arXiv:2303.00631v1 [math.DG] 1 Mar 2023

复化轨道中的厄米 Calabi 泛函

JIE HE 和 KAI ZHENG

Abstract. 设 (M,ω) 是一个紧致辛流形。我们用 $\mathcal{AC}_\omega$ 表示与 ω 相容的所有近复结构所构成的空间。 $\mathcal{AC}_\omega$ 具有自然的叶状结构，其叶为复化轨道。我们给出了 $\mathcal{AC}_\omega$ 中极值近 K¨ahler 度量处 Hermitian Calabi 泛函的 Hessian 的显式公式。我们证明，当限制在复化轨道上时，Hermitian Calabi 泛函在临界点处的 Hessian 半正定；作为推论，我们得到了若干类似于 K¨ahler 情形的结果。我们还证明了厄米卡拉比流的弱抛物性。

Contents

1. 引言 2 致谢 6 2. 预备知识 6 2.1. Hamilton 群 8 2.2. 厄米标量曲率 9 2.3. $\mathcal{AC}_\omega$ 10 中的复化轨道 3. 算子 11 3.1. 算子 P 和 P^* 11 3.2. Lichnerowicz 算子 $\mathbb{L}$ 14 3.3. 算子 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ 15 3.4. Calabi 算子 $\mathbb{L}^{\pm}$ 18 3.5. $C^\infty(M,\mathbb{R})$ 的分解和 $T_J\mathcal{AC}_\omega$ 20 4. Hermitian Calabi 泛函的 Hessian 21 4.1. 定理 1.1 中 (1) 和 (3) 的证明 22 4.2. 定理 1.1 中 (2) 的证明 24 4.3. 推论 1.2 的证明 25 4.4. 推论 1.3 的证明 25 4.5. $\mathcal{AC}_\omega$ 26 中沿测地线的 Hermitian Calabi 泛函 5. 厄米卡拉比流 29 5.1. $J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J$ 30 的线性化算子 5.2. 厄米卡拉比流的弱抛物性 32 附录 A. Lichnerowicz 算子的显式表达式 34 参考文献 38

1. Introduction

极值几乎 K¨ahler（EAK）度量扩展了 Calabi 的极值 K¨ahler 度量[5, 6] 在辛流形上。它们是 Hermitian Calabi 泛函的临界点，而 Hermitian Calabi 泛函是厄米标量曲率平方范数。厄米卡拉比流是 Hermitian Calabi 泛函的梯度流。

本文计算了 Hermitian Calabi 泛函的 Hessian，并证明了厄米卡拉比流的弱抛物性。

在明确陈述结果之前，我们先回顾一些概念。设 (M,ω) 是一个辛流形，其中 ω 是定义在 M 上的给定辛形式。一个近 K¨ahler 结构由一个辛流形 (M,ω) 和一个与 ω 相容的近复结构 J 构成，这意味着它们满足以下两个条件

$$\omega\text{-tamed: } \omega(\cdot, J\cdot) > 0;$$
$$J\text{-invariant: } \omega(J\cdot, J\cdot) = \omega(\cdot,\cdot).$$

相容性条件导出一个 J-不变的黎曼度量

$$g_J(\cdot,\cdot) := \omega(\cdot, J\cdot). \tag{1.1}$$

从现在起，我们始终固定辛形式 ω，并且交替使用近复结构 J 和黎曼度量 g。

我们将所有与 ω相容的近复结构收集到集合

$$\mathcal{AC}_\omega := \{J \in \mathrm{End}(TM) : J^2 = -1 \text{ and } J \text{ satisfies (1.1)}\},$$

该集合是一个无限维 K¨ahler 流形，配备复结构$\mathbb{J}$ 和 L^2 黎曼度量

$$\mathbb{J}(v) := Jv, \quad \langle u, v\rangle_J := \int_M g_J(u,v)\mathrm{vol}, \quad \mathrm{vol} := \frac{\omega^m}{m!}, \quad \forall u, v \in T_J\mathcal{AC}_\omega. \tag{1.2}$$

令 $s^\nabla(J)$ 表示近复结构 $J \in \mathcal{AC}_\omega$的厄米标量曲率。根据藤木 [12] 和 Donaldson [9], ，厄米标量曲率是哈密顿辛同胚群 Ham(M,ω) 作用于 $\mathcal{AC}_\omega$上的动量映射。Hermitian Calabi 泛函 $\mathcal{C} : \mathcal{AC}_\omega \to \mathbb{R}$ 可解释为动量映射的平方范数,

$$\mathcal{C}(J) := \int_M [s^\nabla(J)]^2 \mathrm{vol}.$$

极值近 K¨ahler（EAK）度量满足方程

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}} J = 0, \tag{1.3}$$

其中，$\mathbb{K} =: J\mathrm{grad}s^\nabla$ 是极值向量场，$\mathcal{L}$ 是李导数。显然，具有常厄米标量曲率的近 K¨ahler 度量是 EAK。

Donaldson [9, 10, 11] 开创了研究 EAK 度量的研究计划。Apos- tolov、考尔德班克、Gauduchon 和 Tønnesen-Friedman 在 [1] 中提供了许多 EAK（非 K¨ahler）度量的具体实例。近年来，许多关于极值 K¨ahler 度量的结果已推广到 EAK 度量。Lejmi [23] 将二木不变量和极值向量场推广到了近 K¨ahler情形。Keller-Lejmi [18] 得到了 Hermitian Calabi 泛函的下界。

EAK 度量的变形问题已在 [24, 19]中得到研究。Vernier [36]通过粘合方法构造了具有常 Hermitian 标量曲率的近 K¨ahler 度量。Legendre [22] 证明，在环面对称性下，EAK 度量的存在意味着极值 K¨ahler 度量的存在。一般而言，预期 EAK 度量存在。感兴趣的读者可参阅综述 [2] ，作者为 Apostolov 和 Dr˘aghici，主题是近 K¨ahler 几何。

哈密顿辛同胚群 Ham(M,ω) 在 $\mathcal{AC}_\omega$ 上有一个自然作用。我们将 Ham(M,ω) 作用下经过 J 的轨道记为 $\mathcal{O}_J$。李代数 $\mathfrak{ham}$ 中的任意元素 $\mathrm{grad}_\omega f$ 都在 $\mathcal{O}$ 的切空间上定义一个向量场:

$$P(f) := \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J.$$

我们还定义 $JP = J\circ P$: $C^\infty(M,\ \mathbb{R}) \to T_J\mathcal{AC}_\omega$及其伴随算子 P^*和 $(JP)^*$，准确表述见定义 3.2。

得益于 Donaldson 的观察 [9], ，李代数 $\mathfrak{ham}$ 可以复化，并在切空间 $T\mathcal{AC}_\omega$ 中诱导出一个分布 D ，如下所示

$$D_J = \{P(f), JP(f) :\ \text{for all } f \in C^\infty(M,\mathbb{R})\},\quad \forall J \in \mathcal{AC}_\omega.$$

事实上， D 是全纯且可积的，它生成一个积分子流形 $\mathcal{D} \subset\mathcal{AC}_\omega$，称为复化轨道。我们将经过 J 的复化轨道记为 $\mathcal{D}_J$ （为方便起见，可以省略 $\mathcal{D}_J$ 的下标）。

根据上述记号，我们可以明确写出 Hermitian Calabi 泛函的 Hessian Hess$\mathcal{C}$ 。

定理 1.1. 对任意 $J \in \mathcal{AC}_\omega$ 以及 u、 $v \in T_J\mathcal{AC}_\omega$，我们选取一个二参数族 $J(t_1,t_2)$，使得 $J(0,0) = J$、 $\partial_{t_1}J(0,0) = u$、 $\partial_{t_2}J(0,0) = v$。于是有

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u,v) = -\langle\frac{\partial^2 J}{\partial t_1\partial t_2}|_{(0,0)}, J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J\rangle + \langle u, H(v)\rangle - \langle u, v\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J\rangle.$$

这里，我们引入算子

$$H(u) := 2JP(JP)^*u - J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}u.$$

此外，我们还有以下推论。

(1) 若 J 是 EAK，则有

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u,v) = \langle H(u), v\rangle, \tag{1.4}$$

此外，算子 $J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$在 $T_J\mathcal{AC}_\omega$上自伴，且在$T_J\mathcal{D}$上半正，参见引理 3.10。(2) EAK度量 J 是复化轨道 $\mathcal{D}_J$上 Hermitian Calabi 泛函的局部极小值。如果 J 是 EAK，则 Hess$\mathcal{C}$ 限制在 $\mathcal{D}_J$ 上是半正的

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(v,v) \geq 0,\quad \forall v \in T_J\mathcal{D}.$$

此外，Hess$\mathcal{C}$在子空间 Im JP上严格正定，在子空间 Im P上为零。具体而言，对于任意 $f_1, f_2 \in C^\infty(M,\mathbb{R})$，有

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}\mathcal{C}(JP(f_1), JP(f_2)) &= 2\langle \mathbb{L}(f_1), \mathbb{L}(f_2)\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f_1), \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f_2)\rangle \\ &= 2\langle \mathbb{L}^+(f_1), \mathbb{L}^-(f_2)\rangle, \\ \mathrm{Hess}\mathcal{C}(P(f_1), P(f_2)) &= 0.\end{aligned}$$

其中，$\mathbb{L}$ 是 Lichnerowicz 算子 $\mathbb{L} = P^*P$，参见定义3.3 且 Calabi 算子 $\mathbb{L}^{\pm}$ 是自伴且半正的，参见定义3.5。

(3) 常 Hermitian 标量曲率的近 K¨ahler 度量是 $\mathcal{AC}_\omega$ 上 Hermitian Calabi 泛函的一个局部极小值。

实际上，如果 J 具有常 Hermitian 标量曲率，那么

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u,v) = 2\langle (JP)^* u, (JP)^* v\rangle, \tag{1.5}$$

它在 $T_J\mathcal{AC}_\omega$上半正，并且当且仅当 $v \in \ker(JP)^*$时取零。

(4) 若 $J(t)$ 是关于黎曼度量(1.2) 在 $\mathcal{AC}_\omega$中的一条测地线，那么测地线方程满足 $J'' = JJ'J'$且 Hermitian Calabi 泛函沿着 $J(t)$ 的二阶导数满足

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{C}(J_t) = \langle H(J'), J'\rangle. \tag{1.6}$$

根据定理 2中的（1.1），我们可以得到复化轨道切空间的一个结构性质。

推论 1.2。如果 J 是 EAK，则

$$\mathrm{Im}\, P \cap \mathrm{Im}\, JP = \{0\}, \quad T_J\mathcal{D}_J = \mathrm{Im}\, P \oplus \mathrm{Im}\, JP.$$

推论 1.3。在几乎 K¨ahler 流形（M， ω， J）上，

- Hermitian Calabi 泛函在 Ham(M,ω) 的作用下保持不变。
- 将 Hermitian Calabi 泛函 $\mathcal{C}$ 限制在复化轨道 $\mathcal{D}$上时， J 是 $\mathcal{C}$ 的临界点，当且仅当它是 $\mathcal{C}$ 的局部极小值。
- $\mathcal{D}_J$ 中的 EAK 度量空间是一个子流形，其每个连通分支都是哈密顿群 Ham(M,ω) 的一个轨道。

注记 1.1。 由于定理 1中的（1.1），EAK 度量可能成为 $\mathcal{AC}_\omega$上的 Hermitian Calabi 泛函的鞍点。不过，这取决于算子 $2JP(JP)^*$和 $J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$的特征值。若确实如此，采用极小极大方法寻找该鞍点将会很有意思

$$\max_{\tilde{J}\in\mathcal{AC}_\omega} \min_{J\in\mathcal{D}_{\tilde{J}}} \mathcal{C}(J).$$

注 1.2。 当背景流形为 K¨ahler 流形时，借助 Moser 引理，可将一个复化轨道与一个 K¨ahler 类等同起来。因此，定理 1.1 中的（2）是 Calabi 的经典结果 [6, 定理 2]的推广。也就是说，在一个极值 K¨ahler 度量处，Calabi 泛函的 Hessian 是半正的。我们对定理 1.1 中（2）的证明，大量运用了 Gauduchon 的著作 [17], 中的重要结果；他使用 Mohsen公式刻画 EAK 条件，并作了极为详细的研究

，涉及 $\mathcal{AC}_\omega$ 以及 Hermitian Calabi 泛函。我们的定理 1.1 沿袭其工作，计算 Hermitian Calabi 泛函的 Hessian。

注 1.3。 在 [37], 王丽静给出了 Calabi 的结果的另一种证明 [6] ，该结果涉及 Calabi 泛函的 Hessian。她的方法基于一种具有动量映射的约化群作用，该作用作用于一张 K¨ahler 流形上。

注 1.4。 如果厄米特标量曲率度量 s^{∇}_J 的 J 为常数，Garc´ıa-Prada 和 Salamon （[15, 注 2。10], [14, 推论 1。12]）证明了 $\mathrm{Im}\, P \perp \mathrm{Im}\, JP$，因此 $T_J\mathcal{D}_J = \mathrm{Im}\, P \oplus \mathrm{Im}\, JP$。推论 1.2是他们在 EAK 情形下结果的推广。

注 1.5。 Calabi [6] 证明了，沿着横向于自同构群 Aut 的单位连通分支的方向，Calabi 泛函的 Hessian 严格为正$_0(M, J)$ 轨道。推论 1.3 是 Calabi 结果的一个类比，而在 K¨ahler 情形中，哈密顿群起到自同构群的作用。

在第5节中，我们研究厄米卡拉比流。厄米卡拉比流曾出现在卡拉比流的收敛问题[11, 25] 以及相邻常数标量曲率 K¨ahler 度量的唯一性 [7]中。

厄米卡拉比流是 Hermitian Calabi 泛函的负梯度流

$$\frac{d}{dt}J = \frac{1}{2}J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J.$$

或者，我们有 $\frac{d}{dt}J = JP(s^{\nabla}(J))$，这表明只要厄米卡拉比流 $J(t)$ 存在，它就会保持在分布 $\mathcal{D}$ 中。

定理 1.4. 厄米卡拉比流是一个四阶弱抛物型系统。对于任意 $\xi \in T^*M$，其线性化的主符号为

$$\hat{\sigma}_4(x,\xi)v = \frac{1}{2}(v,\Xi)\Xi,$$

其中 $\Xi \in T_J\mathcal{AC}_\omega$ 由 $\Xi = \xi^\sharp \otimes (J\xi) + (J\xi^\sharp) \otimes \xi$给出。

在附录A中，我们计算 Lichnerowicz 算子的显式表达式 $\mathbb{L}$，它出现在定理2中的（1.1）中。

定理 1.5. 在几乎 K ¨ahler 流形 (M, ω, J) 上，Lichnerowicz 算子具有如下显式表达式：

$$\mathbb{L}(f) = \frac{1}{2}\Delta^2 f - 2(\delta \mathrm{Ric}^+, df) + 2(\rho, dd^c f) + \delta\delta(\mathrm{D}^+ df - \mathrm{D}^- df) \tag{1.7}$$

对所有 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ 成立。其中， δ 是 Levi-Civita 联络 D 的形式伴随，而 $\mathrm{D}^\pm\alpha$ 是 Dα 的 J-不变（分别为 J-反不变）部分，即

$$\mathrm{D}^\pm\alpha(X,Y) = \frac{1}{2}[(\mathrm{D}_X\alpha)(Y) \pm (\mathrm{D}_{JX}\alpha)(JX)],$$

Ric^+ 是里奇曲率的 J-不变部分，且 $\rho(X,Y) = \mathrm{Ric}^+(JX, Y)$。

注记 1.6。 我们的结果（1.7）是定理 1.5 中对 Vernier 公式的进一步计算 [36, 方程 (11)], 其中 Lichnerowicz 算子是一个四阶椭圆算子加上一个误差项。我们将误差项明确地写出。

注记 1.7。在 K¨ahler 流形上，我们有

$$\mathrm{Ric} = \mathrm{Ric}^+, \quad \delta(\mathrm{D}^+ df - \mathrm{D}^- df)(X) = \mathrm{Ric}(\mathrm{grad} f, X).$$

因此，公式（1.7）变为

$$\mathbb{L}(f) = \frac{1}{2}\Delta^2 f - (\delta \mathrm{Ric}^+, df) + (\rho, dd^c f) = \frac{1}{2}\Delta^2 f + \frac{1}{2}(ds, df) + (\rho, dd^c f),$$

这恰好是 Gauduchon 的实 Lichnerowicz 算子 [17, 引理 1.23。5], 并且是 Calabi 的 Lichnerowicz 算子实部的两倍 [6, 定理 2], 的证明，另见 [33, 17]。

致谢。Jie He 感谢 Youde Wang 的帮助与支持。K. Zheng 的部分研究工作得到国家自然科学基金项目（批准号：12171365）的资助。

2. Preliminaries

本节将介绍近 K¨ahler 几何中的基本内容。从现在起，（M，ω）始终表示一个紧致辛流形。令 J 为一个 ω-相容的近复结构，且 g 为由（1.1）确定的黎曼度量。

我们选取 TM 的一个局部正交标架

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_m, Je_1 = e_{m+1}, Je_2 = e_{m+2}, \ldots, Je_m = e_n\} \tag{2.1}$$

