信道老化对雷达通信双功能系统的影响：性能分析与资源分配

Jie Chen，IEEE 会员，Xianbin Wang，IEEE 会士，以及 Ying-Chang Liang，IEEE 会士 *E*

arXiv:2303.00634v1 [cs.IT] 1 Mar 2023

摘要——在传统的双功能雷达通信（DFRC）系统中，雷达和通信信道通常根据最坏情况运行场景，以固定时间间隔进行估计。这种不考虑具体情况的重复估计会带来显著的训练开销，并大幅降低系统性能，尤其是在感知/通信需求动态变化且无线电资源有限的应用中。本文利用信道老化特性来降低训练开销，并针对多目标跟踪 DFRC 系统设计一种依赖具体情况的信道重新估计间隔优化型资源分配方案，以提升系统性能。具体而言，我们利用信道时间相关性预测雷达和通信信道，从而减少训练前导码重传的需求。随后，我们分析信道老化效应对克拉美-罗下界（CRLBs）的影响，以开展雷达跟踪性能分析；并分析其对采用最大比传输（MRT）和迫零（ZF）发射波束成形时可达速率的影响，以评估通信性能。特别是，我们推导出老化克拉美罗下界和可达速率关于信道老化时间、带宽和功率的闭式表达式。基于分析结果，我们对这些因素进行优化，在满足各目标跟踪精度需求、通信速率要求及其他实际约束的前提下，使平均总老化可达速率最大化。由于所构建的问题属于非凸问题，我们提出了一种高效的基于一维搜索的优化算法，以获得其次优解。最后，仿真结果验证了所推导理论结果的正确性，以及所提分配方案的有效性。

索引词——双功能雷达通信、信道老化、性能分析、资源分配。

I. 引言

双功能雷达通信（DFRC）系统已成为未来无线系统与网络，尤其是5G后续演进及6G [1]–[3]中的一种前景广阔的范式。凭借同时满足严格的感知和传输需求的能力，DFRC能够支持增强现实/虚拟现实、智能交通和智能制造等多种新型应用场景。通常，DFRC系统是一种联合设计的共存系统，它通过共享信号波形、硬件和无线电资源，将雷达感知与通信功能集成到统一的物理平台中。鉴于其诸多优势和广阔前景，工业界和学术界一直在深入研究DFRC系统。

由于无线电资源始终受限，DFRC中感知与通信之间的高效无线电资源共享，对于系统设计以实现并行功能之间期望的性能折衷起着至关重要的作用[4]。总体而言，现有关于DFRC系统资源共享设计的研究可分为三类，即通信中心方案 [5]–[11], 、感知中心方案 [12]–[18], 和联合中心方案[19]–[21]。具体而言，对于通信中心方案，无线电资源被分配用于优化通信性能指标，例如能量效率[5]，、中断概率 [6]，、比特错误率（BER） [7]，以及可实现的最小速率/和速率/保密速率 [8]–[11], ，同时满足期望的雷达性能要求。对于感知中心方案，资源分配研究旨在优化感知性能指标，例如期望的感知波束图 [12], 、雷达检测概率 [13]–[15], 以及估计精度，包括均方误差 [16] 和克拉美罗下界（CRLB） [17], [18],，并以通信性能要求为约束。对于联合中心方案，研究考虑了通信与雷达的加权目标。例如，在 [19], 中，考虑训练开销和信道估计误差的影响，对感知与通信的加权互信息进行了优化；在 [20], 中，通过设计自适应虚拟发射信号波形，对雷达克拉美罗下界和通信失真最小均方误差（MMSE）的加权和进行了优化；在 [21], 中，通过在基于IRS的DFRC系统中联合优化主动与被动波束成形，最小化雷达与通信的功耗之和。

此外，上述研究 [5]–[21] 聚焦于单传输块场景下感知与通信性能之间的权衡，因此无法应用于涉及多个传输块的目标跟踪场景。事实上，目标跟踪是一项重要任务，过去几十年来已受到广泛研究 [22]–[27]。具体而言，在传统雷达系统的目标跟踪设计中 [22]–[24], ，文献 [22] 和[23], 分别研究了多波束资源分配与功率分配，以最小化多个目标中的最大贝叶斯克拉美罗下界；文献 [24] 则研究了联合功率与带宽分配，以最小化加权后验克拉美罗下界。至于 DFRC

J. Chen 和 X. Wang 就职于加拿大安大略省伦敦市西安大略大学电气与计算机工程系，邮编 N6A 5B9（电子邮箱：chenjie.ay@gmail.com、xianbin.wang@uwo.ca）。Y.-C. Liang 就职于新加坡科技研究局（A*STAR）资讯通信研究院（I²R），邮编 138632（电子邮箱：liangyc@ieee.org）。

系统 [25]–[27], , 文献 [25], 采用雷达测距方法来降低波束对准的训练开销，并在 IEEE 802.11ad 协议下分析了通过在雷达模式与通信模式之间进行时间分配所实现的成本效益权衡。随后，研究提出了消息传递 [26], 、扩展卡尔曼滤波 [27], 和深度学习 [28] 方法，用于估计/预测目标运动学参数，并进一步将其用于指导资源分配，以提升通信性能。

然而， [5]–[29] 中的大多数研究都旨在按照固定时间间隔定期估计通信信道状态信息（信道状态信息）或雷达感知信息（例如目标移动性/位置）。这种估计间隔是根据所有用户中的最坏情况设计的，并未考虑具体的信道状况以及感知/通信需求，因此会造成冗余并带来显著的训练开销。事实上，由于目标/用户运动的连续性，实际的感知/通信信道具有时间相关性 [30]。可以利用这种相关性来预测感知信息和通信信道状态信息 [31]。这样，便可根据具体需求延长重新估计时间间隔，从而减少训练开销并提高资源利用效率。由于时间间隔越长，这种时间相关性就越弱，因此感知信息和通信信道状态信息的预测准确度会随时间降低，这种现象也称为信道老化效应。

通信系统中已有研究探讨信道老化效应以及如何优化信道重新估计时间间隔以减少训练开销 [32]–[36]。具体而言，对于单用户多输入多输出（多输入多输出）场景 [32], ，研究刻画了信道老化对系统吞吐量的影响，并根据最小吞吐量条件推导出最大训练时间间隔。对于多用户多输入多输出场景 [33]–[35], ， [33], [34] 评估了采用老化信道状态信息时的和速率，并考虑了训练开销与数据传输之间的时间分配权衡。在 [35], 中，研究提出了一种间歇式信道估计方案以减少训练开销，并通过优化各用户的训练时间间隔来最大化总吞吐量。此外，对于无小区多输入多输出场景[36], ，研究推导了上行链路和下行链路传输中的频谱效率（SE），并设计了源块长度以减轻信道老化对频谱效率的负面影响。尽管研究通信系统中的信道老化具有显著益处，但据我们所知，目前尚无研究探讨DFRC系统中的信道老化；在此类系统中，雷达通信性能分析和资源分配设计仍是一个悬而未决的问题。

基于上述原因，本文刻画了信道老化效应对雷达通信性能的影响，并将其用于设计一种情境依赖的资源分配方案，应用于下行多目标跟踪DFRC系统。在该系统中，全双工基站（BS）同时与多个通信用户通信，并跟踪多个目标。该系统采用一种由多个衰落块组成的新型帧结构，以支持雷达目标跟踪、通信信道估计和信息传输。此外，通过发送训练前导码，在第一个区块中估计目标的移动信息和通信用户的信道状态信息（CSI），随后在其余区块中利用信道老化特性进行预测，而无需重复发送训练前导码。然后，通过设计资源分配方案并根据具体的雷达和通信需求优化信道重新估计间隔，可以提高资源利用效率。最后，为了突出本文的贡献，现将本文工作总结如下：

- 据我们所知，这是首次刻画DFRC系统中的信道老化效应。具体而言，我们刻画了信道老化对跟踪性能（即预测移动信息的克拉美罗下界）和通信性能（即在最大比传输（MRT）与迫零（ZF）发射波束成形下，利用预测信道状态信息（CSI）得到的可达速率）的影响。特别地，我们推导出老化后的克拉美–罗下界和可达速率的闭式表达式，并将其表示为分配带宽、功率资源和信道老化时间的函数。此外，为了直观地理解信道老化效应，我们提出一种近似方法，以简化推导出的克拉美–罗下界表达式，并针对发射功率对可达速率进行渐近分析。

- 基于推导出的老化跟踪性能和通信性能，我们提出了一种视具体情况而定的联合信道重新估计间隔及其他无线资源分配方案，以降低系统训练开销并提升性能。具体而言，我们构建了一个平均总老化可达速率最大化问题，并将个体跟踪精度需求、定制化通信速率要求及其他实际约束纳入考量。由于该问题属于非凸混合整数非线性规划（MINLP）问题，我们设计了一种高效的基于一维搜索的优化算法，以求得其次优解。

- 仿真结果表明，仿真的克拉美–罗下界和可达速率可以接近推导出的理论结果。此外，所提算法的性能接近上界性能，并显著优于其他基准方案。

本文其余部分安排如下：第二节介绍多目标/多用户双功能雷达通信系统模型。第三节介绍雷达和通信信道估计算法，并刻画信道老化效应对跟踪性能和通信性能的影响。随后，第四节利用所刻画的结果研究平均总老化可达速率最大化问题，并给出相应的高效解法。最后，第五节给出仿真结果，第六节总结全文。

符号说明：我们用 $\mathbb{N}$ 和 I_M 分别表示自然数集和 $M \times M$ 单位矩阵。我们用 $\mathbb{E}(\cdot)$ 和 $\mathrm{var}(\cdot)$ 分别表示变量的期望和方差，并用 $\mathrm{diag}(\cdot)$ 返回一个方对角矩阵，其元素对应于

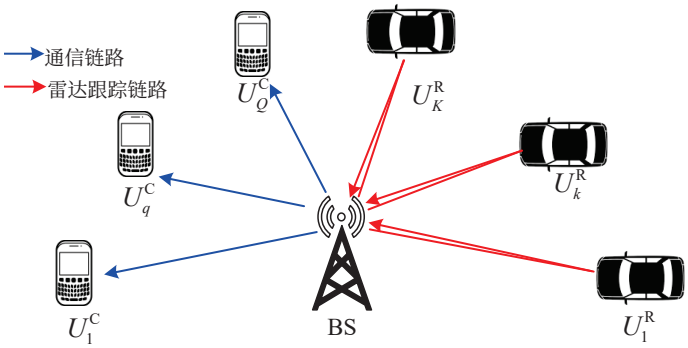


图1：一个包含一台全双工基站、 K个跟踪目标和 Q 个通信接收机的下行双功能雷达通信系统。

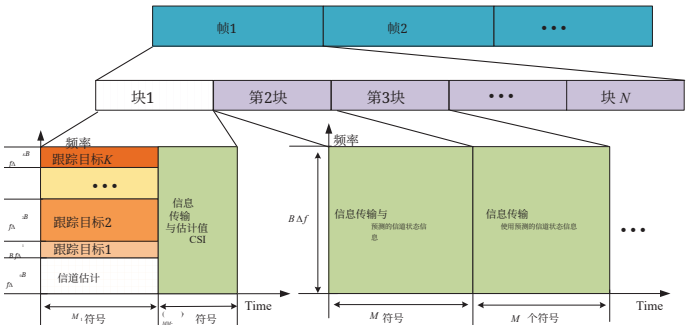


图2：传输帧结构，其中每帧包含 N 个块，每个块包含 M 个符号时长。

向量，或矩阵主对角线元素构成的列向量。最后，均值为 μ 、方差为 σ^2 的圆对称复高斯（ CSCG ）分布记为 $\mathcal{CN}\left(\mu,\sigma^2\right)$。

II. 系统模型

如图1所示，我们考虑一个下行双功能雷达通信系统，该系统由一台配备 L_t根发射天线和 L_r 根接收天线的全双工基站、 K 个雷达跟踪目标（记为 U_k^{R}，对应 $1 \leq k \leq K$）以及 Q 个单天线通信接收机（记为 U_q^{C}，对应 $1 \leq q \leq Q$）组成。为了降低训练开销，并高效实现雷达目标移动跟踪与面向通信接收机的信息传输这两种功能，我们需要首先刻画信道老化效应对雷达与通信性能随传输时间变化的影响，然后提出一种资源分配方案，在系统性能约束下动态优化信道重新估计间隔。因此，我们提出了由多个帧组成的传输帧结构，如图2所示。具体而言，每帧包含 N 个传输块，每个块包含 M 个符号时长。特别地，每帧的第一个区块分为两个阶段，即用于目标跟踪和信道估计的第一阶段，以及用于信息传输的第二阶段。在包含 M_1个符号时长的第一阶段，基站发送训练信号，以跟踪所有目标的移动信息。同时，通信接收机利用接收到的训练信号执行信道估计，并向基站发送反馈[1]。在包含剩余（$M-M_1$）个符号时长的第二阶段，基站利用第一阶段估计得到的信道状态信息，通过波束成形技术向通信接收机发送独立信息。

此外，我们假设雷达和通信信道在所有传输块之间具有时间相关性

[1]请注意，在反馈处理过程中会存在时延和量化误差。低分辨率量化信道状态信息会增加信道估计误差，而高分辨率量化信道状态信息会增加反馈开销。二者都会降低传输性能。因此，量化误差与信道状态信息反馈开销之间存在性能权衡。考虑到篇幅和系统设计的复杂性，我们假设反馈时延和量化误差可以忽略，并将这些因素影响的相关研究留作未来的扩展工作。

每个帧。因此，在剩余的 $(N-1)$ 个块中，基站可以利用第一个区块中估计的信息，预测所有目标的移动信息以及所有通信用户的信道状态信息。采用这种方法后，无需在剩余块中重复传输用于信道估计和目标跟踪的专用信号，从而可以降低训练开销，并释放全部无线电资源用于信息传输[2]。

然而，由于信道老化效应，随着时间增加，预测的移动信息和通信信道状态信息的准确性可能无法满足系统性能要求。因此，我们需要刻画信道老化效应对雷达和通信性能的影响，然后针对特定的感知和通信需求设计资源分配方案，以提高资源利用效率，并调整重新估计间隔 N，从而减少开销、提升性能。

A. 信号模型

本节介绍第一个块的第一阶段中用于雷达目标跟踪和通信信道估计的信号模型，以及第一个块的第二阶段和其余块中的信息传输模型。

如图2所示，在第一个块的第一阶段，基站发射的用于信道估计和雷达目标跟踪的训练信号可表示为

$$\mathbf{s}(t)=\underbrace{\sqrt{p_0}\mathbf{w}_0(t)s_0(t)}_{\text{Channel estimation}}+\underbrace{\sum_{k=1}^{K}\sqrt{p_k}\mathbf{w}_k(t)s_k(t)}_{\text{Target tracking}},\quad 0\leq t\leq M_1T, \tag{1}$$

其中， p_k 和 $\mathbf{w}_k(t)\in\mathbb{C}^{L_t\times 1}$ 分别表示下行链路发射功率和在 k 个上的归一化功率波束形成器

