arXiv:2303.00646v1 [math.DG] 1 Mar 2023

具有海森堡对称性的共形爱因斯坦洛伦兹李群

E. CALVI ˜NO-LOUZAO、E. GARC´IA-R´IO、I. GUTI´ERREZ-RODR´IGUEZ、
R. V´AZQUEZ-LORENZO

Abstract. 我们描述了所有共形爱因斯坦的海森堡群洛伦兹半直积扩张。作为一个附带结果，我们对海森堡群半直积扩张上的巴赫平坦左不变洛伦兹度量进行了分类，从而为共形引力提供了新的背景解。

1. Introduction

尽管广义相对论取得了巨大成功，但在大尺度距离方面仍存在一些未解决的问题，这表明有必要修改引力理论本身。共形几何是修改引力的多种途径之一，属于作用量中包含高阶导数的范畴。

广义相对论中度量的运动方程是通过对爱因斯坦–希尔伯特作用量进行泛函变分 $I = I_{EH} + I_\wedge + I_m$ 推导出来的：

$$I : g \mapsto I(g) = -\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(\tau - 2\wedge) + I_m$$

其中， τ 是标量曲率， I_m 是物质部分， $I_\wedge$ 表示宇宙学常数 $\wedge$ 对应的作用量。相应的运动方程为（$\rho - \frac{1}{2}\tau g$） $- \wedge g = -8\pi GT$，其中 T是能量动量张量， ρ是里奇张量。最初，人们认为引力理论的修改应当能够复现这些方程，但事实未必如此。

共形引力是指在伪黎曼几何意义下，在共形变换下保持不变的引力理论。这一类中最简单的理论以韦尔张量范数的平方作为拉格朗日量[27, 28]

$$I : g \mapsto I(g) = \int d^4x\sqrt{-g}\,\|W\|^2 + I_m,$$

这与通常的爱因斯坦–希尔伯特作用量形成对比，后者的拉格朗日量仅为标量曲率。对度量进行变分后得到的运动方程 $\mathfrak{B} = 0$ 是四阶方程，其中 $\mathfrak{B}$ 是巴赫张量。

若四维伪黎曼流形 (M^n, g) 的巴赫张量

$$\mathfrak{B} = \operatorname{div}_2 \operatorname{div}_4 W + \tfrac{1}{2}W[\rho] \tag{1}$$

Key words and phrases. 共形引力、巴赫张量、共形爱因斯坦、海森堡群、半直积延拓。由项目 PID2019-105138GB-C21 和 PID2021-127075NA-I00 （AEI/FEDER，西班牙）以及 ED431C 2019/10、ED431F 2020/04（加利西亚自治区政府，西班牙）资助。1

恒等于零，则称其为巴赫平坦；其中， W 表示韦尔共形曲率张量，$W[\rho]$ 是韦尔张量与里奇张量 $W[\rho]_{ij} = W_{iajb}\rho^{ab}$的缩并。局部共形平坦度量具有 $W = 0$ ，因此它们显然是巴赫平坦的。爱因斯坦度量也为巴赫平坦，因为韦尔张量是无迹的，并且在爱因斯坦情形下 $\operatorname{div} W = 0$。巴赫张量是二次曲率泛函的梯度，该泛函由韦尔张量的 L^2-范数给出，并且在四维中在共形变换下保持不变 [2]。因此，四维共形爱因斯坦度量也为巴赫平坦。

伪黎曼流形 (M^n, g) 若其共形类 $[g]$ 中存在一个爱因斯坦代表度量，则称其为共形爱因斯坦。等价地，共形相关的度量 $\overline{g} = \varphi^{-2}g$ 是爱因斯坦度量，当且仅当存在一个处处非零的解满足以下超定偏微分方程

$$(n-2)\operatorname{Hes}_\varphi + \varphi\rho = \tfrac{1}{n}\{(n-2)\Delta\varphi + \varphi\tau\}g, \tag{2}$$

其中 $\operatorname{Hes}_\varphi$ 是 φ 的海森张量，而 $\Delta\varphi = \operatorname{tr}_g\operatorname{Hes}_\varphi$ 是（局部定义的）共形因子 φ 的拉普拉斯算子。方程 (2) 在二维情形下是平凡的，最初由 Brinkmann [5] 研究。尽管它看似简单，对方程 (2) 的求解却出奇地困难。

如果共形度量 $\overline{g} = e^{-2\sigma}g$ 是爱因斯坦度量，那么 $\overline{\operatorname{div}}\,\overline{W} = 0$，因此 $\operatorname{div}_4 W - W(\,\cdot,\cdot,\cdot,\nabla\sigma) = 0$。若伪黎曼流形存在一个 Cotton 平坦的共形度量 $\overline{g} = e^{-2\sigma}g$ ，则称其为共形 Cotton 平坦。等价地，存在一个函数 σ ，使得

$$\operatorname{div}_4 W - W(\cdot,\cdot,\cdot,\nabla\sigma) = 0. \tag{3}$$

更一般地，若存在一个（不一定是梯度）向量场 X，使得 $\operatorname{div}_4 W - W(\,\cdot,\cdot,\cdot,X) = 0$（见 [20]），则称 (M, g) 为共形 C-空间。[22], 阐明了共形 Cotton 平坦性质的特殊意义：其中证明，弱泛型巴赫平坦流形是共形爱因斯坦的，当且仅当它是共形 Cotton 平坦的；这里，弱一般是指将韦尔张量视为映射 $W\colon TM \to \otimes^3 TM$ 时，该映射是单射。

具有零平行向量场 ℓ 的时空在广义相对论中已得到广泛研究；在横向平坦的情形下，它们称为 pp-波，即曲率端omorphism 满足 $R(\ell^\perp, \ell^\perp) = 0$ [18]，其中 R 表示曲率张量。此外，若曲率张量还横向平行（即 $\nabla_{\ell^\perp} R = 0$），则该时空为平面波。四维 pp-波最早由 Brinkmann [6] 在数学背景下发现。在物理学中，平面波和 pp-波出现在广义相对论中，并发挥着重要作用（见 [4, 18]）。 [8] 证明，四维 pp-波是共形爱因斯坦的，当且仅当棉花张量消失，或等价地，$\operatorname{div} W = 0$。（关于巴赫平坦 pp-波的描述，另见 [26] 。）因此，平面波是共形爱因斯坦的。

连通单连通的四维李群要么是乘积 $\sim SU(2) \times \mathbb{R}$, $SL(2,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$，要么是三维幺模李群的可解半直扩张之一： $\widetilde{E}(2) \rtimes \mathbb{R}$, $E(1,1) \rtimes \mathbb{R}$, $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{R}^3 \rtimes \mathbb{R}$；其中 $\widetilde{E}(2)$、 $E(1,1)$、 H_3 和 $\mathbb{R}^3$ 分别表示单连通的欧几里得、庞加莱、海森堡和阿贝尔三维李群。四维李群上的巴赫平坦左不变黎曼度量只占很小一类（见 [1, 13]）。洛伦兹情形则截然不同，其中存在大量巴赫平坦左不变度量。目前看来，对这类

度量进行一般性分类似乎是一项相当难以完成的任务。因此，本文聚焦于一类特殊的李群，即海森堡群的半直扩张 $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ 。因此，我们将范围限定为以海森堡群为正规子群、且其作用具有余维一的四维单连通李群。文献 [11],描述了 $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ 上的左不变爱因斯坦度量，并证明它们是里奇平坦平面波，或具有非正的常截面曲率。我们分析了所有左不变洛伦兹度量，并对其中巴赫平坦和共形爱因斯坦的度量给出了分类结果。由于巴赫张量和共形爱因斯坦性质在相似变换下保持不变，我们在相似等价的层面上进行研究，以简化讨论。需要强调的是，相似变换不一定由李群的同构给出。因此，为了保持李群结构，我们在同构相似变换意义下进行研究。

1.1. 结果概要。不可分解洛伦兹对称空间是不可约的（因而具有常截面曲率），或者局部等距于卡亨-沃勒赫对称空间 [9]。四维卡亨-沃勒赫对称空间与带有坐标 (u, v, x^1, x^2)、度量为 $g = du dv + H(v, x^1, x^2) dv dv + dx^1 dx^1 + dx^2 dx^2$ 的 $\mathbb{R}^4$ 等距，其中 $H(v, x^1, x^2) = \sum \lambda_i (x^i)^2$。作为平面波，卡亨-沃勒赫对称空间是共形爱因斯坦的，因而是巴赫平坦的。此外，低维对称空间的乘积是巴赫平坦的（实际上是共形爱因斯坦的），除非它们是具有常截面曲率 $c_1^2 \neq c_2^2$ 的曲面乘积 $N^2(c_1) \times N^2(c_2)$。以下我们考虑 $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ 不是局部对称的洛伦兹李群。

通常，海森堡群 H_3 的李代数 $\mathfrak{h}_3$ 由基$\{v_1, v_2, v_3\}$ 描述，其李括号为 $[v_1, v_2] = v_3$。一维半直扩张$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ 由海森堡代数 $\mathfrak{h}_3$ 的导子确定，而该代数在 $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathbb{R}$ 中成为一个理想。此外，若 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $\mathfrak{g}$ 上的洛伦兹内积，则其在 $\mathfrak{h}_3$ 上的限制可能是退化的、具有黎曼符号的，或具有洛伦兹符号的。这促使我们分别研究上述三种彼此不同、但不一定互斥的情形。

注 1.1。本文的分析有一个特殊情形对应于振子代数及相应的振子群（例如，见 [30, 32]），以及半直扩张 $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ 上的一些特定度量（见 [10]）。

另一种特殊情形是直接扩张 $H_3 \times \mathbb{R}$，此时半直扩张简化为乘积李群。Rahmani 在 [31] 中证明，海森堡群 H_3 上存在三个非相似类的左不变洛伦兹度量。Kondo 和 Tamaru 最近在 [21] 中证明，在自同构意义下，$H_3 \times \mathbb{R}$ 上恰好存在六个非相似类的左不变洛伦兹度量，它们由以下李代数结构描述

$$[e_1, e_2] = -(\alpha e_1 - e_4), \quad [e_2, e_3] = \beta(\alpha e_1 - e_4), \quad [e_2, e_4] = \alpha(\alpha e_1 - e_4),$$

其中 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是 $\mathfrak{h}_3 \times \mathbb{R}$ 的标准正交基，且 e_4 为类时，参数 $(\alpha, \beta) \in \{(0, 0)、(1, 0)、(1, 1)、(2, 0)、(2, \sqrt{3})、(2, 2)\}$。

直接计算表明，$(\alpha, \beta) = (1, 0)$ 确定了一个平坦度量。在其他情况下，当且仅当 $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ 时，该度量是巴赫平坦的；此时它是局部共形平坦且局部对称的；或者当 $(\alpha, \beta) = (2, \sqrt{3})$ 时，此时作用于二形式空间上的里奇算子和韦尔曲率算子都是二步幂零的。此外，在后一种情况下，里奇张量是平行的，但该度量并非局部对称，尽管曲率张量是

以对称空间为模型。该度量对应于一个平面波，其导出代数 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 是类空的，并且度量在中心$\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$上的限制具有签名 $(+,-,0) = (1,0,1)$。关于非乘积半直扩张 $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ 上的巴赫平坦 pp-波左不变度量的讨论见 §1.1.3。

1.1.1. 非平凡共形爱因斯坦度量。若一个共形爱因斯坦度量既非爱因斯坦度量，也非局部共形平坦，且不是平面波，则称其为非平凡。本文的主要结果描述了海森堡群的所有非平凡共形爱因斯坦半直洛伦兹扩张，具体如下。

定理 1.2. 设 $(H_3 \rtimes \mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是海森堡群的一个非对称半直扩张，并赋有左不变 Lorentz度量。那么，该度量是非平凡共形爱因斯坦度量，当且仅当它与以下某个度量同构相似：

(D) 度量在 $\mathfrak{h}_3$ 上的限制是退化的，且该度量由 (D.i) $[u_1,u_4]=u_1$, $[u_2,u_3]=u_1$, $[u_2,u_4]=u_2$ 确定。(D.ii) $[u_1,u_3]=u_1$, $[u_1,u_4]=\varepsilon u_1$, $[u_2,u_3]=\alpha u_1$, $[u_2,u_4]=\varepsilon u_2$ 确定，其中 $\varepsilon^2=1$ 和 $\alpha\geq 0$。这里，$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 表示 $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ 的一个伪正交规范基，满足$\langle u_1,u_1\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = \langle u_3,u_4\rangle = 1$。

(R) 度量在 $\mathfrak{h}_3$ 上的限制是黎曼度量，且度量由以下内容确定

$$[e_1,e_2]=e_3,\quad [e_1,e_4]=\alpha e_1+e_3,\quad [e_3,e_4]=\alpha e_3,\quad with\quad \alpha>0,$$

其中，$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ 表示 $\mathfrak{h}_3\rtimes\mathfrak{r}$的一组标准正交基，且 e_4 为类时。

(L) 度量在 $\mathfrak{h}_3$ 上的限制是洛伦兹度量，且度量由以下内容确定

(L.i) $[e_1,e_3]=-\alpha e_2$, $[e_1,e_4]=e_1+\alpha e_2$, $[e_2,e_4]=e_2$，其中 $\alpha>0$和 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$表示 $\mathfrak{h}_3\rtimes\mathfrak{r}$的一组标准正交基，且 e_3为类时。(L.ii) $[u_1,u_3]=-u_2$, $[u_1,u_4]=4u_1+\alpha u_2$, $[u_2,u_4]=4u_2$，其中 $\alpha\in\mathbb{R}$和 $\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$表示 $\mathfrak{h}_3\rtimes\mathfrak{r}$ 的一组伪正交规范基，且$\langle u_1,u_2\rangle=\langle u_3,u_3\rangle=\langle u_4,u_4\rangle=1$。(L.iii) $[u_1,u_3]=-u_2$, $[u_1,u_4]=-u_1$, $[u_2,u_4]=3u_2$, $[u_3,u_4]=4u_3$，其中$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$表示 $\mathfrak{h}_3\rtimes\mathfrak{r}$的一组伪正交规范基，且$\langle u_1,u_2\rangle=\langle u_3,u_3\rangle=\langle u_4,u_4\rangle=1$。

此外，除 (L.iii) 外，所有情况下的左不变度量都与一个里奇平坦的 pp-波共形等价。

考察注 1.3、注 1.4 和注 1.5 中给出的定理 1.2 各种情形下里奇算子的特征值结构可知，对于 $\varepsilon=-1$，它们都对应不同的齐次缩放类，唯有 (D.ii) 和 (R) 可能例外（对于 $\varepsilon=1$，则是 (D.ii) 和 (L.i)）。此外，对 $W[\rho]$ 进行直接计算，并考察相关 (1, 1) 张量场的特征值，可以表明上述情形并非相似。另一种方法是，根据 [15]，的研究，只需考察里奇算子的特征向量所构成的相应标准正交基，也可得出上述类之间不存在相似变换。

注 1.3. 定理 1.2-(D.i) 中左不变度量的里奇算子是可对角化的，其特征值为 $\{1,1,-1,-1\}$，因此标量曲率为 $\tau=0$。

韦尔曲率算子 $W:\ \Lambda^2 \to \Lambda^2$ 是二步幂零的，因此不是弱一般的。

伪黎曼流形的标量二次曲率不变量空间由 $\{\tau^2, \|\rho\|^2, \|R\|^2, \Delta\tau\}$ 生成。因此，任意二次曲率泛函都是相应 L^2范数的线性组合：$g \mapsto \Phi_{abc}(g) = \int dx^4\sqrt{-g}\,\{a\|\rho\|^2 + b\|R\|^2 + c\tau^2\}$。根据四维高斯-博内定理，四维中的任意二次曲率泛函都等价于以下某个泛函：

$$\mathcal{S} : g \mapsto \mathcal{S}(g) = \int dx^4\sqrt{-g}\,\tau^2 \quad \text{or} \quad \mathcal{F}_t : g \mapsto \mathcal{F}_t(g) = \int dx^4\sqrt{-g}\,\left\{\|\rho\|^2 + t\tau^2\right\}.$$

特别地，由威尔曲率张量的 L^2范数给出的泛函等价于 $\mathcal{F}_{-1/3}$。三维和四维中的爱因斯坦度量是所有二次曲率泛函的临界点（但在更高维中不一定如此）。此外，四维度量是所有二次曲率泛函的临界点，当且仅当它是两个不同二次曲率泛函的临界点。特别地，标量曲率为零的任何巴赫平坦度量都是所有二次曲率泛函的临界点。由于平面波是巴赫平坦的，且其里奇算子是二步幂零的，因此它们是所有二次曲率泛函的临界点。定理 1.2-(D.i) 中的度量标量曲率为零。因此，它是所有二次曲率泛函的临界点，尽管它既不是平面波，也不是局部对称的（甚至不是以对称空间为模型的）。