及其对偶标架

$$\{e_1^*, e_2^*, \ldots, e_m^*, Je_1^* = e_{m+1}^*, Je_2^* = e_{m+2}^*, \ldots, Je_m^* = e_n^*\}$$

使得

$$\omega = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} e_i^* \wedge Je_i^*.$$

近复结构扩张到任意 p-形式 $\psi \in \Omega^p(M)$ 上，定义为

$$J\psi(X_1, \ldots, X_p) := \psi(J^{-1}X_1, \ldots, J^{-1}X_p),$$

对所有 $X_1, \ldots, X_p \in \Gamma(TM)$，其中 $J^{-1} := -J$。若 f 是函数，我们定义 $Jf := f$。

扭曲微分算子 d^c 和扭曲余微分算子 δ^c 的定义，是在广义几乎复结构 J下，将微分算子 d 和余微分算子 δ 作相应变换。

$$d^c := JdJ^{-1}, \quad \delta^c := J\delta J^{-1}.$$

我们用 h, i 表示 M 上任意 (p, q) 型张量的 L^2 内积，用 (,) 表示由 g 诱导的纤维上的内积，即

$$\langle S, T\rangle = \int_M (S, T)\mathrm{vol} = \int_M g(S, T)\mathrm{vol}, \quad \forall S, T \in (TM)^{\otimes p} \otimes (T^*M)^{\otimes q}.$$

记 D 为 g 的 Levi-Civita 联络，并记 δ 为其形式伴随算子。我们有（参见 [4, 1。55]），

$$\delta T = -\mathrm{tr}(\mathrm{D}T) = -\sum_{i}^{n} e_i \lrcorner \mathrm{D}_{e_i} T. \tag{2.2}$$

对于任意满足 $q \geq 1$ 的 (p,q) -张量 T 和 $(p,q-1)$ -张量 S，伴随性蕴含 es

$$\langle \delta T, S \rangle = \langle T, \mathrm{D}S \rangle. \tag{2.3}$$

对于任意 $J \in \mathcal{AC}_\omega$， J 的 Nijenhuis 张量 N 满足公式

$$N(X,Y) = \frac{1}{4}([JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] - [X,Y]).$$

根据其定义，我们有

$$N(JX,Y) = N(X,JY) = -JN(X,Y). \tag{2.4}$$

辛条件 $d\omega = 0$ 给出了 DJ 与 N之间的关系。

引理 2.1（[17, 引理 9.3。1],[20, 命题 4.2]）。在任意几乎 K ¨ahler 流形 (M,ω,J) 上，有

$$((\mathrm{D}_X J)Y, Z) = 2(JX, N(Y,Z)), \quad \forall X,Y,Z \in TM. \tag{2.5}$$

(2.4) 和 (2.5) 的一个直接推论如下。

推论 2.2. 设 (M,ω,J) 是一个近似 K ¨ahler 流形。我们有

$$\mathrm{D}_{JX} J = (\mathrm{D}_X J)J, \quad \forall X \in TM. \tag{2.6}$$

证明。 由相容条件和 (2.5) 可得

$$((\mathrm{D}_{JX} J)Y, Z) = 2(JJX, N(Y,Z)) = -2(JX, JN(Y,Z)).$$

由 (2.4) 和 (2.5) 可得

$$((\mathrm{D}_X J)JY, Z) = 2(JX, N(JY,Z)) = -2(JX, JN(Y,Z)).$$

因此，这两个恒等式确立了关系式 (2.6)。 □

推论 2.3。 设 $(M,\ \omega,\ J)$ 是一个近似 K ¨ahler 流形。成立 $\delta J = 0$，其中δ 是 D^* 的形式伴随算子，定义见 (2.2)。

证明。 由（2.6）可得

$$\delta J = -\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}_{e_i} J)e_i = -\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}_{Je_i} J)Je_i = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}_{e_i} J)e_i = -\delta J.$$

因此， $\delta J = 0$。 □

引理 2.4. 在近似 K ¨ähler 流形 (M,ω,J) 上，有

$$\delta d^c f = 0, \quad \forall f \in C^\infty(M).$$

证明. 借助 d^c 的定义，我们看到 $d^c f$ 是一个 1-形式。直接计算可得

$$\begin{aligned}\delta d^c f &= -\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{D}_{e_i} d^c f)(e_i) = \sum_{i=1}^{n} -\mathrm{D}_{e_i}(d^c f(e_i)) + d^c f(\mathrm{D}_{e_i} e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_{e_i}(df(Je_i)) - df(\sum_{i=1}^{n} J\mathrm{D}_{e_i} e_i).\end{aligned} \tag{2.7}$$

由推论2.3 可知

$$\delta J = -\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{D}_{e_i} J)(e_i) = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_{e_i}(Je_i) + \sum_{i=1}^{n} J\mathrm{D}_{e_i} e_i = 0,$$

i.e.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_{e_i}(Je_i) = \sum_{i=1}^{n} J\mathrm{D}_{e_i} e_i. \tag{2.8}$$

将 (2.8) 代入 (2.7可得

$$\delta d^c f = \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{D}_{e_i}(df(Je_i)) - df(\mathrm{D}_{e_i}(Je_i)) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess} f(e_i, Je_i).$$

记 $\mathrm{Hess} f(e_i, e_j) = \mathrm{Hess}^{ij}$, $Je_i = J_i^j e_j$。于是有 $\mathrm{Hess}^{ij} = \mathrm{Hess}^{ji}$, $J_i^j = -J_j^i$。因此得到

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess} f(e_i, Je_i) = \sum_{i,j} \mathrm{Hess}_{ij} J_i^j = -\sum_{i,j} \mathrm{Hess}_{ji} J_j^i = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess} f(e_i, Je_i),$$

即， $\delta d^c f = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Hess} f(e_i, Je_i) = 0$。 □

2.1. 哈密顿群。记 $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ 为 (M, ω) 的辛哈密顿群，且 $\mathfrak{ham}$ 为相应的李代数，则

$$\mathfrak{ham} = \{X \in \Gamma(TM) : \iota_X \omega \text{ is exact}\}.$$

撰写 g $\iota_X \omega = -df$，函数 f被称为关于 ω的 X动量，并且

$$X = \mathrm{grad}_\omega f := J\mathrm{grad} f,$$

其中 $\mathrm{grad} f$ 是 f的黎曼梯度。我们称 $\mathrm{grad}_\omega f$ 为 f的辛梯度。

一个哈密顿向量场有许多个动量函数，它们之间可能相差一个常数。如果我们约定动量函数的积分为 0，那么它就是唯一的。在相应的

$$X = \mathrm{grad}_\omega f \to f,$$

$\mathfrak{ham}$ 可识别为由零平均光滑函数组成的集合，记作$\mathfrak{ham}_\omega$,

$$\mathfrak{ham}_\omega = \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : \int_M f\omega^m = 0\} := C_0^\infty(M).$$

这种识别实际上是李代数的识别：如果我们在 $C_0^\infty(M,\mathbb{R})$ 上定义泊松括号

$$\{f,g\}=\omega(\mathrm{grad}_\omega f,\mathrm{grad}_\omega g)=\mathrm{grad}_\omega f(g)=-\mathrm{grad}_\omega g(f), \tag{2.9}$$

then

$$[\mathrm{grad}_\omega f,\mathrm{grad}_\omega g]=\mathrm{grad}_\omega\{f,g\}\to\{f,g\}.$$

其中 $[,]$ 是向量场的李括号。

定义 2.1. 在近似 K¨ahler 流形 (M,ω,J) 上，若实向量场X 满足

$$\mathcal{L}_X J=0.$$

实全纯向量场在向量场的李括号下构成一个李子代数。

2.2. 厄米标量曲率。 在近似 K¨ahler 流形 $(M,\ \omega,\ J)$ 上，厄米联络 ∇(参见[16]) 定义为

$$\nabla_X Y=\mathrm{D}_X Y-\frac{1}{2}J(\mathrm{D}_X J)Y.$$

当 (M,ω,J) 为 K¨ahler 时，D ∇ 彼此重合。

我们记 R 为列维-奇维塔曲率张量，记 R^∇ 为典范厄米曲率张量，即

$$R(X,Y)=\mathrm{D}_{[X,Y]}-[\mathrm{D}_X,\mathrm{D}_Y],\quad R^\nabla(X,Y)=\nabla_{[X,Y]}-[\nabla_X,\nabla_Y].$$

我们用 Ric 表示黎曼-里奇曲率，用 Ric^+ 表示 Ric 的 J-不变部分，

$$\mathrm{Ric}^+(X,Y)=\frac{1}{2}(\mathrm{Ric}(X,Y)+\mathrm{Ric}(JX,JY)). \tag{2.10}$$

Ric^+ 与 J 的相容性确定了一个 2-形式 ρ

$$\rho(X,Y)=\mathrm{Ric}^+(JX,Y). \tag{2.11}$$

我们通过按 ω收缩 R 来定义另一个 2-形式 ρ^* ,

$$\rho^*(X,Y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n g(R(X,Y)e_i,Je_i). \tag{2.12}$$

(0,2)-张量 Ric^+， ρ， ρ^* 将用于第 A 节中 Lichnerowicz 算子的计算。厄米-里奇形式是对 R^∇ 按 ω收缩所得，

$$\rho_J^\nabla(X,Y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n g(R^\nabla(X,Y)e_i,Je_i). \tag{2.13}$$

厄米标量曲率定义为

$$s_J^\nabla:=s^\nabla(J)=2(\rho_J^\nabla,\omega). \tag{2.14}$$

平均厄米标量曲率

$$\underline{s}^\nabla=\int_M s_J^\nabla\mathrm{vol}/\int_M\mathrm{vol}$$

是一个不依赖于 $J \in \mathcal{AC}_\omega$ 的拓扑常数。

我们将 $\mathbb{K}$ 记作厄米标量曲率的辛梯度，即

$$\mathbb{K} = \mathrm{grad}_\omega s_J^\nabla. \tag{2.15}$$

当 J 是 EAK 时， $\mathbb{K}$ 恰好是极值向量场（EVF）。一般而言，EVF 定义为 $\mathrm{grad}_\omega(\Pi_\omega s_J^\nabla)$，其中 Π 是 L^2中的 $\mathfrak{ham}_\omega$ -正交投影，并且$\Pi_\omega s_J^\nabla$ 与 J无关。EVF 最初由 Mabuchi 和 Futaki [13]在 K¨ahler 几何中引入。Lejmi [23, 在第 3 节中 2] 将这一概念推广到了广义 K¨ahler 流形。 $\mathbb{K}$ 在 Calabi 泛函的变分中非常重要。

2.3. $\mathcal{AC}_\omega$中的复化轨道。回顾一下， $\mathcal{AC}_\omega$ 由所有 ω-相容的近复结构组成，其切空间为

$$T_J\mathcal{AC}_\omega = \{v \in \mathrm{End}(TM) : vJ + Jv = 0, \omega(JX, vY) + \omega(vX, JY) = 0\}.$$

根据相容条件， $\omega(JX, vY) + \omega(vX, JY) = 0$等价于 $(X, vY) = (vX, Y)$，即 v是自伴的。因此，我们得到 $T_J\mathcal{AC}_\omega$的一个等价刻画，

$$T_J\mathcal{AC}_\omega = \{v \in \Gamma(\mathrm{End}(TM)) : vJ + Jv = 0,\ (vX, Y) = (X, vY)\}. \tag{2.16}$$

哈密顿群 $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ 在 $\mathcal{AC}_\omega$ 上有自然作用：

$$(\phi, J) \to \phi_* J \phi_*^{-1}, \quad \forall \phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega), \quad J \in \mathcal{AC}_\omega.$$

所得轨道 $\mathcal{O} = \{\phi_* J \phi_*^{-1}$ 的切空间为： $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)\}$ 经过 J 为

$$T_J\mathcal{O} = \{\mathcal{L}_X J : X \in \mathfrak{ham}\} = \{\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J : f \in C_0^\infty(M)\}.$$

引理 2.5. 对任意 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$,

$$\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J, \quad J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J \in T_J\mathcal{AC}_\omega.$$

证明。 由（2.16），我们需要证明 $\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J$、 $J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J$满足

(1) $vJ + Jv = 0$;
(2) $(vX, Y) = (X, vY), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM)$.

对等式两边取李导数 $J^2 = -1$ ，得到

$$\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}(J^2) = \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} JJ + J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J = 0,$$

即 $\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J$满足条件（1）。对于 $J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J$，我们计算得

$$J(J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J) = -J(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} JJ) = -(J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J)J,$$

即 $J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J$满足条件（1）。

对于第二个条件，由于 $\omega(J., .) = -g(., .)$ 和 $\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}\omega = 0$，我们有

$$(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} g)(X, Y) = -\omega(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} JX, Y) = -g(J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} JX, Y). \tag{2.17}$$

这 g是对称的，这意味着 $\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} g$也是对称的。因此， $J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J$是自伴的，并且 $J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J$满足条件（2）。对于 $\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J$，我们计算

$$\begin{aligned} g(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} JX, Y) &= g(J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} JX, JY) \\ &= g(X, J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} JJY) \\ &= g(X, \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} JY). \end{aligned}$$

□

根据在 $\mathcal{AC}_\omega$ 上的哈密顿作用，任意函数 $f \in C_0^\infty(M,\mathbb{R}) = \mathfrak{ham}_\omega$ 都会在 $T_J\mathcal{AC}_\omega$ 上诱导出一个切向量，定义如下：

$$f \to \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J.$$

李代数 $\mathfrak{ham}_\omega$ 通过使用 $C_0^\infty(M,\mathbb{C}) = \mathfrak{ham}_\omega + \sqrt{-1}\mathfrak{ham}_\omega$进行复化。复化李代数中的虚部 $\sqrt{-1}f$ 在$T_J\mathcal{AC}_\omega$中诱导出一个切向量

$$J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J.$$

根据引理 2.5，存在一个分布 D 定义在 $T\mathcal{AC}_\omega$ 上，定义为

$$D_J = \{\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J,\quad J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J : f \in \mathfrak{ham}_\omega\},$$

它可以看作由复化李代数诱导的分布 .

显然， D_J 是一个全纯分布，即

$$\mathbb{J} D_J = D_J.$$

1983年，Donaldson[9, Page 408] 首次观察到

引理 2.6. D_J 在 $\mathcal{AC}_\omega$上构成一个可积分布。

我们将由 D_J生成的积分子流形记为 $\mathcal{D}$ 。对于任意 $J \in \mathcal{AC}_\omega$，我们称 J经过的复化轨道为 $\mathcal{D}_J$ 。 $\mathcal{AC}_\omega$ 具有自然的叶状结构，其中$\mathcal{D}$ 为叶。

3. Operators

本节将介绍一些与 $\mathcal{AC}_\omega$相关的算子。

3.1. 算子 P 和 P^*。

定义 3.1. 算子 P: $C^\infty(M,\mathbb{R}) \to T_J\mathcal{AC}_\omega$ 定义如下：

$$P(f) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J.$$

注 3.1. 与 Donaldson 的原始定义相比（另见第 Page Page 页），我们在 的定义中加入了一个归一化因子。该归一化因子确保 以及下列相关运算都是其 Kähler 对应运算的自然推广。

实际上 $P(f) \in T_J\mathcal{O}$。我们定义 $JP = J \circ P$，然后

$$JP(f) = \frac{1}{2} J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J \in \mathbb{J}T_J\mathcal{O},$$

其中 $\mathbb{J}$ 定义于 (1.2) 中。因此我们有如下分解

$$T_J\mathcal{D}_J = T_J\mathcal{O} + \mathbb{J}T_J\mathcal{O} = \mathrm{Im}\, P + \mathrm{Im}\, JP.$$

定义 3.2. 我们将 P^*: $\Gamma(\mathrm{End}(TM)) \to C^\infty(M,\mathbb{R})$ 定义为 P 关于 L^2 积分的形式伴随算子。也就是说， P^* 满足

$$\langle P^*(v), f\rangle := \langle v, P(f)\rangle, \quad \forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R}), \quad v \in \Gamma(\mathrm{End}(TM)),$$

und关于由 g 在 $C^\infty(M,\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{End}(TM$ 上诱导的 M 上的 L^2-内积 $\mathrm{h}\cdot,\cdot\mathrm{i}$).

