$\tilde{}$二重覆盖 S_n 的相应特征 0 不可约旋表示，其中取 $\varepsilon = 0$ 或 $\pm$，具体取决于 λ。

我们得到的第一个结果如下（分拆的双分拆的定义见第 2 节）：

定理 1.1. 若 $0 \leq a \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$，且 $\mu \in \mathscr{P}_2(n)$ 满足条件： D^μ 是 $S((n-a, a)\ \varepsilon)$ 的一个合成因子，则 μ 至多有 2 个部分，或者它是一个至多有 2 个部分的分拆的双分拆。

上述结果促使我们研究如下形式的分解数：$[S((n-a, a)\ \varepsilon) :\ D^{(n-b,b)}]$ 和 $[S((n-a, a)\ \varepsilon) :\ D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]$。在第一种情形下，若 $b < (n-1)/2$，我们将在定理 1.4 中给出分解数的精确公式。该结果表明，任何形如 $D^{(n-b,b)}$的模，确实都是某个形如 $S((n-a, a)\ \varepsilon)$的模模 2 约化的合成因子。此外，定理 1.4 还表明，相应分解矩阵部分中至多有 2 行非零。在第二种情形下，已知由 [2]可知， $D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}$ 是$S((n-b, b)\ \varepsilon)$的合成因子，且相应的分解矩阵部分是三角形的。我们将在定理 1.5 和定理 1.6 中计算大部分相应的分解数，并在许多其他情形下求出一些上界。特别地，对于相应分解矩阵部分中除一列以外的所有列，我们都求得了公式或上界。

在陈述定理 1.4、1.5 和 1.6 之前，我们需要给出一些定义。

定义 1.2。给定 $m \geq 0$，若 $m = 2^{a_1} + \ldots + 2^{a_k}$ 且 $a_1 > \ldots > a_k \geq 0$，令 $d_m := a_1 + k - 3$。

如 [14, 定义 24.12], 所述，对于整数 ℓ 和 m，若 $\ell \geq 0$，我们称 ℓ 以 2 为底包含 m，如果存在 k 满足 $0 \leq m < 2^k \leq \ell$，并且，对于 $\ell = \sum_i a_i 2^i$ 和 $m = \sum_i b_i 2^i$， ℓ 和 m 的 2 进分解为 $b_i \in \{0, a_i\}$，对每个 i 均成立。

定义 1.3。对于 ℓ, m，其中 $\ell \geq 0$，令 $g_{\ell,m} := 1$，如果 ℓ 包含 m（以 2 为底），或者 $g_{\ell,m} := 0$，否则。

下一个定理给出了形式为 $[S((n-a,a)\ \varepsilon)\colon D^{(n-b,b)}]$，其中 $b<(n-1)/2$ 的分解数的精确公式。

定理 1.4。设 $p=2$, $0\le a\le\lfloor(n-1)/2\rfloor$ 和 $0\le b\le\lfloor(n-3)/2\rfloor$。则 $[S((n-a,a)\ \varepsilon)\colon D^{(n-b,b)}]=2^{d_{n-2b+1}}$，若满足以下任一条件：

- $n\equiv 0$（模 2）且 $n-2a=2$,
- $n\equiv 0$（模 8），$2\mid b$ 且 $n-2a=4$,
- $n\equiv 4$（模 8），$2\nmid b$ 且 $n-2a=4$,
- $n\equiv 1$ 或 3（模 8），$2\mid b$ 且 $n-2a=1$,
- $n\equiv 1$ 或模8为3时，$2\nmid b$ 且 $n-2a=3$,
- $n\equiv 5$ 或模8为7时，$2\nmid b$ 且 $n-2a=1$,
- $n\equiv 5$ 或模8为7时，$2\mid b$ 且 $n-2a=3$。

在所有其他情形下，$[S((n-a,a)\ \varepsilon)\colon D^{(n-b,b)}]=0$。

在下一个定理中，我们将描述大多数形如$[S((n-a,a)\ \varepsilon)\colon D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]$的分解数。

定理 1.5。设 $p=2$, $0\le a\le\lfloor(n-1)/2\rfloor$ 和 $1\le b<n/2$ 满足 $\mathrm{dbl}(n-b,b)\in\mathscr{P}_2(n)$。那么

- $[S((n-a,a),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]=g_{n-2b,a-b}$ *if one of the following holds:*
  - $n\equiv 1\pmod 4$ *and* b *is even,*
  - $n\equiv 2\pmod 4$ *and* b *is odd,*
  - $n\equiv 3\pmod 4$ *and* b *is odd,*
- $[S((n-a,a),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]=2g_{n-2b,a-b}$ *if* $n\equiv 2\pmod 4$ *and* b *is even,*
- $[S((n-a,a),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]=g_{n-2b,a-b}-g_{n-2b-2,a-b-1}$ *if one of the following holds:*
  - $n\equiv 1\pmod 4$ *and* b *is odd,*
  - $n\equiv 3\pmod 4$ *and* b *is even,*
- $[S((n-a,a),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]=g_{n-2b,a-b}+2g_{n-2b-2,a-b-1}$ *if* $n\equiv 0\pmod 4$ *and* b *is odd.*

定理 1.5 未涵盖 $b=0$ 或 $n\equiv 0$（模 4）且 b 为偶数的情形。在第二种情形下，对于 $b\ge 2$，尽管我们无法精确计算出所有分解数，但仍然可以找到上界，并且在某些情形下得到精确的分解数。在下一个定理中，ν_2 表示 2 进赋值。

定理 1.6. 设 $p=2$，$n\equiv 0$（模 4），$2\le b\le$（$n-6$）/2 为偶数且 $0\le a\le$（$n-2$）/2。则

$$[S((n-a,a),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]\le 2g_{n-2b-3,a-b}+2g_{n-2b-3,a-b-3}$$

其中等号成立当且仅当

$$g_{n-2b+1,c-b}+g_{n-2b-1,c-b-1}-g_{n-2b-3,c-b-2}$$
$$=\begin{cases}\delta_{c\neq n/2}g_{n-2b-4,c-b}+(1+\delta_{c\neq n/2})g_{n-2b-4,c-b-4}, & c\ \textit{is even},\\ 2g_{n-2b-4,c-b-1}+g_{n-2b-4,c-b-5}, & c\ \textit{is odd}.\end{cases}$$

当 $c-b\equiv 0$ 或 1（模 4）的某个 $c\in\{a,a+1\}$ 成立时。

特别地，如果 $a-b\equiv 2$（模 4），那么 $[S((n-a,a)\ \varepsilon)\colon\ D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]=0$。如果 $a-b\not\equiv 2$（模 4），那么当 $\nu_2(\lfloor(a-b+1)/4\rfloor)\geq\nu_2((n-2b)/4)$ 或 $g_{n-2b-4,\,4\lfloor(a-b+1)/4\rfloor-4}=0$ 时等号成立。

注意，如果 $b\equiv n/2-2$（模 4），则 $\nu_2(\lfloor(a-b+1)/4\rfloor)\geq\nu_2((n-2b)/4)$ 总是成立。特别地，上述定理涵盖的列中约有一半可通过此结果完全计算。

此外，根据 [21, 定理 1.4],

$$[S((n-a,a),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]=[S((n-a+2,a+2),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b+2,b+2)}]$$

只要 $a,b>0$ 以及上述所有模均有定义（在许多情况下，这也可由定理 1.5 和定理 1.6 得出）。特别地，分解数 $[S((n-a,a)\ \varepsilon)\colon\ D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]$，其中 $n\equiv 0$（模 4）且 $b\geq 2$ 为偶数（即定理 1.6 涵盖的那些分解数），只取决于 $n-2b$ 和 $a-b$。

上一段中的假设 $a>0$ 可以去掉（只需使用稍复杂一些的公式），但假设 $b>0$ 则不能去掉。例如，根据 GAP 中的分解矩阵可以得出 $[S((7,1),0)\colon\ D^{(5,3)}]=1$，但 $[S((9,3),0)\colon\ D^{(6,4,2)}]=2$；并且 $[S((5,4)\ \pm)\colon D^{(5,4)}]=1$，但 $[S((7,6)\ \pm)\colon D^{(6,5,2)}]=0$。

在第 2 节中，我们将回顾一些基本定义和结果，并证明定理 1.1。在第 3 节中，我们将证明一些关于投射模的结果。随后将在第 4 、 5 和 6 节中分别证明定理 1.4、1.5 和 1.6。附录 A 给出了一些利用上述结果计算出的（部分）分解矩阵。

观察定理 1.1 和 1.4，我们可能会问，对于所有满足 $\mathrm{dbl}(\lambda)$ 为 2-正则的严格分拆 λ， $S(\lambda,\varepsilon)$ 的所有合成因子是否都具有 $D^{\mathrm{dbl}(\mu)}$ 的形式，其中 μ 是某个分拆。一般来说，这并不成立。例如，通过考察已知的分解矩阵并比较特征，可以验证

$$[S((10,5,1),\pm)]=[D^{(7,6,3)}]+[D^{(6,4,3,2,1)}]$$

and

$$\begin{aligned}[S((11,5,1),0)]=8[D^{(17)}]+2[D^{(9,8)}]+4[D^{(9,7,1)}]+3[D^{(9,5,3)}]+2[D^{(8,6,3)}]\\ +2[D^{(7,6,4)}]+[D^{(7,6,3,1)}]+2[D^{(7,5,3,2)}]+[D^{(6,5,3,2,1)}].\end{aligned}$$

2. 记号与基本结果

设 $n\geq 0$ 和 S_n 是 S_n 的一个二重覆盖。那么 S_n 中存在一个阶为 2 的中心元 z cen-tral，使得 $\mathsf{S}_n\cong\mathsf{S}_n/\langle z\rangle$。$\mathsf{S}_n$ 的表示中，z 作用平凡的表示也可视为 S_n-表示；而 z 作用为 -1 的表示称为自旋表示。注意，自旋表示模 2 约化总可视为相应对称群 S_n 的表示。特别地，它们的所有合成因子都是 S_n 的不可约特征 2 表示（视为 S_n-表示）。

令 $\mathscr{P}(n)$ 表示 n 的分拆集合。进一步，令 $\mathscr{P}_2(n)$ 表示 n 的 2-正则分拆集合，即互异部件分拆或严格分拆。对于任意分拆 λ，令 $h(\lambda)$ 表示 λ 的部件数，令 $h_2(\lambda)$ 表示 λ 的偶部件数。

将分拆与其杨图对应起来，若 $\lambda \in \mathscr{P}(n)$ 且 $A = (i, j)$ 是一个节点，则称 A 是 λ 的可移除（分别为可添加）节点，当且仅当 $A \in \lambda$（分别为 $A \notin \lambda$）以及 $\lambda \setminus \{A\}$（分别为 $\lambda \cup \{A\}$）是某个分拆的杨图。若 $\lambda \in \mathscr{P}_2(n)$，则称 A 是 λ 的可移除条（分别为可添加条）节点，当且仅当 A 是可移除（分别为可添加）的，且 $\lambda \setminus \{A\}$（分别为 $\lambda \cup \{A\}$）是严格分拆。

众所周知，参见例如 [14, 15, 24, 26], ， $\mathscr{P}(n)$ 标记了特征 0 下 S_n 的不可约表示，而 $\mathscr{P}_2(n)$ 则同时标记了特征 2 下 S_n 的不可约表示以及不可约自旋表示（对）。对于 $\lambda \in \mathscr{P}(n)$，我们用 S^λ 表示由 λ 标记的 S_n 的特征 0 不可约表示。与引言中一样，对于 $\lambda \in \mathscr{P}_2(n)$，定义 D^λ 为特征 2 下的不可约表示，并定义 $S(\lambda, \varepsilon)$ 为由 λ 标记的不可约自旋表示（们）。当 $n - h(\lambda)$ 为偶数时，$\varepsilon = 0$；当 $n - h(\lambda)$ 为奇数时，$\varepsilon \in \{\pm\}$。下文还将研究模 $S(\lambda)$：对于 $\lambda \in \mathscr{P}_2(n)$，我们定义 $S(\lambda)$ 为 $S(\lambda, 0)$ 或 $S(\lambda, +) \oplus S(\lambda, -)$，具体取决于 $n - h(\lambda)$ 的奇偶性。此外，对于任意 $\lambda \in \mathscr{P}_2(n)$，令 P^λ 为 $\mathsf{S}_{\widetilde{n}}$ 的不可分解投射模，其底为 D^λ。