定理 1.2-(D.ii) 中度量的里奇算子具有四个不同的实特征值 $\{\varepsilon(-1 \pm \sqrt{\alpha^2+2})$、$\varepsilon(-2 \pm \sqrt{\alpha^2+1})\}$，因此标量曲率为 $\tau = -6\varepsilon$。此外，固定 ε，$\alpha \geq 0$ 便确定了相似类，因为相似不变量 $\tau^{-2}\|\rho\|^2 = \frac{1}{9}(\alpha^2+4)$。这些度量不是弱一般的，因为作用于二形式空间上的韦尔曲率算子是二步幂零的。

注 1.4。定理 1.2-(R) 中左不变度量的里奇算子具有四个不同的实特征值 $\{\alpha($ $2\alpha \pm 1)$、$\alpha(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+1})\}$，因此标量曲率为 $\tau = 6\alpha^2$。此外，$\alpha > 0$ 确定了不同的相似类，因为相似不变量为 $\tau^{-2}\|\rho\|^2 = \frac{1}{9}(\frac{1}{\alpha^2}+3)$。这些度量不是弱一般的，因为作用于二形式空间上的韦尔曲率算子是二步幂零的。

注 1.5. 定理 1.2-(L.i) 中左不变度量的里奇算子有四个不同的实特征值 $\{-2 \pm \alpha, -1 \pm \sqrt{\alpha^2+1}\}$，因此标量曲率$\tau = -6$。该度量不是弱一般的，因为韦尔曲率算子是二步幂零的。此外，参数 $\alpha > 0$ 决定了相似类，因为 $\tau^{-2}\|\rho\|^2 = \frac{1}{9}($ $\alpha^2+3)$。

定理 1.2-(L.ii) 中的度量，其里奇算子的特征值为 $\{0, -32, -32, -32\}$，因此标量曲率 $\tau = -96$。当 $\alpha = 0$ 时，里奇算子可对角化；否则，其最小多项式有一个二重根。此外，这些度量不是弱一般的，因为作用于二形式空间的韦尔曲率算子是二步幂零的。

定理 1.2-(L.iii) 中左不变度量的里奇算子是可对角化的，$\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}$ $[-6, -6, -24, -18]$，因此 $\tau = -54$。韦尔曲率算子的特征值为 $\{-4, 2, 2, -4, 2, 2\}$，其中特征值 2 是最小多项式的二重根。因此，它是弱一般的。

注 1.6。两圈重整化群流（简称 RG2 流）是 Ricci流 $\partial_t g_t = -2\rho[g_t]$ 的扰动，在数学上描述为 $\partial_t g_t = -2RG[g_t]$。对称 (0, 2) 张量场 $RG = \rho + \frac{\Upsilon}{4}\check{}R$，其中 Υ 表示正耦合常数，而 $\check{}R$ 是由 $\check{}\ R_{ij} = R_{iabc}R_j{}^{abc}$ 给出的对称 (0, 2) 张量场。有关 RG2 流的更多信息，请参见 [14, 19] 及其中的参考文献。流的真正不动点由满足张量场 RG 消失的流形给出，即 $\rho + \frac{\Upsilon}{4}\check{}R = 0$。给定 M 的微分同胚的单参数族 ψ_t（其中 $\psi_0 =$Id），形如 $g(t) = \sigma(t)\psi_t^* g$ 的解（其中 σ 是实值函数，且 $\sigma(0) = 1$）称为自相似解。三元组 (M, g, X)，其中 X 是 M 上的向量场，若对某个 $\lambda \in \mathbb{R}$ 有 $\mathcal{L}_X g + RG = \lambda g$，则称为 RG2孤立子。此外，如果 $\lambda < 0$、$\lambda = 0$ 或 $\lambda > 0$，则分别称该孤立子为膨胀型、稳态型或收缩型。RG2 流的任何自相似解都是 RG2孤立子，只需取由微分同胚单参数群 ψ_t 生成的向量场 X 即可。由于构成 RG 的两项在相似变换下的行为不同（$\rho[\kappa g] = \rho[g]$ 和 $\check{}R[\kappa g] = \frac{1}{\kappa}\check{}R[g]$），可知反之仅对稳态孤立子成立；此时，$\psi_t$ 是与由孤立子方程 $\mathcal{L}_X g + RG = 0$ 和 $g(t)$ 确定的向量场 X 相关联的微分同胚单参数群，而 $= \psi_t^* g$ 是一个自相似解（见 [33]）。

设 G 是一个带有左不变度量 $\langle\cdot$ 的李群，$\cdot\rangle$，并令 $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 表示相应的李代数。RG2代数孤立子是李代数 $\mathfrak{g}$ 的一个导子，其形式为 $\mathfrak{D} = RG - \lambda$Id，其中 RG 是与 RG 和 $\lambda \in \mathbb{R}$ 在度量意义下等价的 (1, 1) 张量场。与 Ricci流情形类似，RG2代数孤立子会导出 RG2孤立子（其中向量场 X 与由导子 $\mathfrak{D}$ 确定的 G 自同构单参数群相关联）（参见 [24, 33]）。

现在，直接计算可知，定理 1.2-(L.ii) 中的左不变度量是稳态型 RG2代数孤立子，且 $RG2 = \rho + \frac{1}{32}\check{}R$。因此，它们是稳态型 RG2孤立子，也就是具有二步幂零张量场 RG 的流的自相似解。此外，它们不是代数Ricci孤立子。

与前一种情形不同，定理 1.2-(L.iii) 中的左不变度量是一个收缩型RG2代数孤立子，且 $RG2 = \rho + \frac{1}{10}\check{}R$。因此，它们是具有对角张量场 RG 的收缩型RG2孤立子，但不是代数Ricci孤立子。

1.1.2. 严格巴赫平坦度量。若一个巴赫平坦度量不是共形爱因斯坦度量（因此也不是平面波），我们就称其为严格的。与定理 1.2 和定理 1.9 中的 pp-波情形不同，严格Bach平坦半直扩张$H_3 \rtimes \mathbb{R}$ 相当罕见，下面将对其进行描述

定理 1.7. 设 $(H_3 \rtimes \mathbb{R}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是海森堡群的一个非对称半直扩张，并赋有左不变洛伦兹度量。那么，该度量严格巴赫平坦，当且仅当它与下列某个李代数同构相似：

(i) $[v_1, v_2] = -3\sqrt{14}v_2 + 2\varepsilon\sqrt{11}v_3$、$[v_1, v_3] = \sqrt{14}v_3$、$[v_1, v_4] = -2\sqrt{14}v_4$、$[v_2, v_3] = 4v_4$，其中 $\varepsilon^2 = 1$ 和 $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ 表示 $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ 的一组标准正交基，v_1 和 v_4 为类空，且 $\langle v_2, v_2\rangle = -\langle v_3, v_3\rangle = \bar{\varepsilon} = \pm 1$。

(ii) $[u_1, u_3] = -\frac{1}{\sqrt{-(\alpha+\beta^2)}}u_2$, $[u_1, u_4] = \frac{1}{\sqrt{-(\alpha+\beta^2)}}(\beta u_1 + \gamma u_2 + u_3)$,

$[u_3,u_4]=\frac{1}{\sqrt{-(\alpha+\beta^2)}}\left(\alpha u_1-\frac{\alpha+3\beta^2}{4\alpha}u_2-\beta u_3\right)$，其中常数 α、β、γ 满足 $\gamma=\frac{1}{4\alpha^2}\left(\overline{(3\alpha+\beta^2)}\ \beta\pm 2\sqrt{-4\alpha^4-2\ (\alpha+\beta^2)\ ^3}\right)$，其中 $-\frac{1}{2}\le\alpha<0$且 $\beta^2\le-\alpha\left(\sqrt[3]{2\alpha}+1\right)$。此外，$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 表示 $\mathfrak{h}_3\rtimes\mathfrak{r}$ 的一组伪标准正交基，且 $\langle u_1、\ u_2\rangle=\langle u_3、\ u_3\rangle=\langle u_4、\ u_4\rangle=1$。

注 1.8. 定理 1.7-(i) 中左不变度量的里奇算子可对角化，Ric $=$ diag $[-174,\ -138,\ 42,\ -120]$，因此 $\tau=-390$。此外，$\bar{\varepsilon}$决定了与特征值 -138 和 42 对应的特征向量是类空还是类时。因此，参数 $\bar{\varepsilon}$ 决定了两个非齐次共形类。此外，韦尔曲率算子 $W:\ \Lambda^2\to\Lambda^2$ 具有六个互不相同的非零复特征值，因此是弱一般的。

定理 1.7-(ii) 中度量对应的里奇算子的特征多项式为

$$\det(\mathrm{Ric}-\lambda\,\mathrm{Id})=\lambda^4-\tfrac{3}{4}\lambda^3+\tfrac{3}{16}\lambda^2-\tfrac{9}{64}\lambda+\tfrac{\alpha^4}{8(\alpha+\beta^2)^3}.$$

直接计算可得，判别式为

$$\Delta=\tfrac{1}{262144(\alpha+\beta^2)^9}\left(131072\alpha^{12}-74160\alpha^8(\alpha+\beta^2)^3\right.$$
$$\left.+12312\alpha^4(\alpha+\beta^2)^6-2187(\alpha+\beta^2)^9\right),$$

考虑到定理 1.7 中对 α、β 的限制，该式严格为负。因此，里奇算子有两个实根（符号相反）和两个共轭复根。此外，标量曲率严格为正，$\tau=\frac{3}{4}$。作用于二形式空间上的韦尔曲率算子是三步幂零的。

1.1.3. 巴赫平坦 pp-波度量。注 1.1 已证明，乘积 $H_3\times\mathbb{R}$ 上的所有巴赫平坦左不变度量都是平面波。非乘积半直扩张 $H_3\rtimes\mathbb{R}$ 上的、为 pp-波的巴赫平坦左不变度量如下所示。事实证明，它们都是平面波。齐性平面波的分类见 [3]。

定理 1.9. 设 $(H_3\rtimes\mathbb{R},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是海森堡群的一个非乘积半直扩张，并赋有左不变洛伦兹度量。若 $(H_3\rtimes\mathbb{R},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个非对称的巴赫平坦 pp-波，且不是局部共形平坦的，那么它与以下度量之一同构相似：

(D.i) 由下式确定的左不变度量

$$[u_1,u_2]=u_3,\qquad [u_1,u_4]=\kappa_1u_1+\kappa_2u_2+\kappa_4u_3,$$
$$[u_2,u_4]=-\kappa_2u_1+\kappa_3u_2+\kappa_5u_3,\quad [u_3,u_4]=(\kappa_1+\kappa_3)u_3,$$

where $\kappa_1,\ \kappa_2,\ \kappa_3,\ \kappa_4,\ \kappa_5\in\mathbb{R}$, *with* $(\kappa_1-\kappa_3)(2\kappa_2+1)\neq0$.

(D.ii) 由下式确定的左不变度量

$$[u_1,u_3]=u_1,\quad [u_2,u_3]=\kappa\,u_1,\quad \kappa>0,$$

其中，$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$ 是 $\mathfrak{h}_3\rtimes\mathfrak{r}$的伪正交规范基，且 $\langle u_1、\ u_1\rangle=\langle u_2、\ u_2\rangle=\langle u_3、\ u_4\rangle=1$。

（L）由下式确定的左不变度量

$$[u_1,u_3]=-\varepsilon u_2,\quad [u_1,u_4]=\kappa_1u_2+\kappa_2u_3,\quad [u_3,u_4]=\kappa_3u_2,$$

其中， $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ 是 $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$的一组伪正交规范基，且 $\langle u_1、\ u_2\rangle = \langle u_3、\ u_3\rangle = \langle u_4、\ u_4\rangle = 1$，以及 $\kappa_1、\ \kappa_2、\ \kappa_3 \in \mathbb{R}$ 满足 $\kappa_2(\kappa_2 + \kappa_3) \neq 0$，并且 $\varepsilon = \pm 1$。

此外，上述所有情形都是共形爱因斯坦平面波。

注 1.10. 回顾注 1.1， $H_3 \times \mathbb{R}$ 上的所有巴赫平坦度量都具有平行里奇张量。直接计算可知，对应于 (D.i) 的度量，其里奇张量平行当且仅当 $(\kappa_1 + \kappa_3)(4\kappa_1\kappa_3 + 1) = 0$。因此，在一般情况下，这些度量与乘积 $H_3 \times \mathbb{R}$ 上的任何左不变度量都不相似。

(D.ii) 中的李群不同构于乘积 $H_3 \times \mathbb{R}$，尽管其里奇张量是平行的。事实上，与乘积 $H_3 \times \mathbb{R}$ 不同，其底层李群是可解的，但不是二步幂零的。

(L) 中的李群是三步幂零的。因此，(L) 中的左不变度量与乘积$H_3 \times \mathbb{R}$上的任何左不变度量都不同构相似，尽管其里奇张量是平行的。

直接计算可知，对应于 (D.i) 的度量的截面曲率不依赖于参数 κ_4 和 κ_5。因此，根据 [23] 中的研究，(D.i) 中的左不变度量与具有 $\kappa_4 = \kappa_5 = 0$的度量相似（但不一定同构相似）。类似地，(L) 中度量的截面曲率既不依赖于 κ_1，也不依赖于 ε。因此，(L) 中的度量与具有 $\varepsilon = -1$ 和 $\kappa_1 = 0$的度量相似（但不同构相似）。

1.2. 左不变度量的巴赫张量与 Gr¨obner 基。设 $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ 是一个四维洛伦兹李群。现在显然，巴赫平坦条件 $\mathfrak{B} = 0$ 等价于关于结构常数的一个多项式方程组（由巴赫张量的分量 $\mathfrak{B}_{ij}$ 给出），为获得完整分类，必须求解该方程组。当所考虑的方程组较为简单时，求出所有公共根是一个初等问题；但如果方程、未知数的数量及其次数增加，这项任务就可能变得相当棘手。

给定一组多项式 $\mathcal{S}$ $\mathfrak{B}_{ij} \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$， n 个实数$\vec{a} = (a_1, \ldots\ldots, a_n)$ 组成的元组是 $\mathcal{S}$ 的一个解，当且仅当对于所有 i， j，都有 $\mathfrak{B}_{ij}(\vec{a}) = 0$。一个基本的观察是： $\vec{a}$ 是 $\mathcal{S}$ 的一个解，当且仅当它也是由 $\mathfrak{B}_{ij}$ 生成的理想 $\mathcal{I} = \langle\mathfrak{B}_{ij}\rangle$ 的一个解：如果两组多项式生成同一个理想，那么相应的零点集必定相同。Gr¨obner 基理论提供了一种广为人知的策略，可用于求解相当大型的多项式系统：通过得到属于初始多项式系统所生成理想的“更好”多项式来求解（有关 Gr¨obner 基的更多信息，参见 [16] ）。

设 $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 满足 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，且是 $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n]$ 中的一个单项式。单项式序是单项式集合 x^α 上满足 $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 的任意关系

(1) 它是 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 上的全序。(2) 如果 $\alpha > \beta$ 且 $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$，那么 $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$。

(3) $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 是良序的，因此 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 的每个非空子集都相对于给定的排序有一个最小元素。

在 $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ 上建立排序将诱导出单项式的排序。出于我们的目的，我们将使用字典序和分次反字典序。我们称 $\alpha >_{lex} \beta$，如果在向量 $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$ 中最左侧的非零项为正；我们称 $\alpha >_{grevlex} \beta$，如果 $|\alpha| > |\beta|$ 或 $|\alpha| = |\beta|$，且最右侧

非零项为负。我们想强调的是，Gr¨obner 基的构造对变量和单项式的排序非常敏感。对于某种排序，可以用较少的多项式得到一个简单的 Gr¨obner 基；而对于其他排序，多项式的数量及其形式都可能变得完全难以处理。在大多数情况下，单项式的字典序最适合用于得到简单的基。不过，出于计算方面的原因，并非总能采用这种排序，因此必须考虑其他排序。因此，我们会针对每种情况，明确说明所考虑的单项式和变量的排序。

最后，值得注意的是，对于变量和单项式的给定排序，Gr¨obner 基并非唯一，因为它们还可能取决于计算中所使用的算法。然而，它们适合用于检验理想成员问题，并判定给定多项式是否属于所考虑的理想。本文所有计算均使用 Singular [17] 完成，并以 Mathematica进行了双重核验。相关文件可向作者索取。