[2]尽管可以利用剩余（$N-1$）个块中的通信信号进行目标跟踪，如 [15], 所示，但我们需要谨慎设计下行波束形成矩阵，以保证传输和跟踪性能。这是因为基站部署的大规模天线以及相互分离的目标和接收机位置，使通信与雷达信道几乎相互独立且正交。因此，这不仅会降低通信性能，还会增加设计复杂度，从而使信道老化时间影响的性能分析极具挑战性。此外，本文关注的是信道老化时间的性能分析，而非波束成形设计，因此本文仅使用通信信号进行数据传输。

分别位于时间瞬间 t的频带。这里， $s_k\ (t)$ 是第 k个频带上经过正交频分复用（OFDM）调制的训练信号，包含 B_k 个子载波；当 $k=0$ 时，该信号用于估计所有通信用户的信道；当 $1\le k\le K$时，则用于跟踪第 k个目标，即：

$$s_k(t)=\sum_{m=0}^{M_1-1}\sum_{b=0}^{B_k-1}\tilde{s}_{m,b}^{k}e^{j2\pi\left(\sum_{i=0}^{k-1}B_i+b\right)\Delta_f(t-T_{cp}-mT)}\times \mathrm{rect}\left(t-mT\right),0\le t\le M_1T, \quad (2)$$

其中，$\tilde{s}_{m,\ b}^{k}$ 是第 m个正交频分复用符号中第 k个频带的第 b个子载波上发射的复调制符号，其功率为$\frac{1}{B_k}$； T_{cp} 是循环前缀的时长， $T_o=\frac{1}{\Delta_f}$是OFDM基本符号时长，$T=T_o+T_{cp}$ 是包含循环前缀的OFDM符号时长。这里，$B=\sum_{k=0}^{K}B_k$ 和 Δ_f 分别是子载波总数和每个子载波的带宽。矩形函数定义为：当 $0\le x\le T$时，$\mathrm{rect}(x)=1$；否则，$\mathrm{rect}(x)=0$。

接下来，在第一个区块的第二阶段以及其余（$N-1$）个块中，令$c_{q,\ n}(t)\sim\mathcal{CN}(0,1)$表示在第 n个块期间时刻 t 发射给接收机 U_q^{C} 的数据信号符号。然后，发射给所有通信接收机的信息信号可表示为

$$\mathbf{s}(t)=\sum_{q=1}^{Q}\sqrt{\tilde{p}_{q,n}}\mathbf{f}_{q,n}c_{q,n}(t),\quad t\in\begin{cases}\left[M_1T,n\widetilde{T}\right], \text{ if } n=1,\\ \left[(n-1)\widetilde{T},n\widetilde{T}\right], \text{ if } 2\le n\le N,\end{cases} \quad (3)$$

其中 $\widetilde{T}=MT$。这里，$\tilde{p}_{q,\ n}$和 $\mathbf{f}_{q,\ n}(t)\in\mathbb{C}^{L_t\times1}$分别表示接收机 U_q^{C}在时间点t 、在第 n个块期间的下行发射功率和归一化功率的波束成形向量。

B. 雷达与通信信道老化模型

本部分介绍雷达和通信信道老化模型，这是预测目标移动信息和通信信道状态信息的基础。

1) 雷达信道老化模型：在第 n个传输块中，我们将目标 U_k^{R} 的移动信息视为其相对于基站的方位角 $\theta_{k,\ n}$、距离 $d_{k,\ n}$和速度 $v_{k\ n}$ $_{k\ n}=$ ，，记为 $\mathbf{x}$, 。根据连续两个块之间的几何关系，如图 3 所示，目标移动状态演化模型可表示为 [27], [28]

$$[\theta_{k,n},d_{k,n},v_{k,n}]^T\in\mathbb{C}^{3\times1}$$

$$\begin{cases}d_{k,n}^2=d_{k,n-1}^2+\Delta_{d_{k,n-1}}^2-2d_{k,n-1}\Delta_{d_{k,n-1}}\cos(\tilde{\theta}_{k,n-1}),\\ \frac{\Delta_{d_{k,n-1}}}{\sin(\theta_{k,n}-\theta_{k,n-1})}=\frac{d_{k,n}}{\sin(\tilde{\theta}_{k,n-1})},\end{cases} \quad (4)$$

~ ~其中 $\Delta_{d_{k,\ n-1}}=v_{k,\ n-1}T$和 $\theta_{k,\ n-1}=\theta_{k,\ n-1}-\varphi_k$。这里，$\varphi_k$ 是相对于该物体的 U_k^{R}速度方向

[3]这里假设均匀线性阵列部署在基站，并且仅关注雷达目标的方位角，忽略俯仰角。至于三维移动跟踪，则需要部署均匀平面阵列；由于篇幅限制，可在未来的扩展研究中探讨。

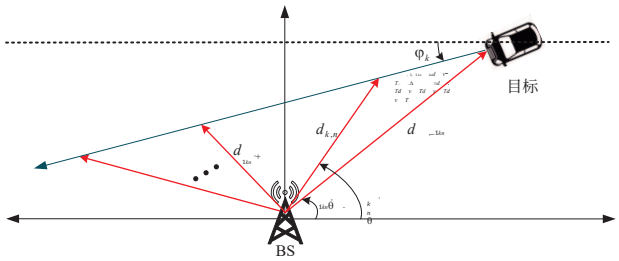


图 3：目标移动状态演化模式 1.

基站的水平方向负向。我们假设基站已知该方向，且其在每个块内保持不变。

采用与 [27], 中类似的近似方法，式 (4) 中的状态演化模型可近似表示为

$$\begin{cases}\theta_{k,n}=\theta_{k,n-1}+d_{k,n-1}^{-1}v_{k,n-1}\widetilde{T}\sin(\tilde{\theta}_{k,n-1})+u_{k,n}^{\theta},\\ d_{k,n}=d_{k,n-1}-v_{k,n-1}\widetilde{T}\cos(\tilde{\theta}_{k,n-1})+u_{k,n}^{d},\\ v_{k,n}=v_{k,n-1}+u_{k,n}^{v},\end{cases} \quad (5)$$

其中，$u_{k,\ n}^{\theta}$、$u_{k,\ n}^{d}$ 和 $u_{k,\ n}^{v}$ 分别为角度、距离和速度对应的评估噪声。这里，假设 $u_{k,\ n}^{\theta}$、$u_{k,\ n}^{d}$ 和 $u_{k,\ n}^{v}$ 均服从均值为零、方差分别为 δ_k^{θ}、 δ_k^{d} 和 δ_k^{v} 的高斯分布。

根据式 (5) 中的近似评估模型，一个块时间老化内的雷达信道老化模型可改写为

$$\mathbf{x}_{k,n}=\mathcal{G}\left(\mathbf{x}_{k,n-1}\right)+\mathbf{u}_{k,n}, \quad (6)$$

其中，$\mathcal{G}(\cdot)$ 是依赖于式 (5) 的函数，而 $\mathbf{u}_{k,\ n}=\left[u_{k,\ n}^{\theta},u_{k,\ n}^{d},u_{k,\ n}^{v}\right]^T\in\mathbb{C}^{3\times1}$ 是方差为 $\mathbf{\Sigma}_k=\mathrm{diag}\left(\delta_k^{\theta},\delta_k^{d},\delta_k^{v}\right)\in\mathbb{C}^{3\times3}$ 的噪声。

2) 通信信道老化模型：为简单起见，我们假设通信信道不存在频率选择性 [37][4]。令 $\mathbf{h}_{q,n}\in\mathbb{C}^{L_t\times1}$ 表示第 n 个块中从基站到接收机 U_q^{C} 的下行信道响应，并假设其服从瑞利衰落，即 $\mathbf{h}_{q,0}\sim\mathcal{CN}(0,\beta_q\mathbf{I}_{L_t})$，其中 β_q 表示大尺度衰落效应。于是，一个块时间老化内的通信信道老化模型可表示为 [31], ，即，

$$\mathbf{h}_{q,n}=\rho_q\mathbf{h}_{q,n-1}+\sqrt{1-\rho_q^2}\mathbf{e}_{q,n}, \quad (7)$$

其中 $\boldsymbol{e}_{q,n}$ 是第 n 个块中的非相关复高斯噪声，假设 $\boldsymbol{e}_{q,\ n}\sim\mathcal{CN}(0,\beta_q\mathbf{I}_{L_t})$；参数 ρ_q 是取决于接收机 U_q^{C} 的多普勒频移 $\widetilde{f}_q$ 的时间相关系数。在 Jakes模型中，该系数通常表示为 $\rho_q=J_0\left(2\pi\widetilde{f}_q\widetilde{T}\right)$，且 $J_0(\cdot)$ 是第一类零阶贝塞尔函数。这里，我们假设每个用户的速度保持恒定，且通信信道演化是平稳的。因此，可利用 [38] 中的速度估计器进行离线估计。由此，基站可将 ρ_q 视为已知先验信息 [35]。

[4]对于频率选择性通信信道，我们可以修改第二阶段的传输帧结构，以估计其他子载波上的信道状态信息。此外，关于探索信道老化时间对频率选择性信道的影响，我们将其留作未来研究的一个有趣课题。

III. 信道老化下的通信雷达性能分析

本节首先分析第一个区块中的雷达跟踪和信道估计性能，然后利用分析结果评估 n块时间老化期间的跟踪和通信性能。

A. 信道老化下的雷达性能

本节首先估计雷达目标移动信息，并推导第一个区块中估计参数对应的克拉美罗下界。然后，我们利用估计结果评估第 n 个区块中的老化克拉美罗下界，此时不发送任何训练信号。

1) 雷达信道参数估计： 在第一个区块的第一阶段，通过发送式 (1) 中定义的训练信号，基站在第 k 个频带上经往返雷达信道接收到的反射回波表示为 $\mathbf{y}_k^{\mathrm{R}}(t) \in \mathbb{C}^{L_r\times 1}$ [37]，即

$$\mathbf{y}_k^{\mathrm{R}}(t)=\sum_{k'=1}^{K}[\sqrt{p_k L_r L_t}\alpha_{k',1}e^{j\phi_{k'}}\mathbf{a}(\theta_{k',1})\mathbf{b}^H(\theta_{k',1}) \times \mathbf{w}_k(t)e^{j2\pi\nu_{k',1}^D t}s_k(t-\tau_{k',1})]+\boldsymbol{\omega}_k^{\mathrm{R}}(t), \quad (8)$$

其中，上标“R”表示相关项与雷达模块有关，$\boldsymbol{\omega}_k^{\mathrm{R}}(t)$ 表示基站接收到的功率谱密度为 σ 的复高斯噪声。此处，$\alpha_{k,1}=\sqrt{\frac{c_0^2\sigma_{\mathrm{RCS},k}}{(4\pi)^3 f_c^2 d_{k,1}^4}}$，$\tau_{k,1}=\frac{2d_{k,1}}{c_0}$ 和 $\nu_{k,1}^D=\frac{2v_{k,1}}{f_c}$ 分别表示目标 U_k^{R} 在第 1 个区块中由信号经过整个往返路径传播所引起的衰减因子、时延和多普勒相移。此外，$\sigma_{\mathrm{RCS},k}$ 和 ϕ_k 分别是目标 U_k^{R} 的复数雷达散射截面（RCS）系数和额外随机相位噪声。最后，c_0 和 f_c 分别表示光速和子载波频率，$\mathbf{a}(\theta)$ 和 $\mathbf{b}(\theta)$ 分别是关于角度 θ 的到达角（AoA）和离开角（AoD）导向矢量。令天线间距为半波长 [41]，则有 $\mathbf{a}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{L_r}}\left[1,e^{j\pi\sin\theta},\cdots,e^{j\pi(L_r-1)\sin\theta}\right]^H\in\mathbb{C}^{L_r\times 1}$，且 $\mathbf{b}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{L_t}}\left[1,e^{j\pi\sin\theta},\cdots,e^{j\pi(L_t-1)\sin\theta}\right]^H\in\mathbb{C}^{L_t\times 1}$。

令 $\mathbf{w}_k(t)=\mathbf{b}\left(\hat{\theta}_{k,1}^{\mathrm{P}}\right)$，其中 $1\le k\le K$，且 $\hat{\theta}_{k,1}^{\mathrm{P}}$ 是根据雷达目标初始移动状态 $\mathbf{x}_{k,0}$ 利用式 (6) 得到的预测角。注意，假设基站已知初始状态 $\mathbf{x}_{k,0}$，可将其视为上一帧的老化移动信息。于是，式 (8) 可等价地重写为

$$\hat{\mathbf{y}}_k^{\mathrm{R}}(t)=\alpha_{k,1}e^{j\phi_k}\mathbf{a}(\theta_{k,1})e^{j2\pi\nu_{k,1}^D t}s_k(t-\tau_{k,1})+\hat{\boldsymbol{\omega}}_k^{\mathrm{R}}(t), \quad (9)$$

where $\hat{\boldsymbol{\omega}}_k^{\mathrm{R}}(t)=\frac{(\boldsymbol{\omega}_k^{\mathrm{R}}(t)+\boldsymbol{\eta}_k(t))}{\sqrt{p_k L_r L_t}\chi_{k,k}}$ is the interference-plus-noise term with $\chi_{k,i}=\mathbf{b}^H(\theta_{i,1})\mathbf{b}\left(\hat{\theta}_{k,1}^{\mathrm{P}}\right)$. Here, $\boldsymbol{\eta}_k(t)=\sum_{k'\neq k}^{K}\sqrt{p_k}\alpha_{k',1}e^{j\phi_{k'}}\mathbf{a}(\theta_{k',1})\chi_{k',k}e^{j2\pi\nu_{k',1}^D t}s_k(t-\tau_{k',1})$ is the interference caused by the reflected echoes of $s_k(t)$ from target $U_{k'}^{\mathrm{R}}$.