对于分拆 $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$，其中 $h = h(\lambda)$，令

$$\mathrm{dbl}(\lambda) = (\lceil (\lambda_1 + 1)/2 \rceil, \lfloor (\lambda_1 - 1)/2 \rfloor), \dots, \lceil (\lambda_h + 1)/2 \rceil, \lfloor (\lambda_h - 1)/2 \rfloor)),$$
$$\overline{\mathrm{dbl}}(\lambda) = (\lceil \lambda_1/2 \rceil, \lfloor \lambda_1/2 \rfloor), \dots, \lceil \lambda_h/2 \rceil, \lfloor \lambda_h/2 \rfloor)).$$

进一步，令 λ^R 为 λ 的正则化，如 [15, 6.3.48] 中对 $p = 2$ 的定义。

容易验证，对于任意 $\lambda \in \mathscr{P}_2(n)$，$\mathrm{dbl}(\lambda)$ 总是一个分拆，因此在这种情况下，$(\mathrm{dbl}(\lambda))^R$ 是良定义的。

进一步，若 $\mathrm{dbl}(\lambda) \in \mathscr{P}_2(n)$，则 $\mathrm{dbl}(\lambda) = (\overline{\mathrm{dbl}}(\lambda))^R$。这可通过证明对任意 $a \geq 1$，$\mathrm{dbl}(a) = (\mathrm{dbl}(a))^R$ 来验证。因此

$$\mathrm{dbl}(\lambda) = ((\overline{\mathrm{dbl}}(\lambda_1))^R, \dots, (\overline{\mathrm{dbl}}(\lambda_h))^R)$$

并且 $\overline{\mathrm{dbl}}(\lambda)$ 在每个梯级上具有相同数目的节点。由于 $\mathrm{dbl}(\lambda)$ 是一个 2-正则分拆，因此可得 $\mathrm{dbl}(\lambda) = (\mathrm{dbl}(\lambda))^R$。

下面的引理是 James 正则化结果的一个类似结论，已在 [2, 定理 1.2] 和 [4, 定理 5.1] 中证明。

引理 2.1. 设 $\lambda, \mu \in \mathscr{P}_2(n)$。若 $[S(\lambda, \varepsilon) : D^\mu] > 0$，则 $\mu \trianglerighteq (\mathrm{dbl}(\overline{\lambda}))^R$。此外，$[S(\lambda, \varepsilon) : D^{(\overline{\mathrm{dbl}}(\lambda))^R}] = 2^{\lfloor h_2(\lambda)/2 \rfloor}$。

这一结果在 [20, 引理 4.2] 中得到改进，从而得出以下结论：

引理 2.2. 设 $\lambda, \mu \in \mathscr{P}_2(n)$。若 $[S(\lambda, \varepsilon) : D^\mu] > 0$，且 μ 不是任何分拆的双分拆，则 $h(\mu) \leq 2h(\lambda) - 2$。

定理 1.1 随即易得：

定理 1.1 的证明。若 $[S((n-a, a)\ \varepsilon) : D^\mu] > 0$，且 μ 不是分拆的双分拆，则由引理 2.2 $h(\mu)$ 可得 ≤ 2。若 $\mu = \mathrm{dbl}(\nu)$，则由引理 2.1 $\mu \trianglerighteq (\mathrm{dbl}((n-a, a)))^R$，因此

$$2h(\nu) - 1 \leq h(\mu) \leq h(\overline{\mathrm{dbl}}(n-a, a)) \leq 4$$

然后 $h(\nu) \leq 2$。 □

给定任意节点 (i,j)，令 $\mathrm{res}(i,j) := j - i$ (模 2) 为 (i,j) 的剩余类。进一步定义 (i,j) 的巴剩余为：若 $j \equiv 0$ 或 3（模 4），则为 $\mathrm{res}(i,j) = 0$；若 $j \equiv 1$ 或 2（模 4），则为 $\mathrm{res}(i,j) = 1$。在考察 $\mathrm{res}(i,j)$ 时，以下将以显然的方式把 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 视为 $\{0,1\}$。对于 λ，任意分拆 λ 的内容定义为 $\mathrm{cont}(\lambda) := (c_0, c_1)$，其中 c_0（分别为 c_1）是 λ 中剩余类为 0（分别为 1）的节点数。类似地，λ 的巴内容定义为 $\mathrm{cont}(\lambda) := (d_0, d_1)$，其中 d_0（分别为 d_1）是 λ 中巴剩余为 0（分别为 1）的节点数。

根据 [15, 2.7.41、6.1.21 和 6.3.50]，S^λ 和 D^μ 属于同一个块，当且仅当 $\mathrm{cont}(\lambda) = \mathrm{cont}(\mu)$。进一步根据 [4, 3.9 和 4.1] S，(λ、ε) 与 S^μ 属于同一个块，当且仅当 $\mathrm{cont}(\lambda) = \mathrm{cont}(\mu)$。

因此，对于给定的块 B，我们可以将 B 的内容定义为任意包含于 B 中的模 S^λ 或 D^λ 的内容 $\mathrm{cont}(\lambda)$，或者等价地，定义为包含于 B 中的任意模 S（λ、ε）的 bar-内容 $\mathrm{cont}(\lambda)$。

如果有内容（c_0、c_1）的 S_n 的一个块，并且 V 是包含于 B 中的任意模，令 e_0V 和 e_1V（分别为 f_0V 和 f_1V）表示 $\mathrm{Res}^{\widetilde{\mathsf{S}}_n}_{\widetilde{\mathsf{S}}_{n-1}} V$（分别为 $\mathrm{Ind}^{\widetilde{\mathsf{S}}_{n+1}}_{\widetilde{\mathsf{S}}_n} V$）的块分量，其内容为（$c_0 - 1$、$c_1$）和（$c_0$、$c_1 - 1$）（分别为（$c_0 + 1$、$c_1$）和（$c_0$、$c_1 + 1$））。如果不存在具有相应内容的块，则应将这些块分量视为 0。随后，e_0V、e_1V、f_0V 和 f_1V 的定义可通过线性扩展到任意模。然后，根据定理 11.2.7、11.2.8]，$\mathrm{Res}^{\widetilde{\mathsf{S}}_n}_{\widetilde{\mathsf{S}}_{n-1}} V \cong e_0V \oplus e_1V$ 和 $\mathrm{Ind}^{\widetilde{\mathsf{S}}_{n+1}}_{\widetilde{\mathsf{S}}_n} V \cong f_0 \oplus f_1V$ 由 [17, 。

由 [14, 定理 9.2] 及分块分解可得：

引理 2.3. 设 λ 为一个分拆且 $i \in \{0,1\}$。那么，在格罗滕迪克群中，

$$[e_i S^\lambda] = \sum_A [S^{\lambda \setminus \{A\}}],$$

其中求和遍及 λ 中剩余类为 i的所有可移除节点 A。

引理 2.4. 设 λ 为一个分拆且 $i \in \{0,1\}$。那么，在格罗滕迪克群中，

$$[f_i S^\lambda] = \sum_A [S^{\lambda \cup \{A\}}],$$

其中求和遍及 λ 中剩余类为 i的所有可添加节点 A。

类似地，由 [22, 定理 2] 或 [26, 定理 8.1]，、弗罗贝尼乌斯互反律及分块分解可得：

引理 2.5. 设 $\lambda \in \mathscr{P}_2(n)$ 和 $i \in \{0,1\}$。那么，在格罗滕迪克群中，

$$[e_i S(\lambda)] = \sum_A 2^{x_A} [S(\lambda \setminus \{A_i\})],$$

其中求和遍及 λ 的 A 个剩余类为 i 的所有可移除横线节点；若 $A \neq (h(\lambda), 1)$ 和 $n - h(\lambda)$ 为奇数，则取 $x_A = 1$，否则取 $x_A = 0$。

引理 2.6. 设 $\lambda \in \mathscr{P}_2(n)$ 和 $i \in \{0,1\}$。那么，在格罗滕迪克群中，

$$[f_i S(\lambda)] = \sum_A 2^{x_A} [S(\lambda \cup \{A_i\})],$$

其中求和遍历 λ 中剩余类为 i 的所有可加条 A，且当 $A \neq (h(\lambda)+1, 1)$ 和 $n-h(\lambda)$ 为奇数时取 $x_A = 1$，其他情形则取 $x_A = 0$。

在计算诱导或限制射影模的块分量时，以下4个引理将直接使用，不再另行引用。

下一节末尾将给出关于射影模的部分分支结果。在这些分支规则中会出现正规节点和共正规节点。与 [17, 第 11 节1], 一样，对于给定的剩余类 i 和分拆 λ，令 i-符号由每个可移除（分别为可添加）的i节点对应的 $-$（分别为 $+$）组成，并按从左到右的顺序排列。约化的 i-符号是通过递归地从 i-符号中删除任意一对 $+-$ 相邻项而得到的。约化的 i-符号中对应于 $-$（分别为 $+$）的节点称为正规（分别为共正规）节点。我们令 $\varepsilon_i(\lambda)$（分别为 $\varphi_i(\lambda)$）表示 λ 的 i-正规（分别为 i-共正规）节点的数量。如果 $\varepsilon_i(\lambda) > 0$（分别为 $\varphi_i(\lambda) > 0$），我们还进一步定义 $\tilde{e}_i\lambda$（分别为 $f_i\lambda$）为通过移除 λ 最左边的i-正规节点（分别为添加 λ最右边的 i-共正规节点）得到的分拆。

若 $\lambda \in \mathscr{P}_2(n)$ 标记 2-自旋表示，则由 [24, 第 235] 页（另见 [26, 定理 7.1]），$S(\lambda,+)$ 与 $S(\lambda,-)$ 的 2-Brauer 特征相等。因此，对于任意 $\mu \in \mathscr{P}_2(n)$，有 $[P^\mu: S(\lambda,+)] = [P^\mu: S(\lambda,-)]$。因此，在格罗滕迪克群中，任一投射模 P 都是若干模 S^γ（其中 $\gamma \in \mathscr{P}(n)$）以及若干模 $S(\lambda)$（其中 $\lambda \in \mathscr{P}_2(n)$）按重数之和，故重数 $[P: S(\lambda)]$ 是良定义的。同样地，对于任意满足 $g_i \in \{e_0, e_1, f_0, f_1\}$ 的 $G = g_1 \dots g_h$，由引理 2.5 和 2.6 可知，重数 $[GS(\nu): S(\lambda)]$ 是良定义的。

3. Projective modules

在下文中，设 $M_n := \lfloor n/2 \rfloor$ 和 $m_n := \lfloor (n-1)/2 \rfloor$。进一步，若 $n \not\equiv 0$(模 4)，则设 $\overline{m}_n := \lfloor (n-4)/2 \rfloor$；若 $n \equiv 0$(模 4)，则设 $\overline{m}_n := (n-6)/2$。因此，$M_n$ 是使得 $(n - M_n, M_n)$ 为分拆的最大值，而 m_n 和 $\overline{m}_n$分别是使得 $(n - m_n, m_n)$ 和 $\mathrm{dbl}(n - \overline{m}_n, \overline{m}_n)$ 为 2-正则分拆的最大值。

现在我们陈述一些基本结果，以便计算分解数。

引理 3.1. [14, 定理 24.15] 设 $0 \le a \le M_n$。$S^{(n-a,a)}$ 的任意合成因子都具有 $D^{(n-b,b)}$ 的形式，其中 $0 \le b \le m_n$满足某些条件。进一步

$$[S^{(n-a,a)} : D^{(n-b,b)}] = g_{n-2b+1,a-b}.$$

引理 3.2. 设 $P \cong \oplus_\lambda (P^\lambda)^{\oplus c_\lambda}$ 是一个投射模，且 $0 \le a \le M_n$。则

$$\begin{aligned}[P : S^{(n-a,a)}] &= \sum_{b=0}^{m_n} c_{(n-b,b)} [P^{(n-b,b)} : S^{(n-a,a)}] \\ &= \sum_{b=0}^{h} c_{(n-b,b)} [P^{(n-b,b)} : S^{(n-a,a)}]\end{aligned}$$

对于任意 $\min\{a, m_n\} \le h \le m_n$。

证明。这由引理 3.1 得出。 □

引理 3.3. 设 $P \cong \oplus_\lambda (P^\lambda)^{\oplus c_\lambda}$ 是一个投射模，且 $0 \le a \le m_n$。那么

$$[P : S((n-a,a),\varepsilon)] = \sum_{b=0}^{m_n-1} c_{(n-b,b)}[P^{(n-b,b)} : S((n-a,a),\varepsilon)] + \sum_{c=0}^{\overline{m}_n} c_{\mathrm{dbl}(n-c,c)}[P^{\mathrm{dbl}(n-c,c)} : S((n-a,a),\varepsilon)].$$