我们还定义 $(JP)^*$ 为 JP 的形式伴随，则根据定义，我们有

$$\langle (JP)^* v, f\rangle = \langle v, JPf\rangle = -\langle Jv, Pf\rangle = -\langle P^* Jv, f\rangle,$$

i.e.

$$(JP)^* = -P^* Jv. \tag{3.1}$$

以下引理对于描述 Hermitian Calabi 泛函的变分和动量映射十分重要。它包含在 [17,定理 9.6.1]的证明（9.6.5）中。我们在此列出并重新表述其证明。

引理 3.1. 对任意 $v \in T_J\mathcal{AC}_\omega$， 我们有

$$P^* v = \delta J(\delta J v)^\flat, \tag{3.2}$$

其中 δ 定义于（2.2）。

证明。对于任意向量场 X、Y 和辛向量场 Z，由相容条件 $g(X,Y) = \omega(X,JY)$ 以及 $\mathcal{L}_Z\omega = 0$ 可得

$$(\mathcal{L}_Z g)(X,Y) = (\mathcal{L}_Z\omega)(X,JY) + \omega(X,(\mathcal{L}_Z J)Y) = \omega(X,(\mathcal{L}_Z J)Y).$$

利用公式

$$(\mathcal{L}_Z g)(X,Y) = g(\mathrm{D}_X Z, Y) + g(X, \mathrm{D}_Y Z),$$

以及相容条件 $\omega(.,.) = g(J.,.)$，我们得到

$$g(\mathrm{D}_X Z, Y) + g(X, \mathrm{D}_Y Z) = g(JX, (\mathcal{L}_Z J)Y). \tag{3.3}$$

为了计算 $\langle v,\ P(f)\rangle$，我们像在（2.1）中那样选取一组正交归一基。令 $Z =$ 梯度 $_\omega f$， $Y = e_i$， $X = -Jv(e_i)$ 在（3.3）中，并计算

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J, v\rangle &= -\int_M \sum_{i=1}^n g((\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J)e_i, JJv(e_i)) \\
&= -\int_M \sum_{i=1}^n g(\mathrm{D}_{Jv(e_i)}\mathrm{grad}_\omega f, e_i) + g(Jv(e_i), \mathrm{D}_{e_i}\mathrm{grad}_\omega f) \\
&= -\int_M \mathrm{tr}(\mathrm{Dgrad}_\omega f \circ Jv) + g(Jv, \mathrm{Dgrad}_\omega f) \\
&= -\int_M \mathrm{tr}(Jv \circ \mathrm{Dgrad}_\omega f) + g(Jv, \mathrm{Dgrad}_\omega f).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

这里我们将 $\mathrm{Dgrad}_\omega f \in \mathrm{End}(TM)$ 视为 $X \to \mathrm{D}_X \mathrm{grad}_\omega f$。由于 $Jv \in T_J\mathcal{AC}_\omega$， Jv根据（2.16）是自伴的，并且

$$\mathrm{tr}(Jv \circ \mathrm{Dgrad}_\omega f) = \sum_{i=1}^n g(Jv\mathrm{D}_{e_i}\mathrm{grad}_\omega f, e_i) = \sum_{i=1}^n g(\mathrm{D}_{e_i}\mathrm{grad}_\omega f, Jve_i) = g(\mathrm{Dgrad}_\omega f, Jv).$$

由（3.4）可得

$$\langle \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J, v\rangle = -2\langle \mathrm{Dgrad}_\omega f, Jv\rangle. \tag{3.5}$$

接着我们计算

$$\begin{aligned}\langle Pf, v\rangle =& \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J, v\rangle = -\langle \mathrm{Dgrad}_\omega f, Jv\rangle = -\langle \mathrm{grad}_\omega f, \delta Jv\rangle \\ =& \langle df, J(\delta Jv)^\flat\rangle = \langle f, \delta J(\delta Jv)^\flat\rangle.\end{aligned}$$

取伴随算子后，我们得到 $P^*v = \delta J(\delta Jv)^\flat$。 □

我们引入 Mohsen公式 [31]（另请参见 [15, 定理 2。6]），

引理3.2（Moshsen公式）。对于任意 $v \in T_J\mathcal{AC}_\omega$ 以及任意满足 $J(0) = J$、$J'(0) = v$ 的曲线 $J(t) \in \mathcal{AC}_\omega$，厄米里奇形式和厄米标量曲率的一阶变分为

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\rho^\nabla_{J(t)} = -\frac{1}{2}d(\delta v)^\flat, \quad \frac{d}{dt}|_{t=0}s^\nabla_{J(t)} = -\delta J(\delta v)^\flat. \tag{3.6}$$

若将厄米标量曲率视为定义在 $\mathcal{AC}_\omega$ 上的泛函，结合引理 3.2和引理3.1 可得

$$Ds^\nabla_J(v) = P^*Jv = -(JP)^*v. \tag{3.7}$$

我们可以立即得到 EAK 条件的描述，即 Hermitian Calabi 泛函的欧拉-拉格朗日方程

$$\mathcal{C}(J) = \int_M (s^\nabla(J))^2 \mathrm{vol}.$$

推论 3.3 ([2, 17])。 $J \in \mathcal{AC}_\omega$ 是 EAK 当且仅当 $\mathbb{K} =$ 梯度$_\omega s^\nabla_J$ 是一个实全纯向量场。

证明。 由（3.7）可得

$$D\mathcal{C}(v) = -2\langle (JP)^*v, s^\nabla\rangle = -2\langle v, JP(s^\nabla)\rangle = -\langle v, J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J\rangle. \tag{3.8}$$

因此 $J \in \mathcal{AC}_\omega$ 是 $\mathcal{C}$ 的临界点，当且仅当 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J = 0$，即 $\mathrm{grad}_\omega s^\nabla$ 是一个全纯向量场。 □

现在我们可以看到，（3.7）给出了 Donaldson 的著名结果：厄米标量曲率是一个动量映射 $\mu: \mathcal{AC}_\omega \to \mathfrak{ham}^*_\omega$ 关于 $\mathcal{AC}_\omega$ 上的哈密顿作用，其通过 L^2-乘积

$$\mu(J)(f) = \int_M f(s^\nabla_J - \bar{s}^\nabla)\mathrm{vol}, \quad \forall f \in \mathfrak{ham}_\omega.$$

对于任意 $f \in \mathfrak{ham}$， $T_J\mathcal{AC}_\omega$上诱导的向量为 $\rho(f) = \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}J$我们只需证明

$$d\mu(J)(f)(v) = -\iota_{\rho(f)}\boldsymbol{\kappa}(v), \forall v \in T_J\mathcal{AC}_\omega,$$

其中， $\boldsymbol{\kappa}(u, v)$ 是由下式定义的 K¨ahler 流形 $\mathcal{AC}_\omega$ 的 K¨ahler 形式:

$$\boldsymbol{\kappa}(u, v) = \int_M \mathrm{tr}(Juv) = \langle Ju, v\rangle.$$

我们进一步利用（3.7）进行计算，得到

$$d\mu(J)(f)(v) = \int_M f(Ds^{\nabla}(v)) = -\int_M f(JP)^* v = -\langle JP(f), v\rangle = -\iota_{\rho(f)}\boldsymbol{\kappa}(v).$$

3.2. Lichnerowicz 算子 $\mathbb{L}$。 Lichnerowicz 算子是在 K¨ahler 流形上定义的四阶椭圆算子。它由 Lichnerowicz 于 1958年首次引入[26,第五章]。后来在 1985，Calabi([6]) 使用了 Lichnerowicz 算子的复版本，Gauduchon 在 [17, 第 4 节5] , 中称之为 Calabi 算子，用于计算 Calabi 泛函的变分。Gauduchon 在其著作 [17]中对 Lichnerowicz 算子作了非常详尽、全面的介绍。本节将这一记法推广到几乎 K¨ahler 流形。

定义 3.3。在几乎 K¨ahler 流形 (M, ω, J) 上，广义 Lichnerow- icz 算子 $\mathbb{L}$: $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ 定义为

$$\mathbb{L}(f) = P^* P(f), \quad f \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

注记 3.2。 由引理 3.1，我们知道 $\mathbb{L} = \frac{1}{2}\delta J(\delta J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J)^\flat$。Vernier 最先研究了这个公式 [36], ，他计算了 $\mathbb{L}$ 的主项，并证明了$\mathbb{L}$ 是一个四阶椭圆算子。

由于 M 上的黎曼度量是 J 不变的，我们有

$$\langle \mathbb{L}(f_1), f_2\rangle = \langle P(f_1), P(f_2)\rangle = \langle JP(f_1), JP(f_2)\rangle, \quad \forall f_1, f_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

因此， $\mathbb{L}$ 有一个等价表达式:

$$\mathbb{L} = (JP)^* JP.$$

它的表达式表明 $\mathbb{L}$ 是一个自伴半正算子，我们将在 A 节中看到 Lichnerowicz 算子的显式表达式。根据定义 3.3，我们对 $\mathbb{L}$的核有如下描述。

命题 3.4. 设 (M, ω, J) 是一个近 K¨ahler 流形，则 $\mathbb{L}(f) = 0$当且仅当$\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J = 0$, 即辛梯度 $\mathrm{grad}_\omega f$ 是全纯的。

事实上，定义 3.3 是 K¨ahler 情形下 Lichnerowicz 算子的自然推广。

命题 3.5。 当 (M, ω, J, g) 是 K¨ahler 流形时，定义 *3.3*与定义一致

$$\mathbb{L} = (\mathrm{D}^- d)^* \mathrm{D}^- d$$

在 K¨ahler 情形下，其中 $\mathrm{D}^-\alpha(X, Y) = \frac{1}{2}[(D_X\alpha)Y - (D_{JX}\alpha)(JY)], \forall \alpha \in \Omega^1(M)$ 是 $\mathrm{D}\alpha$ 的 J 反不变部分。

证明。 根据（[17],引理 1.23.2），有

$$\mathrm{D}^- df(X, Y) = -\frac{1}{2} g((J\mathcal{L}_{\mathrm{grad} f} J)X, Y), \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM). \tag{3.9}$$

K¨ahler 条件给出

$$\mathcal{L}_{J\mathrm{grad} f} J - J\mathcal{L}_{\mathrm{grad} f} J = 4N(\mathrm{grad} f,) = 0.$$

因此我们有

$$\mathrm{D}^{-}df(X,Y) = -\frac{1}{2}g((\mathcal{L}_{J\mathrm{grad}f}J)X,Y) = -\frac{1}{2}g((\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}J)X,Y). \tag{3.10}$$

由（3.10）可知

$$\langle \mathrm{D}^{-}df_1, \mathrm{D}^{-}df_2\rangle = \frac{1}{4}\langle \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f_1}J, \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f_2}J\rangle = \langle P(f_1), P(f_2)\rangle.$$

取伴随算子可得

$$\langle (\mathrm{D}^{-}d)^{*}\mathrm{D}^{-}df_1, f_2\rangle = \langle \mathbb{L}(f_1), f_2\rangle,$$

即 $\mathbb{L} = (\mathrm{D}^{-}d)^{*}\mathrm{D}^{-}d$。 □

3.3. 算子 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$。与 Lichnerowicz 算子相关的另一个重要算子是沿 $\mathbb{K}$ 的李导数。

定义 3.4. 对于 M 上的任意张量场 T，我们定义沿 $\mathbb{K}$ 的李导数算子 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$，即 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$：$T \to \mathcal{L}_{\mathbb{K}}T$。

最重要的情形是 $T \in T_J\mathcal{AC}_\omega$，且 T 是一个函数。当 $T = f$ 是一个函数时，我们有

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f = (d^c s^{\nabla}, df) = \{s^{\nabla}, f\}.$$

为了进一步描述 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ 作用于函数的情形，我们考虑扭曲 Lichnerowicz 算子 $(JP)^{*}P$。

事实上，我们看到$JP)^{*}P$是作用于函数的反自伴算子。证明只需直接计算。由（3.1）可得

$$(JP)^{*}P(f) = -P^{*}JP(f) = -[(JP)^{*}P]^{*}(f).$$

根据定义，$(JP)^{*}P$似乎是一个四阶算子。然而，它是算子 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$的一半。为证明这一事实，我们需要 Garc´ıa-Prada 和 Salamon 的一个引理。

引理 3.6 （[15, 注 2。10]）。对于一个闭的连通辛 $2m$-流形（M，ω）、一个近复结构 $J \in \mathcal{AC}_\omega$以及两个哈密顿动量函数 f，g： $M \to \mathbb{R}$ 我们有

$$\langle P(f_1), JP(f_2)\rangle = \frac{1}{2}\langle s^{\nabla}, \{f_1, f_2\}\rangle. \tag{3.11}$$

命题 3.7。设（M，ω，J）是一个近 K ¨ahler 流形，则对任意 f，我们有

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f) = 2(JP)^{*}P(f) = -2P^{*}JP(f) = -\mathcal{L}^{*}_{\mathbb{K}}(f). \tag{3.12}$$

特别地，$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ 是反自伴的。

证明。首先我们看到

$$\langle s^{\nabla}, \{f_1, f_2\}\rangle = \langle s^{\nabla}, (d^c f_1, df_2)\rangle = \langle s^{\nabla} d^c f_1, df_2\rangle = \langle \delta(s^{\nabla} d^c f_1), f_2\rangle.$$

利用 $\delta d^c f_1 = 0$ 引理 2.4，得到

$$\delta(s^{\nabla} d^c f_1) = -(ds^{\nabla}, d^c f_1) + s^{\nabla}\delta d^c f_1 = (d^c s^{\nabla}, df_1) = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}f_1. \tag{3.13}$$

因此我们有

$$\langle s^{\nabla}, \{f_1, f_2\}\rangle = \langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}} f_1, f_2\rangle.$$

由（3.11）可得 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}} = 2\,(JP)\,{}^{*}P = -2P^{*}JP$。 □

注 3.3。 当（M， ω， J）为 K¨ahler 时，Gauduchon（[17, 引理 1.23。5]）证明了

$$2\delta\delta \mathrm{D}^{-} d^{c} f = -\mathcal{L}_{\mathbb{K}} f,$$

其中 δ 算子是 D 的形式伴随算子，正如我们在（2.2）中定义的那样；经过两次连续的 δ 运算后， (0,2)-张量 $\mathrm{D}^{-} d^{c} f$ 变为一个函数。

事实上，命题 3.7 是 Gauduchon 关于几乎 K¨ahler 流形结果的推广。根据定义，它成立

$$\langle \delta\delta \mathrm{D}^{-} d^{c} f_1, f_2\rangle = \langle \delta \mathrm{D}^{-} d^{c} f_1, df_2\rangle = \langle \mathrm{D}^{-} d^{c} f_1, \mathrm{D} df_2\rangle.$$

由于 $\mathrm{D} df_2 = \mathrm{D}^{-} df_2 + \mathrm{D}^{+} df_2$ 且 $\mathrm{hD}^{-} d^{c} f_1,\ \mathrm{D}^{+} df_2\mathrm{i} = 0$，我们有

$$\langle \delta\delta \mathrm{D}^{-} d^{c} f_1, f_2\rangle = \langle \mathrm{D}^{-} d^{c} f_1, \mathrm{D}^{-} df_2\rangle = \langle J\mathrm{D}^{-} df_1, \mathrm{D}^{-} df_2\rangle.$$

由（3.10）可知

$$\langle J\mathrm{D}^{-} df_1, \mathrm{D}^{-} df_2\rangle = \langle JP(f_1), P(f_2)\rangle.$$

因此，$(JP)^{*}P$的反自伴性导致

$$\langle \delta\delta \mathrm{D}^{-} d^{c} f_1, f_2\rangle = \langle P^{*}JP(f_1), f_2\rangle = -\langle (JP)^{*}P(f_1), f_2\rangle.$$

现在我们研究 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ 在 $T_J\mathcal{AC}_{\omega}$上的作用。

引理 3.8. 当作用于 $T_J\mathcal{AC}_{\omega}$时， $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ 是一个反自伴算子。

证明。 由（2.16），我们知道任意 $u \in T_J\mathcal{AC}_{\omega}$ 都是对称的。上的度量$T_J\mathcal{AC}_{\omega}$ 也可以写成（另见 [17, (9.2.10)]）

$$\langle u, v\rangle = \int_M \mathrm{tr}(uv)\mathrm{vol},$$

其中， $uv = u \circ v$表示 u、 $v \in \mathrm{End}(TM)$ 的复合，tr 表示迹运算。由于迹运算与李导数可交换（例如，见 [32,练习 2.5。10]），我们有

$$\langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}} u, v\rangle = \int_M \mathrm{tr}((\mathcal{L}_{\mathbb{K}} u)v) = \int_M \mathrm{tr}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(uv) - u\mathcal{L}_{\mathbb{K}} v) = \int_M \mathcal{L}_{\mathbb{K}}\mathrm{tr}(uv) - \mathrm{tr}(u\mathcal{L}_{\mathbb{K}} v).$$

但是引理 2.4 表明 $\delta d^{c} s^{\nabla} = 0$，我们有

$$\int_M \mathcal{L}_{\mathbb{K}}\mathrm{tr}(uv) = \langle d^{c} s^{\nabla}, d(\mathrm{tr}(uv))\rangle = \int_M -\delta(d^{c} s^{\nabla}\mathrm{tr}(uv)) = 0.$$

我们得到

$$\langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}} u, v\rangle = \int_M -\mathrm{tr}(u\mathcal{L}_{\mathbb{K}} v) = -\langle u, \mathcal{L}_{\mathbb{K}} v\rangle.$$

因此 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ 是反自伴的。

□

若 J 是 EAK，则算子 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ 具有以下交换关系。

引理 3.9. 若 J是 EAK，则 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$与 P、 P^*、 JP、$(JP)^*$、$\mathbb{L}$交换。

证明。由于 J 是 EAK，我们有 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J=0$，这意味着

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(P(f))=\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}J=\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}-\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}\mathcal{L}_{\mathbb{K}})J=\frac{1}{2}\mathcal{L}_{[\mathbb{K},\mathrm{grad}_\omega f]}J. \tag{3.14}$$

泊松括号满足

$$[\mathbb{K},\mathrm{grad}_\omega f]=[\mathrm{grad}_\omega s_J^\nabla,\mathrm{grad}_\omega f]=\mathrm{grad}_\omega\{s_J^\nabla,f\}=\mathrm{grad}_\omega\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f. \tag{3.15}$$

结合（3.14）和（3.15），我们得到

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}P(f)=P\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f). \tag{3.16}$$

由（3.16）和引理 3.8 可知

$$\langle f,\mathcal{L}_{\mathbb{K}}P^*v\rangle=-\langle P\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f,v\rangle=-\langle\mathcal{L}_{\mathbb{K}}Pf,v\rangle=\langle Pf,\mathcal{L}_{\mathbb{K}}v\rangle=\langle f,P^*\mathcal{L}_{\mathbb{K}}v\rangle,$$

对于任意 $v\in$端omorphism(TM) $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，即

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}P^*=P^*\mathcal{L}_{\mathbb{K}}. \tag{3.17}$$

由于

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(JP(f))=(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J)P(f)+J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}P(f),$$

利用 EAK 条件 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J=0$ 和（3.16），我们得到

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}JP(f)=JP(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f). \tag{3.18}$$

应用引理 3.8 和（3.18），我们得到

$$\langle f,\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(JP)^*v\rangle=-\langle JP\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f,v\rangle=-\langle\mathcal{L}_{\mathbb{K}}JPf,v\rangle=\langle JPf,\mathcal{L}_{\mathbb{K}}v\rangle=\langle f,(JP)^*\mathcal{L}_{\mathbb{K}}v\rangle,$$

i.e.