在带通滤波和下变频后，对式 (9) 中的 $\hat{\mathbf{y}}_k^{\mathrm{R}}(t)$ 在每个 $t=mT+T_{cp}+\frac{b}{B_k}T_o$ 处进行采样，可得

$$\tilde{\mathbf{y}}_k^{\mathrm{R}}(m,b)\approx\alpha_{k,1}e^{j\phi_k}\mathbf{a}(\theta_{k,1})e^{j2\pi mT\nu_{k,1}^D} \times\sum_{i=0}^{B_k-1}\tilde{s}_{m,i}^k e^{j2\pi\frac{ib}{B_k}}e^{-j2\pi i\Delta_f\tau_{k,1}}+\hat{\boldsymbol{\omega}}_k^{\mathrm{R}}(m,b), \quad (10)$$

假设 $\nu_{k,1}^D\ll\Delta_f$，其中 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_k^{\mathrm{R}}(m,b)$ 是采样后的 $\hat{\boldsymbol{\omega}}_k^{\mathrm{R}}(t)$。应用离散傅里叶变换（DFT）后，可得

$$\overline{\mathbf{y}}_k^{\mathrm{R}}(m,b)=\frac{1}{\tilde{s}_{m,b}^k B_k}\sum_{i'=0}^{B_k-1}\tilde{\mathbf{y}}_k^{\mathrm{R}}(m,i')e^{-j2\pi\frac{i'b}{B_k}} \approx\alpha_{k,1}e^{j\phi_k}\mathbf{a}(\theta_{k,1})e^{j2\pi mT\nu_{k,1}^D}e^{-j2\pi b\Delta_f\tau_{k,1}}+\overline{\boldsymbol{\omega}}_k^{\mathrm{R}}(m,b), \quad (11)$$

其中，$\overline{\boldsymbol{\omega}}_k^{\mathrm{R}}(m,b)$ 是相应的噪声。

根据式（11），U_k^{R} 在第一个区块中的角度可估计为

$$\hat{\theta}_{k,1}=\arg\max_{\theta}\sum_{m=0}^{M_1-1}\sum_{b=0}^{B_k-1}\left|\mathbf{a}^H(\theta)\overline{\mathbf{y}}_k^{\mathrm{R}}(m,b)\right|^2. \quad (12)$$

然后，利用估计的角度 $\hat{\theta}_{k,1}$，我们应用基于周期图的方法 [42] 来估计 U_k^{R} 的距离和速度。具体而言，我们定义 $\mathcal{Y}_k(\tau,\nu^D)$ 为

$$\mathcal{Y}_k(\tau,\nu^D)=\sum_{m=0}^{M_1-1}\sum_{b=0}^{B_k-1}\mathbf{a}^H\left(\hat{\theta}_{k,1}\right)\overline{\mathbf{y}}_k^{\mathrm{R}}(m,b)e^{-j2\pi mT\nu^D}e^{j2\pi b\Delta_f\tau}. \quad (13)$$

然后，可通过以下方式估计时延和多普勒相移

$$\left(\hat{\tau}_{k,1},\hat{\nu}_{k,1}^D\right)=\arg\max_{\tau,\nu^D}\left|\mathcal{Y}_k(\tau,\nu^D)\right|^2. \quad (14)$$

最后，U_k^{R} 在第一个区块中的距离和速度可估计为

$$\hat{d}_{k,1}=\frac{1}{2}\hat{\tau}_{k,1}c_0, \quad (15)$$

$$\hat{v}_{k,1}=\frac{\hat{\nu}_{k,1}^D c_0}{2f_c\cos\left(\hat{\theta}_{k,1}-\varphi_k\right)}. \quad (16)$$

2）块1中的雷达跟踪性能： 在此，我们根据式（11）中的接收信号模型推导克拉美罗下界，以进行雷达跟踪性能分析。

首先，对 (9) 中的 $\chi_{k,i}$ 进行一些代数运算，可得 $|\chi_{k,i}|=\left|\sin\left(\frac{\frac{L_t\pi}{2}\Delta_{k,i}^{\theta}}{L_t\left|\sin\frac{\pi}{2}\Delta_{k,i}^{\theta}\right|}\right)\right|$，其中 $\Delta_{k,i}^{\theta}=\sin(\theta_i,1)-\sin\left(\hat{\theta}_{k,1}^{\mathrm{P}}\right)$。然后，对于大规模发射天线阵列，即 $L_t\to\infty$，当 $\Delta_{k,i}^{\theta}=0$ 时有 $|\chi_{k,i}|=1$，当 $-2<\Delta_{k,i}^{\theta}<2$ 时有 $|\chi_{k,i}|=0$。接下来，为了分析 (11) 中 $\overline{\boldsymbol{\omega}}_k^{\mathrm{R}}(m,b)$ 的分布，我们忽略预测角的偏差，并采用近似：当 $1\le k\le K$ 时，$|\chi_{k,k}|=1$；当 $1\le k\neq i\le K$ 时，$\chi_{k,i}=0$。请注意，我们仅在性能分析中采用此近似，而在 $\Delta_{k,k}^{\theta}$ 和 $|\chi_{k,k}|$ 中存在的非零偏差在实际应用或仿真中可能小于 1。尽管如此，此近似只会影响噪声功率分析，但不会

改变所提分析方法的流程。从图 4 的仿真结果中可以看出，非零偏差对分析所得的性能结果影响不大。因此，(11) 中的噪声 $\overline{\boldsymbol{\omega}}_k^{\mathrm{R}}(m,b)$ 近似为

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}_k^{\mathrm{R}}(m,b) \approx \frac{\sum_{i'=0}^{B_k-1} \boldsymbol{\omega}_k^{\mathrm{R}}(m,b)\, e^{-j2\pi \frac{i'b}{B_k}}}{\tilde{s}_{m,b}^k B_k \sqrt{p_k L_r L_t}}, \tag{17}$$

其中，$\boldsymbol{\omega}_k^{\mathrm{R}}(m,b)$是 $\boldsymbol{\omega}_k^{\mathrm{R}}(t)$的采样值。因此，可知$\overline{\boldsymbol{\omega}}_k^{\mathrm{R}}(m,b)$可近似为均值为零、方差为 $\frac{\sigma\Delta_f}{p_k L_r L_t}\mathrm{I}_{L_r}$的高斯分布。

接下来，雷达目标在块1中的跟踪克拉美罗下界将在以下定理[5]中给出。

定理3.1：在 L_t较大的情况下，块1中U_k^{R}的$\theta_{k,\,1}$、距离$d_{k,\,1}$和速度$v_{k,\,1}$ 的估计均方误差的克拉美罗下界可近似为

$$\mathbb{E}\left(\left\|\theta_{k,1}-\hat{\theta}_{k,1}\right\|^2\right) \geq \frac{\sigma_k^{\theta}}{p_k B_k M_1}, \tag{18a}$$

$$\mathbb{E}\left(\left\|d_{k,1}-\hat{d}_{k,1}\right\|^2\right) \geq \frac{\sigma_k^{d}}{p_k B_k M_1 \left(B_k^2-1\right)}, \tag{18b}$$

$$\mathbb{E}\left(\left\|v_{k,1}-\hat{v}_{k,1}\right\|^2\right) \geq \frac{\sigma_k^{v}}{p_k B_k M_1 \left(M_1^2-1\right)}, \tag{18c}$$

where $\sigma_k^{\theta} = \frac{6\sigma\Delta_f}{|\alpha_{k,1}|^2\pi^2\cos^2(\theta_{k,1})L_t L_r(L_r^2-1)}$, $\sigma_k^{d} = \frac{3c_0^2\sigma\Delta_f}{8(\pi\Delta_f)^2|\alpha_{k,1}|^2 L_t L_r}$, and $\sigma_k^{v} = \frac{3c_0^2\sigma\Delta_f}{8(\pi T)^2 f_c^2|\alpha_{k,1}|^2\cos^2\left(\bar{\theta}_{k,1}\right)L_t L_r}$.

Proof: Please refer to Appendix A. ■

3）块 n中的时效雷达跟踪性能：下文中，我们将第 n 个块中的估计/预测误差协方差矩阵定义为

$$\mathbf{E}_{k,n} = \mathbb{E}\left(\left(\mathbf{x}_{k,n}-\hat{\mathbf{x}}_{k,n}\right)\left(\mathbf{x}_{k,n}-\hat{\mathbf{x}}_{k,n}\right)^H\right) \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \tag{19}$$

其中，$\hat{\mathbf{x}}_{k,\,n}$ 是第 n个块中的时效雷达移动信息。

根据（6），如果已知 $\hat{\mathbf{x}}_{k,n-1}$，则可以预测时效信息 $\hat{\mathbf{x}}_{k,n}$，即:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,n} = \mathcal{G}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k,n-1}\right). \tag{20}$$

然而，由于（6）中定义的 $\mathcal{G}(\cdot)$ 是非线性函数，因此很难以解析方式推导时效跟踪性能。因此，我们对（6）中的 $\mathcal{G}(\cdot)$ 采用线性近似，即:

$$\mathbf{x}_{k,n} \approx \mathcal{G}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k,n-1}\right) + \mathbf{G}_{k,n-1}\left(\mathbf{x}_{k,n-1}-\hat{\mathbf{x}}_{k,n-1}\right) + \mathbf{u}_{k,n}, \tag{21}$$

其中，$\mathbf{G}_{k,n-1} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ 是 $\partial\mathcal{G}(\mathbf{x}_{k,n-1})$ 的雅可比矩阵，即 $\mathbf{G}_{k,n-1} = \frac{\partial\mathcal{G}(\mathbf{x}_k)}{\partial\mathbf{x}_k}\Big|_{\mathbf{x}_k=\hat{\mathbf{x}}_{k,n-1}}$。

接下来，将（20）和（21）代入（19），矩阵 $\mathbf{E}_{k,n}$ 可以改写为

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{k,n} =& \mathbb{E}\left(\left(\mathbf{x}_{k,n}-\mathcal{G}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k,n-1}\right)\right)\left(\mathbf{x}_{k,n}-\mathcal{G}\left(\hat{\mathbf{x}}_{k,n-1}\right)\right)^H\right)\\ =& \mathbf{G}_{k,n-1}\mathbf{E}_{k,n-1}\mathbf{G}_{k,n-1}^H + \boldsymbol{\Sigma}_k,\end{aligned} \tag{22}$$

[5]请注意，采用其他压缩算法可能会提高估计精度，但推导出的结果是任何无偏估计量的下界 [43], ，这些估计量取决于式 (11) 中的统计信息，而非估计算法。因此，受篇幅限制，我们不再提供其他估计算法。

其中，$\boldsymbol{\Sigma}_k$ 在式 (6) 中定义。经过一些代数运算，$2 \leq n \leq N$ 对应的 $\mathbf{E}_{k,n}$ 可改写为关于 $\mathbf{E}_{k,1}$ 的函数，即:

$$\mathbf{E}_{k,n} = \tilde{\mathbf{G}}_{k,n-1}\mathbf{E}_{k,1}\tilde{\mathbf{G}}_{k,n-1}^H + \sum_{i=1}^{n-1}\bar{\mathbf{G}}_{k,n,i}\boldsymbol{\Sigma}_k\bar{\mathbf{G}}_{k,n,i}^H, \tag{23}$$

其中，$\tilde{\mathbf{G}}_{k,n-1} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ 和 $\bar{\mathbf{G}}_{k,n,i} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ 分别由下式给出

$$\tilde{\mathbf{G}}_{k,n-1} = \prod_{i=1}^{n-1}\mathbf{G}_{k,i} \text{ and } \bar{\mathbf{G}}_{k,n,i} = \begin{cases}\mathbf{I}_3, i=1,\\ \prod_{i'=i}^{n-1}\mathbf{G}_{k,i'}, i\geq 2,\end{cases} \tag{24}$$

分别地。利用（18）中得到的克拉美罗下界，我们有$\mathbf{E}_{k,\,1}$

$$\begin{aligned}&\succeq \mathrm{diag}\left(\frac{\sigma_k^{\theta}}{p_k B_k M_1}, \frac{\sigma_k^{d}}{p_k B_k M_1\left(B_k^2-1\right)}, \frac{\sigma_k^{v}}{p_k B_k M_1\left(M_1^2-1\right)}\right)\\ &\triangleq \mathbf{D}_k.\end{aligned} \tag{25}$$

将 (25) 代入 (23)，可得

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{k,n} &\succeq \tilde{\mathbf{G}}_{k,n-1}\mathbf{D}_k\tilde{\mathbf{G}}_{k,n-1}^H + \sum_{i=1}^{n-1}\bar{\mathbf{G}}_{k,n,i}\boldsymbol{\Sigma}_k\bar{\mathbf{G}}_{k,n,i}^H\\ &\triangleq \tilde{\mathbf{E}}_{k,n}.\end{aligned} \tag{26}$$

因此，块 n 中 U_k^{R} 的预测均方误差对应的老化克拉美罗下界，包括 $\theta_{k,\,n}$、距离$d_{k,\,n}$ 和速度 $v_{k,\,n}$，为

$$\mathbb{E}\left(\left\|\theta_{k,n}-\hat{\theta}_{k,n}\right\|^2\right) \geq \tilde{\mathbf{E}}_{k,n}(1,1) \triangleq \mathcal{C}\left(\hat{\theta}_{k,n}\right), \tag{27a}$$

$$\mathbb{E}\left(\left\|d_{k,n}-\hat{d}_{k,n}\right\|^2\right) \geq \tilde{\mathbf{E}}_{k,n}(2,2) \triangleq \mathcal{C}\left(\hat{d}_{k,n}\right), \tag{27b}$$

$$\mathbb{E}\left(\left\|v_{k,n}-\hat{v}_{k,n}\right\|^2\right) \geq \tilde{\mathbf{E}}_{k,n}(3,3) \triangleq \mathcal{C}\left(\hat{v}_{k,n}\right). \tag{27c}$$

然而，考虑到 $\mathbf{G}_{k,\,n-1}$ 和 $\mathbf{G}_{k,\,n,\,i}$ 中多项式的矩阵乘法，仍难以将 (27) 中的雷达跟踪性能老化结果用于研究资源分配方案设计。因此，我们提出以下定理，进一步近似 (27) 中的克拉美罗下界，从而得到简化表达式。

定理 3.2：对于块 n 中的 U_k^{R}，式 (27) 推导出的 $\theta_{k,n}$、距离 $d_{k,\,n}$ 和速度 $v_{k,n}$ 的预测均方误差的老化克拉美–罗下界可近似为

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\left(\hat{\theta}_{k,n}\right) &\approx \frac{a_{k,n}\sigma_k^{\theta}}{p_k B_k M_1} + b_{k,n}\delta_k^{\theta}\\ &\triangleq \widetilde{\mathcal{C}}\left(\hat{\theta}_{k,n}\right),\end{aligned} \tag{28a}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\left(\hat{d}_{k,n}\right) &\approx \frac{\sigma_k^{d}}{p_k B_k M_1\left(B_k^2-1\right)} + (n-1)\,\delta_k^{d}\\ &\triangleq \widetilde{\mathcal{C}}\left(\hat{d}_{k,n}\right),\end{aligned} \tag{28b}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\left(\hat{v}_{k,n}\right) &\approx \frac{\sigma_k^{v}}{p_k B_k M_1\left(M_1^2-1\right)} + (n-1)\,\delta_k^{v}\\ &\triangleq \widetilde{\mathcal{C}}\left(\hat{v}_{k,n}\right),\end{aligned} \tag{28c}$$

where $a_{k,n} = \left|1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\hat{v}_{k,i}\widetilde{T}}{\hat{d}_{k,i}}\cos(\hat{\tilde{\theta}}_{k,i})\right|^2$, $b_{k,n} = 1 + \sum_{i=2}^{n-1}\left|1+\sum_{i'=i}^{n-1}\frac{\hat{v}_{k,i'}\widetilde{T}}{\hat{d}_{k,i'}}\cos(\hat{\tilde{\theta}}_{k,i'})\right|^2$, and $\hat{\tilde{\theta}}_{k,n} = \hat{\theta}_{k,n} - \varphi_k$.