证明。由引理 2.1 和引理 2.2 可知，$S((n-a,a)\ \varepsilon)$的合成因子具有 $D^{(n-b,b)}$ 或 $D^{\mathrm{dbl}(n-c,c)}$这两种形式之一。由于$(n-m_n,m_n) = \mathrm{dbl}(n)$，故引理得证。□

定义 X_n 为这样一类 2-正则分拆的集合：它们不具有$(n-c,c)$或$\mathrm{dbl}(n-c,c)$的形式，其中 c为某个元素。由引理 3.2 和引理 3.3，我们定义格罗滕迪克群的以下子群，并将在全文中使用：

定义 3.4。对于 $n \ge 0$，定义：

- $T_{\text{对称群}n} := \langle [S^\lambda] : \lambda \in \mathscr{P}(n)\ h(\lambda) \ge 3 \rangle$,
- $T_{\text{自旋}n} := \langle [S(\lambda)] : \lambda \in \mathscr{P}_2(n)\ h(\lambda) \ge 3 \rangle$,
- $T_n := \langle T_{\text{对称群}n},\ T_{\text{斯皮尔特}n} \rangle$,
- $R_n := \langle [P^\lambda] : \lambda \in X_n \rangle$。

这个定义将在下一个引理中使用，之后也会在本文中再次出现。

引理 3.5. 设 P 是一个投射模，满足

$$[P] \equiv \sum_{a=y}^{M_n} \ell_a [S^{(n-a,a)}] + \sum_{b=0}^{m_n} k_b [S((n-b,b))] \pmod{T_n}$$

对某个 $0 \le y \le m_n - 1$ 成立。则

$$[P] \equiv \ell_y [P^{(n-y,y)}] + \sum_{a=y+1}^{m_n-1} \overline{\ell}_a [P^{(n-a,a)}] + \sum_{b=0}^{\overline{m}_n} \overline{k}_b [P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] \pmod{R_n},$$

对某些 $\overline{\ell}_a$、$\overline{k}_b$，满足 $\overline{\ell}_a \le \ell_a$、$\overline{k}_b \le k_b / 2^{\lfloor h_2((n-b,\ b))/2 \rfloor}$。特别地，当 $k_b = 0$ 时，我们有 $\overline{k}_b = 0$。

证明。设 $P \cong \oplus_\lambda (P^\lambda)^{c_\lambda}$。我们需要验证

$$c_{(n-a,a)} = \begin{cases} 0, & 0 \le a < y, \\ \ell_y, & a = y, \\ \le \ell_a, & y < a \le m_n - 1 \end{cases}$$

并且 $c_{\mathrm{dbl}(n-b,b)} \le k_b / 2^{\lfloor h_2((n-b,b))/2 \rfloor}$ 对任意 $0 \le b \le \overline{m}_n$均成立。

由引理 2.1，我们有 $[P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)} :\ D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] = 2^{\lfloor h_2((n-b,b))/2 \rfloor}$ 对任意 $0 \le b \le \overline{m}_n$均成立。因此，关于 $c_{\mathrm{dbl}(n-b,b)}$ 的断言成立。

对于 $a < y$，我们有 $[P :\ S^{(n-a,a)}] = 0$，因此根据引理 3.1，$c_{(n-a,a)} = 0$。对于 $y \le a \le m_n - 1$，接着由引理 3.1 和引理 3.2 可得

that

$$\ell_a = [P : S^{(n-a,a)}] = \sum_{x=0}^{a} c_{(n-x,x)}[P^{(n-x,x)} : S^{(n-a,a)}]$$

$$= c_{(n-a,a)} + \sum_{x=y}^{a-1} c_{(n-x,x)}[P^{(n-x,x)} : S^{(n-a,a)}],$$

因此 $c_{(n-a,a)} \leq \ell_a$ ，且当 $a = y$ 时取等号。 □

我们还需要以下两个引理。

引理 3.6. 若 $r \geq 1$, $\mu \in \mathscr{P}_p(n-r)$, $\lambda \in \mathscr{P}_p(n)$ 且 $i, i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. 则

$$[f_{i_1} \ldots f_{i_r} P^\mu : P^\lambda] = [e_{i_r} \ldots e_{i_1} D^\lambda : D^\mu].$$

特别地，若 $\varepsilon_i(\lambda) \leq \varepsilon_i(\mu) + r$ 且 $[f_i^r P^\mu : P^\lambda] > 0$ 则 $\lambda = \tilde{f}_i^r \mu$，此时

$$[f_i^r P^\mu : P^{\tilde{f}_i^r \mu}] = r! \binom{\varepsilon_i(\mu) + r}{r}.$$

证明。由于

$$[f_{i_1} \ldots f_{i_r} P^\mu : P^\lambda] = \sum_\nu [f_{i_1} P^\mu : P^\nu][f_{i_2} \ldots f_{i_r} P^\nu : P^\lambda],$$

$$[e_{i_r} \ldots e_{i_1} D^\lambda : D^\mu] = \sum_\nu [e_{i_r} \ldots e_{i_2} D^\lambda : D^\nu][e_{i_1} D^\nu : D^\mu],$$

在第一个结论中，我们可以假设 $r = 1$，此时由弗罗贝尼乌斯互反律和分块分解可得该结论。第二个结论则由 [17, 定理 11.2.10]推出。□

引理 3.7. 若 $r \geq 1$, $\mu \in \mathscr{P}_2(n+r)$, $\lambda \in \mathscr{P}_2(n)$ 且 $i, i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. 则

$$[e_{i_1} \ldots e_{i_r} P^\mu : P^\lambda] = [f_{i_r} \ldots f_{i_1} D^\lambda : D^\mu].$$

特别地，若 $\varphi_i(\lambda) \leq \varphi_i(\mu) + r$ 且 $[e_i^r P^\mu : P^\lambda] > 0$ 则 $\lambda = \tilde{e}_i^r \mu$，在这种情况下

$$[e_i^r P^\mu : P^{\tilde{e}_i^r \mu}] = r! \binom{\varphi_i(\mu) + r}{r}.$$

证明。与前一个引理类似，不过改用 [17, 定理 11.2.11] 。□

4. Proof of Theorem 1.4

本节将证明定理 1.4。情形 $n \leq 13$ 可利用已知的分解矩阵 [10, 16] 进行验证（利用块分解、模的维数和类型来确定特征0模，并利用引理 3.1 确定分解矩阵中对应的列）。我们将首先通过归纳法证明当 n 为奇数时的定理 1.4，然后据此证明当 n 为偶数时的情形。

情况 1： n 为奇数。我们不妨设 $n \geq 15$ 为奇数，并且定理 1.4 对 $n-2$成立。

情形 1.1： $b > 0$。令 i 为 $(n-b-1, b-1)$ 前两行中可添加节点的剩余类（这两个节点具有相同的剩余类，因为 n 是

奇数）。若 $S^{(n-a-2,a)}$ 与 $D^{(n-b-1,b-1)}$ 属于同一个块，则 $(n-a-2,a)$ 前两行中的可添加节点都具有剩余类 i。进一步由归纳法和引理 3.1 可得

$$\begin{aligned}[P^{(n-b-1,b-1)}] \equiv &[S^{(n-b-1,b-1)}] + \sum_{a=b}^{(n-3)/2} g_{n-2a-1,a-b+1}[S^{(n-a-2,a)}] \\ &+ 2^{d_{n-2b+1}}[S((n-c-2,c))] \pmod{T_n}\end{aligned}$$

其中 c 等于 $(n-3)/2$ 或 $(n-5)/2$（取决于 n 和 b）。因此

$$\begin{aligned}[f_i^2 P^{(n-b-1,b-1)}] \equiv &2[S^{(n-b,b)}] + \sum_{a=b}^{(n-3)/2} 2g_{n-2a-1,a-b+1}[S^{(n-a-1,a+1)}] \\ &+ 2^{d_{n-2b+1}}[f_i^2 S((n-c-2,c))] \pmod{T_n}.\end{aligned} \tag{4.1}$$

由于

$$[S^{(n-a-1,a+1)} : D^{(n-b,b)}] = [S^{(n-a-2,a)} : D^{(n-b-1,b-1)}]$$

由引理 3.5，我们可得

$$[f_i^2 P^{(n-b-1,b-1)}] \equiv 2[P^{(n-b,b)}] + \sum_{a=0}^{\overline{m}_n} \overline{k}_a [P^{\mathrm{dbl}(n-a,a)}] \pmod{R_n} \tag{4.2}$$

其中，对任意 $0 \le a \le \overline{m}_n$，若 x_a $S((n-a,a)$ $\varepsilon)$ 的重数为 $f_i^2 S((n-c-2,c))$ $\overline{k}_a \le 2^{d_{n-2b+1}} x_a$。特别地，若

$$\begin{aligned}[f_i^2 S((n-c-2,c))] \equiv &x_{(n-1)/2}[S(((n+1)/2,(n-1)/2))] \\ &+ x_{(n-3)/3}[S((n+3)/2,(n-3)/2))] \pmod{T_n^{\mathrm{spin}}}\end{aligned}$$

then

$$[f_i^2 P^{(n-b-1,b-1)}] \equiv 2[P^{(n-b,b)}] \pmod{R_n}$$

因此，由引理 3.3、(4.1) 和 (4.2)

$$\begin{aligned}[S((n-a,a),\varepsilon) : D^{(n-b,b)}] &= [f_i^2 P^{(n-b-1,b-1)} : S((n-a,a),\varepsilon)] \\ &= [f_i^2 P^{(n-b-1,b-1)} : S((n-a,a),\varepsilon)]/2 \\ &= 2^{d_{n-2b+1}}[f_i^2 S((n-c-2,c)) : S((n-a,a),\varepsilon)]/2.\end{aligned}$$

现在我们将考虑不同的情形，首先考虑那些可以通过这一论证证明该定理的情形。

情形 1.1.1：$n \equiv 1$（模8），且 b 为偶数。则 $i=0$，且 $c=(n-3)/2$。因此

$$[f_i^2 S((n-c-2,c))] = 2[S((n+1)/2,(n-1)/2))]+4[S((n+1)/2,(n-3)/2,1))].$$

情形 1.1.2：$n \equiv 3$（模8），且 b 为偶数。则 $i=0$，且 $c=(n-5)/2$。因此

$$[f_i^2 S((n-c-2,c))] = 2[S((n+1)/2,(n-1)/2))]+4[S((n+1)/2,(n-3)/2,1))].$$

情形 1.1.3：$n \equiv 3$（模8），且 b 为奇数。则 $i=1$，且 $c=(n-3)/2$。因此

$$[f_i^2 S((n-c-2,c))] = 2[S(((n+3)/2,(n-3)/2))].$$

情形 1.1.4：$n \equiv 5$（模8）且 b 为奇数。于是 $i=1$ 且 $c=(n-3)/2$。因此

$$[f_i^2 S((n-c-2,c))] = 2[S(((n+1)/2,(n-1)/2))].$$

情形 1.1.5： $n \equiv 7$（模8）且 b 为偶数。于是 $i = 0$ 且 $c =$（$n-3$）$/2$。因此

$$[f_i^2 S((n-c-2,c))] = 2[S(((n+3)/2,(n-3)/2))]+4[S(((n+1)/2,(n-3)/2,1))].$$

情形 1.1.6： $n \equiv 7$ (模8)，且 b 为奇数。于是 $i = 1$ 和 $c = (n-5)/2$。因此

$$[f_i^2 S((n-c-2,c))] = 2[S(((n+1)/2,(n-1)/2))].$$

情形 1.1.7： $n \equiv 1$ (模8)，且 b 为奇数。于是 $i = 1$ 和 $c = (n-1)/2$。因此

$$[f_i^2 S((n-c-2,c))] = 4[S(((n+3)/2,(n-3)/2))]+2[S(((n+5)/2,(n-5)/2))]$$然后

$$[f_i^2 P^{(n-b-1,b-1)} : S((n-a,a),\varepsilon)] = \begin{cases} 2^{d_{n-2b+1}+2} & a = (n-3)/2, \\ 2^{d_{n-2b+1}+1} & a = (n-5)/2, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

因此，我们只需检验 $D^{(n-b,b)}$ 作为 $S(((n+3)/2,(n-3)/2)\ \pm)$ 和 $S(((n+5)/2,(n-5)/2)\ \pm)$ 的合成因子的重数。