1.3. 本文安排。我们在第 §2、 §3 和 §4 节中分析半直扩张 $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ 上巴赫平坦度量的存在性，分别取决于 $\mathfrak{h}_3$ 上诱导度量是退化的、黎曼的还是洛伦兹的。定理 1.9 的证明直接由这一分析和注 1.1 得出。在所有情形中，我们都特别注意通过在相似类内采用适当的同构，获得相应巴赫平坦度量的更简洁描述。因此，共形爱因斯坦方程 (2) 与共形 Cotton 平坦方程 (3) 联立后变得可处理，定理 1.2 和定理 1.7 最终分别在第 5 节和第 6 节中得到证明。

2. Semi-direct extensions with degenerate normal subgroup H_3

本节分析作为配备退化度量的三维幺模李群 H_3 之扩张的左不变洛伦兹度量。因此，设 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ 是一个四维李代数，其上带有洛伦兹内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，且该内积在子代数$\mathfrak{h}_3$上的限制是退化内积。令 $\mathfrak{h}_3' = \mathrm{span}\{v\}$ 为 $\mathfrak{h}_3$, $\mathfrak{h}_3' = [\mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_3]$的导出子代数。由于度量在 $\mathfrak{h}_3$ 上的限制具有签名 (+, +,0)，向量 v 可以是类空向量或零向量（见 [12]）。接下来，我们分别分析这两种情况下巴赫张量为零的情形。

2.1. $\mathfrak{h}_3' = \mathrm{span}\{v\}$ 是零子空间。令 $u_3 = v$，我们可取 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$的一组伪标准正交基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，满足 $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = \langle u_3, u_4\rangle = 1$，使得 $\mathfrak{h}_3 = \mathrm{span}\{u_1, u_2, u_3\}$ 且 $\mathfrak{r} = \mathrm{span}\{u_4\}$。由于 $\mathrm{ad}(u_4)$ 在 $\mathfrak{h}_3$ 上作为导子作用，李括号为

$$[u_1, u_2] = \lambda_1 u_3, \quad [u_1, u_3] = \lambda_2 u_3, \quad [u_2, u_3] = \lambda_3 u_3, \quad \underset{(i=1,2,3)}{[u_i, u_4]} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_i^j u_j,$$

对于某些 $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$，其中 λ_1、 λ_2 和 λ_3 中至少有一个非零。接下来，考虑由矩阵 (α_i^j) 确定的端omorphism，或者等价地使用雅可比恒等式，可以根据 λ_i 的不同得到以下几种可能性。

我们将证明，在这种情况下，巴赫平坦左不变度量在局部上共形平坦或为平面波，因此不会提供严格 Bach 平坦结构的新例子。

2.1.1. 情形 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$。若 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$，则必有 $\lambda_1 \neq 0$ 且

$$[u_1, u_2] = \lambda_1 u_3, \qquad [u_1, u_4] = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3,$$
$$[u_2, u_4] = \gamma_4 u_1 + \gamma_5 u_2 + \gamma_6 u_3, \quad [u_3, u_4] = (\gamma_1 + \gamma_5) u_3,$$

其中 $\gamma_1, \ldots, \gamma_6 \in \mathbb{R}$。在这种情况下，无需额外假设，直接计算可知巴赫张量为零。此外， u_3 是一个零再现向量场，且曲率张量满足 $R(x, y) = 0$ 以及 $\nabla_x R = 0$ ，对所有 $x, y \in u_3^{\perp} = \mathrm{span}\{u_1, u_2, u_3\}$均成立。最后，上述度量的里奇张量由 $\rho_{44} = \frac{1}{2}\{\lambda_1^2 + 4\gamma_1\gamma_5 - (\gamma_2 + \gamma_4)^2\}$确定，这意味着里奇算子是各向同性的，因此底层结构是一个平面波（见 [25]）。

旋转类空向量 $\{u_1, u_2\}$ 后，可以假设 $\gamma_4 = -\gamma_2$。此外，将向量 u_k 按 $\frac{1}{\lambda_1} u_k$ 缩放，可令 $\lambda_1 = 1$ ，同时仍处于同一同似类中。最后，通过直接计算可知，度量局部共形平坦当且仅当 $(\gamma_1 - \gamma_5)(2\gamma_2 + 1) = 0$；度量局部对称当且仅当 $\gamma_1 = \gamma_5 = 0$，或 $2\gamma_2 + 1 = 0$ 且 $(\gamma_1 + \gamma_5)(4\gamma_1\gamma_5 + 1) = 0$。这对应于定理 1.9 中的断言 (D.i)。

2.1.2. 情形 $\lambda_2 = 0, \lambda_3 \neq 0$。在此情形下，李代数结构由下式给出

$$[u_1, u_2] = \lambda_1 u_3, \qquad [u_1, u_4] = \gamma_1\lambda_3 u_1 + (\gamma_1 - \gamma_2)\lambda_1 u_3, \quad [u_2, u_3] = \lambda_3 u_3,$$
$$[u_2, u_4] = \gamma_3 u_1 + \gamma_4 u_3, \quad [u_3, u_4] = \gamma_2\lambda_3 u_3,$$

其中 γ_1，……， $\gamma_4 \in \mathbb{R}$。直接计算可知，巴赫张量唯一的非零分量 $\mathfrak{B}_{ij} = \mathfrak{B}(u_i, u_j)$ 对应于 $\mathfrak{B}_{44} = \frac{1}{4}(\gamma_1^2\lambda_3^2 + \gamma_3^2)\lambda_3^2$。因此，由于 $\lambda_3 \neq 0$，必有 $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$。最后，直接验证可知，该度量局部共形平坦且局部对称。

2.1.3. 情形 $\lambda_2 \neq 0$。若 $\lambda_2 \neq 0$，则有

$$[u_1, u_2] = \lambda_1 u_3, \quad [u_1, u_3] = \lambda_2 u_3, \quad [u_2, u_3] = \lambda_3 u_3, \quad [u_3, u_4] = \gamma_4\lambda_2 u_3,$$
$$[u_1, u_4] = -\gamma_1\lambda_2\lambda_3 u_1 + \gamma_1\lambda_2^2 u_2 + \gamma_2\lambda_2 u_3,$$
$$[u_2, u_4] = -\gamma_3\lambda_3 u_1 + \gamma_3\lambda_2 u_2 + (\gamma_1\lambda_1\lambda_3 - (\gamma_3 - \gamma_4)\lambda_1 + \gamma_2\lambda_3) u_3,$$

其中 γ_1、…、 $\gamma_4 \in \mathbb{R}$。与前一种情形一样，巴赫张量仅由一个分量决定，即 $\mathfrak{B}_{44} = \frac{1}{4}(\gamma_1^2\lambda_2^2 + \gamma_3^2)(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)^2$,，这意味着 $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$。同样，直接计算表明该度量局部共形平坦且局部对称。

2.2. $\mathfrak{h}_3' = \mathrm{span}\{v\}$ 是一个类空子空间。在此情形下，我们令 $u_1 = \frac{v}{\|v\|}$ ，并考虑 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ 的伪正交规范基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ ，其中 $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_2, u_2\rangle = \langle u_3, u_4\rangle = 1$，且 $\mathfrak{h}_3 = \mathrm{span}\{u_1, u_2, u_3\}$ 和 $\mathfrak{r} = \mathrm{span}\{u_4\}$，于是

$$[u_1, u_2] = \lambda_1 u_1, \quad [u_1, u_3] = \lambda_2 u_1, \quad [u_2, u_3] = \lambda_3 u_1, \quad \underset{(i=1,2,3)}{[u_i, u_4]} = \sum_{j=1}^{3} \alpha_i^j u_j,$$

对于某些 $\alpha_i^j \in \mathbb{R}$ ，并且 λ_1、 λ_2 和 λ_3 中至少有一个非零。我们按照第 2.1 节的做法，根据 λ_i 的不同情况，得到以下几种可能性。

2.2.1. 情形 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$。在此情形下，必有 $\lambda_3 \neq 0$ ，且李代数结构为

$$[u_1,u_4]=\gamma_1u_1,\quad [u_2,u_3]=\lambda_3u_1,\quad [u_2,u_4]=\gamma_2u_1+\gamma_3u_2+\gamma_4u_3,$$
$$[u_3,u_4]=\gamma_5u_1+\gamma_6u_2+(\gamma_1-\gamma_3)u_3,$$

其中 γ_1，……， $\gamma_6\in\mathbb{R}$。由于 $\lambda_3\neq 0$，我们考虑正交基 $\hat{}u_i=\frac{1}{\lambda_3}u_i$，因此可以假设 $\lambda_3=1$ ，并在初始度量的相似类中进行研究。直接分析巴赫张量的各分量，可以消去一些结构常数，并完全确定巴赫平坦度量。具体步骤如下。

首先，我们计算 $\mathfrak{B}_{33}=\frac{1}{12}(\gamma_6^2-8\gamma_5^2+16\gamma_2)$，由此可得 $\gamma_2=\frac{1}{16}(8\gamma_5^2-\gamma_6^2)$，进而得到

$$-4\,\mathfrak{B}_{12}=\gamma_6^2(3\gamma_5\gamma_6+2\gamma_1-3\gamma_3),$$
$$-128\,\mathfrak{B}_{11}=21\gamma_6^4+144\gamma_5^2\gamma_6^2+\gamma_5\gamma_6(64\gamma_1-288\gamma_3)-80\gamma_1^2+240\gamma_3^2-160\gamma_1\gamma_3+96\gamma_4\gamma_6,$$
$$128\,\mathfrak{B}_{34}=63\gamma_6^4+144\gamma_5^2\gamma_6^2+\gamma_5\gamma_6(192\gamma_1-192\gamma_3)+80\gamma_1^2+80\gamma_3^2-160\gamma_1\gamma_3+32\gamma_4\gamma_6.$$

注意，若 $\gamma_6\neq 0$，则 $\gamma_3=\frac{1}{3}(3\gamma_5\gamma_6+2\gamma_1)$；直接计算可得$\mathfrak{B}_{11}+3\,\mathfrak{B}_{34}=\frac{1}{48}($ $40\gamma_1^2+63\gamma_6^4)\neq 0$。因此，必有 $\gamma_6=0$，并且$\mathfrak{B}_{34}=\frac{5}{8}(\gamma_1-\gamma_3)^2,$，这意味着 $\gamma_3=\gamma_1$。

此时我们有 $\gamma_2=\frac{1}{2}\gamma_5^2$、 $\gamma_6=0$ 和 $\gamma_3=\gamma_1$，最后经过简单计算可得，巴赫张量由下式确定:

$$\mathfrak{B}_{24}=\tfrac{3}{4}\gamma_1(\gamma_1\gamma_5+\gamma_4)\quad\text{and}\quad\mathfrak{B}_{44}=-\tfrac{3}{4}(\gamma_1\gamma_5+\gamma_4)(3\gamma_1\gamma_5+\gamma_4).$$

由此可得 $\gamma_4=-\gamma_1\gamma_5$，因此该左不变度量对应于$[u_1,u_4]=\gamma_1u_1$、 $[u_2,u_3]=u_1$、 $[u_2,u_4]=\frac{1}{2}\gamma_5^2u_1+\gamma_1u_2-\gamma_1\gamma_5u_3$、 $[u_3,u_4]=\gamma_5u_1$。令 $\zeta=-1$，其取值为 0 或 1，具体取决于 γ_1 是负、零还是正。取基

$$\tilde{u}_1=u_1,\quad \tilde{u}_2=u_2-\gamma_5u_3,\quad \tilde{u}_3=u_3,\quad \tilde{u}_4=\gamma_5u_2-\tfrac{1}{2}\gamma_5^2u_3+u_4,$$

若 $\gamma_1=0$，且

$$\tilde{u}_1=\frac{1}{|\gamma_1|^{\frac{1}{2}}}u_1,\quad \tilde{u}_2=\frac{\zeta}{|\gamma_1|^{\frac{1}{2}}}\left(u_2-\gamma_5u_3\right),\quad \tilde{u}_3=\zeta u_3,\quad \tilde{u}_4=\frac{1}{\gamma_1}\left(\gamma_5u_2-\tfrac{1}{2}\gamma_5^2u_3+u_4\right)$$

若 $\gamma_1\neq 0$，直接计算可得，李括号变为

$$[\tilde{u}_1,\tilde{u}_4]=|\zeta|\tilde{u}_1,\qquad [\tilde{u}_2,\tilde{u}_3]=\tilde{u}_1,\qquad [\tilde{u}_2,\tilde{u}_4]=|\zeta|\tilde{u}_2,$$

当 $\zeta=0$时，内积保持不变；若$\zeta\neq 0$，则内积为$\frac{1}{|\gamma_1|}\langle\cdot,\cdot\rangle$。由于我们讨论的是齐次缩放层次，因此无论哪种情况，都可以保留初始内积，从而仍属于同一个相似类。现在，经过直接计算可知，上述度量既非局部对称，也非局部共形平坦或爱因斯坦。上述度量的里奇算子的特征值为 $\{\zeta,\zeta,-\zeta,-\zeta\}$，且相应时空的几何性质因 ζ 是否为零而截然不同。若 $\zeta\in\{-1,1\}$，里奇算子可对角化，且该度量对应于定理 1.2-(D.i) 中的度量。反之，若$\zeta=0$，里奇算子为二步幂零；经过直接计算可知，$\tilde{u}_4$ 是一个零平行向量场，且曲率张量满足 $R(x,y)=0$，并且对所有 x，$y\in\tilde{u}_4^{\perp}=\mathrm{span}\{\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\tilde{u}_4\}$，都有 $\nabla_xR=0$。因此，底层结构是乘积 $H_3\times\mathbb{R}$ 上的左不变平面波，故与注 1.1 中讨论的巴赫平坦度量同构相似。

2.2.2. 情形 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$。此时李代数结构为

$$[u_1, u_3] = \lambda_2 u_1, \qquad [u_1, u_4] = \gamma_1 \lambda_2 u_1, \qquad [u_2, u_3] = \lambda_3 u_1,$$
$$[u_2, u_4] = (\gamma_1 - \gamma_2)\lambda_3 u_1 + \gamma_2 \lambda_2 u_2, \quad [u_3, u_4] = \gamma_3 u_1 + \gamma_4 u_2,$$

其中 $\gamma_1, \ldots, \gamma_4 \in \mathbb{R}$。由于 $\lambda_2 \neq 0$，我们考虑正交基 $\hat{u}_i = \frac{1}{\lambda_2} u_i$，从而可以假设 $\lambda_2 = 1$，并在初始度量的相似类中进行工作。在这种情况下，我们按照字典序计算由巴赫张量的各分量 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \rangle \subset \mathbb{R}[\lambda_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$ 生成的理想的 Gr¨obner 基（其中包含 48 个多项式），并得到这些多项式

$$\mathbf{g}_1 = \gamma_4^5(\gamma_3^2 + \gamma_4^2) \quad \text{and} \quad \mathbf{g}_2 = (20\gamma_3^2 - 7\gamma_4^2)(\gamma_3^2 + \gamma_4^2)^2$$

属于该理想。因此，必然有 $\gamma_3 = \gamma_4 = 0$。现在，直接计算可得 $\mathfrak{B}_{33} = \frac{2}{3}($ $\gamma_1 - \gamma_2)(2\lambda_3^4 + 3\lambda_3^2 + 1)$，这意味着 $\gamma_2 = \gamma_1$。在这些假设下，很容易验证巴赫张量为零，且相应的左不变度量为

$$[u_1, u_3] = u_1, \quad [u_1, u_4] = \gamma_1 u_1, \quad [u_2, u_3] = \lambda_3 u_1, \quad [u_2, u_4] = \gamma_1 u_2.$$

令 $\{\tilde{u}_i\}$ 为由初始基（$\tilde{u}_i = u_i$）给出的基，若 $\gamma_1 = 0$，或

$$\tilde{u}_1 = \tfrac{1}{|\gamma_1|^{\frac{1}{2}}} u_1, \quad \tilde{u}_2 = \tfrac{1}{|\gamma_1|^{\frac{1}{2}}} u_2, \quad \tilde{u}_3 = u_3, \quad \tilde{u}_4 = \tfrac{1}{|\gamma_1|} u_4$$

若 $\gamma_1 \neq 0$。令 $\zeta = -1$，分别取 0、1，具体取值取决于 γ_1 是负、零还是正。容易验证，李括号变为

$$[\tilde{u}_1, \tilde{u}_3] = \tilde{u}_1, \qquad [\tilde{u}_1, \tilde{u}_4] = \zeta \tilde{u}_1, \qquad [\tilde{u}_2, \tilde{u}_3] = \lambda_3 \tilde{u}_1, \qquad [\tilde{u}_2, \tilde{u}_4] = \zeta \tilde{u}_2, \tag{4}$$