证明：请参阅附录 B。 ■

注意，根据图4中的仿真结果可知，式（28）中所提的近似克拉美–罗下界与式（27）中的结果性能几乎相同。

B. 信道老化下的通信性能

在本部分中，我们首先估计第一个区块中所有通信接收机的信道状态信息，并用其预测第 n个区块中的信道状态信息。随后，我们分析信道估计/预测误差，并推导所有接收机的总老化可达速率。

1）通信信道状态信息估计与预测：在第一个传输块的第一阶段，通过发送式（1）中的训练信号， U_q^{C}处的接收信号为

$$y_{q,1}^{\mathrm{C}}(t)=\mathbf{h}_{q,1}^{H}\mathbf{w}_0(t)\sum_{m=0}^{M_1-1}\sum_{b=0}^{B_0-1}\tilde{s}_{m,b}^{0}e^{j2\pi b\Delta_f(t-T_{cp}-mT)}\times\mathrm{rect}(t-mT)+\omega_{q,1}^{\mathrm{C}}(t),\quad(29)$$

其中，上标“C”表示相关项与通信模块有关。项$\omega_{q,1}^{\mathrm{C}}(t)$表示功率谱密度为 σ_q^{C}的接收高斯噪声。

与式（10）和式（11）中的过程类似，在带通滤波后，对式（29）中每个$t=mT+T_{cp}+\frac{b}{B_k}T_o$处的采样信号$y_{q,1}^{\mathrm{C}}(t)$进行采样，并将相应的发射波束成形器$\mathbf{w}_0(t)$设为$\mathbf{f}_0(m)$，即可对采样信号应用离散傅里叶变换，得到

$$\begin{aligned}\bar{y}_{q,1}^{\mathrm{C}}(m,b)&=\frac{1}{\tilde{s}_{m,b}^{0}B_0}\sum_{i'=0}^{B_0-1}\widetilde{y}_q^{\mathrm{C}}(m,i')\,e^{-j2\pi\frac{i'b}{B_0}}\\&\approx\sqrt{p_0}\mathbf{h}_{q,1}^{H}\mathbf{f}_0(m)+\bar{\omega}_{q,1}^{\mathrm{C}}(m,b),\end{aligned}\quad(30)$$

其中，$\bar{\omega}_{q,1}^{\mathrm{C}}(m,b)$ 是均值为零、方差为 $\tilde{\sigma}_q=\sigma_q^{\mathrm{C}}\Delta_f$ 的近似高斯噪声。然后，在第 m 个正交频分复用符号时长内，有

$$\begin{aligned}\breve{y}_{q,1}^{\mathrm{C}}(m)&=\frac{1}{B_0}\sum_{b=1}^{B_0}\bar{y}_{q,1}^{\mathrm{C}}(m,b)\\&\approx\sqrt{p_0}\mathbf{h}_{q,1}^{H}\mathbf{f}_0(m)+\breve{\omega}_{q,1}^{\mathrm{C}}(m),\end{aligned}\quad(31)$$

其中，$\breve{\omega}_{q,1}^{\mathrm{C}}(m)$ 是均值为零、方差为 $\frac{\sigma_q}{B_0}$ 的等效高斯噪声。

然后，记 $\breve{\mathbf{y}}_{q,1}^{\mathrm{C}}=\left[\breve{y}_{q,1}(0)\ \cdots\ \breve{y}_{q,1}(M_1-1)\right]^H\in\mathbb{C}^{M_1\times1}$，$\mathbf{F}_0=[\mathbf{f}_0(0)\ \cdots\ \mathbf{f}_0(M_1-1)]\in\mathbb{C}^{L_t\times M_1}$，$\mathbf{y}_{q,1}^{\mathrm{C}}(m)$，$\boldsymbol{\omega}_{q,1}^{\mathrm{C}}(m)$ 和 $\mathbf{f}_0(m)$，可将（31）重写为以下矩阵形式，即

$$\breve{\mathbf{y}}_{q,1}^{\mathrm{C}}=\sqrt{p_0}\mathbf{F}_0^{H}\mathbf{h}_{q,1}+\breve{\boldsymbol{\omega}}_{q,1}^{\mathrm{C}},\quad(32)$$

其中，$\breve{\boldsymbol{\omega}}_{q,1}^{\mathrm{C}}\in\mathbb{C}^{M_1\times1}$是接收噪声，即 $\breve{\boldsymbol{\omega}}_{q,1}^{\mathrm{C}}\sim\mathcal{CN}\left(0,\frac{\tilde{\sigma}_q}{B_0}\mathbf{I}_{M_1}\right)$。

通过设置满足 $\mathbf{F}_0\mathbf{F}_0^{H}=\frac{M_1}{L_t}\mathbf{I}_{L_t}$ 的 $\mathbf{F}_0$，线性最小均方误差信道估计器可表示为 [34]

$$\hat{\mathbf{h}}_{q,1}=\left(1+\frac{L_t\tilde{\sigma}_q}{M_1B_0p_0}\times\frac{1}{\beta_q}\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{p_0}}\mathbf{F}_0^{\dagger}\breve{\mathbf{y}}_{q,1}^{\mathrm{C}}\right),\quad(33)$$

其中，$\mathbf{F}_0^{\dagger}$ 是矩阵$\mathbf{F}_0$的摩尔–彭若斯伪逆。

由式（33）可证明，$\hat{\mathbf{h}}_{q,1}\sim\mathcal{CN}(0,\lambda_q\mathbf{I}_{L_t})$，其中 $\lambda_q=\frac{M_1\beta_q^2p_0B_0}{L_t\tilde{\sigma}_q+M_1\beta_qp_0B_0}$。利用最小均方误差的正交性，信道$\mathbf{h}_{q,1}$可表示为

$$\mathbf{h}_{q,1}=\hat{\mathbf{h}}_{q,1}+\tilde{\mathbf{h}}_{q,1},\quad(34)$$

其中，$\tilde{\mathbf{h}}_{q,1}\sim\mathcal{CN}(0,(\beta_q-\lambda_q)\mathbf{I}_{L_t})$ 为相应的信道估计误差。

利用式（7）中的信道老化模型进行代数运算后，$\mathbf{h}_{q,n}$可改写为

$$\mathbf{h}_{q,n}=\rho_q^{n-1}\mathbf{h}_{q,1}+\sqrt{1-\rho_q^{2(n-1)}}\tilde{\mathbf{e}}_{q,n},\quad(35)$$

其中，$\tilde{\mathbf{e}}_{q,n}=\frac{1}{\sqrt{1-\rho_q^{2(n-1)}}}\sum_{i=0}^{n-2}\rho_q^i\sqrt{1-\rho_q^2}\mathbf{e}_{q,n-i}$ 称为老化噪声，服从复高斯分布，即$\tilde{\mathbf{e}}_{q,n}\sim\mathcal{CN}(0,\beta_q\mathbf{I}_{L_t})$。

然后，将式（34）代入式（35），可得

$$\mathbf{h}_{q,n}=\rho_q^{n-1}\hat{\mathbf{h}}_{q,1}+\rho_q^{n-1}\tilde{\mathbf{h}}_{q,1}+\sqrt{1-\rho_q^{2(n-1)}}\tilde{\mathbf{e}}_{q,n}.\quad(36)$$

接收机 U_q^{R} 在第 n 个块中的预测的信道状态信息可表示为 [35]

$$\hat{\mathbf{h}}_{q,n}=\rho_q^{n-1}\hat{\mathbf{h}}_{q,1},\quad(37)$$

其预测误差为 $\tilde{\mathbf{e}}_{q,n}=\rho_q^{n-1}\tilde{\mathbf{h}}_{q,1}+\sqrt{1-\rho_q^{2(n-1)}}\tilde{\mathbf{e}}_{q,n}$，其服从复高斯分布，即 $\tilde{\mathbf{e}}_{q,n}\sim\mathcal{CN}\left(0,\left(\beta_q-\rho_q^{2n-2}\lambda_q\right)\mathbf{I}_{L_t}\right)$。

2）总老化可达速率：根据式（3）中定义的数据信号，U_q^{C}在第 n 块中的接收信号可改写为

$$\begin{aligned}y_{q,n}^{\mathrm{C}}(t)&=\mathbf{h}_{q,n}^{H}\sum_{i=1}^{Q}\sqrt{\tilde{p}_{i,n}}\mathbf{f}_{i,n}c_{i,n}(t)+\omega_{q,n}^{\mathrm{C}}(t)\\&=\sqrt{\tilde{p}_{q,n}}\mathbb{E}\left(\mathbf{h}_{q,n}^{H}\mathbf{f}_{q,n}\right)c_{q,n}(t)+\zeta_{q,n}(t)+\tilde{\zeta}_{q,n}(t)+\omega_{q,n}^{\mathrm{C}}(t),\end{aligned}\quad(38)$$

其中，$\omega_{q,n}^{\mathrm{C}}(t)$ 是均值为零、方差为 $\tilde{\sigma}_q$ 的接收高斯噪声，干扰项 $\zeta_{q,n}(t)$ 和 $\zeta_{q,n}(t)$ 分别为

$$\zeta_{q,n}(t)=\sqrt{\tilde{p}_{q,n}}\left[\mathbf{h}_{q,n}^{H}\mathbf{f}_{q,n}-\mathbb{E}\left(\mathbf{h}_{q,n}^{H}\mathbf{f}_{q,n}\right)\right]c_{q,n}(t),\quad(39)$$

$$\tilde{\zeta}_{q,n}(t)=\mathbf{h}_{q,n}^{H}\sum_{i\neq q}^{Q}\sqrt{\tilde{p}_{i,n}}\mathbf{f}_{i,n}c_{i,n}(t),\quad(40)$$

相应地，U_q^{C}在第 n 块中的可达速率（比特/秒/赫兹）为

$$R_{q,n}=\frac{M_n'}{M}\log_2(1+\tilde{p}_{q,n}\gamma_{q,n}),\quad(41)$$

其中，$M_1'=M-M_1$、$M_n'=M$用于 $2\le n\le N$，且

$$\gamma_{q,n}=\frac{\left|\mathbb{E}\left(\mathbf{h}_{q,n}^{H}\mathbf{f}_{q,n}\right)\right|^2}{\mathbb{E}\left(|\zeta_{q,n}(t)|^2\right)+\mathbb{E}\left(\left|\tilde{\zeta}_{q,n}(t)\right|^2\right)+\tilde{\sigma}_q}.\quad(42)$$

根据式（37）中的预测的信道状态信息，每个 U_q^C的最大比传输和迫零发射波束成形向量为

$$\mathbf{f}_{q,n}=\begin{cases}\frac{\hat{\mathbf{h}}_{q,1}}{\sqrt{\mathbb{E}\left(\|\hat{\mathbf{h}}_{q,1}\|^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_q L_t}}\hat{\mathbf{h}}_{q,1},\text{MRT},\\ \frac{\mathbf{a}_q}{\sqrt{\mathbb{E}(\|\mathbf{a}_q\|^2)}}\overset{(a)}{=}\sqrt{\lambda_q\left(L_t-Q\right)}\mathbf{a}_q,\text{ZF},\end{cases}\tag{43}$$

分别地，其中 $\mathbf{a}_q$ 是矩阵 $\hat{\mathbf{H}}_1\left(\hat{\mathbf{H}}_1^H\hat{\mathbf{H}}_1\right)^{-1}$ 的第 q 列，$\hat{\mathbf{H}}_1=\left[\hat{\mathbf{h}}_{1,1},\hat{\mathbf{h}}_{2,1},\cdots,\hat{\mathbf{h}}_{Q,1}\right]\in\mathbb{C}^{L_t\times Q}$，而 (a) 是由 $\mathbb{E}(\|\mathbf{a}_q\|^2)=\frac{1}{\lambda_q(L_t-Q)}$ 针对场景 $L_t\geq(Q+1)$ [44]得到的。

定理 3.3：在第 n 个老化块中，利用式 (37) 中的预测的信道状态信息，采用最大比传输或迫零发射波束成形时，式 (42) 中的参数 $\gamma_{q,n}$ 为

$$\gamma_{q,n}=\begin{cases}\frac{\rho_q^{2(n-1)}M_1\beta_q^2p_0B_0L_t}{(P\beta_q+\tilde{\sigma}_q)(L_t\tilde{\sigma}_q+M_1\beta_qp_0B_0)},\text{MRT},\\ \frac{\rho_q^{2(n-1)}M_1\beta_q^2p_0B_0(L_t-Q)}{(P\beta_q+\tilde{\sigma}_q)(L_t\tilde{\sigma}_q+M_1\beta_qp_0B_0)-\rho_q^{2(n-1)}PM_1\beta_q^2p_0B_0},\text{ZF}.\end{cases}\tag{44}$$

证明：请参见附录C。 ■

令第 n 个块中的总可达速率为 $R_n=\sum_{q=1}^Q R_{q,n}$。根据定理 3.3，很容易得到关于发射功率的 R_n 渐近分析，即

$$\lim_{P\to\infty}R_n\to\begin{cases}\frac{M_n'}{M}\sum_{q=1}^Q\log_2\left(1+\rho_q^{2(n-1)}\kappa_{q,n}L_t\right),\text{MRT},\\ \frac{M_n'}{M}\sum_{q=1}^Q\log_2\left(1+\frac{\rho_q^{2(n-1)}}{1-\rho_q^{2(n-1)}}\kappa_{q,n}\left(L_t-Q\right)\right),\text{ZF},\end{cases}\tag{45}$$

其中 $\kappa_{q,n}=\frac{p_q}{P^n}$。由式（45）可知，采用最大比传输和 ZF 波束成形时，可达速率会随着信道老化时间的增加而降低。

IV. 信道老化条件下的平均总可达速率最大化

本节利用已表征的老化雷达跟踪和通信性能指标，研究一种情境相关资源分配方案，同时考虑各目标的跟踪精度需求和通信速率要求。具体而言，我们首先给出问题构建，然后提出次优算法以高效求解该问题。

A. 问题构建

根据式（28）和式（44），除了信道老化时间外，我们还知道带宽和功率分配也是影响老化后通信和雷达跟踪性能的关键因素。因此，本文旨在联合优化第一阶段第一个区块中用于信道训练的子载波数量 $\mathbf{B}=[B_0,\cdots,B_K]^T\in\mathbb{C}^{(K+1)\times1}$ 和发射功率 $\mathbf{p}=[p_0,\cdots,p_K]^T\in\mathbb{C}^{(K+1)\times1}$、第一阶段第一个区块及其余区块中用于数据传输的发射功率 $\tilde{\mathbf{p}}=[\tilde{p}_{1,1},\cdots,\tilde{p}_{q,n},\cdots,\tilde{p}_{Q,N}]^T\in\mathbb{C}^{QN\times1}$，以及信道重新估计间隔 N，以在满足各种实际约束的前提下最大化平均总可达速率。数学上，我们有以下优化问题：

$$\begin{aligned}\mathbf{P1}:\ \max_{N,\mathbf{p},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{B}}\ &\mathcal{R}\left(N,\mathbf{p},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{B}\right)=\frac{1}{N}\sum\nolimits_{n=1}^N\sum\nolimits_{q=1}^Q R_{q,n}\\ \text{s.t.}\ \ &\text{C1}:\widetilde{\mathcal{C}}\left(\hat{\theta}_{k,n}\right)\leq\Gamma_{k,\max}^{\theta},\ \forall n,1\leq k\leq K,\\ &\text{C2}:\widetilde{\mathcal{C}}\left(\hat{d}_{k,n}\right)\leq\Gamma_{k,\max}^{d},\ \forall n,1\leq k\leq K,\\ &\text{C3}:\widetilde{\mathcal{C}}\left(\hat{v}_{k,n}\right)\leq\Gamma_{k,\max}^{v},\ \forall n,1\leq k\leq K,\\ &\text{C4}:R_{q,n}\geq R_{q,\min},\forall q,n,\\ &\text{C5}:\sum\nolimits_{k=0}^K p_k\leq P,\\ &\text{C6}:\sum\nolimits_{q=1}^Q\tilde{p}_{q,n}\leq P,\ \forall n,\\ &\text{C7}:\sum\nolimits_{k=0}^K B_k\leq B,\\ &\text{C8}:0\leq p_k,\forall k,\\ &\text{C9}:0\leq\tilde{p}_{q,n},\forall q,n,\\ &\text{C10}:B_k\in\mathbb{N},\ \forall k,\end{aligned}$$