情形 1.1.7.1： $b \le (n-7)/2$。考虑 $P^{(n-b-2,b)}$，我们有

$$\begin{aligned}[P^{(n-b-2,b)}] \equiv & [S^{(n-b-2,b)}] + \sum_{a=b+1}^{(n-3)/2} g_{n-2b-1,a-b}[S^{(n-a-2,a)}] \\ & + 2^{d_{n-2b-1}}[S(((n-1)/2,(n-3)/2))] \pmod{T_{n-2}}.\end{aligned}$$

So

$$\begin{aligned}[f_1 f_0 P^{(n-b-2,b)}] \equiv & [S^{(n-b,b)}] + \sum_{a=b+1}^{(n-1)/2} H'_a[S^{(n-a,a)}] \\ & + 2^{d_{n-2b-1}+1}[S(((n+3)/2,(n-3)/2))] \pmod{T_n}.\end{aligned}$$

因此， $P_{(n-b,b)}$ 是 $f_1 f_0 P^{(n-b-2,b)}$ 的一个直和项，由引理 3.5 可知。由于 $f_1 f_0 P^{(n-b-2,b)}$ 没有合成因子 $S(((n+5)/2,(n-5)/2)\ \pm)$，同样的结论也适用于 $P^{(n-b,b)}$（因此 $D^{(n-b,b)}$ 不是 $S(((n+5)/2,(n-5)/2)\ \pm)$ 的合成因子）。

由引理 2.1

$$\begin{aligned}[S(((n+5)/2,(n-5)/2),\pm) : D^{\mathrm{dbl}((n+5)/2,(n-5)/2)}] = 1, \\ [S(((n+3)/2,(n-3)/2),\pm) : D^{\mathrm{dbl}((n+5)/2,(n-5)/2)}] = 1.\end{aligned}$$

因此由引理 3.5

$$[f_i^2 P^{(n-b-1,b-1)}] \equiv 2[P^{(n-b,b)}] + 2^{d_{n-2b+1}+1}[P^{\mathrm{dbl}((n+5)/2,(n-5)/2)}] \pmod{R_n}.$$

然后根据引理 3.2

$$\begin{aligned}&[S(((n+3)/2,(n-3)/2),\pm) : D^{(n-b,b)}] \\ &= 1/2[f_i^2 P^{(n-b-1,b-1)} : S(((n+3)/2,(n-3)/2),\pm)] \\ &\quad - 2^{d_{n-2b+1}}[P^{\mathrm{dbl}((n+5)/2,(n-5)/2)} : S(((n+3)/2,(n-3)/2),\pm)] \\ &= 2^{d_{n-2b+1}+1} - 2^{d_{n-2b+1}} \\ &= 2^{d_{n-2b+1}}.\end{aligned}$$

情形 1.1.7.2: $b=(n-3)/2$。根据引理 3.1 和归纳法

$$[P^{((n+3)/2,(n-7)/2)}]\equiv[S^{((n+3)/2,(n-7)/2)}]+[S^{((n-1)/2,(n-3)/2)}]\\ +2[S(((n-1)/2,(n-3)/2))]\ (\mathrm{mod}\ T_{n-2})$$

然后

$$[f_1f_0P^{((n+3)/2,(n-7)/2)}]\equiv[S^{((n+7)/2,(n-7)/2)}]+2[S^{((n+3)/2,(n-3)/2)}]\\ +4[S(((n+3)/2,(n-3)/2))]\ (\mathrm{mod}\ T_n)\,.$$

由引理 3.1 和引理 3.2 可知, $P^{((n+3)/2,(n-3)/2)}$ 是 $f_1f_0P^{((n+3)/2,(n-7)/2)}$的一个直和项。由于

$$[f_1f_0P^{((n+3)/2,(n-7)/2)}:S(((n+5)/2,(n-5)/2),\pm)]=0$$

因此我们可以像在前一种情形中那样得出结论。

情形 1.1.8: $n\equiv5$（模8），且 b为偶数。于是 $i=0$和 $c=$（$n-5$）$/2$。因此

$$[f_i^2S((n-c-2,c))]\\ =4[S(((n+3)/2,(n-3)/2))]+2[S(((n+5)/2,(n-5)/2))]\\ +4[S(((n+1)/2,(n-3)/2,1))]+4[S(((n+3)/2,(n-5)/2,1))].$$

然后

$$[f_i^2P^{n-b-1,b-1)}:S((n-a,a),\varepsilon)]=\begin{cases}2^{d_{n-2b+1}+2} & a=(n-3)/2,\\ 2^{d_{n-2b+1}+1} & a=(n-5)/2,\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

同样，我们只需检验 $D^{(n-b,b)}$ 作为 S（（（$n+3$）$/2$，（$n-3$）$/2$）$\pm$）和 S（（（$n+5$）$/2$，（$n-5$）$/2$）$\pm$）的合成因子的重数。

注意，$b\le(n-5)/2$，因为 $b\le(n-3)/2$ 是偶数。利用 $f_0f_1P^{(n-b-2,b)}$，可以类似情形 1.1.7.1 检验此情形。

情形 1.2: $b=0$。在此情形下，我们将研究 $f_0f_1P_{(n-2)}$。令 $c=(n-3)/2$，若 $n\equiv\pm3$（模 8），或令 $c=(n-5)/2$，若 $n\equiv\pm1$（模 8）。那么

$$[P^{(n-2)}]\equiv\sum_{a=0}^{(n-3)/2}g_{n-1,a}[S^{(n-a-2,a)}]+2^{d_{n-1}}[S((n-c-2,c))]\ (\mathrm{mod}\ T_{n-2})\,.$$

注意（根据 $g_{n-1,a}$ 的定义，或根据分块分解），若 a 为奇数，则 $g_{n-1,a}=0$。对于偶数的 a，我们有

$$[f_0f_1S^{(n-a-2,a)}]\equiv[S^{(n-a,a)}]+\delta_{a<(n-3)/2}[S^{(n-a-2,a+2)}]\ (\mathrm{mod}\ T_n^{\mathrm{sym}})\,.$$

若 $n\equiv1$ 或 3（模8），则 $c'=(n-1)/2$；若 $n\equiv$为 5 或 7（模8），则 $c'=(n-3)/2$。可以检验

$$[f_0f_1S((n-c-2,c))]\equiv2[S((n-c',c'))]\ (\mathrm{mod}\ T_n^{\mathrm{spin}})\,.$$

因此，由引理 3.5,

$$[f_0f_1P^{(n-2)}]\equiv\sum_{a=0}^{(n-1)/2}L_a[P^{(n-a,a)}]+\sum_{\lambda\in X_n}L_\lambda[P_\lambda]$$

对于某个 L_a。令 $k\ge1$ 取最大值，使得 $n+1=h2^k$ 对某个 $h>1$ 成立（从而$h=2$ 或 $h\ge3$ 为奇数）。

我们首先证明

$$[f_0f_1P^{(n-2)}] \equiv [P^{(n)}] + 2\sum_{i=1}^{k-1}[P^{(n-2^i,2^i)}] \pmod{R_n} \tag{4.3}$$

然后利用这一点证明 $[P^{(n)}: S((n-c',c'))] = 2^{d_{n+1}}$。

要证明 (4.3)，只需检验 $P^{(n-a,a)}$ 在 $f_0f_1P^{(n-2)}$ 中的重数，其中 $0 \le a \le m_n$。根据引理 3.6，这等价于证明

$$[e_1e_0D^{(n-a,a)} : D^{(n-2)}] = \begin{cases} 1, & a = 0, \\ 2, & a = 2^i \text{ with } 1 \le i \le k-1, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

由于 $e_0D^{(n-a,a)}$ 的任一合成因子都具有某个 b 对应的 $D^{(n-b-1,b)}$ 形式，并且根据 [17, 定理 11.2.7] $[e_1D^{(n-b-1,b)} : D^{(n-2)}] = \delta_{b,0}$（注意 n 是奇数，因此 $(n-b-1,b)$ 只有一个正规节点），可得 $[e_1e_0D^{(n-a,a)} : D^{(n-2)}] = [e_0D^{(n-a,a)} : D^{(n-1)}]$。在情形 1.2 结束之前，我们将不再特别注明地使用 [25] 的主定理（第 3304 页）。由分块分解可得

$$[e_0D^{(n-a,a)} : D^{(n-1)}] = \begin{cases} 1, & a = 0, \\ 0, & a > 0 \text{ with } a \ne 2^i \text{ for some } i \ge 1. \end{cases}$$

因此，我们可以假设 $a = 2^i$ 且 $i \ge 1$。注意

$$n - 2a = h2^k - 2^{i+1} - 1 = (h-1)2^k - 2^{i+1} + \sum_{j=0}^{k-1} 2^j.$$

若 $i \ge k$，则 $h \ge 3$ 为奇数（因为 $2^i < n/2$，且 $(n-2^i,2^i)$ 是 2-正则）。由此可知，2^k 是 $n-2a$ 的 2进分解中缺失的最小 2 的幂，因此 $[e_0D^{(n-2^i,2^i)} : D^{(n-1)}] = 0$。

若 $i = k-1$，则 $n - 2a = (h-2)2^k + \sum_{j=0}^{k-1} 2^j = (h-2)2^{i+1} + \sum_{j=0}^{i} 2^j$。由于 $\sum_{j=0}^{i} 2^j$ 出现在 $n-2a$ 的 2进分解中，因此可得 $[e_0D^{(n-2^i,2^i)} : D^{(n-1)}] = 2$。

若 $i \le k-2$，则 $n - 2a = (h-1)2^k + \sum_{j=i+2}^{k-1} 2^j + \sum_{j=0}^{i} 2^j$，因此再次有 $[e_0D^{(n-2^i,2^i)} : D^{(n-1)}] = 2$。

现在我们将使用 (4.3) 来证明 $[P^{(n)}: S((n-c',c'))] = 2^{d_{n+1}}$。为此，注意到 $d_{n+1} = d_h + k$。此外，对于 $0 \le i \le k-1$，我们有

$$n - 2^{i+1} + 1 = (h-1)2^k + \sum_{j=i+1}^{k-1} 2^j.$$

由于 $h \ge 2$，因此我们有

$$d_{n-2^{i+1}+1} = d_{h-1} + 2k - i - 1 = d_h + 2k - i - 2,$$

其中，最后一个等式成立是因为 $h = 2$ 或 $h \ge 3$ 为奇数。所以

$$\begin{aligned} 2^{d_{n-1}+1} - \sum_{i=1}^{k-1} 2^{d_{n-2^{i+1}+1}+1} &= 2^{d_h+2k-1} - \sum_{i=1}^{k-1} 2^{d_h+2k-i-1} \\ &= 2^{d_h+2k-1} - 2^{d_h+2k-1} + 2^{d_h+k} = 2^{d_h+k} = 2^{d_{n+1}}. \end{aligned}$$

情形 2： n 为偶数。在这种情形下， $n-2b \geq 4$，因此 $n-2b-1 \geq 3$。根据情况 1，我们有

$$[P^{(n-b-1,b)}] \equiv \sum_{a=b}^{M_{n-1}} g_{n-2b,a-b}[S^{(n-a-1,a)}] + 2^{d_{n-2b}}[S((n-c-1,c))] \pmod{T_{n-1}}$$

其中 $c = n/2-1$ 或 $n/2-2$ 取决于 n 和 b。设 i 为 $(n-b-1,b)$ 的两个最上方可加节点的剩余类。若 $g_{n-2b,\ a-b} = 1$ 则 $S^{(n-a-1,a)}$与 $D^{(n-b-1,b)}$ 属于同一块，因此 $(n-a+1,a)$ 的两个最上方可加节点的剩余类为 i。于是

$$[f_i P^{(n-b-1,b)}] \equiv \sum_{a=b+1}^{M_{n-1}} g_{n-2b,a-b}([S^{(n-a,a)}] + [S^{(n-a-1,a+1)}]) + 2^{d_{n-2b}}[f_i S((n-c-1,c))] \pmod{T_n}.$$

定义 $S^{(x,y)} := 0$，若 $x < y$。对于 $a > n/2 = M_{n-1}+1$，我们有

$$[S^{(n-a,a)}] + [S^{(n-a-1,a+1)}] = 0,$$

而对于 $a = n/2$，我们有 $g_{n-2b,\ a-b} = 0$ 因为 $n-2b = 2(a-b) > 0$。因此

$$[f_i P^{(n-b-1,b)}] \equiv \sum_{a\geq b} g_{n-2b,a-b}([S^{(n-a,a)}] + [S^{(n-a-1,a+1)}]) + 2^{d_{n-2b}}[f_i S((n-c-1,c))] \pmod{T_n}.$$