而当 $\gamma_1 = 0$ 或时，内积显然保持不变；否则，它由 $\frac{1}{|\gamma_1|}\langle \cdot, \cdot \rangle$给出。由于我们考察的是相似层次，因此无论如何都可以保留初始内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，从而处于同一个相似类中。现在，直接计算表明，上述度量既不是局部共形平坦的，也不是爱因斯坦的；并且当且仅当 $\lambda_3 = \zeta = 0$时，它是局部对称的。此外，$(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4)$ $\mapsto (\tilde{u}_1, -\tilde{u}_2, \tilde{u}_3, \tilde{u}_4)$ 定义了一个将 (ζ, λ_3) 与 $(\zeta, -\lambda_3)$ 互换的等距变换，因此我们可以将参数 λ_3 限制为 $\lambda_3 \geq 0$。直接计算表明，上述度量的里奇算子的特征值为$\{\zeta(-1 \pm \sqrt{\lambda_3^2 + 2})\ \zeta(-2 \pm \sqrt{\lambda_3^2 + 1})\}$。若 $\zeta \in \{-1, 1\}$，则四个特征值各不相同，相应度量属于定理 1.2-(D.ii)。若 $\zeta = 0$，则该度量既不是局部共形平坦的，也不是局部对称的。此外，里奇算子是二步幂零的，并且 $\tilde{u}_4$ 是一个零平行向量场，因此 $R(x, y) = 0$以及 $\nabla_x R = 0$ 对所有 x、$y \in \tilde{u}_4^{\perp} =$ 张成$\{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_4\}$。因此，底层结构是定理 1.9-(D.ii)中的平面波。

2.2.3. 情形 $\lambda_1 \neq 0$。在这种情况下，李代数结构变为

$$[u_1, u_2] = \lambda_1 u_1, \quad [u_1, u_3] = \lambda_2 u_1, \quad [u_1, u_4] = \gamma_1 \lambda_1 u_1, \quad [u_2, u_3] = \lambda_3 u_1,$$
$$[u_2, u_4] = \lambda_1 \gamma_2 u_1 - \gamma_3 \lambda_1 \lambda_2 u_2 + \gamma_3 \lambda_1^2 u_3,$$
$$[u_3, u_4] = -(\gamma_3 \lambda_2 \lambda_3 - \gamma_2 \lambda_2 + (\gamma_1 - \gamma_4)\lambda_3) u_1 - \gamma_4 \lambda_2 u_2 + \gamma_4 \lambda_1 u_3,$$

其中 $\gamma_1, \ldots, \gamma_4 \in \mathbb{R}$。与前一种情况一样，我们使用格罗布纳基。首先，我们¯计算理想 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \rangle \subset \mathbb{R}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4]$ 的格罗布纳基，所用顺序为分次反字典序，其中 $\mathfrak{B}_{ij}$ 由各分量 $\mathfrak{B}_{ij}$ 得到，并在可能的情况下简化参数 $\lambda_1 \neq 0$。

经过漫长的计算（使用一台最近一代的家用计算机，耗时超过 12 小时），得到由 2183 个多项式组成的格罗布纳基，其中包含多项式

$$\mathbf{g} = \gamma_4^7 \lambda_1^5 (\lambda_2^2 + \lambda_3^2).$$

由于 $\lambda_1 \neq 0$，可知 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 或 $\gamma_4 = 0$。若 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$，直接计算可得 $\mathfrak{B}_{11} = \frac{1}{6}\lambda_1^4$，因此该度量不可能是巴赫平坦的。所以必有 $\gamma_4 = 0$。其次，在假设最后一个条件成立的情况下，我们针对 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \rangle \subset \mathbb{R}[\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$，按分次反字典序计算另一个格罗布纳基，得到以下多项式：

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_1' &= \lambda_1^4(\lambda_1 + 2\gamma_1\lambda_2)(\lambda_1 + 2\lambda_2(\gamma_3\lambda_2 + \gamma_1)),\\
\mathbf{g}_2' &= \lambda_1^2(\lambda_1 + 2\gamma_1\lambda_2)^2(2\gamma_2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3),\\
\mathbf{g}_3' &= \gamma_3\lambda_1^4((\lambda_1 + 2\gamma_1\lambda_2)(\lambda_1 + 2\gamma_2\lambda_3) + 2\gamma_3\lambda_1(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)),
\end{aligned}$$

在该基的 216 个多项式中。$\mathbf{g}_1'$ 和 $\mathbf{g}_2'$ 的表达式意味着 $\lambda_1 + 2\gamma_1\lambda_2 = 0$，否则 $\lambda_1 + 2\lambda_2(\gamma_3\lambda_2 + \gamma_1) = 0$，$2\gamma_2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3 = 0$。注意，无论哪种情况，$\lambda_1 \neq 0$ 都意味着 $\lambda_2 \neq 0$。接下来我们证明，在巴赫平坦的情形下，第一个条件蕴含第二个条件。事实上，若 $\lambda_1 + 2\gamma_1\lambda_2 = 0$，或等价地，若 $\gamma_1 = -\frac{\lambda_1}{2\lambda_2}$，则 $\mathbf{g}_3' = 2\gamma_3^2\lambda_1^6(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)$。因此必有 $\gamma_3 = 0$，而在这种情况下，直接计算可得 $\mathfrak{B}_{11} = -\frac{5(2\gamma_2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3)}{96\lambda_2^4}$。于是 $2\gamma_2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3 = 0$，并且由于 $\gamma_3 = 0$，还有 $\lambda_1 + 2\lambda_2(\gamma_3\lambda_2 + \gamma_1) = 0$。由此我们得出结论：若 $\gamma_4 = 0$ 且该度量是巴赫平坦的，则 $\lambda_1 + 2\lambda_2(\gamma_3\lambda_2 + \gamma_1) = 0$ 且 $2\gamma_2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_3 = 0$，或者等价地，$\gamma_1 = -\frac{\lambda_1 + 2\gamma_3\lambda_2^2}{2\lambda_2}$ 且 $\gamma_2 = \frac{\lambda_1\lambda_3}{2\lambda_2^2}$。最后，直接计算表明，在这些假设下，巴赫张量为零，相应的左不变度量为

$$\begin{aligned}
&[u_1, u_2] = \lambda_1 u_1, \quad [u_1, u_3] = \lambda_2 u_1, \qquad [u_1, u_4] = -\tfrac{\lambda_1(\lambda_1 + 2\gamma_3\lambda_2^2)}{2\lambda_2} u_1,\\
&[u_2, u_3] = \lambda_3 u_1, \quad [u_3, u_4] = \tfrac{\lambda_1\lambda_3}{\lambda_2} u_1 \quad [u_2, u_4] = \tfrac{\lambda_1^2\lambda_3}{2\lambda_2^2} u_1 - \gamma_3\lambda_1\lambda_2 u_2 + \gamma_3\lambda_1^2 u_3.
\end{aligned}$$

此时，我们引入变量 $\lambda_3' = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$ 和 $\gamma_3' = -\gamma_3\lambda_1\lambda_2^2$。此外，令$\zeta = -1$、0、1，分别对应 γ_3' 为负、零或正的情形。考虑由下式定义的基 $\{\tilde{u}_i\}$

$$\tilde{u}_1 = u_1, \quad \tilde{u}_2 = u_2 - \tfrac{\lambda_1}{\lambda_2} u_3, \quad \tilde{u}_3 = \tfrac{1}{\lambda_2} u_3, \quad \tilde{u}_4 = \lambda_1 u_2 - \tfrac{\lambda_1^2}{2\lambda_2} u_3 + \lambda_2 u_4$$

若 $\gamma_3' = 0$，且

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1 &= \tfrac{1}{|\gamma_3'|^{\frac{1}{2}}} u_1, \qquad \tilde{u}_2 = \tfrac{1}{|\gamma_3'|^{\frac{1}{2}}} \left(u_2 - \tfrac{\lambda_1}{\lambda_2} u_3\right),\\
\tilde{u}_3 &= \tfrac{1}{\lambda_2} u_3, \qquad \tilde{u}_4 = \tfrac{1}{|\gamma_3'|} \left(\lambda_1 u_2 - \tfrac{\lambda_1^2}{2\lambda_2} u_3 + \lambda_2 u_4\right)
\end{aligned}$$

若 $\gamma_3' \neq 0$，直接计算可得李括号变为

$$[\tilde{u}_1, \tilde{u}_3] = \tilde{u}_1, \qquad [\tilde{u}_1, \tilde{u}_4] = \zeta\tilde{u}_1, \qquad [\tilde{u}_2, \tilde{u}_3] = \lambda_3'\tilde{u}_1, \qquad [\tilde{u}_2, \tilde{u}_4] = \zeta\tilde{u}_2,$$

若 $\zeta = 0$，则内积保持不变；否则，内积为 $\frac{1}{|\gamma_3'|}\langle \cdot, \cdot \rangle$。由于我们讨论的是齐次缩放层次，因此无论哪种情况，都可以保留初始内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$，而仍处于同一相似类中。因此，这里的设定与 §2.2.2 中完全相同（见公式 (4)），故当 $\zeta = 0$ 时（对应定理 1.9-(D.ii)），上述度量是一个平面波；否则，它对应定理 1.2–(D.ii)。

3. Semi-direct extensions with Riemannian normal subgroup H_3

本节讨论由三维幺模黎曼海森堡李群 H_3 扩张得到的左不变洛伦兹度量。Milnor [29] 利用自对偶结构张量 L 描述了三维幺模李群上的左不变黎曼度量，其中该张量由 $L(X\times Y) = [X,Y]$ 给出；这里“×”表示向量叉积 $\langle X\times Y, Z\rangle = \det(X,Y,Z)$。$L$ 的自对偶性确保存在一个标准正交基，使得在正定情形下，结构张量可对角化。因此，H_3 上任意黎曼左不变度量都与由李代数层面的标准正交基 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ 确定的度量相似，其中 $\mathfrak{h}_3$ 满足（见 [29]）

$$[\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_2]=0,\quad [\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_1]=0,\quad [\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2]=\lambda\mathbf{v}_3,\qquad \lambda\neq 0.$$

$\mathfrak{h}_3$ 的所有导子代数相对于基 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$vv给出如下：

$$\operatorname{der}(\mathfrak{h}_3)=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&0\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&0\\ \alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{11}+\alpha_{22}\end{pmatrix};\ \alpha_{ij}\in\mathbb{R}\right\}. \tag{5}$$

对于任意半直扩张 $\mathfrak{h}_3\rtimes\mathfrak{r}$，存在一个基 $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4\}$，使得 $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_3\rtimes\mathfrak{r}=$ 张成$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}\oplus\mathbb{R}\mathbf{v}_4$。由于 $\mathbb{R}\mathbf{v}_4$ 是类时的，但不一定与 $\mathfrak{h}_3$正交，我们令 $\bar{e}_4=\mathbf{v}_4-\sum_i\langle\mathbf{v}_4,\mathbf{v}_i\rangle\mathbf{v}_i$，并将其归一化，从而得到$\{e_1,\dots,e_4\}$的标准正交基，其中 $e_i=\mathbf{v}_i(i=1,2,3)$为类时的，因此

$$\begin{aligned}&[e_1,e_2]=\lambda e_3, && [e_1,e_4]=\gamma_1e_1+\gamma_2e_2+\gamma_3e_3,\\ &[e_2,e_4]=\gamma_4e_1+\gamma_5e_2+\gamma_6e_3, && [e_3,e_4]=(\gamma_1+\gamma_5)e_3,\end{aligned}$$

其中 $\lambda\neq 0$和 $\gamma_1,\dots,\gamma_6\in\mathbb{R}$。

接下来，我们根据 γ_5 是否为零，分别分析两种情形，以确定巴赫平坦度量。

3.1. 情形 $\gamma_5=0$。由于 $\lambda\neq 0$，我们可以假设 $\lambda=1$，并仅取正交基 $\hat{}e_i=\frac{1}{\lambda}e_i$，在初始度量的相似类中进行研究。考虑理想 $\langle\mathfrak{B}_{ij}\rangle\subset\mathbb{R}[\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4,\gamma_6,\gamma_1]$，其中 $\mathfrak{B}_{ij}=\mathfrak{B}(e_i,e_j)$ 是由巴赫张量在标准正交基 $\{e_i\}$下的分量给出的多项式，并固定字典序，使用 Gr¨obner 基。因此得到 50 个多项式，其中一个多项式为

$$\mathbf{g}=\gamma_1^4\gamma_6^2(\gamma_1^2+1)(\gamma_1^2+2)(\gamma_1^2+4)(8\gamma_1^2+5)(16\gamma_1^2+25)(25\gamma_1^2+1).$$

因此，要么 $\gamma_1=0$，要么 $\gamma_1\neq 0$ 且 $\gamma_6=0$。此外，如果 $\gamma_1=0$，则可得

$$\mathbf{g}_1'=\gamma_4^4\quad\text{and}\quad \mathbf{g}_2'=\gamma_2^2-8\gamma_3^2+\gamma_4^2-8\gamma_6^2+8$$

是理想 $\langle\mathfrak{B}_{ij}\rangle$ 中的多项式，同样的多项式也会出现

$$\mathbf{g}_1''=\gamma_3\gamma_4^4\quad\text{and}\quad \mathbf{g}_2''=\gamma_1\gamma_2\gamma_3(\gamma_1^2+1)$$

如果 $\gamma_6=0$。接下来我们分别考察各种可能性。

3.1.1. 情形 $\gamma_1=\gamma_4=0$, $\gamma_2^2-8\gamma_3^2-8\gamma_6^2+8=0$。在此情形下，直接计算可得 $\mathfrak{B}_{11}=\frac{9}{128}\gamma_2^2(7\gamma_2^2+16\gamma_3^2)$，这意味着 $\gamma_2=0$，并且在最后这一假设下，巴赫张量为零。因此，相应的左不变度量为

$$[e_1,e_2]=e_3,\qquad [e_1,e_4]=\gamma_3 e_3,\qquad [e_2,e_4]=\varepsilon\sqrt{1-\gamma_3^2}\,e_3,$$

其中 $\gamma_3\in[-1,1]$ 和 $\varepsilon^2=1$。上述度量的里奇算子是二步幂零的，并且 $\xi=\varepsilon\sqrt{1-\gamma_3^2}\,e_1-\gamma_3 e_2+e_4$ 是一个零平行向量场。此外，曲率张量满足 $R(x,y)=0$ 以及 $\nabla_x R=0$，对所有 $x,y\in\xi^\perp=$张成$\{\xi,e_3,\theta\}$的情形均成立，其中

$$\theta=\begin{cases} e_2 & \text{if } \gamma_3=0,\\ e_1+\varepsilon\sqrt{1-\gamma_3^2}\,e_4 & \text{if } \gamma_3\neq 0.\end{cases}$$

因此，底层结构是一个平面波。此外，考虑基

$$\tilde e_1=e_1,\quad \tilde e_2=e_2,\quad \tilde e_3=e_3,\quad \tilde e_4=\varepsilon\sqrt{1-\gamma_3^2}e_1-\gamma_3 e_2+e_4,$$

可知唯一非零括号为 $[\tilde e_1,\tilde e_2]=\tilde e_3$，这表明底层李群是乘积 $H_3\times\mathbb{R}$。因此，它与注 1.1 中讨论的巴赫平坦度量同构相似。

3.1.2. 情形 $\gamma_1\neq 0$, $\gamma_3=\gamma_6=0$。通过直接计算可得到巴赫张量的以下分量

$$\begin{aligned}-24\,\mathfrak{B}_{33}&=(\gamma_2+\gamma_4)^2(4(\gamma_2+\gamma_4)^2-12\gamma_2\gamma_4+3)-\gamma_1^2((\gamma_2+\gamma_4)^2+12\gamma_2\gamma_4-28)+20,\\ -24\,\mathfrak{B}_{44}&=(\gamma_2+\gamma_4)^2(12(\gamma_2+\gamma_4)^2-36\gamma_2\gamma_4+1)+\gamma_1^2(13(\gamma_2+\gamma_4)^2-36\gamma_2\gamma_4-4)-4,\end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned}-12(\mathfrak{B}_{33}+3\,\mathfrak{B}_{44})&=(\gamma_2+\gamma_4)^2(20(\gamma_2+\gamma_4)^2-60\gamma_2\gamma_4+3)\\&\quad+\gamma_1^2(19(\gamma_2+\gamma_4)^2-60\gamma_2\gamma_4+8)+4.\end{aligned}$$