其中，$\Gamma_{k,\max}^{\theta}$、$\Gamma_{k,\max}^{d}$以及$\Gamma_{k,\max}^{v}$ 分别是目标 U_k^{R}在角度、距离和速度方面的跟踪误差约束，而$R_{q,\min}$是接收机 U_q^{C}所要求的最低传输速率。具体而言，C1、C2和C3是各目标的雷达跟踪精度要求，C4是通信数据速率要求。C5和C6分别是训练阶段和数据传输阶段的总发射功率约束。C7是子载波总数约束。最后，C8、C9和C10是实际约束。

B. 算法开发

首先，考虑到整数约束 C10，问题P1通常是混合整数非线性规划。因此，这是一个非凸优化问题，求其最优解可能会带来难以处理的计算复杂度。接下来，我们提出一种高效的两步次优算法来求解问题P1。具体而言，在第一步中，我们将约束 C10 替换为 $0\leq B_k,\forall k$，以此求解问题P1的松弛连续变量优化问题，即

$$\begin{aligned}\mathbf{P2}:\ \max_{N,\mathbf{p},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{B}}\ &\mathcal{R}\left(N,\mathbf{p},\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{B}\right)\\ \text{s.t.}\ \ &0\leq B_k,\forall k,\\ &\text{C1}-\text{C8},\end{aligned}\tag{47}$$

然后，在第二步中，我们应用整数转换方法，使 B_k 的解满足 C10。注意，问题P2的最优解是原始问题P1的上界，因为松弛约束可能会导致可行域大幅扩大。

然而，由于优化变量之间存在耦合，P2 仍然是非凸的。此外，优化变量和约束条件的数量会随信道老化时间N变化，这增加了求解该问题的难度。因此，为了找到 P2 的最优解，我们提出一种

基于一维搜索的优化算法，因为信道老化时间 N 属于一维变量。在该算法中，我们对所有可能的信道老化时间 N 进行一维穷举搜索，并提出算法，在每个固定的 N下对 P2 进行最优求解。然后，我们可以通过使目标函数达到最大值的最优 N，获得 P2 的最优解。

接下来，在以下两个定理中，我们首先分析信道老化时间的潜在上界 N，以缩小一维搜索的搜索区域、降低复杂度；然后给出在固定 N 的情况下求解 P2 最优解的方法。

定理 4.1：若问题 P2 可行，则最大的潜在可行信道老化时间 N 应小于以下界限，即

$$N_{\max}=\min_{\forall k,\forall q}\left\{N_{k,\max}^{\mathrm{R}},N_{q,\max}^{\mathrm{C}}\right\}, \tag{48}$$

其中，$N_{\mathrm{R}k,\ \max}$ 和 $N_{k,\ \max}^{\mathrm{C}}$ 分别是目标 $U_{\mathrm{R}k}$ 和接收机 $U_{\mathrm{C}k}$ 对应的潜在最大信道老化时间 N，其定义如下：

$$N_{k,\max}^{\mathrm{R}}=1+\min\left\{\left\lfloor\frac{\Gamma_{k,\max}^{d}}{\delta_k^d}-\frac{\sigma_k^d}{\delta_k^d PBM_1\left(B^2-1\right)}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{\Gamma_{k,\max}^{v}}{\delta_k^v}-\frac{\sigma_k^v}{\delta_k^v PBM_1\left(M_1^2-1\right)}\right\rfloor\right\}, \tag{49}$$

$$N_{q,\max}^{\mathrm{C}}=\begin{cases}\left\lfloor\frac{1}{2\ln\rho_q}\ln\left(\frac{\psi_{q,2}^{\mathrm{MRT}}}{\psi_{q,1}^{\mathrm{MRT}}}\left(2^{R_{q,\min}}-1\right)\right)\right\rfloor+1,\mathrm{MRT},\\ \left\lfloor\frac{1}{2\ln\rho_q}\ln\left(\frac{\left(2^{R_{q,\min}}-1\right)\psi_{q,2}^{\mathrm{ZF}}}{\psi_{q,1}^{\mathrm{ZF}}+\left(2^{R_{q,\min}}-1\right)\psi_{q,3}^{\mathrm{ZF}}}\right)\right\rfloor+1,\mathrm{ZF},\end{cases} \tag{50}$$

分别地，其中 $\psi_{q}^{\mathrm{MRT}}{}_{,\ 1}=M_1\beta_q^2P^2BL_t$、$\psi_{q\ 2}^{\mathrm{MRT}}=P\beta_q+\tilde{\sigma}_q\ \ L_t\tilde{\sigma}_q+M_1\beta_qPB$ $\psi_{q\ 1}^{\mathrm{ZF}}=,()()$，，$M_1\beta_q^2P^2B\ \ L_t-Q\ \ \psi_{q\ 2}^{\mathrm{ZF}}=P\beta_q+\tilde{\sigma}_q\ \ L_t\tilde{\sigma}_q+M_1\beta_qPB\ ()$，，$()()$，以及 $\psi_{q}^{\mathrm{ZF}}{}_{,\ 3}=M_1\beta_q^2P^2B$。

证明：首先，显然，当所有功率和带宽都分配给 U_k^{R} 时，在目标跟踪条件下，即 $p_k=P$ 和 $B_k=B$，可以实现最大的信道老化时间。然后，将 (28) 代入约束 C2 和 C3，得到 (49)。类似地，在假设 $p_0B_0=PB$ 的情况下，将 (44) 代入约束 C4，得到 (50)。 ■

定理 4.2：如果固定 N 的问题 P2 可行，则可通过依次求解以下两个子问题来获得其最优解，即

$$\mathbf{P2-A}:\ (\mathbf{p}^\star,\mathbf{B}^\star)=\arg\max_{\mathbf{p},\mathbf{B}}\ p_0B_0$$
$$\text{s.t. C1}-\text{C3},\ \text{C5},\ \text{C7},\ \text{C8},\ \text{and (47)},$$

and

$$\mathbf{P2-B}:\ \tilde{\mathbf{p}}^\star=\arg\max_{\tilde{\mathbf{p}}}\ \mathcal{R}\left(N,\mathbf{p}^\star,\tilde{\mathbf{p}},\mathbf{B}^\star\right)$$
$$\text{s.t. C4},\ \text{C6},\ \text{and C9},$$

其中，$\mathbf{p}^\star$ 和 $\mathbf{B}^\star$ 通过求解问题 P2 –A 获得。

证明：请参阅附录 D。 ■

C. 问题 P2 –A 的最优解

在本部分中，我们给出问题 $\mathbf{P2}-\mathrm{A}$ 的最优解。

根据式 (28) 中推导出的克拉美罗下界，约束 C1、C2 和 C3 可等价地改写为

$$p_kB_k\geq\tilde{\Gamma}_{k,N}^{\theta,v},1\leq k\leq K, \tag{51}$$
$$p_kB_k\left(B_k^2-1\right)\geq\tilde{\Gamma}_{k,N}^{d},1\leq k\leq K, \tag{52}$$

其中

$$\tilde{\Gamma}_{k,N}^{\theta,v}=\max\left\{\begin{array}{c}\left\{\frac{a_{k,n}\sigma_k^\theta}{\left(\Gamma_{k,\max}^{\theta}-b_{k,n}\delta_k^\theta\right)M_1},\forall n\right\},\\ \frac{\sigma_k^v}{M_1\left(M_1^2-1\right)\left(\Gamma_{k,\max}^{v}-(N-1)\delta_k^v\right)}\end{array}\right\}, \tag{53}$$

$$\tilde{\Gamma}_{k,N}^{d}=\frac{\sigma_k^d}{M_1\left(\Gamma_{k,\max}^{d}-(N-1)\,\delta_k^d\right)}. \tag{54}$$

于是，问题 $\mathbf{P2}-\mathrm{A}$ 可等价地改写为

$$\mathbf{P2-A1}:\max_{\mathbf{p},\mathbf{B}}\ \ln\left(p_0\right)+\ln\left(B_0\right)$$
$$\text{s.t.}\ \ln\left(p_k\right)+\ln\left(B_k\right)\geq\ln\left(\tilde{\Gamma}_{k,N}^{\theta,v}\right),1\leq k\leq K, \tag{55a}$$
$$\ln\left(p_k\right)+\ln\left(B_k\right)+\ln\left(B_k+1\right)+\ln\left(B_k-1\right)\geq\ln\left(\tilde{\Gamma}_{k,N}^{d}\right),1\leq k\leq K, \tag{55b}$$
$$\text{C5},\ \text{C7},\ \text{C8},\ \text{and (47)},$$

其中，约束 (55a) 和 (55b) 分别由 (51) 和 (52) 得出。显然，问题 P2 –A1 是一个凸优化问题，其最优解可使用 MATLAB 工具箱 CVX [45],高效求得，且仅具有多项式时间复杂度。

D. $\mathbf{P2}-\mathrm{B}$ 的最优解

给定最优的 $p_0^\star$ 和 $B_0^\star$，显然，问题 P2 –B 是一个凸优化问题。其最优解如下定理所示。

定理 4.3：问题 $\mathbf{P2}-\mathrm{B}$ 的最优解 $\tilde{\mathbf{p}}^\star$ 为

$$\tilde{p}_{q,n}^\star=p_{q,n}^{\min}+\max\left\{0,\frac{1}{\ln 2\xi_n^\star}-\frac{1+\gamma_{q,n}p_{q,n}^{\min}}{\gamma_{q,n}}\right\}, \tag{56}$$

其中 $p_q^{\min}{}_{,\ n}=\frac{1}{\gamma_q\ ,\ n}\left(2^{\frac{M}{M_{\mathrm{T}}}R_{q,\min}}-1\right)$ 和 $\gamma_{q,\ n}$ 由 (44) 给出，其中设置为 $p_0=p_0^\star$ 和 $B_0=B_0^\star$。此外，$\xi_n^\star$ 为水位，可通过枚举并求解 $\sum_{q=1}^{Q}\tilde{p}_{q,\ n}=P$ 来确定 $1\leq n\leq N$。

证明：可使用标准的拉格朗日对偶算法 [46], 证明这一点，为简洁起见，此处省略。 ■

最后，通过找到使目标函数达到最大值的最优 N，即可获得问题P2的最优解。整体的一维搜索优化算法总结于算法 1 中。

参数	数值	参数	数值
光速	$c_0 = 3 \times 10^8$ 米/秒	子载波数量	$B = 64$
总信号带宽	$B\Delta_f$ = 10MHz	子载波带宽	Δ_f = 156.25 KHz
基本 OFDM 符号持续时间	$T_o = 1/\Delta_f$ = 6.4 微秒	循环前缀时长	$T_{cp} = \frac{1}{4}T$ = 1.6 微秒
OFDM符号传输时长	T = 8微秒	符号数量	M = 700

表 I：仿真参数设置

E. 整数转换

如果将 $(\mathbf{p}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger, \tilde{\mathbf{p}}^\dagger, N^\dagger)$ 记为问题P2的最优解，那么解 $\mathbf{B}^\dagger$ 可能违反原始问题 P1 的整数要求，即 C10。因此，我们需要将 $\mathbf{B}^\dagger$ 转换为可行的整数解。然而，整数转换问题属于组合优化问题，难以求得其最优解。因此，我们设计了以下启发式算法来获得其次优解。由式 (28) 可知，较大的带宽会带来更好的跟踪性能。因此，对于 $1 \le k \le K$，整数解（记为 $B_k^\ddagger$ ）应大于 $B_k^\dagger$ 。由此可得以下启发式整数解，即:

$$B_k^\ddagger = \begin{cases} \left\lceil B_k^\dagger \right\rceil, \text{ if } 1 \le k \le K, \\ B - \sum_{k=1}^{K} \left\lceil B_k^\dagger \right\rceil, \text{ if } k = 0, \end{cases} \tag{57}$$

其中 $\lceil \cdot \rceil$ 为向上取整函数。

算法 1 基于一维搜索的优化算法，适用于问题 P2

1: 使用式 (48) 计算 $N_{\max}$
2: 对于信道老化时间 N=1:1:$N_{\max}$ ，执行
3: 求解 P2 − A，并得到 $(\mathbf{p}^\star, \mathbf{B}^\star)$
4: 利用当前 N下的最优 $p_0^\star$和 $B_0^\star$，求解 P2 −B 并得到 $\mathcal{R}(N, \mathbf{p}^\star, \tilde{\mathbf{p}}^\star, \mathbf{B}^\star)$
5: 结束循环
6: 求 $\mathcal{R}(N^\dagger, \mathbf{p}^\dagger, \tilde{\mathbf{p}}^\dagger, \mathbf{B}^\dagger) = \max_N \mathcal{R}(N, \mathbf{p}^\star, \tilde{\mathbf{p}}^\star, \mathbf{B}^\star)$ 的最大值

V. 仿真结果

本节通过仿真结果验证所分析的理论结果以及所提算法的有效性。具体而言，我们假设系统工作在载波频率为 $f_c = 5.89$ GHz 的 IEEE 802.11p [47] 上。通信信道的大尺度效应建模为 $(74.2.4+16.1\log_{10} d_q^{\mathrm{C}}/d_o)$ [48], , 其中 $d_o = 1$m 为参考距离， d_q^{C}为基站与通信接收机 U_q^{C}之间的距离，该距离在 $[1.5, 4.5]$ km 范围内服从连续均匀分布。时间相关系数 ρ_q 设为 0.96。基站和接收机 U_q^{R}处的噪声功率谱密度设为 -174 dBm/Hz。 U_k^{R}的初始角度、距离和速度分别在$\left[(k-1)_{16}\ \pi, \frac{k\pi}{16}\right]$rad、 $[15, 45]$m/s 和 $[0.1, 0.3]$km 范围内服从连续均匀分布。此外，相应的状态评估噪声功率分别设为 $\delta_k^\theta = 10^{-5}$ rad、 $\delta_k^d = 0.2$ m 和 $\delta_k^v = 0.1$ m/s。另外，相应的最大跟踪误差设为 $\Gamma_{k,\max}^\theta = 15\delta_k^\theta$、 $\Gamma_{k,\max}^d = 15\delta_k^d$ 和 $\Gamma_{k,\max}^v = 15\delta_k^v$。我们假设每个雷达均采用均匀反射率模型目标，并为简化起见，不考虑具体的雷达散射截面 [24], [49],，即 $\sigma_{\mathrm{RCS},k} = 1\,\mathrm{m}^2$。 U_{Cq}的最低传输速率设为 $_{1\,10}\log_2\left(1 + \frac{P\beta_q}{\sigma_q Q}\right)$。最后，剩余参数采用与 [37] 中相似的设置，如表 I 所示。