注意，若 $g_{n-2b,\ a-b} = 1$，则 $a-b$ 是偶数。对于 $a \leq n/2$，我们有$a < n-b$，因为 $n-2b \geq 4$，所以 $a-b < n-2b$。因此，若 $a \leq n/2$ 且 $a-b$ 为偶数，则 $g_{n-2b,\ a-b} = g_{n-2b+1,\ a-b} = g_{n-2b+1,\ a+1-b}$。再次利用$[S^{(n-a,a)}] + [S^{(n-a-1,a+1)}] = 0$ 对于 $a > n/2$ 成立，可得

$$[f_i P^{(n-b-1,b)}] \equiv \sum_{a\geq b} g_{n-2b+1,a-b}[S^{(n-a,a)}] + 2^{d_{n-2b}}[f_i S((n-c-1,c))]$$

$$\equiv \sum_{a=b}^{M_n} g_{n-2b+1,a-b}[S^{(n-a,a)}] + 2^{d_{n-2b}}[f_i S((n-c-1,c))] \pmod{T_n}.$$

考察每种情形下 i 和 c 的取值，可以验证：若 $n \equiv 0$ （模8）且 b 为偶数，或者若 $n \equiv 4$ （模8）且 b 为奇数，则

$$[f_i S((n-c-1,c))] \equiv 2[S((n/2+1,n/2-1))] + 2[S((n/2+2,n/2-2))] \pmod{T_n^{\mathrm{spin}}}$$

而在其他所有情形下

$$[f_i S((n-c-1,c))] \equiv 2[S((n/2+1,n/2-1))] \pmod{T_n^{\mathrm{spin}}}.$$

由引理 3.1 和引理 3.5 可知

$$[f_i P^{(n-b-1,b)}] \equiv [P^{(n-b,b)}] \pmod{R_n}.$$

由于 $d_{n-2b+1} = d_{n-2b}+1$ （根据定义），定理随即由引理 3.3 得出。

5. Proof of Theorem 1.5

本节将证明定理 1.5。我们先讨论 $n \equiv 2 \pmod 4$ 且 b 为奇数的情形（这等价于 dbl$(n-b,b)$ 的 2-核为 (4, 3, 2, 1) 或 (3,2,1)）。

引理 5.1. 设 $p = 2$, $n \equiv 2$ （模 4）， $0 \le a \le m_n$ 和 $1 \le b \le \overline{m}_n$，其中 b 为奇数。则

$$[S((n-a,a),0) : D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] = g_{n-2b,a-b}.$$

证明. 如果 a 为偶数，则 $S((n-a,a),0)$ 与 $D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}$ 属于不同的块。由于 $n-2b$ 为偶数而 $a-b$ 为奇数，因此定理在此情形下成立。所以我们可以假设 a 为奇数。

根据引理 3.1，对于任意 $0 \le x \le M_n$ 和 $0 \le y \le m_n$，我们有

$$[S^{(n-x,x)} : D^{(n-y,y)}] = g_{n-2y+1,x-y}.$$

根据格罗滕迪克群中的 [26,定理 9.3], ,

$$[S^{(n-x,x)} \otimes S((n))] = (1+\delta_{x\neq 0})[S((n-x,x))] + (1+\delta_{x\neq 1})[S((n-x+1,x-1))],$$

其中 $S((n/2,n/2))$ 和 $S((n+1,-1))$ 均定义为 0。因此，当 $1 \le a \le n/2-2$ 为奇数时

$$[S((n-a,a),0)] = 1/2 \sum_{c=0}^{(a-1)/2} ([S^{(n-2c-1,2c+1)} \otimes S((n))] - [S^{(n-2c,2c)} \otimes S((n))].$$

如果 $y > 2c+1$，那么 $S^{(n-2c-1,2c+1)}$ 或 $S^{(n-2c,2c)}$ 的合成因子中不包含 $D^{(n-y,y)}$。如果 $y \le 2c+1$ 为偶数，那么

$$\begin{aligned}[S^{(n-2c-1,2c+1)} : D^{(n-y,y)}] &= g_{n-2y+1,2c-y+1} = g_{n-2y+1,2c-y} \\ &= [S^{(n-2c,2c)} : D^{(n-y,y)}]\end{aligned}$$

因为 $n-2y$ 和 $2c-y$ 都是偶数。因此

$$\begin{aligned}&[S((n-a,a),0)] \\ &= 1/2 \sum_{c=0}^{(a-1)/2} \sum_{z=0}^{c} (g_{n-4z-1,2c-2z} - g_{n-4z-1,2c-2z-1})[D^{(n-2z-1,2z+1)} \otimes S((n))] \\ &= \sum_{c=0}^{(a-1)/2} \sum_{z=0}^{c} (g_{n-4z-1,2c-2z} - g_{n-4z-1,2c-2z-1})[D^{\mathrm{dbl}(n-2z-1,2z+1)}], \\ &= \sum_{z=0}^{(a-1)/2} \sum_{c=z}^{(a-1)/2} (g_{n-4z-1,2c-2z} - g_{n-4z-1,2c-2z-1})[D^{\mathrm{dbl}(n-2z-1,2z+1)}]\end{aligned}$$

第二个等式由 [11, 推论 3.21] 得出。出现的所有分拆都是 2-正则的，因为 $2c+1 \le a \le \overline{m}_n < m_n$ 且 $0 \le z \le c$。

由于 $n-4z$ 和 $2c-2z$ 都是偶数

$$\begin{aligned}&\sum_{c=z}^{(a-1)/2}\left(g_{n-4z-1,2c-2z}-g_{n-4z-1,2c-2z-1}\right)\\&=\sum_{c=z}^{(a-1)/2}\left(g_{n-4z-2,2c-2z}-g_{n-4z-2,2c-2z-2}\right)\\&=g_{n-4z-2,a-2z-1}-g_{n-4z-2,-2}\\&=g_{n-4z-2,a-2z-1}\end{aligned}$$

因此该定理成立。 □

为了在一般情形下证明定理 1.5，我们将使用模 $P^{\mathrm{dbl}(a,b)}$ 的诱导/限制的某些块分量，其中 $a\equiv b\equiv\pm1$ （模 4）。我们指出，以下引理未涵盖以下情形：当 $n\equiv0$ （模 4）时 b 为奇数，或当 $n\equiv2$ （模 4）时 b 为偶数。

引理 5.2。设 $1\le b\le\overline{m}_n$。当 $b\equiv0$ 或 3（模 4）时令 $i=0$，或当 $b\equiv1$ 或 2（模 4）时令 $i=1$。定义 F、C 和 x，并通过以下方式定义 y：

当 $n\equiv0$ （模 4）且 b 为奇数时，• 为 $x=2$、$y=0$、$F=f_i^2$ 和 $C=2$,

当 $n\equiv1$ （模 4）且 b 为偶数时，• 为 $x=2$、$y=1$、$F=f_i^3$ 和 $C=6$,

• 若 $n\equiv1$ (模 4) 且 b 为奇数，则 $x=3, y=0, F=e_if_{1-i}f_i^3$ 和 $C=6(2+\delta_{i=0})$,

• 若 $n\equiv2$ (模 4) 且 b 为偶数，则 $x=3, y=1, F=f_{1-i}f_i^3$ 和 $C=6$,

• 若 $n\equiv3$ (模 4) 且 b 为偶数，则 $x=4, y=1, F=f_{1-i}^2f_i^3$ 和 $C=12$,

• 若 $n\equiv3$ (模 4) 且 b 为奇数，则 $x=1, y=0, F=f_i$ 和 $C=1$。

Then

$$[FP^{\mathrm{dbl}(n-b-x,b-y)}]\equiv C[P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]\ (\mathrm{mod}\ R_n)\,.$$

证明。通过（重复）应用以下论证，并比较所有具有相应内容的形如 (A,B)、$\mathrm{dbl}(A,B)$ 的 2-正则分拆的（共）正规节点数；最后一种情形还需比较形如 (A,B,D) 或 $\mathrm{dbl}(A,B,1)$ 的分拆。

令 j 为一个剩余类，$r\ge1$ 和 $\alpha=\mathrm{dbl}(N-B,B)$。如果

$$[Q]\equiv d[P^\alpha]\ (\mathrm{mod}\ R_N)$$

并且，对于所有属于 2-部件分拆或 2-部件分拆的倍数的 2-正则分拆 β（其中 P^β 与 $f_j^rP^\alpha$ 属于同一块），$\varepsilon_j(\alpha)\ge\varepsilon_j(\beta)-r$。由引理 2.2 和 3.1 可知，$\sum_{\mu\in X_N}d_\gamma[P^\gamma]$ 的合成因子均不属于 $S^{(N-e,e)}$ 或 $S((N-e,e)\dots)$ 这两种形式，因此 $\sum_{\mu\in X_N}d_\gamma[f_j^rP^\gamma]$ 的合成因子均不属于 $S^{(N+r-e,e)}$ 或 $S((N+r-e,e)\dots)$ 这两种形式，进而由引理 3.6

$$[f_j^rQ]\equiv dr!\binom{\varepsilon_j(\alpha)+r}{r}[P^{\tilde{f}_j^r\alpha}]\ (\mathrm{mod}\ R_{N+r})\,.$$

类似地，由引理 3.7 可知，若对于所有属于 2-部件分拆或 2-部件分拆的倍数的 2-正则分拆β（其中P^β 与 $e_1^r P^\alpha$ 属于同一块），$\varphi_1(\alpha) \geq \varphi_1(\beta) - r$，则

$$[e_1^r Q] \equiv dr! \binom{\varphi_1(\alpha)+r}{r} [P^{\tilde{e}_1^r \alpha}] \pmod{R_{N-r}}$$

（因为我们正在移除剩余为 1 的节点）。

在取 $e_0 f_1 f_0^3 P^{\mathrm{dbl}(e,f)}$ 时，需要进行更仔细的分析。在这种情形下，$n \equiv 1$ (模 4) 且 $b \equiv 3$ (模 4)，因此 $e \equiv f \equiv 3$ (模 4)。可以验证

$$[f_0^3 P^{\mathrm{dbl}(e,f)}] = 6[P^{\mathrm{dbl}(e+2,f+1)}] + [P]$$
$$[f_1 f_0^3 P^{\mathrm{dbl}(e,f)}] = 6[P^{\mathrm{dbl}(e+3,f+1)}] + [Q]$$

其中，P或 Q中均未出现由至多 3 行的分拆或形如 dbl(E,F) 或 dbl$(E,F,1)$ 的分拆标记的投射模。因此，$e_0 Q$中不会出现形如 $S^{(g,h)}$ 或 $S((g,h)\ldots)$ 的模，这使我们能够证明

$$[e_0 f_1 f_0^3 P^{\mathrm{dbl}(e,f)}] \equiv 12[P^{\mathrm{dbl}(e+3,f)}] \pmod{R_{e+f+3}}.$$

□

现在我们可以证明定理 1.5 了。

定理 1.5 的证明。若 $n \equiv 2$ (模 4) 且 b 为奇数，则该定理已在引理 5.1 中证明。设 $i = 0$，若 $b \equiv 0$ 或 3（模 4），而 $i = 1$，若 $b \equiv 1$ 或 2（模 4）。由引理 5.2 可得

$$[FP^{\mathrm{dbl}(n-b-x,b-y)}] \equiv C[P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] \pmod{R_n}$$

对于由以下条件给出的 F、C 和 x 以及 y：

- 若 $n \equiv 0$（模 4）且 b 为奇数，则 $x = 2$、$y = 0$、$F = f_i^2$ 和 $C = 2$,
- 若 $n \equiv 1$（模 4）且 b 为偶数，则 $x = 2$、$y = 1$、$F = f_i^3$ 和 $C = 6$,
- 若 $n \equiv 1$（模 4）且 b 为奇数，则 $x = 3$、$y = 0$、$F = e_i f_{1-i} f_i^3$ 和 $C = 6(2 + \delta_{i=0})$，
- 若 $n \equiv 2$（模 4）且 b 为偶数，则 $x = 3$、$y = 1$、$F = f_{1-i} f_i^3$ 和 $C = 6$,
- 若 $n \equiv 3$（模 4）且 b 为偶数，则 $x = 4$、$y = 1$、$F = f_{1-i}^2 f_i^3$ 和 $C = 12$,
- 若 $n \equiv 3$ (模 4) 且 b 为奇数，则 $x = 1$、$y = 0$、$F = f_i$ 和 $C = 1$。