显然，最后这个表达式始终严格为正，因此在这种情况下，该度量不可能是巴赫平坦的。

3.1.3. 情形 $\gamma_1\gamma_3\neq 0$、$\gamma_2=\gamma_4=\gamma_6=0$。直接计算表明，在这种情况下，$\mathfrak{B}_{22}=-\frac{1}{6}(3\gamma_1^2+\gamma_3^2+3)(\gamma_3^2-1)$。因此，$\gamma_3=\varepsilon$，其中 $\varepsilon^2=1$，并且通过直接计算可知巴赫张量为零。于是，该左不变度量对应于

$$[e_1,e_2]=e_3,\qquad [e_1,e_4]=\gamma_1 e_1+\varepsilon e_3,\qquad [e_3,e_4]=\gamma_1 e_3,\tag{6}$$

其既非局部对称、局部共形平坦，也非爱因斯坦。此外，$(e_1,e_2,e_3,e_4)\mapsto(-e_1,-e_2,e_3,-e_4)$ 以及 $(e_1,e_2,e_3,e_4)\mapsto(e_1,e_2,e_3,-e_4)$ 分别定义了将 (ε,γ_1) 与 $(\varepsilon,-\gamma_1)$、以及将 (ε,γ_1) 与 $(-\varepsilon,-\gamma_1)$ 互换的等距变换，因此我们可以将参数限制为 $\varepsilon=1$ 和 $\gamma_1>0$。这对应于定理 1.2–(R) 中的度量。

3.2. 情形 $\gamma_5 \neq 0$。取正交基 $\hat{e}_i = \frac{1}{\gamma_5} e_i$ ，我们可以假设 $\gamma_5 = 1$，同时继续处于初始度量的相似类中。我们固定多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_6, \gamma_1, \lambda]$。考虑理想 $\langle \overline{\mathfrak{B}}_{ij} \rangle$，其中 $\overline{\mathfrak{B}}_{ij}$ 是巴赫张量的分量；在可能的情况下，我们对参数 $\lambda \neq 0$ 进行了化简。然后，关于分次反字典序计算 Gr¨obner 基（由 211 个多项式组成），得到多项式

$$\mathbf{g}_1 = ((12\gamma_2 + 5\gamma_4)\gamma_3^2 - (5\gamma_2 + 12\gamma_4)\gamma_6^2 - 17(\gamma_1 - 1)\gamma_3\gamma_6)(\lambda^2 + (\gamma_1 + 1)^2)\lambda^{10}$$

¯属于理想 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \rangle$。因此，由于 $\lambda \neq 0$，可知多项式

$$\tilde{\mathbf{g}}_1 = (12\gamma_2 + 5\gamma_4)\gamma_3^2 - (5\gamma_2 + 12\gamma_4)\gamma_6^2 - 17(\gamma_1 - 1)\gamma_3\gamma_6 \tag{7}$$

必为零。现在，对于理想 $\langle \overline{\mathfrak{B}}_{ij} \cup \{\tilde{\mathbf{g}}_1\} \rangle$，我们考虑字典序，并在计算一个格罗布纳基后得到，

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_2 = &-\gamma_6(\lambda^2 - (\gamma_1 + 1)\gamma_6^2)(\lambda^2 + (\gamma_1 + 1)^2)(\lambda^2 + 25(\gamma_1 + 1)^2)(2\lambda^2 + (\gamma_1 + 1)^2) \\ &\times (4\lambda^2 + (\gamma_1 + 1)^2)(5\lambda^2 + 8(\gamma_1 + 1)^2)(25\lambda^2 + 16(\gamma_1 + 1)^2)\end{aligned}$$

属于该理想。因此，要么是 $\gamma_6 = 0$ ，要么是 $\gamma_6 \neq 0$ 且 $\lambda^2 - (\gamma_1 + 1)\gamma_6^2 = 0$。接下来我们分别考察这两种情况。

3.2.1. 情形 $\gamma_6 = 0$。在此情形下，我们证明不存在巴赫平坦度量。在所有情形中，我们都使用 Gr¨obner 基，并采用字典序。首先，考虑多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_1, \lambda]$。取理想 $\langle \overline{\mathfrak{B}}_{ij} \rangle$，计算 Gr¨obner 基后可得

$$\mathbf{g}_1' = \gamma_3\lambda^6(\lambda^2 + 4)(5\lambda^2 + 2)(16\lambda^2 + 7225)(32\lambda^2 + 9)(256\lambda^2 + 169)$$

¯属于 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \rangle$，这意味着 $\gamma_3 = 0$。加入这一新条件后，我们在多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_2, \gamma_4, \gamma_1, \lambda]$ 中重复这一过程，得到多项式

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_2' = &-\lambda^2(7\lambda^2 - 2(\gamma_1 + 1)^2)(\lambda^2 + (\gamma_1 + 1)^2)(\lambda^2 + 2(\gamma_1 + 1)^2) \\ &\times (4\lambda^2 + (\gamma_1 + 1)^2)(5\lambda^2 + 8(\gamma_1 + 1)^2).\end{aligned}$$

因此， $\tilde{\mathbf{g}}_2' = 7\lambda^2 - 2(\gamma_1 + 1)^2$ 必须为零。最后，我们考虑环 $\mathbb{R}[\gamma_1, \lambda, \gamma_2, \gamma_4]$ 中的多项式，并计算理想 $\langle \overline{\mathfrak{B}}_{ij} \cup \{\tilde{\mathbf{g}}_2'\} \rangle$的最后一个 Gr¨obner 基。由此可得

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_3' = (\gamma_4^2 + 1)^4(&441\gamma_2^4 + 2\gamma_2^2(641\gamma_4^2 + 770) + (7\gamma_4^2 + 22)(63\gamma_4^2 + 22) \\ &- 24\gamma_2\gamma_4(35\gamma_2^2 + 35\gamma_4^2 + 88))\end{aligned}$$

属于该理想。由于 $\mathbf{g}_3'$ 不为零，我们得出结论：在这种情况下不存在巴赫平坦度量。

3.2.2. 情形 $\gamma_6 \neq 0$, $\lambda^2 - (\gamma_1 + 1)\gamma_6^2 = 0$。为求解这一情形，我们在多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_1, \gamma_6, \gamma_4, \gamma_2, \gamma_3, \lambda]$ 中进行运算，并使用字典序计算 Gr¨obner 基。我们从理想 $\langle \overline{\mathfrak{B}}_{ij} \cup \{\lambda^2 - (\gamma_1 + 1)\gamma_6^2\} \rangle$ 出发，得到

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1'' = &-\lambda^6(\lambda^2 + 1)(4\lambda^2 + 9)(25\lambda^2 + 4)(45\lambda^2 + 98)(225\lambda^2 + 256)(256\lambda^2 + 1369) \\ &\times (968\lambda^2 + 1521)(2304\lambda^4 + 46441425\lambda^2 + 1028805625) \\ &\times (3211264\lambda^4 + 34731953\lambda^2 + 35796289)(\gamma_2^2\lambda^2 - (\gamma_2^2 + 1)\gamma_3^2)\end{aligned}$$

属于该理想。由于 $\lambda \neq 0$，只有最后一个因子 $\tilde{\mathbf{g}}_1'' = \gamma_2^2\lambda^2 - (\gamma_2^2+1)\gamma_3^2$可能为零。最后，我们再次使用方程 (7) 给出的多项式 $\tilde{\mathbf{g}}_1$，并考虑理想 $\langle \overline{\mathfrak{B}}_{ij} \cup \{\lambda^2 - (\gamma_1+1)\gamma_6^2, \tilde{\mathbf{g}}_1'', \tilde{\mathbf{g}}_1\}\rangle$，得到这些多项式

$$\mathbf{g}_2'' = (\gamma_4 - \gamma_2)\lambda^4, \quad \mathbf{g}_3'' = (\gamma_2\gamma_6 - \gamma_3)\lambda^4 \quad \text{and} \quad \mathbf{g}_4'' = (79\gamma_1 + 11\gamma_2^2 - 90\gamma_2\gamma_4)\lambda^2$$

属于该理想。这些表达式与 $\lambda^2 - (\gamma_1+1)\gamma_6^2 = 0$ 一起，意味着

$$\gamma_4 = \gamma_2, \quad \gamma_3 = \gamma_2\gamma_6, \quad \gamma_1 = \gamma_2^2, \quad \lambda = \varepsilon\gamma_6\sqrt{\gamma_2^2+1},$$

其中 $\varepsilon^2 = 1$，直接计算表明，在这些条件下，巴赫张量消失。因此，左不变度量由下式确定

$$\begin{aligned} &[e_1, e_2] = \varepsilon\gamma_6\sqrt{\gamma_2^2+1}\,e_3, \qquad [e_1, e_4] = \gamma_2^2 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_2\gamma_6 e_3, \\ &[e_2, e_4] = \gamma_2 e_1 + e_2 + \gamma_6 e_3, \quad [e_3, e_4] = (\gamma_2^2+1)e_3. \end{aligned}$$

令 $\gamma_6' = \frac{\sqrt{\gamma_2^2+1}}{\gamma_6}$，并考虑由下式定义的新基 $\{\tilde{e}_i\}$

$$\begin{aligned} &\tilde{e}_1 = \tfrac{\gamma_6'}{(\gamma_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left(\gamma_2 e_1 + e_2\right), \qquad \tilde{e}_2 = -\tfrac{\gamma_6'}{(\gamma_2^2+1)^{\frac{3}{2}}}\left(e_1 - \gamma_2 e_2\right), \\ &\tilde{e}_3 = \tfrac{\varepsilon\gamma_6'}{\gamma_2^2+1}e_3, \qquad\qquad\qquad\qquad \tilde{e}_4 = \tfrac{\gamma_6'}{\gamma_2^2+1}e_4. \end{aligned}$$

现在，直接计算表明李括号变为

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_2] = \tilde{e}_3, \qquad [\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = \gamma_6'\tilde{e}_1 + \varepsilon\tilde{e}_3, \qquad [\tilde{e}_3, \tilde{e}_4] = \gamma_6'\tilde{e}_3,$$

而内积变为 $\left(\frac{\gamma_6'}{\gamma_2^2+1}\right)^2\langle\cdot,\cdot\rangle$。由于我们是在相似层次上进行研究，因此可以保持初始内积，使其仍属于同一相似类。于是，我们回到了 §3.1.3 中的情形（见公式 (6)），因此上述度量对应于定理 1.2-(R) 所给出的情形。

4. Semi-direct extensions with Lorentzian normal subgroup H_3

本节讨论左不变洛伦兹度量，其在三维幺模李群 H_3 上的限制具有洛伦兹号差。文献 [31] 使用 Milnor 型标架描述了海森堡群上的左不变洛伦兹度量。令 $L(X \times Y) = [X, Y]$，其中“$\times$”表示向量叉积 $\langle X \times Y, Z\rangle = \det(X, Y, Z)$，即为结构张量。在幺模情形和黎曼情形中，$L$ 均具有自对偶性；但由于洛伦兹号差，L 可能具有非平凡的若尔当标准形。由于 L 的特征值必须为 $\{0, 0, \lambda_3\}$，因此唯一可能的若尔当标准形如下：

Ia. L 是实可对角化的。因此，存在一组标准正交基 $\{e_1, e_2, e_3\}$，其中我们假设 e_3 为类时的，使得 $L(e_i) = \lambda_i e_i$ 且 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$。II. L 的最小多项式有一个二重根。那么它是二步幂零的，并且存在一组伪正交规范基 $\{u_1, u_2, u_3\}$，使得

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{where} \quad \langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_3\rangle = 1\,.$$

因此， $\mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ 上的内积可如第3节所述，通过考察其在子代数 $\mathfrak{h}_3$上的限制来描述；该子代数属于Ia型（区分结构算子的核是正定的还是洛伦兹的两种情形），或者如II中所述是二步幂零的。接下来，我们分别分析这三种情形中巴赫张量的消失。

4.1. 结构算子是秩一可对角化算子，且其核为正定核。在此情况下，利用（5）并按照第3节中的方法进行，可得存在 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 的一个标准正交基，其中 e_3 为类时向量；其中 $\mathfrak{h}_3 =$ 张成 $\{e_1, e_2, e_3\}$ ，而 $\mathfrak{r} =$ 张成 $\{e_4\}$，因此

$$[e_1, e_2] = -\lambda e_3, \qquad [e_1, e_4] = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3,$$
$$[e_2, e_4] = \gamma_4 e_1 + \gamma_5 e_2 + \gamma_6 e_3, \quad [e_3, e_4] = (\gamma_1 + \gamma_5) e_3,$$

其中 $\lambda \neq 0$ 和 γ_1，……， $\gamma_6 \in \mathbb{R}$。对此情形的分析类似于第3节中的分析。然而，内积在子代数 $\mathfrak{h}_3$ 上的限制具有不同的性质（为洛伦兹型而非黎曼型），这一点至关重要，并导致不存在巴赫平坦度量。下面我们区分 $\gamma_5 = 0$ 和 $\gamma_5 \neq 0$ 两种情形，对这一过程作示意性说明，但省略与第3节研究内容相同的细节。

4.1.1. 情形 $\gamma_5 = 0$。由于 $\lambda \neq 0$，我们可以假设 $\lambda = 1$ ，并在初始度量的相似类中进行讨论。按照第 3.1 节的方法，我们考虑由多项式 $\mathfrak{B}_{ij} \in \mathbb{R}[\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_6, \gamma_1]$ 生成的理想，并按字典序计算一个 Gr¨obner 基（由 50 个多项式组成），得到

$$\mathfrak{g} = \gamma_1^4 \gamma_6^2 (\gamma_1^2 + 1)(\gamma_1^2 + 2)(\gamma_1^2 + 4)(8\gamma_1^2 + 5)(16\gamma_1^2 + 25)(25\gamma_1^2 + 1)$$

属于理想 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \rangle$。因此，要么 $\gamma_1 = 0$ ，要么 $\gamma_1 \neq 0$， $\gamma_6 = 0$。若 $\gamma_1 = 0$，则

$$\mathfrak{g}_1' = \gamma_2^2 + 8\gamma_3^2 + \gamma_4^2 + 8\gamma_6^2 + 8$$

是 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \rangle$ 中的一个多项式，因此在这种情况下不存在巴赫平坦度量。此外，若 $\gamma_6 = 0$，我们得到多项式

$$\mathfrak{g}_1'' = \gamma_3 \gamma_4^4 \quad \text{and} \quad \mathfrak{g}_2'' = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 (\gamma_1^2 + 1).$$

现在，若 $\gamma_3 = 0$，按照第 3.1.2 节的方法可得

$$12(\mathfrak{B}_{33} + 3\,\mathfrak{B}_{44}) = (\gamma_2 + \gamma_4)^2 (20(\gamma_2 + \gamma_4)^2 - 60\gamma_2\gamma_4 + 3) + \gamma_1^2 (19(\gamma_2 + \gamma_4)^2 - 60\gamma_2\gamma_4 + 8) + 4,$$

而如果 $\gamma_3 \neq 0$ ，则必然有 $\gamma_2 = \gamma_4 = 0$ ，并且直接计算表明$\mathfrak{B}_{11} = \frac{1}{6}(\gamma_3^2+1)($ $5\gamma_1^2+3\gamma_3^2+3)$。因此，无论如何，巴赫张量都不为零。

4.1.2. 情形 $\gamma_5 \neq 0$。取正交基 $\hat{}e_i = \frac{1}{\gamma_5} e_i$ ，我们可以假设 $\gamma_5 = 1$。¯考虑由多项式 $\mathfrak{B}_{ij} \in \mathbb{R}[\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_6, \gamma_1, \lambda]$ 生成的理想，其中 $\_\mathfrak{B}_{ij}$ 是在尽可能进行 $\lambda \neq 0$ 化简后，由 $\mathfrak{B}_{ij}$ 的分量得到的。我们按照第 3.2 节中的方法，关于分次反字典序构造一个 Gr¨obner 基（由 211 个多项式组成），并得到

$$\mathfrak{g}_1 = ((12\gamma_2 + 5\gamma_4)\gamma_3^2 - (5\gamma_2 + 12\gamma_4)\gamma_6^2 - 17(\gamma_1 - 1)\gamma_3\gamma_6)(\lambda^2 + (\gamma_1 + 1)^2)\lambda^{10}$$

¯是理想 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \rangle$中的一个多项式。因此，多项式

$$\tilde{\mathfrak{g}}_1 = (12\gamma_2 + 5\gamma_4)\gamma_3^2 - (5\gamma_2 + 12\gamma_4)\gamma_6^2 - 17(\gamma_1 - 1)\gamma_3\gamma_6 \tag{8}$$

¯必须为零。现在，考虑理想 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \cup \{\tilde{\mathbf{g}}_1\}\rangle$ 和字典序，可得多项式