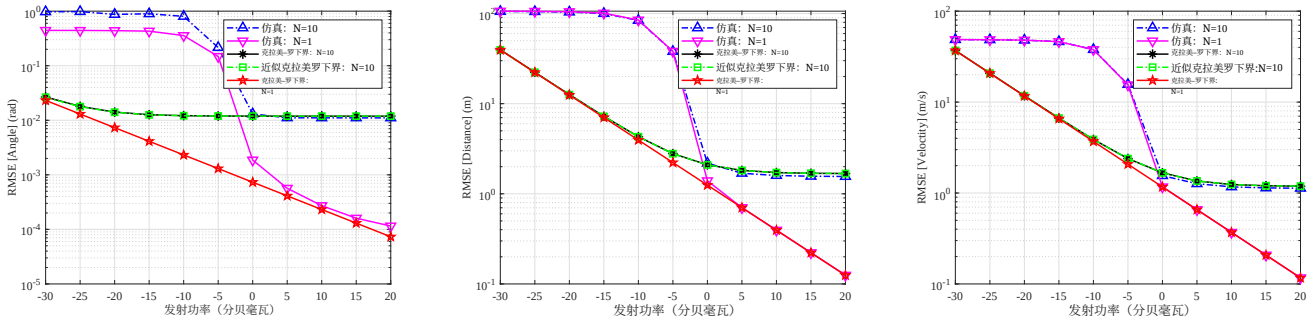
在以下仿真中，我们比较所提算法与以下基准方案的系统性能。需要注意的是，每种方法的结果均取自1000次蒙特卡洛试验的平均值。

- 上界：我们使用所提算法求解松弛问题 P2，以获得其最优解，且不考虑整数约束 C10。该松弛处理使我们能够获得优于其他算法的上界。

- 基准方案1：我们搜索所有可能的 N，并在第一阶段通过求解 P2 −A 为每种情况优化功率和带宽，在其余数据传输阶段采用均匀功率。
- 基准方案2：我们搜索所有可能的 N，在第一阶段为每种情况采用均匀功率与带宽分配，而在其余数据传输阶段使用式 (56) 分配优化功率。
- 基准方案3：我们搜索所有潜在的 N，并在整个传输帧内对每个潜在项采用均匀功率与带宽。
- 无信道老化：通过设置 $N = 1$，我们使用所提算法求解原始问题。

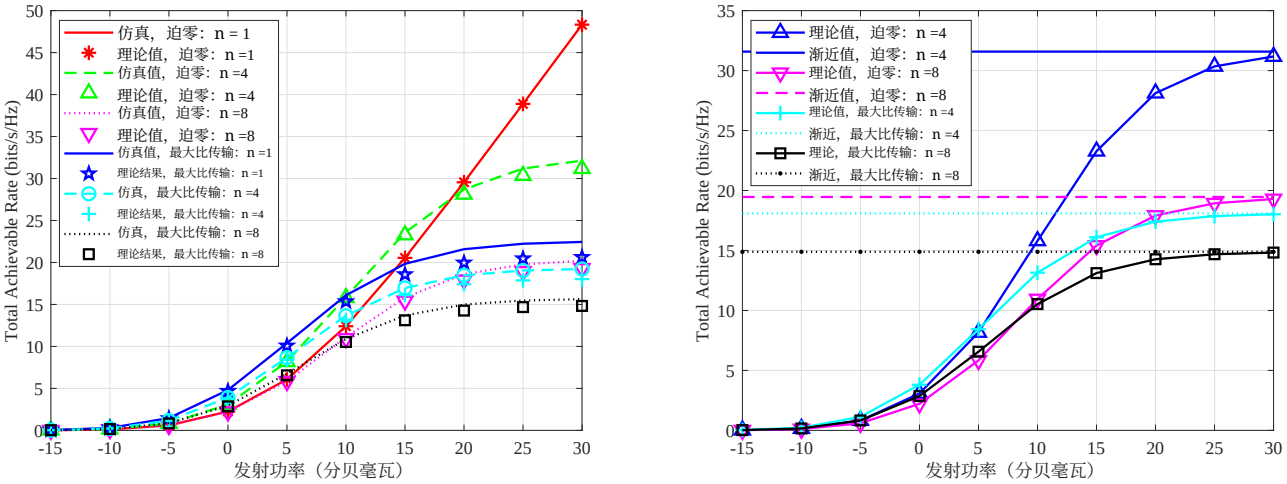
图4展示了在整个帧内采用均匀功率与带宽分配且不考虑感知与通信性能要求时，最大发射功率对仿真和理论雷达跟踪性能（即均方根误差（RMSE））的影响。RMSE定义为（RMSE $=\sqrt{\frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}(x_k - \hat{x}_k)^2}$），其中 x_k 和$\hat{x}_k$ 分别为真实参数和估计参数。从图4中可以观察到，当 $N = 1$ 时，由（12）、（15）和（16）得到的角度、距离和速度的仿真均方根误差可以逼近由（18）得到的理论结果；当 $N = 10$时，则可以逼近由（27）得到的理论结果，这验证了所分析的雷达信道估计和预测结果的正确性。此外，我们观察到，（28）中的所提近似结果能够实现与原始理论结果几乎相同的性能，这验证了所提近似方法的有效性。最后，我们注意到，随着信道老化时间的增加，跟踪性能会下降。这是因为较大的信道老化时间会在雷达信道模型中引入更高的评估噪声，从而导致更差的跟踪性能。

图5展示了最大发射功率对仿真和理论通信性能的影响。这里



(a) 均方根误差 [角度] (b) 均方根误差 [距离] (c) 速度均方根误差 []

图 4：均匀功率与带宽分配下，均方误差随最大发射功率的变化： $K = 4$、 $M_1 = 60$、$L_t = 24$ 和 $L_r = 64$。



（a）仿真与理论结果 (b)渐近分析

图5：采用均匀功率与带宽分配时，第 n 块中所有用户的总可达速率随最大发射功率的变化： $K = 4$、 $Q = 10$、 $M_1 = 300$、$L_t = 32$ 和 $L_r = 64$。

我们考虑在整个传输帧中采用均匀功率与带宽分配、且不考虑感知与通信性能要求时，第 n 块的总可达传输速率，记为 $R_n = \sum_{q=1}^{Q} R_{q,\,n}$。从图5(a)可以看出，由式(44)得到的理论总可达速率与仿真结果相符，这验证了所推导理论结果的正确性。此外，我们观察到，对于任意 N，随着功率增加，采用最大比传输（MRT）得到的速率均有上限，这是因为在非正交信道下，MRT方案存在干扰。相比之下，采用迫零（ZF）得到的速率仅在 $N = 1$ 时没有上限，因为ZF方案不存在干扰。然而，由于信道评估噪声的存在，当 $N \geq 2$ 时这一结论不成立。从图5(b)可以看出，所有结果均受式(45)所得渐近结果的限制，这验证了所推导理论结果的正确性。

图6展示了信道老化时间对平均总可达传输速率的影响。请注意，在该图中，信道老化时间为常数，无需在问题P1中进行优化。因此，经过少量修改后，所提算法和其他基准方案可用于求解固定 N 时的问题P1。从图中可以看出，各方案的性能均随信道老化时间的增加而先升高后降低。这是因为利用信道老化效应可以减少CSI估计和雷达目标跟踪中的训练开销，从而提高可达速率。然而，老化后的通信与雷达信道的评估噪声功率也会随信道老化时间增加，最终导致速率下降。这一观察促使我们确定能够满足特定系统要求和用户需求的最优信道老化时间。

图7展示了最大发射功率对平均总可达传输速率的影响。从图中可以看出，各方案的总可达速率均随发射功率增加而提升。此外，所提算法的性能与上界方案相近，且优于基准方案，这证明了所提算法的有效性。此外，所提算法与“无信道老化”方案之间的性能差距会随发射功率增加而扩大。这是因为更高的发射功率能够在第一个区块中获得更好的估计/跟踪性能，

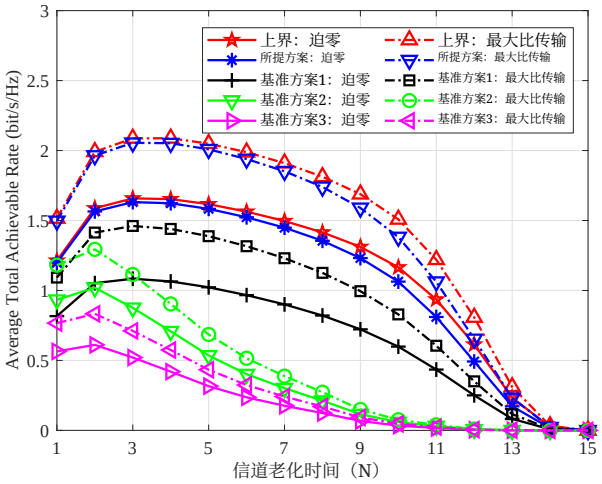


图6：平均总可达速率与信道老化时间的关系： P = -5 分贝毫瓦，K = 4、 Q = 10、 M_1 = 300、 $L_t = 32$。

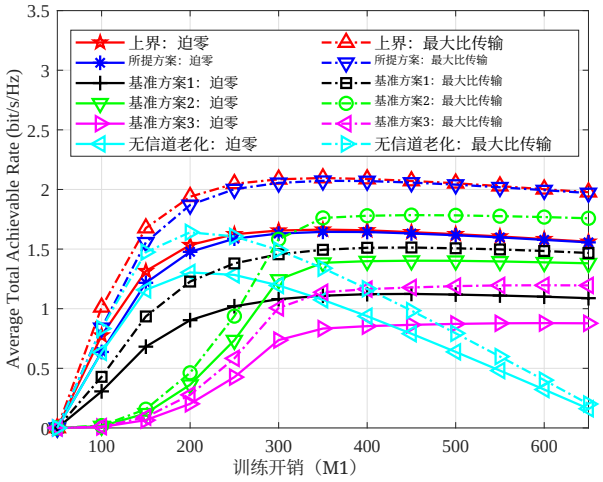


图 8：平均总可达速率与训练开销的关系： P = -5 分贝毫瓦，K = 4、 Q = 10、 $L_t = 32$ 和 $L_r = 64$。

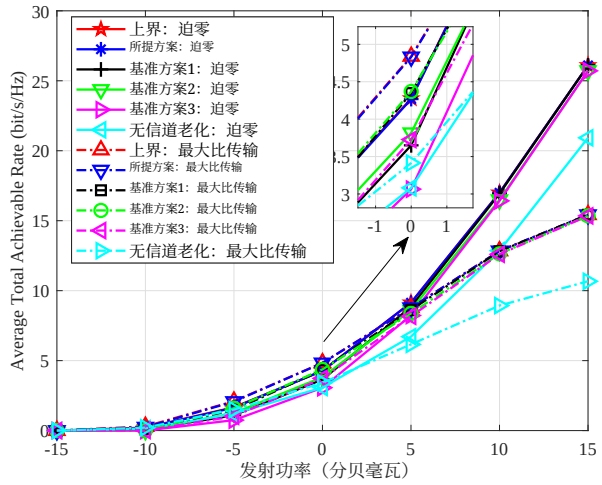


图7：平均总可达速率与最大发射功率的关系： K = 4、 Q = 10、 M_1 = 300、 L_t = 32和$L_r = 64$。

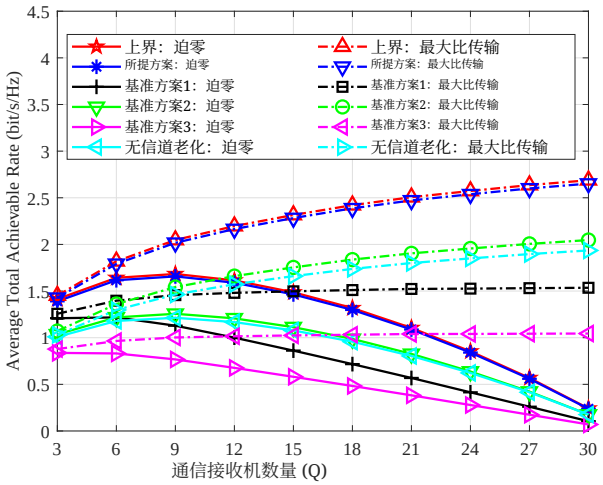


图 9：平均总可达速率随通信接收机数量的变化： P = -5 分贝毫瓦、 K = 4、 M_1 = 300、$L_t = 32$ 和 $L_r = 64$。

从而带来更大的最优信道老化时间和更高的传输效率。这些发现验证了利用信道老化改善系统性能的重要性。最后可以观察到，在低功率区域，采用MRT波束成形的算法优于采用ZF波束成形的算法；但在高功率区域则相反。这些结果可为所研究系统的波束成形设计提供指导。

图 8 展示了训练开销对平均总可达速率的影响。可以看出，随着训练开销增加，各方案的性能都先提升后下降。这是因为更多的训练信号能够带来更好的估计/跟踪性能，从而提高可达传输速率。然而，较高的训练开销也意味着第一个区块中的数据传输时间更短，导致可达速率降低。此外，我们还可以观察到，“无信道老化”方案的性能下降速度快于其他方案。这是因为该方案在每个区块中都有训练开销，而其他方案仅在第一个区块中有训练开销。这凸显了在系统设计中优化信道老化时间的重要益处。

图9展示了通信接收机数量对平均总可达速率的影响。从图中可以观察到，基于最大比传输的方案的性能随着用户数量的增加而提升。这是因为更多的用户为系统设计提供了更大的自由度，从而带来更高的可达速率。然而，基于零强迫的方案在用户数量增加时表现更差。这是因为基于零强迫的方案需要保证所有用户之间的正交性。因此，在发射天线数量给定的情况下，基于零强迫方案的波束成形增益会随着用户数量的增加而降低，从而导致更低的速率。这可用于指导所研究系统的波束成形设计。

VI. 结论

本文利用信道老化特性来减少训练开销，并针对下行多用户/多目标DFRC系统，提出一种基于情境相关信道重新估计间隔优化的资源分配方案。具体而言，我们分别刻画了信道老化效应对雷达跟踪克拉美–罗下界性能和通信可达速率性能的影响。随后，将这两项性能指标表示为关于带宽、功率和信道老化时间的闭式表达式。在此基础上，我们构建了一个平均总老化可达速率最大化问题，该问题受个体跟踪精度需求、定制化通信速率要求及其他实际约束的限制。此外，提出一种基于一维搜索的优化算法，以高效求解该问题。最后，仿真结果验证了所得结果的正确性以及所提算法的有效性。

附录

A. 定理3.1的证明

为简化推导克拉美–罗下界时的记号，若不存在歧义，我们省略式（11）中 $\mathrm{y}_k^{\mathrm{R}}(m,b)$ 的下标 k，并用 $y_{m,b,l}$ 表示向量 $\mathrm{y}_k^{\mathrm{R}}(m,b)$ 的第 $l+1$ 个元素，其中 $0\le l\le L_r-1$。令式（11）中的 $\bar{v}=2\pi T\nu^D$ 和 $\bar{\tau}=2\pi\Delta_f\tau$，可得

$$y_{m,b,l}=\alpha e^{j(\phi-l\pi sin(\theta)+b\bar{\tau}+m\bar{v})}+\omega_{m,b,l}, \tag{58}$$