根据引理 3.6 和 3.7，我们于是得到，在每种情形下

$$\begin{aligned}
&[S((n-a,a),\varepsilon) : D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] \\
&= [P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)} : S((n-a,a),\varepsilon)] \\
&= 1/C[FP^{\mathrm{dbl}(n-b-x,b-y)} : S((n-a,a),\varepsilon)] \\
&= 1/C \sum_\nu [P^{\mathrm{dbl}(n-b-x,b-y)} : S(\nu)][FS(\nu) : S((n-a,a),\varepsilon)] \\
&= 1/C \sum_\nu [P^{\mathrm{dbl}(n-b-x,b-y)} : S(\nu)][FS(\nu) : S((n-a,a))].
\end{aligned}$$

除了 $n \equiv 1$ (模 4) 且 b 为奇数、$F = f_{i_1} \dots f_{i_r}$ 对于某个 r 和 $i_1, \dots, i_r$ 的情形外。因此，我们可以将求和范围限制为至多含有 2-部件的分拆 ν。

若 $n \equiv 1 \pmod 4$ 且 $b \equiv 1 \pmod 4$，则 $[P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)} : S((n-a,a)\ \varepsilon)]$ 可通过考察 $e_1 f_0 f_1^3 P_{\mathrm{dbl}(n-b-3,b)}$ 得到。由于从棒分拆中移除 1-节点不会改变其长度，我们可以再次将求和范围限制为至多含有 2-部件的 ν。

若 $n \equiv 1 \pmod 4$、$b \equiv 3 \pmod 4$，且 $S((r,s,t)\ \varepsilon'')$ 是 $P^{\mathrm{dbl}(n-b-3,b)}$ 中出现的任意一个满足 $t \geq 1$ 的模，则由分块分解可得 $t > 1$（比较棒内容可知，r、s、t 中有两个满足 $\equiv 3 \pmod 4$，第三个满足 $\equiv 0 \pmod 4$），因此这些模不会在 $e_0 f_1 f_0^3 P_{\mathrm{dbl}(n-b-3,b)}$ 中产生形如 $S((n-a,a)\ \varepsilon)$ 的模。因此，这种情形下我们也只需考虑至多含有 2 个部分的分拆 ν。

注意，在每种情形下，$n-b-x-y \equiv 2$ (模 4) 和 $b-y$ 都是奇数。因此

$$\begin{aligned}&[P^{\mathrm{dbl}(n-b-x,b-y)} : S((n-x-y-z,z))]\\ &= [P^{\mathrm{dbl}(n-b-x,b-y)} : S((n-x-y-z,z),\varepsilon')]\\ &= g_{n-2b-x+y,z-b+y}\end{aligned}$$

由引理 5.1 得。由于 $n-2b-x+y$ 是偶数，若 $g_{n-2b-x+y,\ z-b+y} \neq 0$ 则 $z \equiv b-y$ (模 2) 为奇数。因此，$[S((n-a,a)\ \varepsilon) : D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]$ 可表示为

$$\sum_{z=0}^{(n-x-y-6)/4} \frac{g_{n-2b-x+y,2z-b+y+1}}{C}[FS((n-x-y-2z-1,2z+1)) : S((n-a,a))]$$

（因为 $\overline{m}_{n-x-y} = (n-x-y-6)/4$）。若对不是 2-正则分拆的每个 λ，定义 $S(\lambda) := 0$，则 $[S((n-a,a)\ \varepsilon) : D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]$ 可表示为

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}} \frac{g_{n-2b-x+y,2z-b+y+1}}{C}[FS((n-x-y-2z-1,2z+1)) : S((n-a,a))].$$

若 $z < 0$，则 $2z-b+y-1 < 0$；而若 $z = (n-x-y-2)/4$，则 $2z-b+y+1 = (n-2b-x+y)/2$。在这两种情形下，$g_{n-2b-x+y,\ 2z-b+y+1} = 0$。

如果 $z \geq (n-x-y+2)/4$，那么 $n-x-y-2z-1 \geq 2z+5$，因此对于任意 $k \leq 4$ 和 $\ell \geq 0$，$(n-x-y-2z+k-1, 2z+\ell+1)$ 都不是 2-正则分拆。

此外，由于 $n-2b-x+y \equiv 0$（模 4），如果 $g_{n-2b-x+y,\ 2z-b+y+1} = 1$，那么分拆 $(n-x-y-2z-1, 2z+1)$ 在第一行和第二行各有 2 个（递归的）剩余类为 i 的可添加条形节点（也可以通过分块分解并比较条形内容看出这一点），并且 $n-x-y-2z-1 \geq 2z+5$，因为 $z \leq (n-x-y-6)/4$。

利用这些事实可以验证

$$g_{n-2b-x+y,2z-b+y+1}[FS((n-x-y-2z-1,2z+1))] = 0$$

当 $S(\lambda) = 0$ 时。

现在，我们将在 6 种情形中分别计算

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}} \frac{g_{n-2b-x+y,2z-b+y+1}}{C}[FS((n-x-y-2z-1,2z+1))]$$

并研究 $S((n-a,a))$ 的系数，以证明该定理。

由于 $b \leq \overline{m}_n$，我们总有：当 $n \equiv 1$（模 4）且 b 为偶数，或当 $n \equiv 3$（模 4）且 b 为奇数时，$n-2b-1 \geq 4$；当 $n \equiv 0$（模 4）且 b 为

奇数，或当 $n\equiv 2$（模 4）且 b为偶数时， $n-2b-3\geq 4$；当 $n\equiv 1$（模 4）且b为奇数，或当 $n\equiv 3$ （模 4）且 b 为偶数时， $n-2b-3\geq 4$。在下面的情形分析中，比较不同系数 $g_{r,s}$ 时，只要比较某个 h 与 $r\leq 2^h\leq s$ 的存在性，便可使用这一点而无需进一步说明。将相应的 r 和 s 的 2 进分解（或者至少比较其中的最后两项）进行比较，可以将每个出现的数写成 $4t+u$，其中 $0\leq u\leq 3$。

情形 1： $n\equiv 0$ （模 4）且 b 为奇数。于是

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}}\frac{g_{n-2b-2,2z-b+1}}{2}[f_i^2S((n-2z-3,2z+1))]$$
$$\equiv\sum_{z\in\mathbb{Z}}g_{n-2b-2,2z-b+1}([S((n-2z-1,2z+1))]+2[S((n-2z-2,2z+2))]$$
$$+[S((n-2z-3,2z+3))])\ (\mathrm{mod}\ T_n^{\mathrm{spin}})\,.$$

So

$$[S((n-a,a),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]=\begin{cases}2g_{n-2b-2,a-b-1} & a\text{ is even},\\ g_{n-2b-2,a-b}+g_{n-2b-2,a-b-2} & a\text{ is odd}.\end{cases}$$

我们需要证明这等于 $g_{n-2b,\ a-b}+2g_{n-2b-2,\ a-b-1}$。

设 $n-2b=4r+2$ 和 $a-b=4s+t$ 满足 $0\leq t\leq 3$。若 a 为偶数，则$g_{n-2b,\ a-b}=0$，因此定理成立。若 a 为奇数，则 $g_{n-2b-2,\ a-b-1}=0$。此外 $g_{n-2b,\ a-b}=g_{4r+2,\ 4s+t}=g_{4r,\ 4s}$。若 $t=0$，则

$$g_{n-2b-2,a-b}+g_{n-2b-2,a-b-2}=g_{4r,4s}+g_{4r,4(s-1)+2}=g_{4r,4s},$$

而若 $t=2$，则

$$g_{n-2b-2,a-b}+g_{n-2b-2,a-b-2}=g_{4r,4s+2}+g_{4r,4s}=g_{4r,4s}.$$

情形 2： $n\equiv 1$ （模 4）且 b 为偶数。于是

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}}\frac{g_{n-2b-1,2z-b+2}}{6}[f_i^3S((n-2z-4,2z+1))]$$
$$\equiv\sum_{z\in\mathbb{Z}}g_{n-2b-1,2z-b+2}([S((n-2z-2,2z+2))]+[S((n-2z-3,2z+3))])$$
$$(\mathrm{mod}\ T_n^{\mathrm{spin}})\,.$$

So

$$[S((n-a,a),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]=\begin{cases}g_{n-2b-1,a-b} & a\text{ is even},\\ g_{n-2b-1,a-b-1} & a\text{ is odd}.\end{cases}$$

我们必须证明这等于 $g_{n-2b,\ a-b}$。

设 $n-2b=4r+1$ 和 $a-b=4s+t$ 满足 $0\leq t\leq 3$。若 a 为偶数，则 $t=0$ 或 2，因此 $g_{n-2b-1,\ a-b}=g_{4r,\ 4s+t}=g_{4r+1,\ 4s+t}=g_{n-2b,\ a-b}$。若 a 为奇数，则 $t=1$ 或 3，因此 $g_{n-2b-1,\ a-b-1}=g_{4r,\ 4s+t-1}=g_{4r+1,\ 4s+t}=g_{n-2b,\ a-b}$。

情况 3： $n\equiv 1$ （模 4）且 b 为奇数。于是

$$\sum_{z\in\mathbb{Z}}\frac{g_{n-2b-3,2z-b+1}}{6(2+\delta_{i=0})}[e_if_{1-i}f_i^3S((n-2z-4,2z+1))]$$
$$\equiv\sum_{z\in\mathbb{Z}}g_{n-2b-3,2z-b+1}([S((n-2z-1,2z+1))]+[S((n-2z-4,2z+4))])$$
$$(\mathrm{mod}\ T_n^{\mathrm{spin}})$$

（如果 $i=0$，我们也可以在第三行添加和移除一个节点）。因此

$$[S((n-a,a),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]=\begin{cases} g_{n-2b-3,a-b-3} & a \text{ is even},\\ g_{n-2b-3,a-b} & a \text{ is odd}.\end{cases}$$

我们必须证明这等于 $g_{n-2b,\ a-b}-g_{n-2b-2,\ a-b-1}$。

令 $n-2b=4r+3$ 和 $a-b=4s+t$ 满足 $0\le t\le 3$。若 $t=0$，则 $g_{n-2b-3,\ a-b}=g_{4r,\ 4s}$，并且

$$g_{n-2b,a-b}-g_{n-2c-2,a-b-1}=g_{4r+3,4s}-g_{4r+1,4(s-1)+3}=g_{4r,4s}+0=g_{4r,4s}.$$

若 $t=1$，则 $g_{n-2b-3,\ a-b-3}=g_{4r,\ 4(s-1)+2}=0$，并且

$$g_{n-2b,a-b}-g_{n-2c-2,a-b-1}=g_{4r+3,4s+1}-g_{4r+1,4s}=0.$$

若 $t=2$，则 $g_{n-2b-3,\ a-b}=g_{4r,\ 4s+2}=0$，并且

$$g_{n-2b,a-b}-g_{n-2c-2,a-b-1}=g_{4r+3,4s+2}-g_{4r+1,4s+1}=0.$$

若 $t=3$，则 $g_{n-2b-3,\ a-b-3}=g_{4r,\ 4s}$，并且

$$g_{n-2b,a-b}-g_{n-2c-2,a-b-1}=g_{4r+3,4s+3}-g_{4r+1,4s+2}=g_{4r,4s}.$$

情况 4：$n\equiv 2$（模 4）且 b 为偶数。于是

$$\begin{aligned}&\sum_{z\in\mathbb{Z}}\frac{g_{n-2b-2,2z-b+2}}{6}[f_{1-i}f_i^3S((n-2z-5,2z+1))]\\ &\equiv\sum_{z\in\mathbb{Z}}g_{n-2b-2,2z-b+2}(2[S((n-2z-2,2z+2))]+2[S((n-2z-4,2z+4))])\\ &\quad(\mathrm{mod}\ T_n^{\mathrm{spin}}).\end{aligned}$$

So

$$[S((n-a,a),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]=\begin{cases} 2g_{n-2b-2,a-b}+2g_{n-2b-2,a-b-2} & a \text{ is even},\\ 0 & a \text{ is odd}.\end{cases}$$

我们需要证明这等于 $2g_{n-2b,\ a-b}$。

设 $n-2b=4r+2$ 和 $a-b=4s+t$ 满足 $0\le t\le 3$。若 a 为奇数，则 $a-b$ 也为奇数，因此 $g_{n-2b,\ a-b}=0$。若 a 为偶数，则 $t=0$ 或 2，我们可以仿照情况 1 中 a 为奇数的情形得出类似结论。

情况 5：$n\equiv 3$（模 4）且 b 为偶数。则

$$\begin{aligned}&\sum_{z\in\mathbb{Z}}\frac{g_{n-2b-3,2z-b+2}}{12}[f_{1-i}^2f_i^3S((n-2z-6,2z+1))]\\ &\equiv\sum_{z\in\mathbb{Z}}g_{n-2b-3,2z-b+2}([S((n-2z-2,2z+2))]+[S((n-2z-5,2z+5))])\\ &\quad(\mathrm{mod}\ T_n^{\mathrm{spin}}).\end{aligned}$$