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_2 = \gamma_6(\lambda^2+(\gamma_1+1)\gamma_6^2)(\lambda^2+(\gamma_1+1)^2)(\lambda^2+25(\gamma_1+1)^2)(2\lambda^2+(\gamma_1+1)^2)\\ \times(4\lambda^2+(\gamma_1+1)^2)(5\lambda^2+8(\gamma_1+1)^2)(25\lambda^2+16(\gamma_1+1)^2)\end{aligned}$$

属于该理想。因此，要么 $\gamma_6=0$ 或 $\gamma_6\neq 0, \lambda^2+(\gamma_1+1)\gamma_6^2=0$。若 $\gamma_6=0$，按照第 3.2.1 节的做法，我们得到完全相同的多项式 $\mathbf{g}_1'$、$\mathbf{g}_2'$ 和 $\mathbf{g}_3'$，因此得出结论：这种情况下不存在巴赫平坦度量。现在，若 $\gamma_6\neq 0$ 和$\lambda^2+(\gamma_1+1)\gamma_6^2=0$，我们按照第 3.2.2 节的做法得到多项式

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_1'' = \lambda^6(\lambda^2+1)(4\lambda^2+9)(25\lambda^2+4)(45\lambda^2+98)(225\lambda^2+256)(256\lambda^2+1369)\\ \times(968\lambda^2+1521)(2304\lambda^4+46441425\lambda^2+1028805625)\\ \times(3211264\lambda^4+34731953\lambda^2+35796289)(\gamma_2^2\lambda^2+(\gamma_2^2+1)\gamma_3^2)\end{aligned}$$

属于理想 $\langle \bar{\mathfrak{B}}_{ij}\cup\{\lambda^2+(\gamma_1+1)\gamma_6^2\}\rangle$。因此，$\tilde{\mathbf{g}}_1''=\gamma_2^2\lambda^2+(\gamma_2^2+1)\gamma_3^2$必须为零。于是，$\gamma_2=\gamma_3=0$，公式（8）中给出的多项式 $\tilde{\mathbf{g}}_1$ 化简为$\tilde{\mathbf{g}}_1=-12\gamma_4\gamma_6^2$，这意味着 $\gamma_4=0$，因为 $\gamma_6\neq 0$。最后，利用 $\gamma_2=\gamma_3=\gamma_4=0$和 $\lambda^2+(\gamma_1+1)\gamma_6^2=0$，通过直接计算可得

$$\begin{aligned}\tfrac{24\gamma_6^6}{\lambda^2+\gamma_6^2}\,\mathfrak{B}_{11} &= 4(5\gamma_6^2+4)\lambda^4+3(4\gamma_6^4-3\gamma_6^2+16)\gamma_6^2\lambda^2-(4\gamma_6^4-11\gamma_6^2+16)\gamma_6^4,\\ \tfrac{24\gamma_6^6}{\lambda^2+\gamma_6^2}\,\mathfrak{B}_{44} &= -4(\gamma_6^2-4)\lambda^4-(4\gamma_6^4+5\gamma_6^2-48)\gamma_6^2\lambda^2+(12\gamma_6^4-33\gamma_6^2+48)\gamma_6^4,\end{aligned}$$

这意味着

$$\tfrac{3\gamma_6^6}{\lambda^2(\lambda^2+\gamma_6^2)}(3\,\mathfrak{B}_{11}+\mathfrak{B}_{44}) = (7\gamma_6^2+8)\lambda^2+4(\gamma_6^4-\gamma_6^2+6)\gamma_6^2.$$

由于 $\lambda\gamma_6\neq 0$，我们得出巴赫张量不为零。

4.2. 结构算子是秩一可对角化算子，其核为洛伦兹型。在这种情况下，可以选取 $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$of $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}_3\rtimes\mathfrak{r}$ 的标准正交基，其中 e_3 为类时，且 $\mathfrak{h}_3=\mathrm{span}\{e_1,e_2,e_3\}$ 和 $\mathfrak{r}=\mathrm{span}\{e_4\}$，使得左不变度量可表示为

$$\begin{aligned}[e_1,e_3]=-\lambda e_2,\quad [e_1,e_4]=\gamma_1e_1+\gamma_2e_2+\gamma_3e_3,\\ [e_2,e_4]=\gamma_4e_2,\quad [e_3,e_4]=\gamma_5e_1+\gamma_6e_2-(\gamma_1-\gamma_4)e_3,\end{aligned}$$

其中 $\lambda\neq 0$and $\gamma_1,\dots,\gamma_6\in\mathbb{R}$。在这种情况下，我们分别研究 $\gamma_4=0$ and $\gamma_4\neq 0$ 两种情形，以分析巴赫张量何时为零。

4.2.1. 情形 $\gamma_4=0$。由于 $\lambda\neq 0$，我们考虑正交基 $\hat{e}_i=\frac{1}{\lambda}e_i$，从而可以假设 $\lambda=1$，并在初始度量的相似类中进行研究。在这种情况下，我们计算理想 $\langle\mathfrak{B}_{ij}\rangle\subset\mathbb{R}[\gamma_2,\gamma_3,\gamma_5,\gamma_6,\gamma_1]$ 关于字典序的格罗布纳基（由 25 个多项式组成），并得到这些多项式

$$\mathbf{g}_1=\gamma_1^4,\quad \mathbf{g}_2=\gamma_3^4\quad\text{and}\quad \mathbf{g}_3=\gamma_5^4$$

属于该理想。因此，必有 $\gamma_1=\gamma_3=\gamma_5=0$，且直接计算可得 $\mathfrak{B}_{22}=-\frac{5}{6}($ $\gamma_6^2-\gamma_2^2+1)^2,$，这意味着 $\gamma_2=\varepsilon\sqrt{\gamma_6^2+1}$，其中 $\varepsilon^2=1$。在此假设下，巴赫张量消失，相应的左不变度量为

$$[e_1,e_3]=-e_2,\qquad [e_1,e_4]=\varepsilon\sqrt{\gamma_6^2+1}\,e_2,\qquad [e_3,e_4]=\gamma_6e_2.$$

此外，里奇算子是二步幂零的，且 $\xi = -\gamma_6 e_1 + \varepsilon\sqrt{\gamma_6^2+1}\, e_3 + e_4$ 是一个零平行向量场，因此 $R(x,y) = 0$，并且对于所有 $x, y \in \xi^{\perp} =$，都有 span $\{\xi, e_2, e_1+\gamma_6 e_4\}$。因此，底层结构是一个平面波。考虑基

$$\tilde{e}_1 = e_1, \quad \tilde{e}_2 = e_2, \quad \tilde{e}_3 = -e_3, \quad \tilde{e}_4 = -\gamma_6 e_1 + \varepsilon\sqrt{\gamma_6^2+1}\, e_3 + e_4,$$

可知，唯一非零的括号是 $[\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = \tilde{e}_2$。因此，底层群结构是 $H_3 \times \mathbb{R}$ 的乘积，且该度量与注 1.1 中讨论的巴赫平坦度量同构相似。

4.2.2. 情形 $\gamma_4 \neq 0$。取正交基 $\hat{e}_i = \frac{1}{\gamma_4} e_i$，我们可以假设 $\gamma_4 = 1$，并在初始度量的相似类中进行讨论。我们考虑多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_2, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_1, \lambda]$ 中的理想 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \rangle$，并使用字典序计算格罗布纳基。因此，我们得到 61 个多项式，其中两个是

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 &= (\gamma_3+\gamma_5)\gamma_6(\lambda^2+1)(\lambda^2+25)(4\lambda^2+1) \quad \text{and} \\ \mathbf{g}_2 &= (\gamma_3+\gamma_5)(7\lambda^2-2)(\lambda^2+1)(\lambda^2+2)(\lambda^2+25)(4\lambda^2+1). \end{aligned}$$

因此，要么是 $\gamma_3+\gamma_5 = 0$，要么是 $\gamma_3+\gamma_5 \neq 0$、$\gamma_6 = 0$、$7\lambda^2 - 2 = 0$。接下来我们分别分析这两种情况。

4.2.2.1. 情形 $\gamma_3+\gamma_5 = 0$。在字典序下，继续在多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_2, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_1, \lambda]$ 中讨论，对于理想 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \cup \{\gamma_3+\gamma_5\} \rangle$，我们得到多项式

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1' &= -((\gamma_1-1)\lambda^2 - \gamma_6^2)(\lambda^2+1)(2\lambda^2+1)(4\lambda^2+1)(5\lambda^2+8)(25\lambda^2+16) \quad \text{and} \\ \mathbf{g}_2' &= ((\gamma_1-1)\gamma_2 - \gamma_5\gamma_6)(2\lambda^2+1)(5\lambda^2+8)(25\lambda^2+16). \end{aligned}$$

因此，$\tilde{\mathbf{g}}_1' = (\gamma_1-1)\lambda^2 - \gamma_6^2$ 和 $\tilde{\mathbf{g}}_2' = (\gamma_1-1)\gamma_2 - \gamma_5\gamma_6$ 必须为零。对理想 $\langle \mathfrak{B}_{ij} \cup \{\gamma_3+\gamma_5, \tilde{\mathbf{g}}_1', \tilde{\mathbf{g}}_2'\} \rangle$ 重复这一过程，我们得到多项式

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_3' &= (\gamma_5^2 - \gamma_1(\gamma_1-1))(5\lambda^2+8), \\ \mathbf{g}_4' &= 8(\gamma_5^2 - \gamma_1(\gamma_1-1)) + \gamma_2^2 - \gamma_1\lambda^2 \quad \text{and} \\ \mathbf{g}_5' &= 8\gamma_5(\gamma_5^2 - \gamma_1(\gamma_1-1)) + \gamma_2\gamma_6 - \gamma_5\lambda^2. \end{aligned}$$

因此，$\gamma_2^2 - \gamma_1\lambda^2 = 0$ 和 $\gamma_2\gamma_6 - \gamma_5\lambda^2 = 0$，而这些关系连同 $\gamma_3+\gamma_5 = 0$ 和 $(\gamma_1-1)\lambda^2 - \gamma_6^2 = 0$，推出

$$\gamma_3 = -\gamma_5, \quad \gamma_1 = \tfrac{\lambda^2+\gamma_6^2}{\lambda^2}, \quad \gamma_2 = \varepsilon\sqrt{\lambda^2+\gamma_6^2}, \quad \gamma_5 = \tfrac{\gamma_2\gamma_6}{\lambda^2},$$

其中 $\varepsilon^2 = 1$。直接计算表明，对于相应的左不变度量，巴赫张量为零，该度量表示为

$$\begin{aligned} &[e_1, e_3] = -\lambda e_2, \quad [e_1, e_4] = \tfrac{\lambda^2+\gamma_6^2}{\lambda^2} e_1 + \varepsilon\sqrt{\lambda^2+\gamma_6^2}\, e_2 - \tfrac{\varepsilon\gamma_6\sqrt{\lambda^2+\gamma_6^2}}{\lambda^2} e_3, \\ &[e_2, e_4] = e_2, \qquad [e_3, e_4] = \tfrac{\varepsilon\gamma_6\sqrt{\lambda^2+\gamma_6^2}}{\lambda^2} e_1 + \gamma_6 e_2 - \tfrac{\gamma_6^2}{\lambda^2} e_3. \end{aligned}$$

现在，考虑由下式定义的新基

$$\tilde{e}_1 = \tfrac{\varepsilon\sqrt{\lambda^2+\gamma_6^2}}{\lambda} e_1 - \tfrac{\gamma_6}{\lambda} e_3, \quad \tilde{e}_2 = e_2, \quad \tilde{e}_3 = -\tfrac{\gamma_6}{\lambda} e_1 + \tfrac{\varepsilon\sqrt{\lambda^2+\gamma_6^2}}{\lambda} e_3, \quad \tilde{e}_4 = e_4,$$

内积保持不变，而李括号变为

$$[\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = -\lambda\tilde{e}_2, \qquad [\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = \tilde{e}_1 + \lambda\tilde{e}_2, \qquad [\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = \tilde{e}_2,$$

通过直接计算可知，该度量既非局部对称，也非局部共形平坦或爱因斯坦。此外，$(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4) \mapsto (\tilde{e}_1, -\tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4)$ 定义了一个交换 λ 和 $-\lambda$的等距变换，因此我们可以将参数 λ 限制为 $\lambda > 0$。此情形对应于定理 1.2–(L.i) 中的度量。

4.2.2.2. 情形 $\gamma_3 + \gamma_5 \neq 0$, $\gamma_6 = 0$, $7\lambda^2 - 2 = 0$。对于这种情形，我们考虑多项式环 $\mathbb{R}[\gamma_2, \gamma_3, \gamma_5, \gamma_1, \lambda]$ 中的理想 $\overline{\langle \mathfrak{B}_{ij} \cup \{7\lambda^2 - 2\}\rangle}$。在这种情况下，我们采用分次反字典序来判断这些多项式

$$
\begin{aligned}
\mathbf{g}_1'' &= \gamma_2\gamma_5,\\
\mathbf{g}_2'' &= \gamma_2\gamma_3,\\
\mathbf{g}_3'' &= 8\gamma_1^2 + 21\gamma_2^2 - 8\gamma_1 + 8\gamma_3\gamma_5 - 6 \quad \text{and}\\
\mathbf{g}_4'' &= -22\gamma_1^2 + 21\gamma_3^2 + 21\gamma_5^2 + 22\gamma_1 + 20\gamma_3\gamma_5
\end{aligned}
$$

属于该理想。由于 $\gamma_3 + \gamma_5 \neq 0$，显然 $\gamma_2 = 0$。现在，$\mathbf{g}_3'' = 0$ 和 $\mathbf{g}_4'' = 0$ 连同 $7\lambda^2 - 2 = 0$，推出

$$
\lambda = \varepsilon_1\sqrt{\tfrac{2}{7}}, \quad \gamma_5 = \varepsilon_2\sqrt{\tfrac{11}{14}} - \gamma_3, \quad \gamma_1 = \tfrac{1}{2} + \varepsilon_3\sqrt{\gamma_3^2 + 1 - \varepsilon_2\sqrt{\tfrac{11}{14}}\,\gamma_3},
$$

其中 $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_3^2 = 1$。直接计算可得，相应的左不变度量为

$$
\begin{aligned}
&[e_1, e_3] = -\varepsilon_1\sqrt{\tfrac{2}{7}}\, e_2, \qquad [e_1, e_4] = \left(\tfrac{1}{2} + \varepsilon_3\sqrt{\gamma_3^2 + 1 - \varepsilon_2\sqrt{\tfrac{11}{14}}\,\gamma_3}\right) e_1 + \gamma_3 e_3,\\
&[e_2, e_4] = e_2, \qquad [e_3, e_4] = \left(\varepsilon_2\sqrt{\tfrac{11}{14}} - \gamma_3\right) e_1 + \left(\tfrac{1}{2} - \varepsilon_3\sqrt{\gamma_3^2 + 1 - \varepsilon_2\sqrt{\tfrac{11}{14}}\,\gamma_3}\right) e_3,
\end{aligned}
$$

是巴赫平坦的。

设 $\gamma_3' = \sqrt{\frac{14}{11}}\varepsilon_2\gamma_3$。一个关键观察是，可以通过消去参数 γ_3' 来简化这种情形。具体如下。首先，我们考虑由下式定义的新基 $\{\tilde{e}_i\}$

$$
\tilde{e}_1 = 2\sqrt{14}\, e_1, \qquad \tilde{e}_2 = 2\sqrt{14}\,\varepsilon_1\varepsilon_2 e_2, \qquad \tilde{e}_3 = 2\sqrt{14}\,\varepsilon_2 e_3, \qquad \tilde{e}_4 = 2\sqrt{14}\, e_4.
$$

于是，李括号变为

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{e}_1, \tilde{e}_3] = -4\tilde{e}_2, \qquad [\tilde{e}_2, \tilde{e}_4] = 2\sqrt{14}\,\tilde{e}_2,\\
&[\tilde{e}_1, \tilde{e}_4] = \left(\sqrt{14} + 2\varepsilon_3\sqrt{11\gamma_3'(\gamma_3' - 1) + 14}\right)\tilde{e}_1 + 2\sqrt{11}\gamma_3'\tilde{e}_3,\\
&[\tilde{e}_3, \tilde{e}_4] = -2\sqrt{11}(\gamma_3' - 1)\tilde{e}_1 + \left(\sqrt{14} - 2\varepsilon_3\sqrt{11\gamma_3'(\gamma_3' - 1) + 14}\right)\tilde{e}_3,
\end{aligned}
$$

而内积为 $56\langle\cdot,\cdot\rangle$。由于我们处理的是相似层面，因此可以保持初始内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 仍属于同一相似类。