其中，$\omega_{m,b,l}$ 为相应的等效高斯噪声，其均值为零，方差为 $\frac{\sigma\Delta_f}{pL_t}$。

接着，令 $\mathbf{z}=[\theta,\bar{\tau},\bar{v},\alpha,\phi]^T$，即可得到相应的费舍尔信息矩阵：

$$\mathbf{J}_{ij}=\frac{2pL_t}{\sigma\Delta_f}\sum_{m=0}^{M_1-1}\sum_{b=0}^{B_k-1}\sum_{l=0}^{L_r-1}\left[\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Re}}}{\partial z_i}\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Re}}}{\partial z_j}+\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Im}}}{\partial z_i}\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Im}}}{\partial z_j}\right], \tag{59}$$

其中，z_i 是向量 $\mathbf{z}$ 的第 i 个元素，$1\le i\le 5$、$y_{m,b,l}^{\mathrm{Re}}$ 和 $y_{m,b,l}^{\mathrm{Im}}$ 分别是$y_{m,b,l}$的实部和虚部。于是，估计误差协方差的界为

$$\mathrm{var}\left(\hat{z}_i\right)\ge\mathbf{J}^{-1}(i,i), \tag{60}$$

其中，$\mathbf{J}^{-1}(i,i)$是逆矩阵 $\mathbf{J}$ 的第 i 个对角元素。

由于逆处理的复杂性，仅使用所有测量值很难从（60）推导出闭式界，因此我们采用 [42] 中的类似方法来获得一个更简单的下界。为了计算 θ的界，我们可以利用这样一个事实：由于未知的多普勒频移和时延，每个测量值都具有不同的、随机且未知的初始相位。由于假设白噪声是误差源，因此可以将根据每个测量值对 θ 的估计视为相互独立的 [42]。根据概率论，我们有

$$\mathrm{var}\left(\hat{\theta}\right)\ge\frac{1}{M_1B_k}\mathbf{J}_\theta^{-1}(1,1), \tag{61}$$

其中 $\mathbf{J}_\theta=\frac{2pL_t}{\sigma\Delta_f}\sum_{l=0}^{L_r-1}\left[\frac{\partial y_{m}^{\mathrm{Re}}}{\partial z_i}\frac{\partial y_{m}^{\mathrm{Re}}}{\partial z_j}+\frac{\partial y_{m}^{\mathrm{Im}}}{\partial z_i}\frac{\partial y_{m}^{\mathrm{Im}}}{\partial z_j}\right]$、$i,j\in\{1,4,5\}$（58）（61）。将（）代入（）中，可得

$$\mathrm{var}\left(\hat{\theta}\right)\ge\frac{6\sigma\Delta_f}{p|\alpha|^2\pi^2\cos^2(\theta)B_kM_1L_tL_r(L_r^2-1)}. \tag{62}$$

Similarly, we can define $\mathbf{J}_{\bar{\tau}}=\frac{2pL_t}{\sigma\Delta_f}\sum_{b=0}^{B_k-1}\left[\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Re}}}{\partial z_i}\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Re}}}{\partial z_j}+\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Im}}}{\partial z_i}\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Im}}}{\partial z_j}\right],i,j\in\{2,4,5\}$ and $\mathbf{J}_{\bar{v}}=\frac{2pL_t}{\sigma\Delta_f}\sum_{m=0}^{M_1-1}\left[\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Re}}}{\partial z_i}\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Re}}}{\partial z_j}+\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Im}}}{\partial z_i}\frac{\partial y_{m,b,l}^{\mathrm{Im}}}{\partial z_j}\right],i,j\in\{3,4,5\}$ to derive the bounds of $\bar{\tau}$ and $\bar{v}$, respectively, and then we have

$$\mathrm{var}\left(\hat{\bar{\tau}}\right)\ge\frac{6\sigma\Delta_f}{p|\alpha|^2B_kM_1L_tL_r(B_k^2-1)}, \tag{63}$$

$$\mathrm{var}\left(\hat{\bar{v}}\right)\ge\frac{6\sigma\Delta_f}{p|\alpha|^2B_kM_1L_tL_r(M_1^2-1)}. \tag{64}$$

于是，由于 $\bar{\tau}=2\pi\Delta_f\tau$和 $\tau=2\frac{d}{c_0}$，可得 $\bar{\tau}=4\pi\Delta_f\frac{d}{c_0}$。此外，由于 $\bar{v}=2\pi T\nu^D$和 $\nu^D=\frac{2v\cos(\theta-\varphi_k)}{c_0}f_c$，可得 $\bar{v}=4\pi Tf_c\frac{v\cos(\theta-\varphi_k)}{c_0}$。最后，根据式 (63) 和式 (64) 推导出的界，可得距离 d和速度 v的克拉美罗下界为

$$\mathrm{var}\left(\hat{d}\right)\ge\frac{3c_0^2\sigma\Delta_f}{8(\pi\Delta_f)^2p|\alpha|^2B_kM_1L_tL_r(B_k^2-1)}, \tag{65}$$

$$\mathrm{var}\left(\hat{v}\right)\ge\frac{3c_0^2\sigma\Delta_f}{8(\pi T)^2f_c^2p|\alpha|^2\cos^2(\theta-\varphi_k)B_kM_1L_tL_r(M_1^2-1)}. \tag{66}$$

B. 定理 3.2 的证明

为简化近似克拉美–罗下界的推导过程中的符号表示，若不存在歧义，我们省略所有变量的下标 k。首先，$\partial\mathcal{G}(\mathbf{x})$ 的雅可比矩阵定义为 $\mathbf{G}_n=\frac{\partial\mathcal{G}(\mathbf{x})}{\partial\mathbf{x}}\Big|_{\mathbf{x}=\hat{\mathbf{x}}_n}$。根据 (5) 和 (6)，雅可比矩阵 $\mathbf{G}_n$ 可计算为

$$\mathbf{G}_n=\begin{bmatrix}1+\frac{\hat{v}_n\widetilde{T}}{\hat{d}_n}\cos\left(\hat{\tilde{\theta}}_n\right) & -\frac{\hat{v}_n\widetilde{T}}{\hat{d}_n^2}\sin\left(\hat{\tilde{\theta}}_n\right) & \frac{\widetilde{T}}{\hat{d}_n}\sin\left(\hat{\tilde{\theta}}_n\right)\\ \hat{v}_n\widetilde{T}\sin\left(\hat{\tilde{\theta}}_n\right) & 1 & -\widetilde{T}\cos\left(\hat{\tilde{\theta}}_n\right)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \tag{67}$$

其中 $\hat{\tilde{\theta}}_n=\hat{\theta}_n-\varphi_k$。由于 $\frac{\hat{v}_n\hat{v}_{n-1}\widetilde{T}^2\hat{d}_n\hat{d}_{n-1}}{v_n\widetilde{T}\hat{d}_n^2}\approx 0$、$\hat{v}_n\hat{v}_{n-1}\widetilde{T}^2\hat{d}_n\approx 0$，$\mathbf{G}_n\mathbf{G}_{n-1}$ 可近似为

$$\mathbf{G}_n\mathbf{G}_{n-1}\approx\begin{bmatrix}1+\sum_{i=n-1}^{n}\frac{\hat{v}_i\widetilde{T}}{\hat{d}_i}\cos\left(\hat{\tilde{\theta}}_i\right) & 0 & \sum_{i=n-1}^{n}\frac{\widetilde{T}}{\hat{d}_i}\sin\left(\hat{\tilde{\theta}}_i\right)\\ \sum_{i=n-1}^{n}\hat{v}_i\widetilde{T}\sin\left(\hat{\tilde{\theta}}_i\right) & 1 & -\sum_{i=n-1}^{n}\widetilde{T}\cos\left(\hat{\tilde{\theta}}_i\right)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{68}$$

然后，利用式（68）进行一些代数运算，可得

$$\prod_{i'=i}^{n-1}\mathbf{G}_{i'}\approx\begin{bmatrix}1+\sum_{i'=i}^{n-1}\frac{\hat{v}_{i'}\widetilde{T}}{\hat{d}_{i'}}\cos\left(\hat{\tilde{\theta}}_{i'}\right) & 0 & \sum_{i'=i}^{n-1}\frac{\widetilde{T}}{\hat{d}_{i'}}\sin\left(\hat{\tilde{\theta}}_{i'}\right)\\ \sum_{i'=i}^{n-1}\hat{v}_{i'}\widetilde{T}\sin\left(\hat{\tilde{\theta}}_{i'}\right) & 1 & -\sum_{i'=i}^{n-1}\widetilde{T}\cos\left(\hat{\tilde{\theta}}_{i'}\right)\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{69}$$

类似地，由于对于 $i \neq i'$，$\hat{v}_i \hat{v}_{i'} \widetilde{T}^2 \hat{d}_i \hat{d}_{i'} \approx 0$，式（26）右侧的第一项和第二项可分别近似为以下两个方程，即，

$$\operatorname{diag}\left(\tilde{\mathbf{G}}_{n-1}\mathbf{D}\tilde{\mathbf{G}}_{n-1}^H\right) \approx \operatorname{diag}\left(a_n, 1, 1\right)\mathbf{D}, \tag{70}$$

$$\operatorname{diag}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\bar{\mathbf{G}}_{n,i}\boldsymbol{\Sigma}_\omega\bar{\mathbf{G}}_{n,i}^H\right) \approx (n-1)\operatorname{diag}\left(\frac{b_n}{n-1}, 1, 1\right)\boldsymbol{\Sigma}_\omega, \tag{71}$$

where $a_n = \left|1+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\hat{v}_i\widetilde{T}}{\hat{d}_i}\cos\left(\hat{\tilde{\theta}}_i\right)\right|^2$ and $b_n = 1 + \sum_{i=2}^{n-1}\left|1+\sum_{i'=i}^{n-1}\frac{\hat{v}_{i'}\widetilde{T}}{\hat{d}_{i'}}\cos\left(\hat{\tilde{\theta}}_{i'}\right)\right|^2$.

最后，将 (70) 和 (71) 代入 (26)，即可将 (27) 中推导出的克拉美罗下界近似为 (28)，证明完成。

C. 定理 3.3 的证明

采用 MRT波束成形时，有 $\mathbf{f}_{q,n} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_q L_t}}\hat{\mathbf{h}}_{q,1}$。然后可得以下各项：

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left(\mathbf{h}_{q,n}^H\mathbf{f}_{q,n}\right)\right|^2 \\
=&\left|\mathbb{E}\left(\left(\hat{\mathbf{h}}_{q,n}^H+\bar{\mathbf{e}}_{q,n}^H\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda_q L_t}}\hat{\mathbf{h}}_{q,1}\right)\right|^2 = \left|\mathbb{E}\left(\frac{\rho_q^{n-1}}{\sqrt{\lambda_q L_t}}\hat{\mathbf{h}}_{q,1}^H\hat{\mathbf{h}}_{q,1}\right)\right|^2 \\
=&\rho_q^{2(n-1)}\lambda_q L_t, \qquad (72)\\
&\mathbb{E}\left(\left|\mathbf{h}_{q,n}^H\mathbf{f}_{q,n} - \mathbb{E}\left(\mathbf{h}_{q,n}^H\mathbf{f}_{q,n}\right)\right|^2\right) \\
=&\mathbb{E}\left(\left|\frac{\rho_q^{n-1}}{\sqrt{\lambda_q L_t}}\hat{\mathbf{h}}_{q,1}^H\hat{\mathbf{h}}_{q,1}\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda_q L_t}}\bar{\mathbf{e}}_{q,n}^H\hat{\mathbf{h}}_{q,1}\right|^2\right)-\left|\mathbb{E}\left(\mathbf{h}_{q,n}^H\mathbf{f}_{q,n}\right)\right|^2 \\
=&\rho_q^{2(n-1)}\lambda_q\left(L_t+1\right)+\left(\beta_q-\rho_q^{2(n-1)}\lambda_q\right)-\rho_q^{2(n-1)}\lambda_q L_t = \beta_q, \qquad (73)\\
&\mathbb{E}\left(\left|\left(\hat{\mathbf{h}}_{q,n}^H+\bar{\mathbf{e}}_{q,n}^H\right)\mathbf{f}_{i,n}\right|^2\right) \\
=&\mathbb{E}\left(\left|\frac{\rho_q^{n-1}}{\sqrt{\lambda_i L_t}}\hat{\mathbf{h}}_{q,1}^H\hat{\mathbf{h}}_{i,1}\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\left|\frac{1}{\sqrt{\lambda_i L_t}}\bar{\mathbf{e}}_{q,n}^H\hat{\mathbf{h}}_{i,1}\right|^2\right) \\
=&\rho_q^{2(n-1)}\lambda_q+\left(\beta_q-\rho_q^{2(n-1)}\lambda_q\right)=\beta_q. \qquad (74)
\end{aligned}$$

然后，将 (72)、(73) 和 (74) 代入 (42)，即可得到 MRT 下的信道干扰噪声比 $\gamma_{q,n}$ ，如 (44) 所示。

采用ZF波束成形时，我们有 $\mathbf{f}_{q,n} = \frac{\left(\hat{\mathbf{h}}_{q,n}^H\hat{\mathbf{h}}_{i,1}\right)_{i=1}^{q=i}}{\sqrt{\lambda_q\left(L_t-Q\right)}}\mathbf{a}_q$。根据 $\hat{\mathbf{h}}_{q,1}^H\mathbf{a}_i$（若 $i \neq q$，否则为 0）[44]。然后可以推导出以下各项：

$$\begin{aligned}
&\left|\mathbb{E}\left(\mathbf{h}_{q,n}^H\mathbf{f}_{q,n}\right)\right|^2 \\
=&\left|\mathbb{E}\left(\left(\hat{\mathbf{h}}_{q,n}^H+\bar{\mathbf{e}}_{q,n}^H\right)\sqrt{\lambda_q\left(L_t-Q\right)}\mathbf{a}_q\right)\right|^2=\rho_q^{2(n-1)}\lambda_q\left(L_t-Q\right), \qquad (75)\\
&\mathbb{E}\left(\left|\mathbf{h}_{q,n}^H\mathbf{f}_n - \mathbb{E}\left(\mathbf{h}_{q,n}^H\mathbf{f}_n\right)\right|^2\right) \\
=&\mathbb{E}\left(\left|\left(\rho_q^{n-1}\hat{\mathbf{h}}_{q,1}^H+\bar{\mathbf{e}}_{q,n}^H\right)\sqrt{\lambda_q\left(L_t-Q\right)}\mathbf{a}_q\right|^2\right)-\left|\mathbb{E}\left(\mathbf{h}_{q,n}^H\mathbf{f}_{q,n}\right)\right|^2 \\
=&\lambda_q\left(L_t-Q\right)\left(\beta_q-\rho_q^{2(n-1)}\lambda_q\right)\mathbb{E}\left(\|\mathbf{a}_q\|^2\right)=\beta_q-\rho_q^{2(n-1)}\lambda_q, \qquad (76)\\
&\mathbb{E}\left(\left|\left(\hat{\mathbf{h}}_{q,n}^H+\bar{\mathbf{e}}_{q,n}^H\right)\mathbf{f}_{i,n}\right|^2\right) \\
=&\mathbb{E}\left(\left|\rho_q^{n-1}\hat{\mathbf{h}}_{q,1}^H\sqrt{\lambda_i\left(L_t-Q\right)}\mathbf{a}_i\right|^2\right)+\mathbb{E}\left(\left|\bar{\mathbf{e}}_{q,n}^H\sqrt{\lambda_i\left(L_t-Q\right)}\mathbf{a}_i\right|^2\right) \\
=&\beta_q-\rho_q^{2(n-1)}\lambda_q. \qquad (77)
\end{aligned}$$