So

$$[S((n-a,a),\varepsilon):D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]=\begin{cases} g_{n-2b-3,a-b} & a \text{ is even},\\ g_{n-2b-3,a-b-3} & a \text{ is odd}.\end{cases}$$

我们可以仿照情况 3 证明，这等于 $g_{n-2b,\ a-b}-g_{n-2b-2,\ a-b-1}$。

情形 6: $n \equiv 3$ (模 4)，且 b 为奇数。于是

$$\begin{aligned}&\sum_{z\in\mathbb{Z}} g_{n-2b-1,2z-b+1}[f_i S((n-2z-2,2z+1))]\\ &\equiv \sum_{z\in\mathbb{Z}} g_{n-2b-1,2z-b+1}([S((n-2z-1,2z+1))]+[S((n-2z-2,2z+2))])\\ &\quad (\mathrm{mod}\ T_n^{\mathrm{spin}})\,.\end{aligned}$$

So

$$[S((n-a,a),\varepsilon) : D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] = \begin{cases} g_{n-2b-1,a-b-1} & a \text{ is even},\\ g_{n-2b-1,a-b} & a \text{ is odd}.\end{cases}$$

类似于情形 2，可证明这等于 $g_{n-2b,\ a-b}$。 □

6. Proof of Theorem 1.6

本节将证明定理 1.6。

设 $n \equiv 0$(mod 4) 且 $2 \le b \le \overline{m}_n$ 为偶数。进一步，若 $b \equiv 0$ (mod 4)，则 $i = 0$；若 $b \equiv 2$ (mod 4)，则 $i = 1$。

根据引理 1.5 和 5.2 以及 [17, 注 11.2.9]，我们有

$$\begin{aligned}[f_i f_{1-i}^2 f_i^3 P^{\mathrm{dbl}(n-b-5,b-1)} : P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] &= 12,\\ [f_i P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)} : P^{\mathrm{dbl}(n-b+1,b)}] &= 2,\\ [f_i P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)} : P^{\mathrm{dbl}(n-b,b+1)}] &= 2.\end{aligned}$$

根据定理 1.5

$$\begin{aligned}[P^{\mathrm{dbl}(n-b-5,b-1)} : S((n-6-c,c))] &= g_{n-2b-4,c-b+1},\\ [P^{\mathrm{dbl}(n-b+1,b)} : S((n-c+1,c))] &= g_{n-2b+1,c-b},\\ [P^{\mathrm{dbl}(n-b,b+1)} : S((n+1-c,c))] &= g_{n-2b-1,c-b-1} - g_{n-2b-3,c-b-2}\end{aligned}$$

分别对应 $0 \le c \le m_{n-6}$ 或 $0 \le c \le m_{n+1}$。

我们将利用这一点计算分解数的上界。在某些情形下，我们还将证明这些上界实际上就是分解数。注意，根据上述内容

$$\begin{aligned}[f_i f_{1-i}^2 f_i^3 P^{\mathrm{dbl}(n-b-5,b-1)}] &\equiv 12[P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}]\ (\mathrm{mod}\ R_n)\,,\\ [f_i P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] &\equiv 2[P^{\mathrm{dbl}(n-b+1,b)}] + 2[P^{\mathrm{dbl}(n-b,b+1)}]\ (\mathrm{mod}\ R_{n+1})\,.\end{aligned}$$

与定理 1.5 的证明类似,

$$\begin{aligned}&[S((n-a,a),\varepsilon) : D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] = [P^{\mathrm{dbl}(n-b,b)} : S((n-a,a))]\\ &\le \frac{1}{12}[f_i f_{1-i}^2 f_i^3 P^{\mathrm{dbl}(n-b-5,b-1)} : S((n-a,a))]\\ &= \sum_{\nu} \frac{1}{24}[P^{\mathrm{dbl}(n-b-5,b-1)} : S(\nu)][f_i f_{1-i}^2 f_i^3 S(\nu) : S((n-a,a))]\\ &= \sum_{z\in\mathbb{Z}} \frac{g_{n-2b-4,2z-b+2}}{24}[f_i f_{1-i}^2 f_i^3 S((n-2z-7,2z+1)) : S((n-a,a))].\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&[P^{\mathrm{dbl}(n-b+1,b)} : S((n-c+1,c))] + [P^{\mathrm{dbl}(n-b,b+1)} : S((n-c+1,c))] \\
&\le \frac{1}{24}[f_i^2 f_{1-i}^2 f_i^3 P^{\mathrm{dbl}(n-b-5,b-1)} : S((n-a,a))] \\
&= \sum_{\nu} \frac{1}{24}[P^{\mathrm{dbl}(n-b-5,b-1)} : S(\nu)][f_i^2 f_{1-i}^2 f_i^3 S(\nu) : S((n-a,a))] \\
&= \sum_{z\in\mathbb{Z}} \frac{g_{n-2b-4,2z-b+2}}{24}[f_i^2 f_{1-i}^2 f_i^3 S((n-2z-7,2z+1)) : S((n-a,a))].
\end{aligned}$$

再次令 $S((c,d)) := 0$，当 (c,d) 不是 2-正则分拆时。如果$2z+1 \not\equiv b-1 \pmod 4$，则 $g_{n-2b-4,\ 2z-b+2} = 0$，因为 $n-2b \equiv 0 \pmod 4$。如果 $n-4z-8 = 0$，那么 $2z-b+2 = (n-2b-4)/2$，因此 $g_{n-2b-4,\ 2z-b+2} = 0$。如果 $2z+1 \equiv b-1 \pmod 4$ 且 $n-4z-8 \neq 0$，那么

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{12}[f_i f_{1-i}^2 f_i^3 S((n-2z-7,2z+1))] \\
&\equiv 2[S((n-2z-2,2z+2))] + 2[S((n-2z-3,2z+3))] \\
&\quad + 2[S((n-2z-5,2z+5))] + 2[S((n-2z-6,2z+6))] \pmod{T_n^{\mathrm{spin}}}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{24}[f_i^2 f_{1-i}^2 f_i^3 S((n-2z-7,2z+1))] \\
&\equiv \delta_{z\neq(n-4)/4}[S((n-2z-1,2z+2))] + 2[S((n-2z-2,2z+3))] \\
&\quad + (1+\delta_{z\neq(n-12)/4})[S((n-2z-5,2z+6))] \\
&\quad + [S((n-2z-6,2z+7))] \pmod{T_{n+1}^{\mathrm{spin}}}.
\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&[S((n-a,a),\varepsilon) : D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] \qquad (6.1)\\
&\le \frac{1}{12}[f_i f_{1-i}^2 f_i^3 P^{\mathrm{dbl}(n-b-5,b-1)} : S((n-a,a))] \\
&= \begin{cases} 2g_{n-2b-4,a-b} + 2g_{n-2b-4,a-b-4}, & a \text{ is even}, \\ 2g_{n-2b-4,a-b-1} + 2g_{n-2b-4,a-b-3}, & a \text{ is odd} \end{cases}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
&g_{n-2b+1,c-b} + g_{n-2b-1,c-b-1} - g_{n-2b-3,c-b-2} \qquad (6.2)\\
&= [P^{\mathrm{dbl}(n-b+1,b)} : S((n-c+1,c))] + [P^{\mathrm{dbl}(n-b,b+1)} : S((n-c+1,c))] \\
&\le \frac{1}{24}[f_i^2 f_{1-i}^2 f_i^3 P^{\mathrm{dbl}(n-b-5,b-1)} : S((n-c+1,c))] \\
&= \begin{cases} \delta_{c\neq n/2} g_{n-2b-4,c-b} + (1+\delta_{c\neq n/2}) g_{n-2b-4,c-b-4}, & c \text{ is even}, \\ 2g_{n-2b-4,c-b-1} + g_{n-2b-4,c-b-5}, & c \text{ is odd}. \end{cases}
\end{aligned}$$

若对于某个 c（其中 $c-b \equiv 0$ 或 1（模 4）），等式 (6.2) 成立，则对于 $a \in \{c-1, c\}$，等式 (6.1) 必定成立，因为 $S((n-c+1,c))$ 同时出现在 $f_i S((n-c+1,c-1))$ 和 $f_i S((n-c,c))$ 中（前者由 $c \ge 1$ 给出）。

由于 $b \le n/2-4$，我们有 $n-2b-4 \ge 4$。因此可以验证（考虑 $a-b$ 模 4 的所有可能情况，并将所有出现的

数写成 $4r+s$ 的形式，其中 $0 \le s \le 3$），

$$\begin{aligned} &2g_{n-2b-3,a-b} + 2g_{n-2b-3,a-b-3} \\ &= \begin{cases} 2g_{n-2b-4,a-b} + 2g_{n-2b-4,a-b-4}, & a \text{ is even}, \\ 2g_{n-2b-4,a-b-1} + 2g_{n-2b-4,a-b-3}, & a \text{ is odd}, \end{cases} \end{aligned}$$

从而

$$[S((n-a,a),\varepsilon) : D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] \le 2g_{n-2b-3,a-b} + 2g_{n-2b-3,a-b-3}.$$

如果 $a-b \equiv 2$（模 4），那么由 $n-2b-3 \equiv 1$（模 4）（由于 $n \equiv 0$（模 4）且 b为偶数），我们有

$$[S((n-a,a),\varepsilon) : D^{\mathrm{dbl}(n-b,b)}] \le 2g_{n-2b-3,a-b} + 2g_{n-2b-3,a-b-3} = 0,$$

从而等式成立。

现在我们可以假设 $a-b \not\equiv 2$（模 4），并且 $\nu_2((\lfloor (a-b+1)/4 \rfloor)) \ge \nu_2((n-2b)/4)$ 或 $g_{n-2b-4,4\lfloor (a-b+1)/4 \rfloor - 4} = 0$ 中至少有一个成立。在这种情况下，我们将证明，当 $a-b \equiv 3$（模 4）时 $c = a+1$，当 $a-b \equiv 0$（模 4）时 $c = a$，或当 $a-b \equiv 1$（模 4）时 $a-1$，等式（6.2）成立。假设 $\nu_2((\lfloor (a-b+1)/4 \rfloor)) \ge \nu_2((n-2b)/4)$ 和 $g_{n-2b-4,4\lfloor (a-b+1)/4 \rfloor - 4} = 0$ 随后分别变为 $\nu_2((\lfloor (c-b)/4 \rfloor)) \ge \nu_2((n-2b)/4)$ 和 $g_{n-2b-4,4\lfloor (c-b)/4 \rfloor - 4} = 0$。

如果 $c = n/2$ 和 $c-b \equiv 0$ 或 1（模 4），那么由于 b 和 $n/2 = c$ 都是偶数，有 $c \equiv 0$（模 4）。在这种情形下

$$\nu_2((\lfloor (c-b)/4 \rfloor)) = \nu_2((n-2b)/8) < \nu_2((n-2b)/4).$$

此外，(6.2) 的右侧为 $g_{n-2b-4,\ c-b-4} = g_{n-2b-4,\ 4\lfloor (c-b)/4 \rfloor - 4}$。如果该值为 0，则等号成立，因为右侧非负。

现在我们可以假设 $c < n/2$。令 $n-2b = 4k$ 和 $c-b = 4\ell + x$，其中 $x \in \{0,1\}$。如果 $x = 0$，则

$$\begin{aligned} &g_{n-2b+1,c-b} + g_{n-2b-1,c-b-1} - g_{n-2b-3,c-b-2} \\ &= g_{4k+1,4\ell} + g_{4(k-1)+3,4(\ell-1)+3} - g_{4(k-1)+1,4(\ell-1)+2} \\ &= g_{4k+1,4\ell} + g_{4(k-1)+3,4(\ell-1)+3} \end{aligned}$$

and

$$g_{n-2b-4,c-b} + 2g_{n-2b-4,c-b-4} = g_{4(k-1),4\ell} + 2g_{4(k-1),4(\ell-1)}.$$

如果 $x = 1$，则

$$\begin{aligned} &g_{n-2b+1,c-b} + g_{n-2b-1,c-b-1} - g_{n-2b-3,c-b-2} \\ &= g_{4k+1,4\ell+1} + g_{4(k-1)+3,4\ell} - g_{4(k-1)+1,4(\ell-1)+3} \\ &= g_{4k+1,4\ell+1} + g_{4(k-1)+3,4\ell} \end{aligned}$$

and

$$2g_{n-2b-4,c-b-1} + g_{n-2b-4,c-b-5} = 2g_{4(k-1),4\ell} + g_{4(k-1),4(\ell-1)}.$$