其次，我们进行另一次基变换，取 $\{f_i\}$ 为

$$
f_1 = \tilde{e}_4, \qquad f_2 = \tfrac{\tilde{f}_2}{\|\tilde{f}_2\|}, \qquad f_3 = \tfrac{\tilde{f}_3}{\|\tilde{f}_3\|}, \qquad f_4 = \tilde{e}_2,
$$

其中

$$\tilde{f}_2 = \begin{cases} -2\sqrt{\frac{14}{11}}\,\tilde{e}_1 + \tilde{e}_3 & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (1,0), \\ \tilde{e}_1 & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (1,1), \\ \tilde{e}_3 & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (-1,0), \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{14}}\,\tilde{e}_1 + \tilde{e}_3 & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (-1,1), \\ \frac{\sqrt{14}+\varepsilon_3\sqrt{11\gamma_3'(\gamma_3'-1)+14}}{\sqrt{11}(\gamma_3'-1)}\,\tilde{e}_1 + \tilde{e}_3 & \text{if } \gamma_3' \notin \{0,1\}, \end{cases}$$

and

$$\tilde{f}_3 = \begin{cases} -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{14}}\,\tilde{e}_1 + \tilde{e}_3 & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (1,0), \\ \tilde{e}_3 & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (1,1), \\ \tilde{e}_1 & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (-1,0), \\ -2\sqrt{\frac{14}{11}}\,\tilde{e}_1 + \tilde{e}_3 & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (-1,1), \\ -\frac{\sqrt{14}-\varepsilon_3\sqrt{11\gamma_3'(\gamma_3'-1)+14}}{\sqrt{11}\,\gamma_3'}\,\tilde{e}_1 + \tilde{e}_3 & \text{if } \gamma_3' \notin \{0,1\}. \end{cases}$$

经过冗长但直接的计算可知，内积变为 $\mathsf{diag}[1, \varepsilon_3, -\varepsilon_3, 1]$，而李括号为

$$[f_1, f_2] = -3\sqrt{14} f_2 + 2\delta_1\sqrt{11} f_3, \qquad [f_1, f_3] = \sqrt{14} f_3,$$
$$[f_1, f_4] = -2\sqrt{14} f_4, \qquad [f_2, f_3] = 4\delta_2 f_4,$$

其中

$$(\delta_1, \delta_2) = \begin{cases} (1,1) & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (1,0), \\ (-1,-1) & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (1,1), \\ (-1,1) & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (-1,0), \\ (1,-1) & \text{if } (\varepsilon_3, \gamma_3') = (-1,1), \\ (\mathrm{sign}(1-\gamma_3'), \mathrm{sign}(1-\gamma_3')) & \text{if } \varepsilon_3 = 1 \text{ and } \gamma_3' \notin \{0,1\}, \\ (\mathrm{sign}(\gamma_3'), -\mathrm{sign}(\gamma_3')) & \text{if } \varepsilon_3 = -1 \text{ and } \gamma_3' \notin \{0,1\}, \end{cases}$$

因此我们有 $\delta_1^2 = \delta_2^2 = 1$。

最后，通过计算可知，上述度量既非局部对称，也非局部共形平坦或爱因斯坦。进一步可设 $\delta_2 = 1$，只需考虑由 $(f_1, f_2, f_3, f_4) \mapsto (f_1, f_2, \delta_2 f_3, f_4)$ 给出的等距变换。这对应于定理 1.7–(i) 中的度量。

4.3. 结构算子是二步幂零的。在最后一种情形下，存在 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_3 \rtimes \mathfrak{r}$ 的一个伪正交规范基 $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$，其中 $\langle u_1, u_2\rangle = \langle u_3, u_3\rangle = \langle u_4, u_4\rangle = 1$，且 $\mathfrak{h}_3 = \mathsf{span}\{u_1, u_2, u_3\}$ 和 $\mathfrak{r} = \mathsf{span}\{u_4\}$，使得

$$[u_1, u_3] = -\varepsilon u_2, \quad [u_1, u_4] = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3,$$
$$[u_2, u_4] = \gamma_4 u_2, \quad [u_3, u_4] = \gamma_5 u_1 + \gamma_6 u_2 - (\gamma_1 - \gamma_4) u_3,$$

其中有 $\varepsilon^2 = 1$ 和 $\gamma_1, \ldots\ldots, \gamma_6 \in \mathbb{R}$。直接计算表明，$\mathfrak{B}_{34} = -\frac{3}{4}\varepsilon\gamma_4\gamma_5^2$。我们分别分析以下情形：$\gamma_4 = 0$ 和 $\gamma_4 \neq 0$、$\gamma_5 = 0$。

4.3.1. 情形 $\gamma_4=0$。在此情形下，我们有

$$\mathfrak{B}_{44}=\tfrac{1}{8}(3\gamma_1^2+(\gamma_3+4\gamma_6)\gamma_5)^2.$$

若 $\gamma_5=0$，则必有 $\gamma_1=0$，且通过直接计算可知，Bach 平坦条件成立。因此，相应的左不变度量为

$$[u_1,u_3]=-\varepsilon u_2,\qquad [u_1,u_4]=\gamma_2u_2+\gamma_3u_3,\qquad [u_3,u_4]=\gamma_6u_2,$$

并且 u_2 是一个零平行向量场，因此曲率张量满足 $R(x,y)=0$，且 $\nabla_xR=0$，对所有 x、$y\in u_2^{\perp}=\langle u_2$、$u_3$、$u_4\rangle$ 均成立。此外，里奇张量唯一的非零分量为 $\rho_{11}=-\frac{1}{2}(\gamma_3^2-\gamma_6^2)$，这表明里奇算子是各向同性的，因此底层结构是平面波。此外，当且仅当 $\gamma_3(\gamma_3+\gamma_6)=0$ 时，该度量局部共形平坦或局部对称。这对应于定理 1.9-(L)。

若 $\gamma_5\neq0$，则 $\gamma_6=-\frac{3\gamma_1^2+\gamma_3\gamma_5}{4\gamma_5}$，且巴赫张量唯一的非零分量由下式确定

$$\begin{aligned}\tfrac{64\gamma_5^2}{3}\mathfrak{B}_{11}&=16\gamma_5^4\gamma_2^2-8\gamma_1(3(\gamma_1^2+\gamma_3\gamma_5)-2\gamma_1^2)\gamma_5^2\gamma_2\\&\quad+(\gamma_1^2+\gamma_3\gamma_5)(8(\gamma_1^2+\gamma_3\gamma_5)^2+9(\gamma_1^2+\gamma_3\gamma_5)\gamma_1^2-12\gamma_1^4)+4(\gamma_1^6+4\gamma_5^4),\end{aligned}$$

它是关于变量 γ_2 的二次多项式，其判别式化为 $\Delta=-512\gamma_5^4(2\gamma_5^4+(\gamma_1^2+\gamma_3\gamma_5)^3)$。因此，若 $\gamma_1^2+\gamma_3\gamma_5\geq0$，则有 $\Delta<0$，且该度量不可能是巴赫平坦的。故必有 $\gamma_1^2+\gamma_3\gamma_5<0$，特别地，$\gamma_3\gamma_5<0$。

令 γ_1' 和 γ_5' 为由 $\gamma_1'=\frac{\gamma_1}{\gamma_3^2}$ 和 $\gamma_5'=\frac{\gamma_5}{\gamma_3^3}$ 定义的新变量，使得条件 $\gamma_1^2+\gamma_3\gamma_5<0$ 可写为 $\gamma_3^4((\gamma_1')^2+\gamma_5')<0$。为简化记法，令 $\kappa=-((\gamma_1')^2+\gamma_5')$，$\kappa>0$。我们作一次基变换，并从现在起考虑由下式定义的一组新基 $\{\tilde{u}_i\}$：

$$\tilde{u}_1=\tfrac{\varepsilon}{\gamma_3\sqrt{\kappa}}u_1,\qquad \tilde{u}_2=\tfrac{\varepsilon}{\gamma_3^3\sqrt{\kappa}}u_2,\qquad \tilde{u}_3=\tfrac{\varepsilon}{\gamma_3^2\sqrt{\kappa}}u_3,\quad \tilde{u}_4=\tfrac{1}{\gamma_3^2\sqrt{\kappa}}u_4.$$

因此，李括号变为

$$\begin{aligned}&[\tilde{u}_1,\tilde{u}_3]=-\tfrac{1}{\sqrt{\kappa}}\tilde{u}_2,\qquad [\tilde{u}_1,\tilde{u}_4]=\tfrac{1}{\sqrt{\kappa}}(\gamma_1'\tilde{u}_1+\gamma_2\tilde{u}_2+\tilde{u}_3),\\&[\tilde{u}_3,\tilde{u}_4]=\tfrac{1}{\sqrt{\kappa}}\left(\gamma_5'\tilde{u}_1-\tfrac{3(\gamma_1')^2+\gamma_5'}{4\gamma_5'}\tilde{u}_2-\gamma_1'\tilde{u}_3\right),\end{aligned}\tag{9}$$

而内积为 $\frac{1}{\gamma_3^4\kappa}\langle\cdot,\cdot\rangle$。由于我们研究的是齐次缩放层次，因此可以保持初始内积不变，使其仍属于同一相似类。相对于新基，巴赫张量由下式确定

$$\begin{aligned}\tfrac{64(\gamma_5')^2\kappa^2}{3}\mathfrak{B}_{11}&=16(\gamma_5')^4\gamma_2^2+8\gamma_1'(\gamma_5')^2\left(2(\gamma_1')^2+3\kappa\right)\gamma_2\\&\quad+(12(\gamma_1')^4+9\kappa(\gamma_1')^2-8\kappa^2)\kappa+4((\gamma_1')^6+4(\gamma_5')^4)\end{aligned}$$

并分析由下式给出的度量的里奇算子

$$\mathrm{Ric}=\begin{pmatrix}\frac{2\gamma_5'+3\kappa}{8\kappa} & \frac{(\gamma_5')^2}{2\kappa} & -\frac{\gamma_1'\gamma_5'}{2\kappa} & 0\\ -\frac{4(8\gamma_1'\gamma_2+3)(\gamma_5')^2-12\gamma_5'\kappa-9\kappa^2}{32(\gamma_5')^2\kappa} & \frac{2\gamma_5'+3\kappa}{8\kappa} & -\frac{2\gamma_2(\gamma_5')^2+3\gamma_1'\kappa}{4\gamma_5'\kappa} & -\frac{\gamma_5'}{2\kappa}\\ -\frac{2\gamma_2(\gamma_5')^2+3\gamma_1'\kappa}{4\gamma_5'\kappa} & -\frac{\gamma_1'\gamma_5'}{2\kappa} & -\frac{2\gamma_5'+3\kappa}{4\kappa} & 0\\ -\frac{\gamma_5'}{2\kappa} & 0 & 0 & \frac{3}{4}\end{pmatrix},$$

由此可得 $\mathfrak{B}_{11} = \frac{8\kappa}{(\gamma_5')^2}\det(\mathrm{Ric}) + \frac{(\gamma_5')}{\kappa^2}^2$。因此，若 $\gamma_5' \neq 0, \kappa = -((\gamma_1')^2 + \gamma_5') > 0$ 且 $\det(\mathrm{Ric}) = -\frac{(\gamma_5')^4}{8\kappa^3}$，这等价于

$$\gamma_2 = \frac{1}{4(\gamma_5')^2}\left(\gamma_1'(2\gamma_5' - \kappa) + 2\varepsilon'\sqrt{2\left(\kappa^3 - 2(\gamma_5')^4\right)}\right) \text{ with } \kappa^3 - 2(\gamma_5')^4 \geq 0,\ (\varepsilon')^2 = 1,$$

那么，由方程（9）给出的左不变度量是巴赫平坦的，直接计算表明其标量曲率为正$\tau = \frac{3}{4}$，且它既不是局部对称的、局部共形平坦的，也不是爱因斯坦的。注意，条件$\gamma_5' \neq 0$ $\kappa = -((\gamma_1')^2 + \gamma_5') > 0$ 和 $\kappa^3 - 2(\gamma_5')^4 \geq 0$ 等价于 $-\frac{1}{2} \leq \gamma_5' < 0$，$(\gamma_1')^2 \leq -\gamma_5'\left(\sqrt[3]{2\gamma_5'} + 1\right)$。这些度量对应于定理 1.7–(ii) 中的度量。

4.3.2. 情形 $\gamma_4 \neq 0$、$\gamma_5 = 0$。在此情形下，$\mathfrak{B}_{44} = \frac{1}{24}(3\gamma_1 - \gamma_4)^2(\gamma_1 - \gamma_4)(3\gamma_1 + \gamma_4)$。因此，$\gamma_4 = 3\gamma_1$、$\gamma_4 = \gamma_1$ 或 $\gamma_4 = -3\gamma_1$。若 $\gamma_4 = 3\gamma_1$，则直接计算表明，Bach 平坦条件等价于 $\gamma_6 = -\gamma_3$，相应的度量是局部共形平坦的。此外，当且仅当 $\gamma_2 = 0$ 时，该度量同时是局部对称的和爱因斯坦的。接下来我们分别分析另外两种情形：$\gamma_4 = \gamma_1$ 和 $\gamma_4 = -3\gamma_1$。

4.3.2.1. 情形 $\gamma_4 = \gamma_1$。直接计算表明，巴赫张量的非零分量由下式确定：

$$\mathfrak{B}_{11} = \frac{1}{4}\gamma_1^2(\gamma_3 - 7\gamma_6)(\gamma_3 - \gamma_6) \quad \text{and} \quad \mathfrak{B}_{13} = \frac{3}{4}\gamma_1^3(\gamma_3 - \gamma_6).$$

由于 $\gamma_1 \neq 0$，可得 $\gamma_6 = \gamma_3$，且左不变巴赫平坦度量为

$$\begin{aligned} &[u_1, u_3] = -\varepsilon u_2, \quad [u_1, u_4] = \gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2 + \gamma_3 u_3, \\ &[u_2, u_4] = \gamma_1 u_2, \quad [u_3, u_4] = \gamma_3 u_2. \end{aligned}$$

令 $\gamma_2' = \frac{\gamma_1\gamma_2 + \gamma_3^2}{|\gamma_1|} \in \mathbb{R}$，并令 $\nu = -1$，1，具体取值取决于 γ_1 是负还是正。定义新基 $\{\tilde{u}_i\}$ 为

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_1 = -\frac{2}{|\gamma_1|^{\frac{1}{2}}}u_1 + \frac{\gamma_3^2}{|\gamma_1|^{\frac{5}{2}}}u_2 - \frac{2\nu\gamma_3}{|\gamma_1|^{\frac{3}{2}}}u_3, \qquad \tilde{u}_2 = -\frac{8}{|\gamma_1|^{\frac{3}{2}}}u_2, \\ &\tilde{u}_3 = -\frac{4\nu\varepsilon\gamma_3}{\gamma_1^2}u_2 + \frac{4\varepsilon}{|\gamma_1|}u_3, \qquad \tilde{u}_4 = \frac{4}{\gamma_1}u_4. \end{aligned}$$

现在，直接计算可得，李括号变为

$$[\tilde{u}_1, \tilde{u}_3] = -\tilde{u}_2, \qquad [\tilde{u}_1, \tilde{u}_4] = 4\tilde{u}_1 + \gamma_2'\tilde{u}_2, \qquad [\tilde{u}_2, \tilde{u}_4] = 4\tilde{u}_2,$$

而内积由 $\frac{16}{\gamma_1^2}\langle\cdot,\cdot\rangle$ 给出。由于我们讨论的是齐次缩放层次，因此可以保持初始内积不变，同时仍处于同一相似类中。直接计算可知，上述度量既非局部对称、非局部共形平坦，也非爱因斯坦。它们对应于定理 1.2–(L.ii) 中的度量。

4.3.2.2. 情形 $\gamma_4 = -3\gamma_1$。巴赫张量由下式确定

$$\mathfrak{B}_{11} = -\tfrac{1}{4}\gamma_1^2(7\gamma_3^2 + 41\gamma_6^2 + 32\gamma_1\gamma_2 - 24\gamma_3\gamma_6)\,, \qquad \mathfrak{B}_{13} = \tfrac{7}{4}\gamma_1^3(\gamma_3 - 5\gamma_6),$$

并且由于 $\gamma_1 \neq 0$，我们得到 $\gamma_3 = 5\gamma_6$ 和 $\gamma_2 = -\frac{3\gamma_6^2}{\gamma_1}$。因此，该巴赫平坦左不变度量对应于

$$\begin{aligned} &[u_1, u_3] = -\varepsilon u_2, \qquad [u_1, u_4] = \gamma_1 u_1 - \tfrac{3\gamma_6^2}{\gamma_1} u_2 + 5\gamma_6 u_3, \\ &[u_2, u_4] = -3\gamma_1 u_2, \quad [u_3, u_4] = \gamma_6 u_2 - 4\gamma_1 u_3. \end{aligned}$$