最后，将 (75)、(76) 和 (77) 代入 (42)，即可得到式 (44) 中 ZF 下的信道干扰噪声比 $\gamma_{q,n}$。至此，证明完成。

D. 定理 4.2 的证明

为简化以下证明中的符号，固定 N 时，目标函数 $\mathcal{R}(N, \mathbf{p}, \tilde{\mathbf{p}}, \mathbf{B})$ 可表示为函数 $\mathrm{F}(p_0 B_0, \tilde{\mathbf{p}})$，该函数仅依赖于 $p_0 B_0$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}$。接下来，我们采用反证法证明变换等价性。

首先，由于固定 N 时问题 P2 可行，我们假设 $\mathbf{p}^\star = [p_0^\star, p_1^\star, \cdots, p_K^\star]^T$ 和 $\mathbf{B}^\star = [B_0^\star, B_1^\star, \cdots, B_K^\star]^T$ 是相应的最优解。此外，我们假设 $\mathbf{p}^\dagger = \left[p_0^\dagger\ p_1^\dagger\ \cdots\ p_K^\dagger\right]^T$ 和 $\left[B_0^\dagger\ B_1^\dagger\ \cdots\ B_K^\dagger\right]^T$ 是在相同固定 N 下问题 $\mathbf{P2}-\mathrm{A}$ 的最优解。基于上述假设，我们知道 $\mathbf{p}^\dagger$、$\mathrm{B}^\dagger$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}^*$ 也是固定 N 时问题 P2 的可行解。此外，根据上述假设，我们还可以得到以下重要结果，即 $\mathrm{F}(p_0^\star B_0^\star, \tilde{\mathbf{p}}^\star) \geq \mathrm{F}\left(p_0^\dagger B_0{}^\dagger, \tilde{\mathbf{p}}^\star\right)$ 和 $p_0^\star B_0^\star \leq p_0^\dagger B_0^\dagger$。然而，显然 $\mathrm{F}(p_0 B_0, \tilde{\mathbf{p}})$ 是关于 $p_0 B_0$ 的单调递增函数。因此，如果 $p_0^\star B_0^\star \leq p_0^\dagger B_0^\dagger$，则有 $\mathrm{F}(p_0^\star B_0^\star, \tilde{\mathbf{p}}^\star) \leq \mathrm{F}\left(p_0^\dagger B_0{}^\dagger, \tilde{\mathbf{p}}^\star\right)$。这与 $p_0^\star$ 和 $B_0^\star$ 是固定 N 时问题 P2 的最优解这一假设相矛盾。因此，我们知道问题 P2 和 $\mathbf{P2}-\mathrm{A}$ 的 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{B}$ 解相同。回顾可知，$\mathrm{F}(p_0 B_0, \tilde{\mathbf{p}})$ 仅取决于 $p_0 B_0$ 和 $\tilde{\mathbf{p}}$。因此，一旦得到 $p_0 B_0$，显然可以通过求解问题 $\mathbf{P2}-\mathrm{B}$ 得到问题 P2 的最优 $\tilde{\mathbf{p}}$。至此，定理得证。

参考文献

[1] L. Zheng, M. Lops, Y. C. Eldar, 和 X. Wang, “雷达与通信共存：综述——近期方法回顾”, IEEE 信号处理杂志, 第36卷, 第5期, 第85–99页, 2019年。[2] F. Liu, Y. Cui, C. Masouros, J. Xu, T. X. Han, Y. C. Eldar, 和 S. Buzzi, “通感一体化：迈向面向6G及更广泛未来的双功能无线网络”, IEEE 通信领域精选期刊, 第40卷, 第6期, 第1728–1767页, 2022年。[3] C. Sturm 和 W. Wiesbeck, “无线通信与雷达感知融合中的波形设计和信号处理问题”, IEEE会刊, 第99卷, 第7期, 第1236–1259页, 2011年。[4] F. Liu, C. Masouros, A. P. Petropulu, H. Griffiths, 和 L. Hanzo, “雷达与通信联合设计：应用、最新进展及未来方向”, IEEE通信汇刊, 第68卷, 第6期, 第3834–3862页, 2020年。[5] H. Yang, Z. Wei, Z. Feng, C. Qiu, Z. Fang, X. Chen, 和 P. Zhang, “联合通信雷达系统的队列感知动态资源分配”, IEEE 车辆技术汇刊, 第70卷, 2020年1, 第754–767页。[6] C. Ouyang, Y. Liu, 和 H. Yang, “NOMA-通感一体化：性能分析与速率区域刻画”, arXiv 预印本 arXiv:2205 13756, 2022年。[7] T. Tian, G. Li, H. Deng, 和 J. Lu, “双功能雷达通信的自适应比特/功率分配与波束成形”, IEEE无线通信快报, 第11卷, 第6期, 第1186–1190页, 2022年6月。[8] M. Temiz, E. Alsusa, 和 M. W. Baidas, “面向大规模多输入多输出正交频分复用双雷达通信系统的优化预编码器”, IEEE通信汇刊, 第69卷, 第7期, 第4781–4794页, 2021年。[9] Y. Luo, J. A. Zhang, X. Huang, W. Ni, 和 J. Pan, “雷达通信联合设计中多波束成形向量的优化与量化”, IEEE通信汇刊, 第67卷, 第9期, 第6468–6482页, 2019年。

[10] X. Zhou, L. Tang, Y. Bai, 和 Y.-C. Liang，“集成式 FD-MIMO 雷达通信系统的性能分析与波形优化”，IEEE 无线通信汇刊，第20卷，第11期，第7490–7502页，2021年。[11] X. Wang, Z. Fei, J. A. Zhang, J. Huang, 和 J. Yuan，“双功能雷达通信多无人机网络中的约束效用最大化”，IEEE通信汇刊，第69卷，第4期，第2660–2672页，2020年。[12] Z. Wang, Y. Liu, X. Mu, 和 Z. Ding，“用于集成感知与通信的 NOMA 启发式干扰消除”，载于 IEEE 国际通信会议（ICC）论文集，2022年，第3154–3159页。[13] M. Ashraf 和 B. Tan，“集成感知与通信系统中的检测概率最大化方案”，载于 IEEE 车辆技术会议（VTC-Spring）论文集，2022年，第1–6页。[14] G. Cui, H. Li, 和 M. Rangaswamy，“具有恒模和相似性约束的 MIMO 雷达波形设计”，IEEE 信号处理汇刊，第62卷，第2期，第343–353页，2013年。[15] M. Hua, Q. Wu, W. Chen, 和 A. Jamalipour，“通感一体化：联合导频与传输设计”，arXiv 预印本 arXiv:2211.12891，2022年。[16] N. Cao, Y. Chen, X. Gu, 和 W. Feng，“利用复用用户信号进行雷达通信联合波形设计”，IEEE通信汇刊，第68卷，第8期，第5216–5227页，2020年。[17] Z. Ni, J. A. Zhang, K. Yang, X. Huang, 和 T. A. Tsiftsis，“面向多输入单输出通信与雷达联合感知的多指标波形优化”，IEEE通信汇刊，第70卷，第2期，第1276–1289页，2021年。[18] M. Xie, W. Yi, T. Kirubarajan, 和 L. Kong，“分布式雷达网络中多目标跟踪的联合节点选择与功率分配策略”，IEEE 信号处理汇刊，第66卷，2017年3，第729–743页。[19] X. Yuan, Z. Feng, J. A. Zhang, W. Ni, R. P. Liu, Z. Wei, 和 C. Xu，“考虑训练开销的 MIMO 通信与无线电感知联合系统时空功率优化”，IEEE 车辆技术汇刊，第70卷，第1期，第514–528页，2020年。[20] P. Kumari, S. A. Vorobyov, 和 R. W. Heath，“面向毫米波雷达通信联合系统的自适应虚拟波形设计”，IEEE 信号处理汇刊，第68卷，第715–730页，2019年。[21] M. Hua, Q. Wu, C. He, S. Ma, 和 W. Chen，“IRS 辅助雷达通信的联合有源与无源波束成形设计”，IEEE 无线通信汇刊，第1–1页，2022年，doi：10.1109/TWC.2022.3210532。[22] J. Yan, H. Liu, B. Jiu, B. Chen, Z. Liu, 和 Z. Bao，“多目标跟踪的同时多波束资源分配方案”，IEEE 信号处理汇刊，第63卷，第12期，第3110–3122页，2015年。[23] J. Yan, H. Liu, B. Jiu, 和 Z. Bao，“未调制连续波雷达网络中目标跟踪的功率分配算法”，IEEE 传感器期刊，第15卷，第2期，第1098–1108页，2014年。[24] H. Zhang, B. Zong, 和 J. Xie，“共址 MIMO 雷达多目标跟踪的功率与带宽分配”，IEEE 车辆技术汇刊，第69卷，第9期，第9795–9806页，2020年。[25] G. R. Muns, K. V. Mishra, C. B. Guerra, Y. C. Eldar, 和 K. R. Chowdhury，“利用基于 IEEE 802.11 ad 的雷达实现自主车载通信的波束对准与跟踪”，载于 IEEE 计算机通信会议研讨会论文集（INFOCOMWKSHPS），2019年，第535–540页。[26] W. Yuan, F. Liu, C. Masouros, J. Yuan, D. W. K. Ng, 和 N. Gonz´alez-Prelcic，“车载网络的贝叶斯预测波束成形：低开销雷达通信方法”，IEEE 无线通信汇刊，第20卷，第3期，第1442–1456页，2020年。[27] F. Liu, W. Yuan, C. Masouros, 和 J. Yuan，“车载链路的雷达辅助预测波束成形：由感知服务通信”，IEEE 无线通信汇刊，第19卷，第11期，第7704–7719页，2020年。[28] C. Liu, W. Yuan, S. Li, X. Liu, H. Li, D. W. K. Ng, 和 Y. Li，“面向车载网络通感一体化的学习型预测波束成形”，IEEE 通信领域精选期刊，第40卷，第8期，第2317–2334页，2022年。[29] Y. Zhou, P. C. Yip, 和 H. Leung，“利用无源阵列跟踪多个运动目标的到达方向：算法”，IEEE 信号处理汇刊，第47卷，第10期，第2655–2666页，1999年。[30] P. Chen, C. Qi, L. Wu, 和 X. Wang，“自适应雷达系统中基于卡尔曼滤波器的目标散射系数估计波形设计”，IEEE 车辆技术汇刊，第67卷，2018年11，第11 805–11 817页。[31] K. E. Baddour 和 N. C. Beaulieu，“用于衰落信道仿真的自回归建模”，IEEE 无线通信汇刊，第4卷，第4期，第1650–1662页，2005年。[32] R. Chopra, C. R. Murthy 和 H. A. Suraweera，“信道老化下大规模MIMO波束成形系统的吞吐量”，IEEE信号处理快报，第23卷，第11期，第1523–1527页，2016年。[33] C. Kong、C. Zhong、A. K. Papazafeiropoulos、M. Matthaiou 和 Z. Zhang，“信道老化下大规模MIMO系统的和速率与功率缩放”，IEEE通信汇刊，第63卷，4893，2015年12，4879无页码。[34] A. K. Papazafeiropoulos，“一般信道老化条件对大规模MIMO下行链路性能的影响”，IEEE 车辆技术汇刊，第66卷，第2期，第1428–1442页，2016年2月。[35] R. Deng、Z. Jiang、S. Zhou 和 Z. Niu，“异构用户移动性下大规模MIMO系统的间歇式CSI更新”，IEEE通信汇刊，第67卷，第7期，第4811–4824页，2019年。[36] J. Zheng、J. Zhang、E. Bj¨ornson 和 B. Ai，“空间相关信道中信道老化对无蜂窝大规模MIMO的影响”，IEEE 无线通信汇刊，第20卷，第10期，第6451–6466页，2021年。[37] L. Gaudio、M. Kobayashi、B. Bissinger 和 G. Caire，“采用正交频分复用和正交时频空间的雷达通信一体化性能分析”，载于《IEEE国际通信会议研讨会论文集》（ICC研讨会），2019年，第1–6页。[38] H. Schober 和 F. Jondral，“基于正交频分复用的通信系统速度估计”，载于《IEEE车辆技术会议论文集》，第2卷。IEEE，2002年，第715–718页。[39] L. G. de Oliveira、B. Nuss、M. B. Alabd、A. Diewald、M. Pauli 和 T. Zwick，“雷达通信一体化系统：调制方案与系统设计”，IEEE微波理论与技术汇刊，第70卷，第3期，第1521–1551页，2021年。[40] L. Gaudio、M. Kobayashi、G. Caire 和 G. Colavolpe，“正交时频空间用于雷达参数估计与通信的有效性”，IEEE 无线通信汇刊，第19卷，第9期，第5951–5965页，2020年。[41] J. Chen、Y.-C. Liang、H. V. Cheng 和 W. Yu，“可重构智能表面辅助多用户毫米波MIMO系统的信道估计”，IEEE 无线通信汇刊，第1–1页，2023年，doi: 10.1109/TWC.2023.3246264。[42] K. M. Braun，“移动通信网络中的OFDM雷达算法”，博士论文，卡尔斯鲁厄，卡尔斯鲁厄理工学院（KIT），论文，2014年，2014年。[43] S. M. Kay，《统计信号处理基础：估计理论》，第1卷。美国新泽西州恩格尔伍德克利夫斯：Prentice-Hall，1998年。[44] H. Q. Ngo、E. G. Larsson 和 T. L. Marzetta，“超大规模多用户MIMO系统的能量效率与频谱效率”，IEEE通信汇刊，第61卷，第4期，第1436–1449页，2013年。[45] M. Grant、S. Boyd 和 Y. Ye，“CVX：用于规范凸优化的MATLAB软件”，*[在线]*。网址：http://stanford.edu/ boyd/cvx。[46] J. Chen、L. Zhang、Y.-C. Liang、X. Kang 和 R. Zhang，“短分组通信下无线供电物联网网络的资源分配”，IEEE 无线通信汇刊，第18卷，1461，2019年2，1447无页码。[47] D. H. Nguyen 和 R. W. Heath，“采用IEEE 802.11正交频分复用信号传输的多目标检测中的时延与多普勒处理”，载于《国际声学、语音与信号处理会议论文集》（ICASSP），2017年，第3414–3418页。[48] O. Onubogu、K. Ziri-Castro、D. Jayalath、K. Ansari 和 H. Suzuki，“5.8 GHz频段高速公路、郊区和城市环境中的实测车车路径损耗建模”，载于《国际信号处理与通信系统会议论文集》（ICSPCS）。IEEE，2014年，第1–6页。[49] H. Godrich、A. P. Petropulu 和 H. V. Poor，“分布式多雷达架构中目标定位的功率分配策略”，IEEE 信号处理汇刊，第59卷，第7期，第3226–3240页，2011年。