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(JP)^*=(JP)^*\mathcal{L}_{\mathbb{K}}. \tag{3.19}$$

由于 $\mathbb{L}=PP^*$，由（3.16）和（3.17）可知 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$与 $\mathbb{L}$可交换。证明完毕。□

引理 3.10. 当 J为 EAK 时，算子 $J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$在 $T_J\mathcal{AC}_\omega$上是自伴的，并且在 Im P和 Im JP上是半正的。

证明。 根据引理 3.8 和 EAK 条件 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J=0$，有

$$\langle J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}u,v\rangle=-\langle\mathcal{L}_{\mathbb{K}}u,Jv\rangle=\langle u,\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(Jv)\rangle=\langle u,J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}v\rangle,$$

即 $J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$是自伴的。任取 $v=P(\phi)\in$虚部 P，命题 3.7 以及引理3.9 中的交换关系给出

$$\langle J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}v,v\rangle=\langle J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(P(\phi),P(\phi)\rangle=\langle JP\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\phi,P(\phi)\rangle=\frac{1}{2}\langle\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\phi,\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\phi\rangle\geq 0.$$

取 $v=JP(\phi)$，我们得出

$$\langle J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}v,v\rangle=\langle J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(JP(\phi)),JP(\phi)\rangle=-\langle P\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\phi,JP(\phi)\rangle=\frac{1}{2}\langle\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\phi,\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\phi\rangle\geq 0.$$

□

3.4. Calabi 算子 $\mathbb{L}^{\pm}$。考虑 P 的 (0, 1) 部分和 (1, 0) 部分,

$$P^+ = \frac{1}{2}(P - iJP), \quad P^- = \frac{1}{2}(P + iJP), \tag{3.20}$$

我们可以在近复 K¨ahler 流形上定义 Calabi 算子。

定义 3.5. 在近复 K¨ahler 流形 (M, ω, J) 上，Calabi 算子定义为

$$\mathbb{L}^+(f) = 2(P^+)^* P^+ f, \quad \mathbb{L}^-(f) = 2(P^-)^* P^- f.$$

若将 P 和 P^* 扩展到 M 上的复函数空间，并考虑 $C^\infty(M, \mathbb{C})$ 和 $T_J\mathcal{AC}_\omega \otimes \mathbb{C}$ 上的 Hermitian L^2 内积，则 $\mathbb{L}^{\pm}$ 都是自伴半正算子。

命题 3.11. 根据 $\mathbb{L}$ 和 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ 的定义，我们得到 Calabi 算子的等价表达式

$$\mathbb{L}^+ = \mathbb{L} + \frac{i}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}, \quad \mathbb{L}^- = \mathbb{L} - \frac{i}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}. \tag{3.21}$$

证明. 直接计算可得

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}^+(f) =& 2(P^+)^* P^+(f) \\
=& \frac{1}{2}(P^* + i(JP)^*)(P - iJP) \\
=& \frac{1}{2}[P^*P + (JP)^*JP + i(JP)^*P - iP^*JP] \\
=& \mathbb{L} + \frac{i}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}.
\end{aligned}$$

同样，我们可以得到 $\mathbb{L}^-$ 的表达式。 □

注3.4。 在 K¨ahler 情形下，最常用的 Lichnerowicz 算子版本（[6, 方程（1.2）], [21, 推论 1]）为

$$\psi \to (\overline{\partial}\partial^\sharp)^*(\overline{\partial}\partial^\sharp)\psi, \tag{3.22}$$

其中 $\partial^\sharp\psi = (\overline{\partial}\psi)^\sharp$。事实上，$(\overline{\partial}\partial^\sharp)^*(\overline{\partial}\partial^\sharp)$ 是 $\mathbb{L}^+$ 的一半。由于 $\mathrm{D}^{0,1}(\bar{\partial}\psi) \in \Omega^{0,1}(M) \otimes \Omega^{0,1}(M)$，我们有

$$\mathrm{D}^{0,1}(\bar{\partial}\psi) = \mathrm{D}^-\bar{\partial}\psi.$$

K¨ahler 条件意味着 $\mathrm{D}g = \mathrm{D}J = 0$。因此 $\mathrm{D}^{1,0}$ 与降阶算子可交换，且

$$\begin{aligned}
\langle\bar{\partial}(\partial^\sharp\psi_1), \bar{\partial}(\partial^\sharp\psi_2)\rangle =& \langle\mathrm{D}^{0,1}(\partial^\sharp\psi_1), \mathrm{D}^{0,1}(\partial^\sharp\psi_2)\rangle \\
=& \langle\mathrm{D}^{0,1}(\bar{\partial}\psi_1), \mathrm{D}^{0,1}(\bar{\partial}\psi_2)\rangle \\
=& \langle\mathrm{D}^-(\bar{\partial}\psi_1), \mathrm{D}^-(\bar{\partial}\psi_2)\rangle.
\end{aligned}$$

根据关系式

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}(d - id^c),$$

和命题3.5，注记3.3，我们有

$$\begin{aligned}\langle\bar{\partial}(\partial^\sharp\psi_1),\bar{\partial}(\partial^\sharp\psi_2)\rangle =&\frac{1}{4}\langle \mathrm{D}^-d\psi_1-i\mathrm{D}^-d^c\psi_1,\mathrm{D}^-d\psi_2-i\mathrm{D}^-d^c\psi_2\rangle\\ =&\frac{1}{2}(\langle \mathrm{D}^-d\psi_1,\mathrm{D}^-d\psi_2\rangle-i\langle \mathrm{D}^-d^c\psi_1,\mathrm{D}^-d\psi_2\rangle)\\ =&\frac{1}{2}(\langle \mathbb{L}\psi_1,\psi_2\rangle-i\langle\frac{\mathcal{L}_{\mathbb{K}}}{2}\psi_1,\psi_2\rangle),\end{aligned}$$

i.e.

$$(\overline{\partial}\partial^\sharp)^*(\overline{\partial}\partial^\sharp)=\frac{1}{2}(\mathbb{L}-\frac{i}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}).$$

命题 3.12. 对任意 $F=\varphi+i\phi\in C^\infty(M,\mathbb{C})$，有 $F\in\ker\mathbb{L}^+$ 当且仅当

$$\mathbb{L}\varphi-\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\phi=0,\quad \mathbb{L}\phi+\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\varphi=0.$$

并且 $F\in\ker\mathbb{L}^-$ 当且仅当

$$\mathbb{L}\varphi+\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\phi=0,\quad \mathbb{L}\phi-\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\varphi=0.$$

特别地，如果 $F=\varphi\in C^\infty(M,\mathbb{R})$，那么 $F\in\ker\mathbb{L}^+$ 当且仅当 $\mathbb{L}(\varphi)=\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\varphi)=0$ 当且仅当$P(\varphi)=0$。对于 $\varphi\in\ker\mathbb{L}^-$，同样的结论也成立。

证明。对于 $F=\varphi+\sqrt{-1}\phi\in C^\infty(M,\mathbb{C})$，我们计算

$$\begin{aligned}\mathbb{L}^+(F)=&\mathbb{L}(\varphi+i\phi)+\frac{i}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\varphi+i\phi)\\ =&\mathbb{L}(\varphi)-\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\phi)+i(\mathbb{L}(\phi)+\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\varphi)).\end{aligned}$$

因此 $\mathbb{L}^+(F)=0$ 当且仅当

$$\mathbb{L}\varphi-\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\phi=0,\quad \mathbb{L}\phi+\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\varphi=0.$$

若 $F=\varphi$，即 $\phi=0$，则 $\mathbb{L}^+(F)=0$ 当且仅当

$$\mathbb{L}(\varphi)=\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\varphi)=0.$$

此处 $\mathbb{L}(\varphi)=0$ 蕴含 $P(\varphi)=0$，而这又蕴含 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\varphi)=0$，因为 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\varphi)=2(JP)^*P(\varphi)$。□

注 3.5. 当背景流形为 K¨ahler 时，$F=\varphi+i\phi\in\ker\mathbb{L}^+$ 蕴含

$$\mathrm{grad}\varphi+J\mathrm{grad}\phi$$

是全纯的（见 [17, 第 2 节。5]）。在 K¨ahler 情形下，若记 $\mathfrak{h}_{\mathrm{red}}$ 为零点集非空的实全纯向量场集合，则任意实向量场$X\in\mathfrak{h}_{\mathrm{red}}$ 当且仅当存在 $F=\varphi+i\phi\in\ker\mathbb{L}^+$ 使得（[27, 截面95]）

$$X=\mathrm{grad}\varphi+J\mathrm{grad}\phi.$$

当 J 为 EAK 时，Calabi 算子满足以下交换关系。

引理 3.13. 若 J 为 EAK，则 $\mathbb{L}^+$与$\mathbb{L}^-$ 可交换。复合算子 $\mathbb{L}^+\mathbb{L}^-$ 是自伴且半正的，并且有

$$\ker(\mathbb{L}^+\mathbb{L}^-) = \ker \mathbb{L}^+ + \ker \mathbb{L}^-.$$

证明。 由于 J 是 EAK，引理 3.9 表明 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\mathbb{L} = \mathbb{L}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$。由命题 3.11 可知 $\mathbb{L}^+\mathbb{L}^- = \mathbb{L}^-\mathbb{L}^+$。由于 $\mathbb{L}^+$、$\mathbb{L}^-$ 均为半正且自伴算子，根据交换性，$\mathbb{L}^+\mathbb{L}^-$ 也为半正且自伴算子。应用 L^2-分解定理，可得

$$C^\infty(M,\mathbb{C}) = \ker \mathbb{L}^\pm \oplus \operatorname{Im} \mathbb{L}^\pm,$$

并且 $\mathbb{L}^\pm$: $\operatorname{Im}\mathbb{L}^\pm \to \operatorname{Im}\ \mathbb{L}^\pm$ 是同构。因此我们有

$$\ker(\mathbb{L}^+\mathbb{L}^-) = \ker \mathbb{L}^- + \operatorname{Im}\mathbb{L}^- \cap \ker \mathbb{L}^+ \subset \ker \mathbb{L}^- + \ker \mathbb{L}^+.$$

但由于 $\mathbb{L}^+$、$\mathbb{L}^-$的交换性，$\ker\ \mathbb{L}^-$+$\ker\ \mathbb{L}^+ \subset \ker(\mathbb{L}^+\mathbb{L}^-)$ 显然成立。 □

3.5. $C^\infty(M,\mathbb{R})$ 与 $T_J\mathcal{AC}_\omega$ 的分解。

引理 3.14. 函数空间 $C^\infty(M,\mathbb{R})$ 具有如下正交分解

$$C^\infty(M,\mathbb{R}) = \ker P \oplus \operatorname{Im} P^* = \ker JP \oplus \operatorname{Im}(JP)^*$$

且 $\mathbb{L}$: $\operatorname{Im}\ P^* \to \operatorname{Im}\ P^*$ 是一个同构。

证明。 由于 Lichnerowicz 算子 $\mathbb{L}$ 是一个椭圆算子（见 [36, 方程 (11)]），且是自伴算子，椭圆算子的分解定理告诉我们

$$C^\infty(M,\mathbb{R}) = \operatorname{Im}\mathbb{L} \oplus \ker \mathbb{L},$$

且 $\mathbb{L} = P^*P$: $\operatorname{Im}\ \mathbb{L} \to \operatorname{Im}\ \mathbb{L}$ 是一个同构。由于 $\ker\ \mathbb{L} = \ker\ P$，$\operatorname{Im}\ \mathbb{L}$ =$(\ker\ P^*P)^\perp$ =$(\ker\ P)^\perp$ =$\operatorname{Im}\ P^*$，分解变为

$$C^\infty(M,\mathbb{R}) = \ker P \oplus \operatorname{Im} P^*.$$

同构 $\mathbb{L} = P^*P$: $\operatorname{Im}\ \mathbb{L} \to \operatorname{Im}\ \mathbb{L}$ 可分解为

$$\operatorname{Im}\mathbb{L} = \operatorname{Im} P^* \xrightarrow[\cong]{P} \operatorname{Im} P \xrightarrow[\cong]{P^*} \operatorname{Im} P^* = \operatorname{Im}\mathbb{L}.$$

类似地，若考虑 $\mathbb{L} = (JP)^*JP$，则可得到相对于 JP 和 $(JP)^*$ 的分解。□

引理 3.15. 切空间 $T_J\mathcal{AC}_\omega$ 有如下分解:

$$T_J\mathcal{AC}_\omega = \operatorname{Im} P \oplus \ker P^* = \operatorname{Im} JP \oplus \ker(JP)^*, \tag{3.23}$$

and

$$T_J\mathcal{AC}_\omega = T_J\mathcal{D} \oplus (\ker P^* \cap \ker(JP)^*). \tag{3.24}$$

映射 PP^*: $\operatorname{Im}\ P \to \operatorname{Im}\ P$是一个同构。

证明。由于 $(\mathrm{Im}\ P)^{\perp} = \ker\ P^*$，我们有

$$T_J\mathcal{AC}_\omega = \mathrm{Im}\, P \oplus (\mathrm{Im}\, P)^{\perp} = \mathrm{Im}\, P \oplus \ker P^*.$$

根据引理 3.14，我们知道 $PP^*{:}\mathrm{Im}\ P \to \mathrm{Im}\ P$是一个同构，并且

$$\mathrm{Im}\, P \xrightarrow[\cong]{P^*} \mathrm{Im}\, P^* \xrightarrow[\cong]{P} \mathrm{Im}\, P = \mathrm{Im}\, PP^*.$$

类似地，我们可以得到 $T_J\mathcal{AC}_\omega = \mathrm{Im}\ JP \oplus \ker(JP)^*$，且 $JP(JP)^*{:}\mathrm{Im}\ JP \to \mathrm{Im}\ JP$ 是一个同构。因此，(3.24) 可由以下事实推出 $T_J\mathcal{D} = \mathrm{Im}\ P + \mathrm{Im}\ JP$。

□

根据引理 $T_J\mathcal{AC}_\omega$ 3.15 中 的分解，我们讨论 Hermitian Calabi 泛函在不同方向上的变分。

引理 3.16. 在推论 *3.3*中沿不同方向取变分，可得

(1) *If* $v \in \ker(JP)^*$, $D\mathcal{C}(v) = 0, \quad Ds^{\nabla}(v) = 0.$
(2) *If* $v \in \mathrm{Im}\, JP$, $v = JP(f), \quad D\mathcal{C}(v) = -2\langle f, \mathbb{L}(s^{\nabla})\rangle, \quad Ds^{\nabla}(v) = -\mathbb{L}(f).$
(3) *If* $v \in \mathrm{Im}\, P$, $v = P(f), \quad D\mathcal{C}(v) = 0, \quad Ds^{\nabla}(v) = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f).$

证明。 以上结论均直接由引理 3.15 推出，

(1) 对任意 $v \in \ker(JP)^*$，由 (3.7) 立即可得

$$D\mathcal{C}(v) = -2\langle (JP)^* v, s^{\nabla}\rangle = 0.$$

(2) 若我们选取 $v = JP(f) \in \mathrm{Im}\ JP$对某个 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$，由 (3.7) 可得

$$Ds^{\nabla}(JP(f)) = -(JP)^* JPf = -\mathbb{L}(f), \tag{3.25}$$

并且由 (3.8),

$$D\mathcal{C}(JP(f)) = -\langle JP(f), J\mathcal{L}_{\mathbb{K}} J\rangle = -2\langle JP(f), JP(s^{\nabla})\rangle = -2\langle f, \mathbb{L}(s^{\nabla})\rangle. \tag{3.26}$$

（3）若我们选取 $v = P(f) \in \mathrm{Im}(P)$，其中 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$，则

$$Ds^{\nabla}(P(f)) = -(JP)^* Pf = -\frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}} f. \tag{3.27}$$

由于

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}} s^{\nabla} = (d^c s^{\nabla}, ds^{\nabla}) = (Jds^{\nabla}, ds^{\nabla}) = -(ds^{\nabla}, Jds^{\nabla}) = 0,$$

我们得到

$$D\mathcal{C}(P(f)) = -\langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}} f, s^{\nabla}\rangle = \langle f, \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(s^{\nabla})\rangle = 0. \tag{3.28}$$

□

4. Hessian of the Hermitian Calabi functional

在本节中，我们研究 Hermitian Calabi 泛函的二阶变分 .