由于再次有 $n-2b-4 \ge 4$，可知在这两种情形中的任一种情形下，(6.2) 中的等号成立当且仅当

$$g_{k,\ell} = g_{k-1,\ell} + g_{k-1,\ell-1}. \tag{6.3}$$

我们将证明这一点在以下情况下成立：

$$\nu_2(\ell) = \nu_2((\lfloor (c-b)/4 \rfloor)) \ge \nu_2((n-2b)/4) = \nu_2(k)$$

or

$$g_{k-1,\ell-1} = g_{4(k-1),4(\ell-1)} = g_{n-2b-4,4\lfloor(c-b)/4\rfloor-4} = 0$$

成立。

若 $c = b$，则 $\ell = 0$。由于 $n - 2b \geq 8$，我们有 $k \geq 2$，因此 (6.3) 成立。

现在我们可以假设 $\ell > 0$，并将 $k = 2^y(2\overline{k}+1)$ 和 $\ell = 2^z(2\overline{\ell}+1)$ 写成，其中 $\overline{k}$ 和 $\overline{\ell}$ 为非负整数。

情况 1: $\nu_2(\ell) > \nu_2(k)$。于是 $z > y$，因此 $\ell = 2^{y+1}\ell'$，其中 ℓ' 为整数，并且

$$\begin{aligned} g_{k,\ell} &= g_{2^{y+1}\overline{k}+2^y,2^{y+1}\ell'} = g_{\overline{k},\ell'} \\ g_{k-1,\ell} &= g_{2^{y+1}\overline{k}+2^{y-1}+\ldots+1,2^{y+1}\ell'} = g_{\overline{k},\ell'} \\ g_{k-1,\ell-1} &= g_{2^{y+1}\overline{k}+2^{y-1}+\ldots+1,2^{z+1}\overline{\ell}+2^{z-1}+\ldots+2^y+2^{y-1}+\ldots+1)} = 0. \end{aligned}$$

因此 (6.3) 成立。

情形 2: $\nu_2(\ell) = \nu_2(k)$。在此情形下，$z = y$，因此

$$\begin{aligned} g_{k,\ell} &= g_{2^{y+1}\overline{k}+2^y,2^{y+1}\overline{\ell}+2^y} = g_{\overline{k},\overline{\ell}} \\ g_{k-1,\ell} &= g_{2^{y+1}\overline{k}+2^{y-1}+\ldots+1,2^{y+1}\overline{\ell}+2^y} = 0 \\ g_{k-1,\ell-1} &= g_{2^{y+1}\overline{k}+2^{y-1}+\ldots+1,2^{y+1}\overline{\ell}+2^{y-1}+\ldots+1} = g_{\overline{k},\overline{\ell}} \end{aligned}$$

因此 (6.3) 成立。

情况 3: $\nu_2(\ell) < \nu_2(k)$。我们可以假设 $g_{k-1,\ \ell-1} = 0$。由于 $\nu_2(\ell) < \nu_2(k)$，因此有 $g_{k,\ \ell} = 0$。此外，$z \leq y - 1$，所以

$$\begin{aligned} g_{k-1,\ell} &= g_{2^{y+1}\overline{k}+2^{y-1}+\ldots+1,2^{z+1}\overline{\ell}+2^z} \\ &\leq g_{2^{y+1}\overline{k}+2^{y-1}+\ldots+1,2^{z+1}\overline{\ell}+2^{z-1}+\ldots+1} \\ &= g_{k-1,\ell-1} = 0. \end{aligned}$$

特别地，(6.3) 在这种情况下也成立。

Appendix A. Examples

我们通过一些较小的分解矩阵展示，利用定理 1.4、1.5 和 1.6 可以计算分解矩阵中的哪些部分。由于当 $n \not\equiv 0$(模 4) 或 $n \leq 8$ 且 $n \equiv 0$ (模 4) 时，只有对应于 ~~(dbl(~~n~~))~~^{R} 的列无法通过前两个结果计算，因此这里我们只考虑 $n \geq 12$ 且 $n \equiv 0$(模 4) 的情形，并介绍前几个这样的情形。

我们按如下方式为列着色：若相应的列由定理 1.4 覆盖，则标为红色；若由定理 1.5 覆盖，则标为蓝色；若（部分）由定理 1.6 覆盖，则标为绿色。

一般而言，对于 $D^{(\overline{\mathrm{dbl}}(n))^R}$ [27, 表 III、IV] 中的列，可以用来确定前两个条目，但除此之外没有已知信息（小 n 的情况除外）。

对于 $n = 12$，可以从 [10] 恢复分解矩阵（并通过一些计算确定行和列），我们据此给出缺失的分解数（均位于 $D^{(7,5)}$ 的列中）。

对于未使用定理 1.4、1.5 和 1.6 计算出的已知分解数，我们补上了 =?

与往常一样，缺失的数值应视为 0。

	$D^{(12)}$	$D^{(11,1)}$	$D^{(10,2)}$	$D^{(9,3)}$	$D^{(8,4)}$	$D^{(7,5)}$	$D^{(6,5,1)}$	$D^{(6,4,2)}$	$D^{(5,4,2,1)}$
$S((12)\ \pm)$						$1=?$			
$S((11,1),0)$						$1=?$	1		
$S((10,2),0)$						$0=?$	2	2	
$S((9,3),0)$						$1=?$	1	2	1
$S((8,4),0)$		8		4		$2=?$			2
$S((7,5),0)$	8	8	4	4	2	$1=?$		2	1

	$D^{(16)}$	$D^{(15,1)}$	$D^{(14,2)}$	$D^{(13,3)}$	$D^{(12,4)}$	$D^{(11,5)}$	$D^{(10,6)}$	$D^{(9,7)}$	$D^{(8,7,1)}$	$D^{(8,6,2)}$	$D^{(7,6,2,1)}$	$D^{(7,5,3,1)}$	$D^{(6,5,3,2)}$
$S((16)\ \pm)$								$1=?$					
$S((15,1),0)$								$1=?$	1				
$S((14,2),0)$								?	2	2			
$S((13,3),0)$								?	1	2	1		
$S((12,4),0)$								?			2	2	
$S((11,5),0)$								?	1	2	1	2	1
$S((10,6),0)$		16		8		4		?	2	2			2
$S((9,7),0)$	8	16	8	8	4	4	2	?	1			2	1

	$D^{(20)}$	$D^{(19,1)}$	$D^{(18,2)}$	$D^{(17,3)}$	$D^{(16,4)}$	$D^{(15,5)}$	$D^{(14,6)}$	$D^{(13,7)}$	$D^{(12,8)}$	$D^{(11,9)}$	$D^{(10,9,1)}$	$D^{(10,8,2)}$	$D^{(9,8,2,1)}$	$D^{(9,7,3,1)}$	$D^{(8,7,3,2)}$	$D^{(8,6,4,2)}$	$D^{(7,6,4,3)}$
$S((20)\ \pm)$										$1=?$							
$S((19,1),0)$										$1=?$	1						
$S((19,2),0)$										?	2	2					
$S((17,3),0)$										?	1	2	1				
$S((16,4),0)$										?			2	2			
$S((15,5),0)$										?		≥ 2	1	2	1		
$S((14,6),0)$										?		≥ 4			2	2	
$S((13,7),0)$										?		≥ 2	1	2	1	2	1
$S((12,8),0)$		16		16		8		4		?			2	2			2
$S((11,9),0)$	16	16	8	16	8	8	4	4	2	?		2	1			2	1

特别地，对于 $n \leq 23$，唯一无法恢复的分解数是 $[S((20-a,a),0): D^{(10,8,2)}]$ 对于 $5 \leq a \leq 7$，以及 $D^{(\overline{\mathrm{dbl}(n)})^R}$ 所在列中的分解数。

上述分解矩阵中的方框标出了不同矩阵中相应分解数相等的部分。在比较 n 和 $n-4$ 的分解矩阵时，由于引言中的结果以及 [21,定理 1.4] 中关于分解数的公式，始终存在类似的区域。

Acknowledgements

作者感谢审稿人提出的有益意见。

References

[1] G.E. Andrews、C. Bessenrodt、J.B. Olsson，《若干模特征标的分拆恒等式与标记》，*Trans. Amer. Math. Soc.* 344 (1994)，597-615。

[2] D. Benson, 《对称群的自旋模》, *J. London Math. Soc.* **38** (1988), 250-262。[3] C. Bessenrodt、A.O. Morris、J.B. Olsson, 《特征数 3 下对称群自旋特征标的分解矩阵》, *J. Algebra* 164 (1994), 146-172。[4] C. Bessenrodt、J.B. Olsson, 《对称群覆盖群的 2-块》, *Adv. Math.* **129** (1997), 261-300。[5] J. Brundan、A. Kleshchev, 《通过 Sergeev 对偶得到对称群的射影表示》, *Math. Z.* 239 (2002), 27-68。[6] J. Brundan、A. Kleshchev, 《对称群双覆盖的 James 正则化定理》, *J. Algebra* 306 (2006), 128-137。[7] M. Fayers, 《在特征 2 下仍保持不可约的对称群不可约射影表示》, *Proc. London Math. Soc.* **116** (2018), 878–928。[8] M. Fayers, 《在特征 2 下仍保持不可约的交错群不可约射影表示》, *Adv. Math.* **374** (2020), 107340。[9] M. Fayers、A. Kleshchev、L. Morotti, 《对称群双覆盖的阿贝尔亏量 RoCK 块的分解数》, 准备中。[10] GAP 团队, 《GAP——群、算法与编程》, http://www.gap-system.org。[11] J. Graham、G. James, 《关于 Gow 和 Kleshchev 张量积猜想》, *J. Algebra* **227** (2000), 767–782。[12] G.D. James, 《有限域上对称群的表示，域的阶为 2 *J.* 》, *Algebra* **38** 1976 280 308 ( ), –。[13] G.D. James, 《关于对称群的分解矩阵（一）》, *J. Algebra* ( ), –。**43** 1976 42 44
[14] G. D. James, 《 *The Representation Theory of the Symmetric Groups*》, 数学讲义, 第 682 卷, Springer, 纽约/海德堡/柏林, 1978。[15] G. D. James、A. Kerber, 《 *The Representation Theory of the Symmetric Group*》, 数学及其应用百科全书, 第 16 卷, Addison-Wesley, 马萨诸塞州雷丁, 1981。[16] C. Jansen、K. Lux、R. Parker、R. Wilson, 《 *An Atlas of Brauer Characters*》, 克拉伦登出版社, 牛津, 1995。[17] A.S. Kleshchev, 《 *Linear and Projective Representations of Symmetric Groups*》, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2005。[18] L.A. Maas, 《对称群的模自旋特征标》, 博士论文（2012）, https://duepublico 2 _ _00027043.
[19] 2 uni-due.de/receive/duepublico mods L. Morotti, 《对称群 - 部分自旋表示的合成因子》, *Algebr. Comb.* **3** (2020), 1283–1291。[20] L. Morotti, 《特征 2 *J.* 下交 *Pure Appl. Algebra* **227** 2023 107353
错群的不可约张量积》, , （）, 。[21] L. Morotti, 《特征 2 下对称群自旋表示分解数的广义行与列删除结果》, arXiv:2312.12955。[22] A.O. Morris, 《对称群的自旋表示》, *Canad. J. Math.* **17** (1965) 543-549。[23] J. M¨uller, 《对称群舒尔覆盖的布劳尔树》, *J. Algebra* 266 (2003), 427-445。[24] J. Schur, 《 ¨关于通过分式线性代换表示对称群和交错群》, *J. Reine Angew. Math.* **139** (1911), 155–250。[25] J. Sheth, 《两行分拆的分支规则及其在对称群归纳系统中的应用》, *Comm. Algebra* **27** (1999), 3303–3316。[26] J. Stembridge, 《移位杨表与对称群的射影表示》, *Adv. Math.* **74** (1989), 87–134。[27] D.B. Wales, 《 S_n的若干射影表示》, *J. Algebra* 61 (1979), 37-57。[28] D. Yates, 《关于由分拆（$n-2$, 2）标记的 S_n 自旋表示的模分解及条核分拆的组合学》, 博士论文, 伦敦玛丽女王大学。

Leibniz Universität Hannover, Institut für Algebra, Zahlentheorie und Diskrete Mathematik, 30167 Hannover, Germany

Mathematisches Institut, Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, 40225 Düsseldorf, Germany
Email address: lucia.morotti@uni-duesseldorf.de