4.1. 证明 (1) 和(3) 定理 **1.1**中的证明。

定理 **4.1.** 对任意 $J \in \mathcal{AC}_\omega$和 $u, v \in T_J\mathcal{AC}_\omega$，我们选择满足$J(0,0) = J, J'_{t_1}(0,0) = u, J'_{t_2}(0,0) = v$的 $J(t_1,t_2)$。那么

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u,v) = -\langle \frac{\partial^2 J}{\partial t_1 \partial t_2}|_{(0,0)}, J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J\rangle + 2\langle (JP)^* u, (JP)^* v\rangle - \langle u, v\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J + J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}v\rangle.$$

特别地,

(1) 假设 J 是 EAK，则

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u,v) = 2\langle (JP)^* u, (JP)^* v\rangle - \langle J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}u, v\rangle. \tag{4.1}$$

(2) 假设 J 具有常 Hermitian 标量曲率，则

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u,v) = 2\langle (JP)^* u, (JP)^* v\rangle. \tag{4.2}$$

$\mathrm{Hess}\mathcal{C}$在 $T_J\mathcal{AC}_\omega$上是半正的，并且 $\mathrm{Hess}\mathcal{C}(v,v) = 0$当且仅当 $v \in \ker(JP)^*$。

证明。 对（3.8）求导得

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u,v) =& -\frac{\partial}{\partial t_2}|_{(0,0)}\langle J'_{t_1}(t_1,t_2), J(t_1,t_2)\mathcal{L}_{\mathbb{K}(t_1,t_2)}J(t_1,t_2)\rangle \\ =& -\langle \frac{\partial^2 J}{\partial t_1 \partial t_2}|_{(0,0)}, J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J\rangle - \langle u, v\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J + J\mathcal{L}_{D\mathbb{K}(v)}J + J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}v\rangle.\end{aligned}$$

由引理 3.3 及恒等式： $\iota_{\mathbb{K}}\omega = -ds^\nabla$ 可得

$$\iota_{D\mathbb{K}(v)}\omega = -dDs^\nabla(v) = d(JP)^* v.$$

因此我们有

$$D\mathbb{K}(v) = -\mathrm{grad}_\omega (JP)^* v,$$

由此得到

$$J\mathcal{L}_{D\mathbb{K}(v)}J = -2JP(JP)^* v.$$

于是可得

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u,v) = -\langle \frac{\partial^2 J}{\partial t_1 \partial t_2}|_{(0,0)}, J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J\rangle + 2\langle (JP)^* u, (JP)^* v\rangle - \langle u, v\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J + J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}v\rangle.$$

若 J 是 EAK，则 $\mathcal{L}_K J = 0$，从而得到（4.1）；若 J 具有常 Hermitian 标量曲率，则 $\mathbb{K} = 0$，从而得到（4.2）。

平均标量曲率

$$\underline{s^\nabla} = \left(\int_M s^\nabla(J)\mathrm{vol}\right) / \left(\int_M \mathrm{vol}\right) \tag{4.3}$$

不依赖于 $J \in \mathcal{AC}_\omega$（参见[17, (9.5.15)]）。因此，任何 $J \in \mathcal{AC}_\omega$ 具有常 Hermitian 标量曲率的$\underline{s^\nabla}$ 都以厄米标量曲率作为其厄米标量曲率。柯西不等式意味着

$$(\underline{s^\nabla})^2(\int_M \mathrm{vol})^2 = (\int_M s^\nabla(J)\mathrm{vol})^2 \leq (\int_M [s^\nabla(J)]^2\mathrm{vol})(\int_M \mathrm{vol}) = \mathcal{C}(J)(\int_M \mathrm{vol}) \tag{4.4}$$

i.e.

$$\mathcal{C}(J) \geq \int_M (\underline{s^\nabla})^2 \mathrm{vol}.$$

因此，任何具有常 Hermitian 标量曲率的 $J \in \mathcal{AC}_\omega$ 都是 $\mathcal{C}$ 的局部极小点。□

定理 4.1 表明，若 J 具有 J 常 Hermitian 标量曲率，则 Calabi 泛函在此处是凸的。事实上，若将 Hermitian Calabi 泛函限制在复化轨道上，我们还可以得到它在 EAK 点处的凸性结果。

复化轨道的切向量均可由M上的光滑函数刻画，我们将 Hermitian Calabi 泛函限制在复化轨道上，如下所示。

推论 4.2. 设 J是 EAK。令 $u_1 = P(f_1)$ $v_1 = P(f_2)$ 为定理 *4.1*中的对象。则

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(P(f_1), P(f_2)) = 0.$$

令 $u = P(f_1)$和 $v = JP(f_2)$ 为定理 *4.1*中的对象，则有

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(P(f_1), JP(f_2)) = 0.$$

证明。 将 $u_1 = P(f_1)$ $v_1 = P(f_2)$ 代入（4.1），得

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u_1, v_1) = 2\langle (JP)^* P(f_1), (JP)^* P(f_2)\rangle - \langle J\mathcal{L}_\mathbb{K}(P(f_1)), P(f_2)\rangle.$$

根据 $\mathcal{L}_\mathbb{K}$ 命题 3.7 的描述可知

$$2\langle (JP)^* P(f_1), (JP)^* P(f_2)\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}_\mathbb{K} f_1, \mathcal{L}_\mathbb{K} f_2\rangle.$$

根据 $\mathcal{L}_\mathbb{K} P = P\mathcal{L}_\mathbb{K}$ 引理 3.9 的交换性，我们得到

$$\langle J\mathcal{L}_\mathbb{K}(P(f_1)), P(f_2)\rangle = \langle JP(\mathcal{L}_\mathbb{K} f_1), P(f_2)\rangle = \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}_\mathbb{K}(f_1), \mathcal{L}_\mathbb{K}(f_2)\rangle.$$

因此我们看到

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u_1, v_1) = 0.$$

类似地，若取 $u_2 = P(f_1)$ $v_2 = JP(f_2)$，则可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u_2, v_2) =& 2\langle (JP)^* P(f_1), (JP)^* JP(f_2)\rangle - \langle J\mathcal{L}_\mathbb{K}(P(f_1)), JP(f_2)\rangle \\
=& \langle \mathcal{L}_\mathbb{K} f_1, \mathbb{L} f_2\rangle - \langle P\mathcal{L}_\mathbb{K} f_1, P(f_2)\rangle \\
=& \langle \mathcal{L}_\mathbb{K} f_1, \mathbb{L} f_2\rangle - \langle \mathcal{L}_\mathbb{K} f_1, \mathbb{L} f_2\rangle \\
=& 0.
\end{aligned}$$

□

推论 4.3。事实上，若 J 是 EAK，则 Im P 在全空间 $T_J\mathcal{AC}_\omega$ 上湮灭 Hermitian Calabi 泛函的 Hessian，即

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(P(f), v) = 0, \quad \forall v \in T_J\mathcal{AC}_\omega.$$

证明。因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}C(P(f),v) =&2\langle (JP)^*P(f),(JP)^*v\rangle - \langle J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}P(f),v\rangle\\ =&\langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f),(JP)^*v\rangle - \langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f),(JP)^*v\rangle\\ =&0.\end{aligned}$$

□

推论 4.4。设 J是 EAK。令 $u_1 = JP（f_1）$ $v_1 = JP（f_2）$ 在定理4.1中。则

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(JP(f_1),JP(f_2)) =2\langle \mathbb{L}^+(f_1),\mathbb{L}^-(f_2)\rangle. \tag{4.5}$$

证明。取 $u = JP（f_1）$ $u = JP（f_2）$ 于（4.1），可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u,v) =&2\langle (JP)^*JP(f_1),(JP)^*JP(f_2)\rangle - \langle J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}JP(f_1),JP(f_2)\rangle\\ =&2\langle \mathbb{L}(f_1),\mathbb{L}(f_2)\rangle - \langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}}JP(f_1),P(f_2)\rangle.\end{aligned} \tag{4.6}$$

由于 J是 EAK，引理 3.9推出 $JP\mathcal{L}_{\mathbb{K}} = \mathcal{L}_{\mathbb{K}}JP$，因此得到

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(u,v) = 2\langle \mathbb{L}(f_1),\mathbb{L}(f_2)\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}}f_1,\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f_2\rangle.$$

另一方面，我们利用命题 3.11 计算

$$\begin{aligned}&2\langle \mathbb{L}^+(f_1),\mathbb{L}^-(f_2)\rangle\\ =&2\langle \mathbb{L}(f_1)+\frac{i}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f_1,\mathbb{L}(f_2)-\frac{i}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f_2\rangle\\ =&2\langle \mathbb{L}(f_1),\mathbb{L}(f_2)\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}}f_1,\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f_2\rangle + i(\langle \mathbb{L}(f_1),\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f_2\rangle + \langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f_1),\mathbb{L}(f_2)\rangle).\end{aligned}$$

再次由引理 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\mathbb{L} = \mathbb{L}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ 中的交换关系 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}\mathbb{L} = \mathbb{L}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}$ 可知

$$\langle \mathbb{L}(f_1),\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f_2\rangle = -\langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}}\mathbb{L}(f_1),f_2\rangle = -\langle \mathbb{L}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f_1),f_2\rangle = -\langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f_1),\mathbb{L}f_2\rangle.$$

因此我们得到

$$2\langle \mathbb{L}^+(f_1),\mathbb{L}^-(f_2)\rangle = 2\langle \mathbb{L}(f_1),\mathbb{L}(f_2)\rangle - \frac{1}{2}\langle \mathcal{L}_{\mathbb{K}}f_1,\mathcal{L}_{\mathbb{K}}f_2\rangle.$$

□

4.2. 定理 (2) 的证明1.1。根据推论 4.2，我们已知 Hess$\mathcal{C}$在 Im P上消失。

我们只需证明 Hess$\mathcal{C}$在子空间 Im JP上严格为正。推论 4.4 证明了

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(JP(f_1),JP(f_2)) =2\langle \mathbb{L}^+(f_1),\mathbb{L}^-(f_2)\rangle. \tag{4.7}$$

$\mathbb{L}^+$，$\mathbb{L}^-$ 都是自伴算子（见定义 3.5），因此

$$\mathrm{Hess}\mathcal{C}(JP(f_1),JP(f_2)) =2\langle \mathbb{L}^-\mathbb{L}^+(f_1),f_2\rangle.$$

由于 J 是 EAK，根据引理 $\mathbb{L}^+$、$\mathbb{L}^-$ 3.13 中的交换性，可知 $\mathbb{L}^-\mathbb{L}^+$ 是半正的，且 $\ker\ \mathbb{L}^+\mathbb{L}^- = \ker\ \mathbb{L}^+ + \ker\ \mathbb{L}^-$。由命题 3.12可知，任意实函数$f\in \ker\ \mathbb{L}^\pm$当且仅当 $JP(f) = 0$，即 $JP(f)$ 为零。因此 Hess$\mathcal{C}$在子空间 Im JP上严格正定。

□

4.3. 推论 **1.2** 的证明。 对于任意 $v \in \operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} JP$，由推论 4.2可知， $v \in \operatorname{Im} P = T_J\mathcal{O}$ 蕴含 $\operatorname{Hess}\mathcal{C}(v, v) = 0$。然而，由推论 4.4可知，$\operatorname{Hess}\mathcal{C}$ 在子空间 $\operatorname{Im} JP = \mathbb{J}T_J\mathcal{O}$上严格正定，因此必有 $v = 0$，即 $\operatorname{Im} P \cap \operatorname{Im} JP = \{0\}$。□

定义 4.1. 我们定义算子 $H\colon T_J\mathcal{AC}_\omega \to T_J\mathcal{AC}_\omega$为

$$H(v) = 2JP(JP)^* v - J\mathcal{L}_{\mathbb{K}} v, \quad v \in T_J\mathcal{AC}_\omega. \tag{4.8}$$

假设 J 是 EAK，则 H 根据引理 3.10是自伴的，并且

$$\operatorname{Hess}\mathcal{C}(u, v) = \langle H(u), v\rangle.$$

根据推论 4.2 和推论 4.4，我们知道算子 H 在 $T_J\mathcal{D}$上是半正的，

$$H(P(f)) = 0, \quad H(JP(f)) \geq 0,$$

并且 $H(JP(f)) = 0$当且仅当 $JP(f) = 0$。

为了证明推论 1.3，我们引入以下引理。

引理 4.5. 若 J 是 EAK，对于任意 $v \in T_J\mathcal{D}$，若

$$\operatorname{Hess}\mathcal{C}(v, v) = 0,$$

对于某个 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$，我们有 $v = P(f)$。

证明。 由于 $v \in T_J\mathcal{D}$， $v = P(f) + JP(g)$，对于某个 f， $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$，利用推论 4.2 和推论 4.4，我们得到

$$\operatorname{Hess}\mathcal{C}(v, v) = \operatorname{Hess}\mathcal{C}(JP(g), JP(g)) = 0.$$

上述证明意味着 $JP(g) = 0$。因此 $v = P(f)$。 □

4.4. 推论**1.3**的证明。

(1) 对于轨道 $\operatorname{Ham}(M, \omega)$中的任意路径 J_t， ω)，我们知道，对于某个 $J_t' = P_t(f_t)$ $f_t \in C^\infty(M, \mathbb{R})$，由 (3.28) 可得

$$\frac{d}{dt}\mathcal{C}(J_t) = 0,$$

也就是说， $\mathcal{C}(J_t)$ 是常数。由于 $\operatorname{Ham}(M, \omega)$ 是路径连通的（见 [29, 命题 10。2]），Hermitian Calabi 泛函在 $\operatorname{Ham}(M, \omega)$ 的作用下保持不变。

(2) 若 J 是 EAK，则有

$$T_J\mathcal{D} = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Im} JP.$$

由于 $\mathcal{C}$ 在 $\operatorname{Ham}(M, \omega)$ 作用下保持不变，且 $\operatorname{Hess}\mathcal{C}$ 沿 $\operatorname{Im} JP$中的方向严格为正，因此每个临界 J都相对于规范群 $\operatorname{Ham}(M, \omega)$ 的作用，使 $\mathcal{C}$ 取得局部非退化最小值。

另一方面，若 J是局部极小值，则 $D\mathcal{C}(v) = 0, \forall v \in T_J\mathcal{D}$。因此，对于任意 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ $D\mathcal{C}(JP(f)) = \mathrm{h}\mathbb{L}(s^\nabla)\ f\mathrm{i} = 0$. 因此 $\mathbb{L}(s^\nabla) = 0$，这意味着 $\mathcal{L}_{\mathbb{K}} J = 0$。

(3) 假设 J_0 是 EAK，记 $\mathcal{E}_{J_0}$ 为 $\mathcal{D}_{J_0}$中由极值几乎 K¨ahler 度量组成的子集内 J_0 的连通分支。由于 Ham(M,ω) 是连通的， $\mathcal{O}_{J_0}$ 已经连通，我们需要证明 $\mathcal{E}_{J_0}=\mathcal{O}_{J_0}$。

我们首先证明，对于任意 $J_1\in\mathcal{E}_{J_0}$，选择一条曲线 $J_t:\ [0,1]\to\mathcal{E}_{J_0}$使得 $J(0)=J_0$， $J(1)=J_1$。由于 J_t 对所有 $t\in[0,1]$都是 EAK，我们有$\frac{d}{dt}\mathcal{C}(J_t)=0$，因此

$$\mathcal{C}(t)=\mathcal{C}(J_t):[0,1]\to\mathbb{R}$$

是一个常值函数， $\mathcal{C}(t)$ 的任意阶导数均为 0，因此我们有

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{C}(J_t)=\mathrm{Hess}\mathcal{C}(J_t',J_t')=0.$$

引理 4.5 意味着 $J_t'=P_t(f_t)$ 对某个 $f_t\in C^\infty(M,\ \mathbb{R})$ 成立，这意味着 J_t 属于 Ham$(M,\ \omega)$ 作用下的轨道。

另一方面，任意 $J\in\mathcal{E}_{J_0}$ 都是 $\mathcal{C}$ 的局部极小值，但 $\mathcal{C}$ 在$\mathcal{O}_{J_0}$上为常值，因此 $\mathcal{E}_{J_0}$ 是 $\mathcal{O}_{J_0}$的开子集，但 $\mathcal{E}_{J_0}$ 是闭集，因为它由欧拉-拉格朗日方程刻画

$$\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega s_J^\nabla}J=0.$$

So $\mathcal{E}_{J_0}=\mathcal{O}_{J_0}$. □

4.5. 沿测地线的 Hermitian Calabi 泛函，定义在 $\mathcal{AC}_\omega$. 本节证明定理1.1中的（4）。

为了推导 $\mathcal{AC}_\omega$ 中的 Levi-Civita 联络和测地线方程，我们引入空间

$$\mathrm{End}(TM,\omega)=\{A\in\mathrm{End}(TM):\omega(AX,Y)+\omega(X,AY)=0,\forall X,Y\in\Gamma(TM)\}.$$

End(TM,ω) 是 $\mathcal{AC}_\omega$ 上的平凡丛，而 $T\mathcal{AC}_\omega$ 是 End(TM,ω) 的子丛，其特征为

$$T_J\mathcal{AC}_\omega=\{A\in\mathrm{End}(TM,\omega):AJ+JA=0\}.$$

并且我们有

• End(TM,ω) 的任意截面 $a\in$ 都确定 $\mathcal{AC}_\omega$ 上的一个向量场 $\hat{}a$，定义为

$$\hat{a}(J)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\exp(-ta)J\exp(ta)=[J,a]. \tag{4.9}$$

•反过来，对于任意 $A\in T_J\mathcal{AC}_\omega$， $a=-\frac{1}{2}JA\in$End(TM,ω) 满足 $A=\hat{}a$。对于任意 $a\in$End(TM,ω)，我们用 $a^\pm$ 表示 a 的 J 交换部分和 J 反交换部分，即

$$a^+=\frac{1}{2}(a-JaJ),\quad a^-=\frac{1}{2}(a+JaJ), \tag{4.10}$$

那么我们有 $a^-\in T_J\mathcal{AC}_\omega$and $\hat{}a=2Ja^-$。

引理 4.6 ([17, (9.2.7)])。 对于任意 $a,b\in$端omorphism(TM,ω), 我们有

$$[\hat{a},\hat{b}]=\widehat{[a,b]}=[J,[a,b]], \tag{4.11}$$

$\hat{}$其中 $[\hat{}a,b]$ 表示 $\mathcal{AC}_\omega$上的向量场的李括号，以及 $[a,b]=ab-ba$。

引理 4.7. 对任意 $a,b,c\in$端omorphism(TM,ω)，有

$$[\hat{a},b]-[\hat{b},a]=[\hat{a},\hat{b}], \tag{4.12}$$

and

$$\hat{a}\langle\hat{b},\hat{c}\rangle=\langle[\hat{a},b],\hat{c}\rangle+\langle[\hat{a},c],\hat{b}\rangle. \tag{4.13}$$

证明。直接计算可得

$$\begin{aligned}[\hat{a},b]-[\hat{b},a]=&\hat{ab}-b\hat{a}-\hat{b}a+a\hat{b}\\=&Jab-aJb-bJa+baJ-Jba+bJa+aJb-abJ\\=&J[a,b]-[a,b]J\\=&[J,[a,b]],\end{aligned}$$

应用（4.11），我们得到（4.12）。

由（4.9），$\hat{}a$ 的定义曲线为

$$J_t=\exp(-ta)J\exp(ta).$$

根据定义，我们有

$$\hat{a}\langle\hat{b},\hat{c}\rangle=\frac{d}{dt}|_{t=0}\langle\hat{b},\hat{c}\rangle(J_t)=\frac{d}{dt}|_{t=0}\langle\hat{b}(J_t),\hat{c}(J_t)\rangle. \tag{4.14}$$

直接计算可得

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\hat{b}(J_t)=\frac{d}{dt}|_{t=0}[J_t,b]=[\hat{a},b]. \tag{4.15}$$

由 (4.14) 和 (4.15) 可得

$$\hat{a}\langle\hat{b},\hat{c}\rangle=\langle[\hat{a},b],\hat{c})+\langle[\hat{a},c],\hat{b}\rangle.$$

□

现在我们转而研究 $\mathcal{AC}_\omega$中的测地线方程。记 $\mathfrak{D}$ 为 $\mathcal{AC}_\omega$上的 Levi-Civita 联络。以下引理见 [17, 第 9 节2]，为完整起见，我们在此给出证明。

$\hat{}$ 引理 4.8. 对于 $b\in\Gamma(T\mathcal{AC}_\omega)$ $\forall A\in T_J\mathcal{AC}_\omega$，有

$$\mathfrak{D}_A\hat{b}=[A,b]^-. \tag{4.16}$$

证明。由 Koszul 公式可得

$$2\langle\mathfrak{D}_{\hat{a}}\hat{b},\hat{c}\rangle=\hat{a}\langle\hat{b},\hat{c}\rangle+\hat{b}\langle\hat{a},\hat{c}\rangle-\hat{c}\langle\hat{a},\hat{b}\rangle+\langle[\hat{a},\hat{b}],\hat{c}\rangle-\langle[\hat{a},\hat{c}],\hat{b}\rangle-\langle[\hat{b},\hat{c}],\hat{a}\rangle.$$

由引理4.12和（4.13）可得4.7，

$$\begin{aligned}2\langle\mathfrak{D}_{\hat{a}}\hat{b},\hat{c}\rangle=&\langle[\hat{a},b],\hat{c}\rangle+\langle[\hat{a},c],\hat{b}\rangle+\langle[\hat{b},a],\hat{c}\rangle+\langle[\hat{b},c],\hat{a}\rangle-\langle[\hat{c},b],\hat{a}\rangle-\langle[\hat{c},a],\hat{b}\rangle\\&+\langle[\hat{a},\hat{b}],\hat{c}\rangle-\langle[\hat{a},\hat{c}],\hat{b}\rangle-\langle[\hat{b},\hat{c}],\hat{a}\rangle\\=&\langle[\hat{a},b],\hat{c}\rangle+\langle[\hat{b},a],\hat{c}\rangle+\langle[\hat{a},\hat{b}],\hat{c}\rangle\\=&2\langle[\hat{a},b],\hat{c}\rangle.\end{aligned}$$

ˆ因此， $\mathfrak{D}_{\hat{a}}b$ 只是 $[\hat{a},b]^-$的 J-反交换部分，即，

$$\mathfrak{D}_{\hat{a}}\hat{b}=[\hat{a},b]^-.$$

由于 ˆa， $a\in$端omorphism$(TM,\ \omega)$ 可以生成整个空间 $T_J\mathcal{AC}_\omega$， （4.16）成立。 □

根据 $\mathcal{AC}_\omega$ 上的 Levi-Civita 联络，我们可以刻画 $\mathcal{AC}_\omega$ 中的测地线。引理4.9. 曲线 $J_t\colon(a,b)\to\mathcal{AC}_\omega$ 是测地线，当且仅当 $(J_t')^-=0$，即，

$$J''J=JJ''.$$

利用事实 $J'J+JJ'=0$，我们可以得到另一个等价条件

$$J''=J'J'J.$$

证明。根据定义 J_t 是 $\mathcal{AC}_\omega$ 中的测地线，当且仅当 $\mathfrak{D}_{J_t'}J_t'=0$。对于任意 $b\in$端omorphism(TM,ω)，我们有

$$\begin{aligned}\langle\mathfrak{D}_{J_t'}J_t',\hat{b}\rangle=&J_t'\langle J_t',\hat{b}\rangle-\langle J_t',\mathfrak{D}_{J_t'}\hat{b}\rangle\\=&\frac{d}{dt}\langle J_t',[J_t,b]\rangle-\langle J_t',[J_t',b]^-\rangle\\=&\langle(J_t'')^-,[J_t,b]\rangle+\langle J_t',[J_t',b]^-\rangle-\langle J_t',[J_t',b]^-\rangle\\=&\langle(J_t'')^-,[J_t,b]\rangle\\=&\langle(J_t'')^-,\hat{b}\rangle.\end{aligned}$$

□

命题4.10. 若 $J(t)$ 是 $\mathcal{AC}_\omega$ 中的测地线，则有

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{C}(J_t)=\langle H(J'),J'\rangle,$$

其中 H 定义见定义 *4.1*。

证明。 设 $J(t)$ 是 $\mathcal{AC}_\omega$中的一条测地线，由定理 4.1 可得

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{C}(J_t)=-\langle J'',J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J\rangle+2\langle(JP)^*J',(JP)^*J'\rangle-\langle J',J'\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J+J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J'\rangle. \tag{4.17}$$

由于测地线条件表明 J''是 J-交换的，并且 $J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J$是$J$-反交换的，因此有

$$\langle J'',J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J\rangle=0. \tag{4.18}$$

对于任意 $u\in T_J\mathcal{AC}_\omega$，我们有

$$\begin{aligned}\langle u\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J,u\rangle=&\int_M\mathrm{tr}\mathcal{L}_K(uJu)-\int_M\mathrm{tr}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}uJu)-\int_M\mathrm{tr}(uJ\mathcal{L}_{\mathbb{K}}u)\\=&-\langle\mathcal{L}_{\mathbb{K}}u,Ju\rangle-\langle u,J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}u\rangle\\=&\langle J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}u,u\rangle-\langle u,J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}u\rangle\\=&0.\end{aligned} \tag{4.19}$$

利用（4.17）以及（4.18）和（4.19）进行化简可得

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{C}(J_t) =&2\langle (JP)^*J', (JP)^*J'\rangle - \langle J', J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J'\rangle\\ =&2\langle H(J'), J'\rangle.\end{aligned}$$

□

注记 4.1。 我们不知道 H 在整个空间 $\mathcal{AC}_\omega$上是否为正，因此命题 4.10 中 Hermitian Calabi 泛函沿测地线的凸性尚不明确。如果 J 是 EAK，我们知道算子 H 在 $T_J\mathcal{D}$上是半正的。自然会想到这样一个问题：如果测地线 $J(t)$ 位于某个复化轨道 $\mathcal{D}$中，Hermitian Calabi 泛函沿该测地线是否具有凸性。

5. Hermitian Calabi flow

根据 Hermitian Calabi 泛函的变分公式（3.8），我们写出 Hermitian Calabi 泛函的梯度流。

定义 5.1. 厄米卡拉比流（HCF），即 Hermitian Calabi 泛函的梯度流，定义如下：

$$\frac{d}{dt}J = \frac{1}{2}J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J = JP(s_J^\nabla). \tag{5.1}$$

由于 $JP(s_J^\nabla) \in \mathrm{Im}\ JP \subset T_J\mathcal{D}$，我们看到从 J 出发的厄米卡拉比流始终位于复化轨道 $\mathcal{D}_J$ 中。

命题5.1. 沿厄米-Calabi流，有

$$\frac{d}{dt}s_{J_t}^\nabla = -\mathbb{L}(s^\nabla), \tag{5.2}$$

$$\frac{d}{dt}\mathcal{C}(J_t) = -\langle\frac{1}{2}J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J, J\mathcal{L}_{\mathbb{K}}J\rangle = -2\langle\mathbb{L}(s^\nabla), s^\nabla\rangle \leq 0. \tag{5.3}$$

因此，除非 J 是EAK，否则厄米Calabi泛函沿流严格递减。

备注5.1. 在K¨ahler情形下，当流 $J(t)$可积时，厄米卡拉比流与经典Calabi流一致

$$\frac{d}{dt}\varphi = s(\omega_\varphi) - \hat{s},\quad \omega_\varphi = \omega + \sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\varphi$$

相差一个微分同胚（参见[7, 引理 5.1]）。在 [25], Li-Wang-Zheng 证明了极值 K¨ahler 曲面上 Calabi 流的收敛定理，这在一定程度上证实了 Donaldson 关于复维数 2上的 Calabi 流的猜想图景，参见 [25] 其中还有更多参考文献。

在本节中，我们选择一个局部坐标系（x_1，...，x_n）。为简便起见，我们将 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ 记作 ∂_i，并将协变导数记作 $\mathrm{D}_i = \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$。

引理 5.2. 设 $X = X^i\partial_i$ 为一个向量场。则

$$\mathcal{L}_X J = (X^i\partial_i J_p^q - J_p^i\partial_i X^q + J_i^q\partial_p X^i)\partial_q \otimes dx^p, \quad (J\mathcal{L}_X J)_p^q = J_l^q (J\mathcal{L}_X J)_p^l.$$

如果 $X = \mathrm{grad}_\omega f$，则

$$(\mathcal{L}_X J)_p^q = \omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\partial_i J_p^q - J_p^i\omega^{qj}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - J_p^i\partial_i\omega^{qj}\frac{\partial f}{\partial x_j} + J_i^q\partial_p\omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j} + J_i^q\omega^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_j}$$

其中 $\omega^{ij} = g^{kj}J_k^i$和

$$(J\mathcal{L}_X J)_p^q = J_l^q\omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\partial_i J_p^l - J_l^q J_p^i\omega^{lj}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - J_l^q J_p^i\partial_i\omega^{lj}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \partial_p\omega^{qj}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \omega^{qj}\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_j}.$$

证明。这是直接计算得到的

$$\mathcal{L}_X J = [\omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\partial_i J_p^q - J_p^i\partial_i(\omega^{qj}\frac{\partial f}{\partial x_j}) + J_i^q\partial_p(\omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j})]\partial_q \otimes dx_p.$$

$(J\mathcal{L}_X J)$的局部公式$_p^q$可由代入

$$J_l^q J_i^l = -\delta_i^q$$

到中的最后两项中得到

$$\begin{aligned}(J\mathcal{L}_X J)_p^q = {} & J_l^q\omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j}\partial_i J_p^l - J_l^q J_p^i\omega^{lj}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - J_l^q J_p^i\partial_i\omega^{lj}\frac{\partial f}{\partial x_j} \\ & + J_l^q J_i^l\partial_p\omega^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_j} + J_l^q J_i^l\omega^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x_p \partial x_j}.\end{aligned}$$

□

引理 5.3。 定义于定义 5.1 中的厄米卡拉比流是一个四阶流 .

证明。首先，我们看到 $\mathbb{K} = \omega^{ij}\frac{\partial s^\nabla}{\partial x_j}\partial_i$ 和 $\omega^{ij} = g^{kj}J_k^i$ 不依赖于 J。

其次，代入 $X = \mathbb{K}$ 和 $f = s^\nabla$ 引理 5.2，我们得到$J\mathcal{L}_\mathbb{K} J$ 在局部坐标下的表达式

$$(J\mathcal{L}_\mathbb{K} J)_p^q = -J_l^q J_p^i\omega^{lj}\frac{\partial^2 s^\nabla}{\partial x_i \partial x_j} - \omega^{qj}\frac{\partial^2 s^\nabla}{\partial x_p \partial x_j} + L_1,$$

其中， L_1 表示 s^∇ 的低阶导数项。

综上，由于 s^∇ 取决于 J 的二阶导数，故 $(J\mathcal{L}_\mathbb{K} J)_p^q$ 中涉及的 J 的最高阶导数为 4，因此厄米卡拉比流是一个四阶流。□

5.1. $J\mathcal{L}_\mathbb{K} J$ 的线性化算子。我们定义

~定义 5.2. $H := D(J\mathcal{L}_\mathbb{K} J) \quad T_J\mathcal{AC}_\omega \to T_{J\mathcal{L}_\mathbb{K} J}T_J\mathcal{AC}_\omega.$

我们首先计算 $D\mathbb{K}$。

引理 5.4. 设 $X = \mathrm{grad}_\omega f$ 是一个哈密顿向量场，其中 f 依赖于 J。那么

$$DX(v) = \mathrm{grad}_\omega Df(v).$$

特别地， $D\mathbb{K}(v) = -$梯度$_\omega(JP)^* v.$

证明。我们利用恒等式： $\iota_X\omega = -df$ 可知

$$\iota_{DX(v)}\omega = -dDf(v).$$

因此，第一个恒等式得证。由引理 $\mathbb{K}$ 可得其变分3.3。

□

于是我们有 $D(\mathcal{L}_X J)$。

引理 5.5. 设 X 如上所述。则

$$D(\mathcal{L}_X J)(v) = 2P(Df(v)) + \mathcal{L}_X v.$$

证明. 由 $D(\mathcal{L}_X J)(v) = \mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega Df(v)} J + \mathcal{L}_X v$ 以及 P 的定义可得。□

~现在，我们计算线性化算子 H。

~引理 5.6。 $H(v) = -2JP(JP)^* v + J\mathcal{L}_{\mathbb{K}} v + v\mathcal{L}_{\mathbb{K}} J.$

证明。我们继续通过在前述引理中取 $X = \mathbb{K}$ 来进行计算

$$D(J\mathcal{L}_{\mathbb{K}} J)(v) = v\mathcal{L}_{\mathbb{K}} J + J\mathcal{L}_{D\mathbb{K}(v)} J + J\mathcal{L}_{\mathbb{K}} v.$$

代入 $D\mathbb{K}$ 的公式，得到

$$D(J\mathcal{L}_{\mathbb{K}} J)(v) = 2vP(s^\nabla) - 2JP(JP)^* v + J\mathcal{L}_{\mathbb{K}} v.$$

由此我们证明了该引理。 □

~引理 5.7。 H的主项属于 $-2JP(JP)^* v$且

$$\ker JP(JP)^* = \{P(f) + JP(\phi), \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f) + 2\mathbb{L}(\phi) = 0\}. \tag{5.4}$$

特别地，如果 J 具有常值 Hermitian Calabi 泛函，那么

$$\ker JP(JP)^* = \{P(f), \mathcal{L}_{\mathbb{K}} f = 0\}.$$

证明。由于 $J\mathcal{L}_{\mathbb{K}} v$ 是 v 的一阶导数，且 $v\mathcal{L}_{\mathbb{K}} J$ 不涉及 v的导数 ~项，因此 H的主项包含在 $-2JP(JP)^* v$中。

现在我们来考虑核空间

$$\ker(JP(JP)^*) = \ker(JP)^* = (\mathrm{Im}\, JP)^\perp.$$

由于 HCF 始终位于复化轨道中，我们只需考虑 $T_J\mathcal{D} = \mathrm{Im}\ P + \mathrm{Im}\ JP$中的 $\ker(JP)^*$。对于任意 $v = P(f) + JP(\phi) \in \ker(JP)^*$，我们有

$$(JP)^* v = (JP)^* P(f) + (JP)^* JP(\phi) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(f) + \mathbb{L}(\phi) = 0.$$

如果 J具有常 Hermitian 标量曲率，则 $\mathrm{Im}\ P \perp \mathrm{Im}\ JP$，这意味着 $(\mathrm{Im}\ JP)^\perp = \mathrm{Im}\ P$。因此我们有

$$\ker(JP(JP)^*) = (\mathrm{Im}\, JP)^\perp = \mathrm{Im}\, P,$$

因此，任意 $v \in \ker\ JP(JP)^*$ 都可写成 $v = P(f)$ 的形式，其中某个 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$。由此我们证明了

$$(JP)^* v = (JP)^* P(f) = \frac{1}{2}\mathcal{L}_{\mathbb{K}} f = 0.$$

□

5.2. 厄米卡拉比流的弱抛物性。

引理 5.8. 任意 1-形式 $\xi \in T^*M$ 通过以下方式诱导出一个元素 $\Xi \in T_J\mathcal{AC}_\omega$

$$\Xi = \xi^\sharp \otimes (J\xi) + (J\xi^\sharp) \otimes \xi.$$

在局部坐标中，记 $\Xi = \Xi_c^d \partial_d \otimes dx_c$。于是

$$\Xi_c^d = -\xi^d \xi_b J_c^b + J_b^d \xi^b \xi_c,$$

and

$$(\Xi, v) = 2(J\xi^\sharp, v(\xi^\sharp)), \quad \forall v \in T_J\mathcal{AC}_\omega.$$

证明。我们需要证明，对于任意 $X, Y \in TM$， $J\Xi(X) + \Xi J(X) = 0$ 以及 $(\Xi(X)\ Y) = (X, \Xi(Y))$。由于

$$\begin{aligned} J\Xi(X) + \Xi J(X) =& J(J\xi(X)\xi^\sharp + \xi(X)J\xi^\sharp) + J\xi(JX)\xi^\sharp + \xi(JX)J\xi^\sharp \\ =& -\xi(JX)J\xi^\sharp - \xi(X)\xi^\sharp + \xi(X)\xi^\sharp + \xi(JX)J\xi^\sharp \\ =& 0 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (\Xi(X), Y) =& (J\xi(X)\xi^\sharp + \xi(X)J\xi^\sharp, Y) = J\xi(X)\xi(Y) + \xi(X)J\xi(Y) \\ =& (X, \Xi(Y)). \end{aligned}$$

因此 $\Xi \in T_J\mathcal{AC}_\omega$。

在局部坐标 $(x_1, \dots, x_n)$ 中，我们有

$$\Xi_c^d = dx_d(\Xi(\partial_c)) = dx_d(\xi^\sharp J\xi(\partial_c) + J\xi^\sharp \xi(\partial_c)) = -\xi^d \xi_b J_c^b + J_b^d \xi^b \xi_c,$$

and

$$(\xi, v) = g^{ic} g_{jd} (-\xi^d \xi_b J_c^b + J_b^d \xi^b \xi_c) v_i^j = -(Jv\xi, \xi) + (J\xi, v\xi) = 2(J\xi, v\xi).$$

这里我们利用了这一事实： $g^{ic} g_{jd} v_i^j = v_d^c$，因为 v 是自伴的。 □

我们用 $L_i, i = 1, 2, \dots$ 表示包含严格低于 2 阶的导数的项。

对于 $v = v_l^p \frac{\partial}{\partial x_p} \otimes dx_l \in T_J\mathcal{AC}_\omega$，我们首先在局部坐标中计算 $(JP)^* v = \delta J(\delta v)^\flat$。

引理 5.9。

$$-Ds_J^\nabla(v) = (JP)^* v = -g^{ij} g^{kl} \omega_{jp} \mathrm{D}_i \mathrm{D}_k v_l^p + L_3.$$

证明。我们计算得

$$\delta J(\delta v)^\flat = -g^{ij} \mathrm{D}_i (J(\delta v)^\flat)_j = -g^{ij} \mathrm{D}_i [J(\delta v)^\flat(\partial_j)] - g^{ij} (J(\delta v)^\flat)(\mathrm{D}_i \partial_j).$$

二阶导数项仅出现于 $-g^{ij} \mathrm{D}_i [J(\delta v)^\flat(\partial_j)]$ 中。我们计算

$$\begin{aligned} -g^{ij} \mathrm{D}_i [J(\delta v)^\flat(\partial_j)] =& -g^{ij} \mathrm{D}_i (g^{kl} \mathrm{D}_k v(\partial_l), J\partial_j) \\ =& -g^{ij} g^{kl} \mathrm{D}_i (\mathrm{D}_k v_l^p \partial_p, J\partial_j) + L_1 \\ =& -g^{ij} g^{kl} \omega_{jp} \mathrm{D}_i \mathrm{D}_k v_l^p + L_2. \end{aligned}$$

因此，引理得证。

□

然后，我们也用协变导数来计算 JP 在局部坐标中的表达式。引理 5.10。

$$JP(f) = J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J = [J_c^b g^{ad} \mathrm{D}_b \mathrm{D}_a f - g^{ab} J_b^d \mathrm{D}_c \mathrm{D}_a f] \frac{\partial}{\partial x^d} \otimes dx_c + L_5.$$

证明。根据引理5.2，我们有

$$\begin{aligned} J\mathcal{L}_X J =& [J_b^d (\mathrm{D}_X (J\partial_c))^b - J_l^d J_c^b (\mathrm{D}_b X)^l - (\mathrm{D}_c X)^d] \frac{\partial}{\partial x^d} \otimes dx_c \\ =& - [J_c^b J_l^d \mathrm{D}_b X^l + \mathrm{D}_c X^d] \frac{\partial}{\partial x^d} \otimes dx_c + L_4 \end{aligned}$$

以及 $\mathrm{grad}_\omega f = (g^{ab} J_b^l \mathrm{D}_a f)\partial_l$，可得

$$J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f} J = -[J_c^b J_l^d g^{ak} J_k^l \mathrm{D}_b \mathrm{D}_a f + g^{ab} J_b^d \mathrm{D}_c \mathrm{D}_a f] \frac{\partial}{\partial x^d} \otimes dx_c + L_5.$$

当 $\sum_l J_l^d J_k^l = -\delta_k^d$ 时，我们由此证明了该引理。

□

Pr命题 5.11. 对于余向量 $\xi \in T_x^* M$， $JP(JP)^*$ 的主符号为

$$\hat{\sigma}_4(x,\xi)v = \frac{1}{2}(v, \Xi)\Xi,$$

其中 $\Xi \in T_J \mathcal{AC}_\omega$ 在引理 5.8中定义。因此我们有

$$(\hat{\sigma}_4(x,\xi)v, v) = \frac{1}{2}(v, \Xi)^2 \geq 0,$$

若我们选择 $v = J\Xi$，则 $(\hat{\sigma}_4(x,\xi)v, v) = 0$。因此，厄米卡拉比流是一个四阶弱抛物型系统。

证明。 根据引理 5.3， $JP(JP)^*$是一个四阶算子，我们只需计算 $JP(JP)^*$的四阶导数项。

结合引理 5.9和引理 5.10， $2JP(JP)^* v$的主项变为

$$-[J_c^b g^{ad} g^{ij} g^{kl} \omega_{jp} \mathrm{D}_b \mathrm{D}_a \mathrm{D}_i \mathrm{D}_k v_l^p - g^{ab} J_b^d g^{ij} g^{kl} \omega_{jp} \mathrm{D}_c \mathrm{D}_a \mathrm{D}_i \mathrm{D}_k v_l^p] \frac{\partial}{\partial x^d} \otimes dx_c,$$

也就是说，对任意非零余向量 $\xi = \xi_i dx_i$，均有

$$(\hat{\sigma}_{JP(JP)^*}(x,\xi)v)_c^d = -J_c^b g^{ad} g^{ij} g^{kl} \omega_{jp} \xi_b \xi_a \xi_i \xi_k v_l^p + g^{ab} J_b^d g^{ij} g^{kl} \omega_{jp} \xi_c \xi_a \xi_i \xi_k v_l^p.$$

由于

$$J_c^b g^{ad} g^{ij} g^{kl} \omega_{jp} \xi_b \xi_a \xi_i \xi_k v_l^p = J_c^b \xi_b \xi^d (J\xi^\sharp, v(\xi^\sharp))$$

and

$$g^{ab} J_b^d g^{ij} g^{kl} \omega_{jp} \xi_c \xi_a \xi_i \xi_k v_l^p = J_b^d \xi_c \xi^b (J\xi^\sharp, v(\xi^\sharp)),$$

我们进一步有

$$(\hat{\sigma}_{JP(JP)^*}(x,\xi)v)_c^d = (J\xi^\sharp, v\xi^\sharp)(-J_c^b \xi_b \xi^d + J_b^d \xi_c \xi^b).$$

由引理 5.8，因此得到

$$(\hat{\sigma}_{JP(JP)^*}(x,\xi)v)^d_c = \frac{1}{2}(\Xi, v)\Xi^d_c.$$

i.e.

$$\hat{\sigma}_{JP(JP)^*}(x,\xi)v = \frac{1}{2}(v,\Xi)\Xi, \quad \Xi = \xi^\sharp \otimes J\xi + J\xi^\sharp \otimes \xi.$$

□

Appendix A. Explicit expression of Lichnerowicz operator

本节中，我们给出 Lichnerowicz 算子的显式表达式：

$$\mathbb{L}(f) = \frac{1}{2}\Delta^2 f - 2(\delta \mathrm{Ric}^+, df) + 2(\rho, dd^c f) + \delta\delta(\mathrm{D}^+ df - \mathrm{D}^- df), \tag{A.1}$$

其中 Ric^+ 定义见（2.10），ρ 定义见（2.11），并且

$$\mathrm{D}^\pm df(X,Y) = \frac{1}{2}(\mathrm{D}df(X,Y) \pm \mathrm{D}df(JX,JY)).$$

我们的结果实际上是对 Vernier [36], 的连续计算，其中 $\mathbb{L}$（f）的表达式由一个 Δ^2 项和一个误差项组成。我们将明确写出误差项。

根据引理 3.1，Lichnerowicz 算子有一个等价表达式：

$$\mathbb{L}(f) = P^*P(f) = \frac{1}{2}\delta\Big\{J\big[\delta(J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}J)\big]^\flat\Big\}.$$

现在我们开始计算 $\delta(J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}J)$。由于

$$(J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}J)(X) = -\mathcal{L}_{\mathrm{grad} f}J(X) - 4N(\mathrm{grad}_\omega f, X),$$

定义 $\mathcal{N}_f(X) := N(\mathrm{grad}_\omega f, X)$，我们有

$$\delta(J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}J) = -\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{grad} f}J) - 4\delta\mathcal{N}_f.$$

我们对（A.1）的整个证明分为两部分

$$\mathbb{L}(f) = -\frac{1}{2}\delta\Big\{I + 4J\circ II\Big\}, \quad I = J[\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}J)]^\flat, \quad II = [\delta\mathcal{N}_f]^\flat.$$

第一部分中，我们处理 I；第二部分中，我们处理 II。

我们先引入以下引理。

引理 A.1 ([30, 引理 3。19])。设 (M,g) 为一个黎曼流形，ψ_t 为向量场 $\xi \in \Gamma(TM)$所生成的流，我们有

$$\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{D}^{\psi_t^* g}_X Y = \mathrm{D}^2_{X,Y}\xi + R(X,\xi)Y, \forall X, Y \in \Gamma(TM). \tag{A.2}$$

引理 A.2（[23, 引理 2.2]）。对于任意实 1-形式 α,

$$(\delta\mathrm{D}^+\alpha - \delta\mathrm{D}^-\alpha)(X) = -\rho^*(JX, \alpha^\sharp) - \sum_{j=1}^n \mathrm{D}_{Je_j}\alpha((\mathrm{D}_{e_j}J)X),$$

其中星号里奇形式 ρ^* 定义于（2.12）中。

引理 A.3. 对任意 $\xi \in \Gamma(TM)$,

$$(\delta \mathrm{D}\xi)^\flat = \delta \mathrm{D}(\xi^\flat).$$

证明。对于 M 上的任意 1-形式 α，我们定义 $\gamma, \theta \in \Omega(M)$ 为

$$\gamma(X) = \mathrm{D}_X\alpha(\xi),\ \eta(X) = \alpha(\mathrm{D}_X\xi),\quad \forall X \in \Gamma(TM), \tag{A.3}$$

于是有

$$\mathrm{div}\gamma = -\langle \mathrm{D}\alpha, \mathrm{D}\xi\rangle + \delta\mathrm{D}\alpha(\xi),\ \mathrm{div}\eta = -\langle \mathrm{D}\alpha, \mathrm{D}\xi\rangle + \alpha(\delta\mathrm{D}\xi),$$

其中局部地，$\langle \mathrm{D}\alpha, \mathrm{D}\xi\rangle = g^{ij}\mathrm{D}_i\alpha(\mathrm{D}_j\xi)$，由于 $\int_M \mathrm{div}\gamma = \int_M \mathrm{div}\eta = 0$，我们有

$$\langle \alpha, \delta\mathrm{D}\xi^\flat\rangle = \langle \delta\mathrm{D}\alpha, \xi^\flat\rangle = \int_M \delta\mathrm{D}\alpha(\xi) = \int_M \alpha(\mathrm{D}^*\mathrm{D}\xi) = (\alpha, (\delta\mathrm{D}\xi)^\flat).$$

□

第一部分已在[36] 局部正交标架中$\{e_i, \dots, e_n\} = \{e_1, e_2, \dots e_m, Je_1, \dots, Je_m\}$进行了部分计算。我们将继续进行计算，并给出一个全局表达式。

引理 A.4。对于任意 $X \in \Gamma(TM)$,

$$I(X) = -2\delta(\mathrm{D}^+df - \mathrm{D}^-df)(X) - 2\rho^*(JX, \mathrm{grad}f) - \Delta df(X) + 2\mathrm{Ric}(\mathrm{grad}f, X).$$

证明。记 ψ_t 向量场 $\mathrm{grad}f$的流。由推论 2.3，有$\psi_t^*(\delta J) = \delta^{g_t}J_t = 0$其中 $g_t = \psi_t^*g$，$J_t = \psi_t^*J$。作用 $\frac{d}{dt}|_{t=0}$于 $\delta^{g_t}J_t = 0$，有

$$\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}f}J) = \delta(\frac{d}{dt}|_{t=0}\psi_t^*J) = -\frac{d}{dt}|_{t=0}\delta^{\psi_t^*g}J = \frac{d}{dt}|_{t=0}\sum_{i,j=1}^n(\psi_t^*g)^{ij}\mathrm{D}^t_{e_i}(J)(e_j). \tag{A.4}$$

由（A.4）可得

$$\begin{aligned}\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{grad}f}J) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{d}{dt}|_{t=0}(\psi_t^*g)^{ij}\mathrm{D}_{e_i}(J)e_j + \delta_{ij}\frac{d}{dt}|_{t=0}\mathrm{D}^t_{e_i}(J)(e_j)\\ &= \sum_{i,j=1}^n -2(\mathrm{Hess}f)_{ij}\mathrm{D}_{e_i}(J)e_j + \delta_{ij}\frac{d}{dt}|_{t=0}[\mathrm{D}^t_{e_i}(Je_j) - J(\mathrm{D}^t_{e_i}e_j)].\end{aligned} \tag{A.5}$$

根据引理 A.1，我们有 $\delta_{ij}\frac{d}{dt}|_{t=0}[\mathrm{D}^t_{e_i}(Je_j) - J(\mathrm{D}^t_{e_i}e_j)]$,的表达式，即

$$\begin{aligned}&= \sum_{i=1}^n [\mathrm{D}^2_{e_i,Je_i}\mathrm{grad}f + R(e_i, \mathrm{grad}f)Je_i - J\mathrm{D}^2_{e_i,e_i}\mathrm{grad}f - JR(e_i, \mathrm{grad}f)e_i]\\ &= \sum_{i=1}^n [\mathrm{D}^2_{e_i,Je_i}\mathrm{grad}f + R(e_i, \mathrm{grad}f)Je_i + J\delta\mathrm{D}\mathrm{grad}f - J\mathrm{Ric}(\mathrm{grad}f)].\end{aligned} \tag{A.6}$$

由于局部标架 $\{e_i\}$ 的形式，我们得到

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{D}^2_{e_i,Je_i}\mathrm{grad}f = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mathrm{D}^2_{e_i,Je_i}\mathrm{grad}f - \mathrm{D}^2_{Je_i,e_i}\mathrm{grad}f = -\frac{1}{2}R(e_i, Je_i)\mathrm{grad}f. \tag{A.7}$$

比安基恒等式给出

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} R(e_i, \mathrm{grad} f) J e_i =& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} R(e_i, \mathrm{grad} f) J e_i - R(J e_i, \mathrm{grad} f) e_i \\ =& \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} R(e_i, J e_i)\mathrm{grad} f.\end{aligned} \tag{A.8}$$

由于（A.7）和（A.8）相加为零，（A.5）变为

$$\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{grad} f} J) = -2\mathrm{D}_{e_i}(J)\mathrm{D}_{e_i}\mathrm{grad} f + J\delta \mathrm{D}\mathrm{grad} f - J\mathrm{Ric}(\mathrm{grad} f). \tag{A.9}$$

将引理 A.3 应用于（A.9）右端的第二项，可得

$$J(\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{grad} f} J))^{\flat}(X) = 2\mathrm{D}_{Je_i} df(\mathrm{D}_{e_i}(J)X) - \delta \mathrm{D} df(X) + \mathrm{Ric}(\mathrm{grad} f, X).$$

对1-形式使用魏岑伯克公式，我们进一步写为

$$J(\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{grad} f} J))^{\flat}(X) = 2\mathrm{D}_{Je_i} df(\mathrm{D}_{e_i}(J)X) - \Delta df(X) + 2\mathrm{Ric}(\mathrm{grad} f, X).$$

代入引理 A.2，得到如下恒等式。 □

现在计算第二部分 II，我们首先引入以下引理 .

引理 A.5. 设 (M, g, J, ω) 是一个近似 K ¨ahler 流形，设 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 是一个标准正交标架，那么对于任意向量场 $X \in \Gamma(TM)$，有

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}^2_{X, e_i} J) e_i = 0.$$

证明. 直接计算可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}^2_{X, e_i} J) e_i =& \sum_{i=1}^{n} [(\mathrm{D}_X \mathrm{D}_{e_i} J) e_i - (\mathrm{D}_{\mathrm{D}_X e_i} J) e_i] \\ =& \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_X((\mathrm{D}_{e_i} J) e_i) - (\mathrm{D}_{e_i} J)\mathrm{D}_X e_i - (\mathrm{D}_{\mathrm{D}_X e_i} J) e_i.\end{aligned}$$

引理 2.3推出 $\delta J = -\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}_{e_i} J) e_i = 0$. 因此有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}^2_{X, e_i} J) e_i =& \sum_{i=1}^{n} -(\mathrm{D}_{e_i} J)\mathrm{D}_X e_i - (\mathrm{D}_{\mathrm{D}_X e_i} J) e_i \\ =& \sum_{i,j=1}^{n} -g(\mathrm{D}_X e_i, e_j)(\mathrm{D}_{e_i} J) e_j - g(\mathrm{D}_X e_i, e_j)(\mathrm{D}_{e_j} J) e_i \\ =& \sum_{i,j=1}^{n} -(g(\mathrm{D}_X e_i, e_j) + g(e_i, \mathrm{D}_X e_j))(\mathrm{D}_{e_i} J) e_j.\end{aligned} \tag{A.10}$$

(A.10中的最后一行等于零，因为 $g(e_i, e_j) = \delta_{ij}$,

$$g(\mathrm{D}_X e_i, e_j) + g(e_i, \mathrm{D}_X e_j) = X g(e_i, e_j) = 0.$$

□

引理 A.6. 对任意 $X \in \Gamma(TM)$,

$$II(X) = (\delta\mathcal{N}_f)^\flat(X) = -\frac{1}{2}\rho^*(X, \mathrm{grad} f) - \frac{1}{2}\mathrm{Ric}(X, \mathrm{grad}_\omega f).$$

证明。选取一个辅助局部正交标架 $\{e_1, \ldots, e_n\}$，我们有

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{N}_f =& -\sum_{i=1}^n \mathrm{D}_{e_i}(\mathcal{N}_f(e_i)) + \sum_{i=1}^n \mathcal{N}_f(\mathrm{D}_{e_i}e_i)\\ =& -\sum_{i=1}^n D_{e_i}N(\mathrm{grad}_\omega f, e_i) + \sum_{i=1}^n N(\mathrm{grad}_\omega f, \mathrm{D}_{e_i}e_i).\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}&(\delta\mathcal{N}_f)^\flat(X)\\ =& -g(D_{e_i}N(\mathrm{grad}_\omega f, e_i), X) + g(N(\mathrm{grad}_\omega f, \mathrm{D}_{e_i}e_i), X)\\ =& -D_{e_i}g(N(\mathrm{grad}_\omega f, e_i), X) + g(N(\mathrm{grad}_\omega f, e_i), D_{e_i}X) + g(N(\mathrm{grad}_\omega f, \mathrm{D}_{e_i}e_i), X).\end{aligned}$$

这里省略求和记号 $\sum_{i=1}^n$。代入（2.5），得到

$$\begin{aligned}&2(\delta\mathcal{N}_f)^\flat(X)\\ =& -D_{e_i}g(\mathrm{D}_{JX}J)e_i, \mathrm{grad}_\omega f) + g((\mathrm{D}_{JD_{e_i}X}J)e_i, \mathrm{grad}_\omega f) + g((\mathrm{D}_{JX}J)\mathrm{D}_{e_i}e_i, \mathrm{grad}_\omega f)\\ =&D_{e_i}g((\mathrm{D}_X J)e_i, \mathrm{grad} f) - g((\mathrm{D}_{D_{e_i}X}J)e_i, \mathrm{grad} f) - g((\mathrm{D}_X J)\mathrm{D}_{e_i}e_i, \mathrm{grad} f)\\ =&g((D_{e_i}\mathrm{D}_X J)e_i, \mathrm{grad} f) - g((\mathrm{D}_{D_{e_i}X}J)e_i, \mathrm{grad} f) + g((\mathrm{D}_X J)e_i, \mathrm{D}_{e_i}\mathrm{grad} f)\\ =&g((D^2_{e_i,X}J)e_i, \mathrm{grad} f) + g((\mathrm{D}_X J)e_i, \mathrm{D}_{e_i}\mathrm{grad} f)\\ =&g((D^2_{e_i,X}J)e_i, \mathrm{grad} f) + \mathrm{Hess} f((\mathrm{D}_X J)e_i, e_i).\end{aligned}$$

定义 $H_f \in \Gamma(\mathrm{End}(TM))$ 为 $H_f(X) = \mathrm{D}_X\mathrm{grad} f$，即 $g(H_f(X)\ Y) = \mathrm{Hess} f(X, Y)$。因此 H_f 关于 g是自伴的，即

$$g(H_f(X), Y) = g(X, H_f(Y)).$$

但是，由于 J 是反自伴的，$\mathrm{D}_X J$ 是反自伴的，我们得到

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{Hess} f((\mathrm{D}_X J)e_i, e_i) = \mathrm{tr}(H_f \circ D_X J) = 0.$$

于是我们有

$$(\delta\mathcal{N}_f)^\flat(X) = \frac{1}{2}g((D^2_{e_i,X}J)e_i, \mathrm{grad} f).$$

我们应用引理A.5 得出结论

$$\begin{aligned}(\delta\mathcal{N}_f)^\flat(X) =& \frac{1}{2}g((D^2_{e_i,X}J)e_i - (D^2_{X,e_i}J)e_i, \mathrm{grad} f)\\ =& -\frac{1}{2}g((R(e_i, X)J)e_i, \mathrm{grad} f)\\ =& -\frac{1}{2}g(R(e_i, X)(Je_i) - JR(e_i, X)e_i, \mathrm{grad} f)\end{aligned}$$

再次利用（A.8），我们得到

$$\begin{aligned}(\delta\mathcal{N}_f)^\flat(X) =& -\frac{1}{4}R(e_i, Je_i, X, \mathrm{grad} f) - \frac{1}{2}\mathrm{Ric}(X, \mathrm{grad}_\omega f)\\ =& -\frac{1}{2}\rho^*(X, \mathrm{grad} f) - \frac{1}{2}\mathrm{Ric}(X, \mathrm{grad}_\omega f).\end{aligned}$$

□

现在我们完成定理 1.5 的证明，这由引理 A.4 和引理A.6 可得：

$$\begin{aligned}&J(\delta(J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}J))^\flat(X)\\ =&(\delta(\mathcal{L}_{\mathrm{grad} f}J))^\flat(JX) + 4(\delta\mathcal{N}_f)^\flat(JX)\\ =&\Delta df(X) - 2\mathrm{Ric}(\mathrm{grad} f, X) - 2\mathrm{Ric}(JX, J\mathrm{grad} f) + 2\delta(\mathrm{D}^+df - \mathrm{D}^-df)(X)\\ =&\Delta df(X) - 4\mathrm{Ric}^+(\mathrm{grad} f, X) + 2\delta(\mathrm{D}^+df - \mathrm{D}^-df)(X)\\ =&\Delta df(X) - 4(\iota_{\mathrm{grad} f}\mathrm{Ric}^+)(X) + 2\delta(\mathrm{D}^+df - \mathrm{D}^-df)(X).\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}\delta(\iota_{\mathrm{grad} f}\mathrm{Ric}^+) =& -\mathrm{D}_{e_i}(\iota_{\mathrm{grad} f}\mathrm{Ric}^+)(e_i)\\ =& -\mathrm{D}_{e_i}(\mathrm{Ric}^+(\mathrm{grad} f, e_i)) + \mathrm{Ric}^+(\mathrm{grad} f, \mathrm{D}_{e_i}e_i)\\ =& -(\mathrm{D}_{e_i}\mathrm{Ric}^+)(\mathrm{grad} f, e_i) + \mathrm{Ric}^+(\mathrm{D}_{e_i}\mathrm{grad} f, e_i)\\ =&\delta\mathrm{Ric}^+(\mathrm{grad} f) - (\mathrm{Ric}^+, \mathrm{Hess} f),\end{aligned}$$

我们得到

$$\begin{aligned}\delta(J(\delta(J\mathcal{L}_{\mathrm{grad}_\omega f}J))^\flat) =&\Delta^2 f - 4g(\delta\mathrm{Ric}^+, df) + 4g(\mathrm{Ric}^+, \mathrm{Hess} f) + 2\delta\delta(\mathrm{D}^+df - \mathrm{D}^-df)\\ =&\Delta^2 f - 4g(\delta\mathrm{Ric}^+, df) + 4g(\rho, dd^c f) + 2\delta\delta(\mathrm{D}^+df - \mathrm{D}^-df).\end{aligned}$$

References

[1] Vestislav Apostolov、David M. J. Calderbank、Paul Gauduchon 和 Christina W. Tø nnesen Friedman。曲线上的射影丛的极值 K¨ahler 度量。 *Adv. Math.*，227(6):2385– 2424，2011。[2] Vestislav Apostolov 和 Tedi Drˇaghici。几乎 K¨ahler 流形的曲率与可积性：综述。载于 *Symplectic and contact topology: interactions and perspectives (Toronto, ON/Montreal, QC, 2001)* 35 *Fields Inst. Commun.* 25 53 ，卷号为 ，页码 – 。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2003。[3] Robert J. Berman 和 Bo Berndtsson。K¨ ähler 度量空间上的 K-能量的凸性及极值度量的唯一性。 *J. Amer. Math. Soc.*，30(4):1165–1196，2017。[4] Arthur L. Besse。 *Einstein manifolds*。数学经典丛书。Springer-Verlag，柏林，2008。1987年版的重印本。[5] Eugenio Calabi。极值 K¨ahler 度量。载于 *Seminar on Differential Geometry*，*Ann. of Math. Stud.*第102卷，页码259–290。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，1982。[6] Eugenio Calabi。极值 K¨ahler 度量。II。载于 *Differential geometry and complex analysis*，页码95–114。Springer，柏林，1985。[7] Xiuxiong Chen 和 Song Sun。Calabi 流、测地射线与常标量曲率 K¨ ähler 度量的唯一性。 *Ann. of Math. (2)*，180(2):407–454，2014。[8] Xiuxiong Chen 和 Gang Tian。极值 K ¨ *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 340 4 287 290, 2005 ähler 度量的唯一性。 ， ( ): – 。

[9] S. K. Donaldson。关于规范理论、复几何和
4 *Fields* -流形拓扑的评 *Medallists' lectures* 5 *World Sci. Ser. 20th Century Math.* 384 403
论。载于，卷号为，页码–。世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇，1997。[10] S. K. Donaldson。对称空间、
K ¨ *Northern* ähler 几何与 *California Symplectic Geometry Seminar* 196 *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*
哈密顿动力学。载于，卷号为，页码13–33。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1999。[11] Simon K.
Donaldson。K ¨ *Strings and geometry* 3 *Clay*
Math. Proc. 71 78 2004
ähler 几何中的猜想。载于，卷号为，页码–。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，。[12] Akira Fujiki。极化代
数流形的模空间与 K¨ähler 度量 [《数理》42（1990），第3期，231–243页的译文；MR1073369（92b:32032）
]。第5卷，页码173–191。1992。《数理》论丛。[13] Akito Futaki 和 Toshiki Mabuchi。与 K¨ähler 类相关的双
线性形式和极值 K¨ähler 向量场。 *Math. Ann.*，301(2):199–210，1995。[14] Oscar Garc´ıa-Prada 和
Dietmar Salamon。里奇形式、K
¨ ¨ *Integrability quantization and geometry* ähler–爱因斯坦 *II. Quantum theories and algebraic geometry* 103 *Proc. Sympos. Pure Math.*
结构与特克缪勒空间的动量映射解释。载于，，，卷号为，页码223–255。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，
[2021] ©2021。[15] Oscar Garc´ıa-Prada、Dietmar A. Salamon 和 Samuel Trautwein。复结构、动量映射与
里奇形式。 *Asian J. Math.*，24(5):821–853，2020。[16] Paul Gauduchon。厄米联络与狄拉克算子。
Boll. Un. Mat. Ital. B (7)，11(2，增刊):257–288，1997。[17] Paul Gauduchon。Calabi 的极值 K¨ähler 度量:
入门介绍。 *Preprint*，34:37–40，2010。[18] Julien Keller 和 Mehdi Lejmi。厄米标量曲率的 L^2-范数下界。
J. Symplectic Geom.，18(2):537–558，2020。[19] Jongsu Kim 和 Chanyoung Sung。紧致 K¨ähler 流形上具有
常标量曲率的几乎 K¨ähler 度量的变形。 *Ann. Global Anal. Geom.*，22(1):49–73，2002。[20] Shoshichi
Kobayashi 和 Katsumi Nomizu。 *Foundations of differential geometry. Vol. II*。威利经典丛书。约翰·威利父子
公司，纽约，1996。1969年原版的重印本，威利—英特科学出版社出版物。[21] C. LeBrun 和 S. R. Simanca。极
值 K ¨ *Geom.* ähler 度量
Funct. Anal. 4 3 298 336, 1994
与复变形理论。，（）:–。[22] Eveline Legendre。关于极值环面几乎 K¨ähler 度量的一则注记。载于
Moduli of K-stable varieties， *Springer INdAM Ser.*第31卷，页码53–74。Springer，尚，2019。[23] Mehdi
Lejmi。极值几乎 K¨ähler 度量。 *Internat. J. Math.*，21(12):1639–1662，2010。[24] Mehdi Lejmi。四维极值
几乎 K¨ähler 度量在变形下的稳定性。*Math. Res. Lett.*，17(4):601–612，2010。[25] Haozhao Li、Bing
Wang 和 Kai Zheng。关于 Calabi 流的正则性尺度与收敛性的更正 [MR3833786]。 *J. Geom. Anal.*，
29(3):3010，2019。[26] Andr´e Lichnerowicz。 *Géométrie des groupes de transformations*。《数学研究与
论著》第三卷。迪诺出版社，巴黎，1958。[27] Andr´e Lichnerowicz。
Géométrie des groupes de transformations，第3卷。迪诺出版社，1958。[28] Toshiki Mabuchi。积分 Kähler
类上极值 K ¨ ¨ *Internat.*
J. Math. 15 6 531 546, 2004
ähler 度量的唯一性。，（）:–。[29] Dusa McDuff 和 Dietmar Salamon。 *Introduction to symplectic topology*。
牛津数学研究生教材。牛津大学出版社，牛津，第三版，2017。[30] Vincent Minerbe。引力瞬子的渐近几何。
Ann. Sci. Éc. Norm.，（）:–。[31]
Supér. (4) 43 6 883 924, 2010
O Mohsen。哈密顿辛同胚与 K¨ähler 度量。 *Mémoire de DEA*,
Univ. Paris 7 2003 ，，。[32]
Peter Petersen。 *Riemannian geometry*， *Graduate Texts in Mathematics*第171卷。Springer，尚，第三版，
2016。

[33] Yann Rollin、Santiago R. Simanca 和 Carl Tipler。《极值度量的变形、复流形与相对 Futaki 不变量》。 *Math. Z.*，273(1-2):547–568，2013。[34] G´abor Sz´ekelyhidi。《K¨ahler-Ricci 流与 K-多重稳定性》。 *Amer. J. Math.*，132(4):1077–1090，2010年。[35] Gang Tian。《 *Canonical metrics in Kähler geometry*》。苏黎世联邦理工学院数学讲义。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2000年。笔记由 Meike Akveld 整理。[36] Caroline Vernier。《紧致复曲面带有 A_1 奇点的近 K¨ahler 平滑化》。*J. Symplectic Geom.*，18(5):1319–1390，2020年。[37] 王丽静。Calabi 泛函与范数函数的海森矩阵。 *Ann. Global Anal. Geom.*，29(2):187–196，2006年。

(Jie He) School of Mathematics and Physics Beijing University of Chemical Technol- , , , , ogy Chaoyang District Beijing 100029 P.R. China
Email address, Jie He: hejie@amss.ac.cn; moltke@sina.com

(Kai Zheng) University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, P.R. China
Email address, KaiZheng：KaiZheng@amss.ac.cn