令 $\nu = -1$，根据 γ_1 是负还是正而定。考虑由下式定义的基 $\{\tilde{u}_i\}$

$$\begin{aligned} &\tilde{u}_1 = -\tfrac{1}{|\gamma_1|^{\frac{3}{2}}}\left(\gamma_1 u_1 - \tfrac{\gamma_6^2}{2\gamma_1} u_2 + \gamma_6 u_3\right), && \tilde{u}_2 = -\tfrac{1}{\gamma_1|\gamma_1|^{\frac{1}{2}}} u_2, \\ &\tilde{u}_3 = -\tfrac{\nu\varepsilon\gamma_6}{\gamma_1^2} u_2 + \tfrac{\varepsilon}{|\gamma_1|} u_3, && \tilde{u}_4 = -\tfrac{\nu}{|\gamma_1|} u_4, \end{aligned}$$

直接计算可得，李括号变换为

$$[\tilde{u}_1, \tilde{u}_3] = -\tilde{u}_2, \qquad [\tilde{u}_1, \tilde{u}_4] = -\tilde{u}_1, \qquad [\tilde{u}_2, \tilde{u}_4] = 3\tilde{u}_2, \qquad [\tilde{u}_3, \tilde{u}_4] = 4\tilde{u}_3,$$

而内积由 $\frac{1}{\gamma_1^2}\langle \cdot, \cdot \rangle$ 给出。由于我们是在相似层次上进行讨论，因此可以保持初始内积不变，从而仍处于同一相似类中。现在，经过简单计算可知，上述度量既非局部对称，也非局部共形平坦或爱因斯坦。它对应于定理 1.2–(L.iii) 中的度量。

5. 定理 1.2 的证明

我们考虑第 §2、§3 和 §4 节中得到的巴赫平坦度量，但不包括已由注 1.1 和定理 1.9 讨论过的 *pp*-波。接下来，我们分别分析各种情形，以证明定理 1.2 中的度量在所有情况下都是共形爱因斯坦的。

回顾一下，度量是共形爱因斯坦的，当且仅当存在一个（局部定义的）处处非零函数 φ，使得 $\overline{g} = \varphi^{-2} g$ 满足方程 (2)。此外，令 $\varphi = e^{\sigma}$，则函数 σ 的梯度满足共形 Cotton 平坦方程 (3)，因为 $\overline{g} = e^{-2\sigma} g$ 是 Cotton 平坦的。令 $\xi = \nabla\sigma$。现在，经过直接计算可得 $\nabla\varphi = \varphi\xi$ 和

$$\mathrm{Hes}_{\varphi}(X, Y) = \varphi\{\langle X, \xi\rangle\langle Y, \xi\rangle + \langle \nabla_X \xi, Y\rangle\}.$$

为分析方程 (2)，我们考虑对称 (0, 2) 张量场

$$\begin{aligned} \mathfrak{CE}(X, Y) &= 2\,\mathrm{Hes}_{\varphi}(X, Y) + \varphi\rho(X, Y) - \tfrac{1}{4}\{2\Delta\varphi + \varphi\tau\}\langle X, Y\rangle \\ &= 2\varphi\{\langle X, \xi\rangle\langle Y, \xi\rangle + \langle \nabla_X \xi, Y\rangle\} + \varphi\rho(X, Y) - \tfrac{1}{4}\{2\Delta\varphi + \varphi\tau\}\langle X, Y\rangle \end{aligned}$$

并将其作用于定理 1.2 中每个李代数对应的基所生成的左不变向量场上进行计算。

定理 1.2-(D.i) 的证明。令 $\{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ 为由定理 1.2-(D) 中李代数的伪正交规范基得到的伪正交左不变全局标架。

直接计算可知，在情形 (D.i) 中，满足共形 Cotton 平坦方程 (3) 的梯度向量场为 $\xi = U_3 + \lambda U_4$，其中

光滑函数满足 $d\lambda(U_1) = d\lambda(U_2) = d\lambda(U_4) = 0$。现在直接计算可知，在基 $\{U_k\}$ 上取值时，有

$$\mathrm{Hes}_\varphi = \varphi \begin{pmatrix} \lambda & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\lambda(U_3)+\lambda^2 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \rho = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

由此可得 $\Delta\varphi = 4\lambda\varphi$，标量曲率为零。因此，张量场 $\mathfrak{CE}$ 的唯一非零分量为

$$\mathfrak{CE}(U_3, U_3) = \tfrac{1}{2}\varphi(4d\lambda(U_3) + 4\lambda^2 - 1).$$

这表明，由梯度向量场 $\xi = U_3 + \lambda U_4$确定的共形度量由满足以下方程的函数 λ 给出

$$d\lambda(U_1) = d\lambda(U_2) = d\lambda(U_4) = 0 \quad \text{and} \quad 4d\lambda(U_3) + 4\lambda^2 = 1,$$

是爱因斯坦的。

定理 1.2-(D.ii) 的证明。在情形 (D.ii) 下，满足共形 Cotton 平坦方程 (3) 的梯度向量场为 $\xi = \varepsilon U_3 + \lambda U_4$，其中光滑函数满足 $d\lambda(U_1) = d\lambda(U_2) = d\lambda(U_4) = 0$。现在，经过直接计算可得

$$\mathrm{Hes}_\varphi = \varphi \begin{pmatrix} \varepsilon(\lambda+1) & \frac{1}{2}\varepsilon\alpha & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon\alpha & \varepsilon\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\lambda(U_3)+\lambda^2 & \varepsilon\lambda \\ 0 & 0 & \varepsilon\lambda & 1 \end{pmatrix}, \ \rho = -\begin{pmatrix} 3\varepsilon & \varepsilon\alpha & 0 & 0 \\ \varepsilon\alpha & \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha^2+1 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \varepsilon & 2 \end{pmatrix},$$

由此可得 $\Delta\varphi = \varepsilon(4\lambda+1)\varphi$，且标量曲率为 $\tau = -6\varepsilon$。现在，经过直接计算可得，$\mathfrak{CE}$ 的唯一非零分量为

$$\mathfrak{CE}(U_3, U_3) = \varphi\left(2d\lambda(U_3) + 2\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 - 1\right).$$

这表明，由梯度向量场 $\xi = \varepsilon U_3 + \lambda U_4$ 确定的共形度量由满足下式的函数 λ 给出

$$d\lambda(U_1) = d\lambda(U_2) = d\lambda(U_4) = 0 \quad \text{and} \quad 2d\lambda(U_3) + 2\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 = 1,$$

是爱因斯坦的。

定理 1.2-(R) 的证明。设 $\{E_i\}$ 是 $H_3 \times \mathbb{R}$ 上的全局正交归一标架，它由李代数的正交归一基 $\{e_i\}$ 左平移得到。直接计算可知，该度量是共形 Cotton 平坦的。事实上，向量场 $\xi = -(\lambda+\alpha)E_2 + \lambda E_4$ 满足方程 $\mathrm{div}_4 W - W(\cdot,\cdot,\cdot,\xi) = 0$；若光滑函数 λ 满足 $d\lambda(E_1) = d\lambda(E_3) = 0$ 且 $d\lambda(E_2) - d\lambda(E_4) = 0$，则它是一个梯度。全局标架 $\{E_i\}$ 上的 Hessian 张量和里奇张量

表示为

$$\mathrm{Hes}_\varphi = \varphi\begin{pmatrix} \lambda\alpha & 0 & -\frac{1}{2}\alpha & 0 \\ 0 & (\lambda+\alpha)^2 - d\lambda(E_4) & 0 & \lambda(\lambda+\alpha) - d\lambda(E_4) \\ -\frac{1}{2}\alpha & 0 & \alpha\lambda & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+\alpha) - d\lambda(E_4) & 0 & \lambda^2 - d\lambda(E_4) \end{pmatrix} \quad \text{and}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 2\alpha^2 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \alpha & 0 & 2\alpha^2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -2\alpha^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

由此可得 $\Delta\varphi = \alpha(4\lambda+\alpha)\varphi$，且标量曲率为 $\tau = 6\alpha^2$。因此，$\mathfrak{CE}$ 的非零分量由下式确定：

$$\mathfrak{CE}(E_2,E_2) = \mathfrak{CE}(E_4,E_4) = \mathfrak{CE}(E_2,E_4) = -\tfrac{1}{2}\varphi\left(4d\lambda(E_4) - 4\lambda(\lambda+\alpha) + 1\right),$$

这表明，向量场 $\xi = -(\lambda+\alpha)E_2 + \lambda E_4$由下列方程给出：

$$d\lambda(E_1) = d\lambda(E_3) = 0, \quad d\lambda(E_2) - d\lambda(E_4) = 0 \quad \text{and} \quad d\lambda(E_4) - \lambda(\lambda+\alpha) + \tfrac{1}{4} = 0,$$

是一个梯度向量场，并且由势函数诱导的共形度量是爱因斯坦的。

定理 1.2-(L.i) 的证明。设 $\{E_i\}$ 是 $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ 上的全局正交归一标架，它由李代数的标准正交基 $\{e_i\}$ 左平移得到。该度量是共形 Cotton 平坦的；此外，满足 $\mathrm{div}_4 W - W(\,\cdot,\cdot,\cdot,\xi) = 0$ 的梯度向量场由 $\xi = \lambda E_3 + (\lambda+1)E_4$ 给出，其中 λ 是 $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ 上的某个光滑函数，满足 $d\lambda(E_1) = d\lambda(E_2) = 0$ 且 $d\lambda(E_3) + d\lambda(E_4) = 0$。直接计算可得，在标准正交基 $\{E_i\}$ 下，有

$$\mathrm{Hes}_\varphi = \varphi\begin{pmatrix} \lambda+1 & \frac{1}{2}\alpha & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\alpha & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\lambda(E_4) + \lambda^2 & -d\lambda(E_4) - \lambda(\lambda+1) \\ 0 & 0 & -d\lambda(E_4) - \lambda(\lambda+1) & d\lambda(E_4) + (\lambda+1)^2 \end{pmatrix} \quad \text{and}$$

$$\rho = -\begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha^2 & -\frac{1}{2}\alpha^2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\alpha^2 & \frac{1}{2}\alpha^2 + 2 \end{pmatrix},$$

由此可得 $\Delta\varphi = (4\lambda+3)\varphi$，且标量曲率为 $\tau = -6$。因此，张量场 $\mathfrak{CE}$ 的唯一非零分量由下式确定：

$$\mathfrak{CE}(E_3,E_3) = \mathfrak{CE}(E_4,E_4) = -\mathfrak{CE}(E_3,E_4) = \tfrac{1}{2}\varphi\left(4d\lambda(E_4) + 4\lambda(\lambda+1) - \alpha^2\right).$$

因此，我们得出结论：由梯度向量场 $\xi = \lambda E_3 + (\lambda+1)E_4$ 确定的共形度量由方程组的一个解给出：

$$d\lambda(E_1) = d\lambda(E_2) = 0, \quad d\lambda(E_3) + d\lambda(E_4) = 0 \quad \text{and} \quad d\lambda(E_4) + \lambda(\lambda+1) - \tfrac{1}{4}\alpha^2 = 0,$$

是爱因斯坦的。

定理 1.2-(L.ii) 的证明。令 $\{U_i\}$ 为通过将李代数上的向量 $\{u_i\}$ 左平移得到的伪正交全局标架。定理 1.2-(L.ii) 中的度量是共形 Cotton 平坦的；此外，满足 $\mathrm{div}_4 W - W(\,\cdot,\cdot,\cdot,\xi) = 0$ 的梯度向量场由 $\xi = \lambda U_2 + 4U_4$ 给出，其中 λ 是定义在 $H_3 \rtimes \mathbb{R}$ 上的某个光滑函数，并满足 $d\lambda(U_2) = d\lambda(U_3) = 0$ 以及 $d\lambda(U_4) = -4\lambda$。基 $\{U_i\}$ 上的 Hessian 张量和 Ricci 张量为

$$\mathrm{Hes}_\varphi = \varphi \begin{pmatrix} d\lambda(U_1)+\lambda^2+4\alpha & 16 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \rho = -\begin{pmatrix} 8\alpha & 32 & 0 & 0 \\ 32 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix},$$

由此可得 $\Delta\varphi = 48\varphi$，且标量曲率为 $\tau = -96$。因此，$\mathfrak{CE}$ 的唯一非零分量为 $\mathfrak{CE}(U_1,U_1) = 2\varphi(d\lambda(U_1)+\lambda^2)$。因此，由梯度向量场 $\xi = \lambda U_2 + 4U_4$ 所确定的共形度量，其中 $\xi = \lambda U_2 + 4U_4$ 是下列方程的一个解：

$$d\lambda(U_2) = d\lambda(U_3) = 0, \quad d\lambda(U_4) = -4\lambda \quad \text{and} \quad d\lambda(U_1) = -\lambda^2,$$

是爱因斯坦度量。

定理 1.2-(L.iii) 的证明。定理 1.2-(L.iii) 中的左不变度量的里奇算子可对角化，$\mathrm{Ric} = \mathrm{diag}[-6,\,-6,\,-24,\,-18]$，因此 $\tau = -54$。作用于二形式空间上的韦尔曲率算子的特征值为 $\{-4,2,2,-4,2,2\}$，其中特征值 2 是最小多项式的二重根，因此该度量是弱一般的。该度量还是共形 Cotton 平坦的，并具有满足 $\mathrm{div}_4 W - W(\,\cdot,\cdot,\cdot,\xi) = 0$ 的左不变梯度向量场 $\xi = 3U_4$。因此，利用文献 [22] 中的结果可知，该度量是共形爱因斯坦的。

或者，也可如前述情形那样进行，考虑由 $\xi = \lambda U_4$ 给出的方程 (3) 的所有梯度解，其中任意光滑函数满足 $d\lambda(U_1) = d\lambda(U_2) = d\lambda(U_3) = 0$。因此有

$$\mathrm{Hes}_\varphi = \varphi \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d\lambda(U_4)+\lambda^2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \rho = -\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 24 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix},$$

从而 $\Delta\varphi = (d\lambda(U_4) + \lambda(\lambda+6))\,\varphi$。因此，$\mathfrak{CE}$ 中唯一的非零项由下式确定

$$\begin{aligned} \mathfrak{CE}(U_1,U_2) &= -\tfrac{1}{2}\varphi\,(d\lambda(U_4) + (\lambda+5)(\lambda-3))\,, \\ \mathfrak{CE}(U_3,U_3) &= -\tfrac{1}{2}\varphi\,(d\lambda(U_4) + (\lambda-3)(\lambda-7))\,, \\ \mathfrak{CE}(U_4,U_4) &= \;\;\tfrac{3}{2}\varphi\,(d\lambda(U_4) + (\lambda+1)(\lambda-3))\,, \end{aligned}$$

由此可知，函数 λ 为常数 $\lambda = 3$。

注 5.1. 直接计算可知，定理 1.2 中所有共形爱因斯坦度量确实都是共形 Ricci 平坦的。虽然定理 1.2-(L.iii) 中的共形爱因斯坦度量是唯一的（相差一个缩放因子），但其他情形都允许存在无穷多个共形爱因斯坦度量，由此可知它们共形等价于一个 Ricci 平坦的 pp-波（见 [6]）。

6. Proof of Theorem 1.7

考察定理 1.7-(i) 中的左不变度量，直接计 算可知，韦尔曲率算子 $W:\Lambda^2\to\Lambda^2$ 具有六个互异的非零复特征值，因此它是弱一般的。接下来，我们证明该度量不满足共形 C-空间条件，即不存在一个（不一定是梯度）向量场 X 使得 $\mathbf{div}_4 W - W(\,\cdot,\cdot,\cdot,X) = 0$。因此，该度量是严格巴赫平坦的。

令 $\{V_i\}$ 为 $H_3\rtimes\mathbb{R}$ 上的标准正交标架，它由在李代数处的向量 $\{v_i\}$ 左平移得到，并设 $X = \sum X^j V_j$。现在，通过直接计算可得

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}_4 W(V_4,V_1,V_1) - W(V_4,V_1,V_1,X) = 26X^4,\\
&\operatorname{div}_4 W(V_4,V_1,V_2) - W(V_4,V_1,V_2,X) = 4\sqrt{14}X^3,\\
&\operatorname{div}_4 W(V_4,V_1,V_3) - W(V_4,V_1,V_3,X) = -4\sqrt{14}X^2,\\
&\operatorname{div}_4 W(V_4,V_1,V_4) - W(V_4,V_1,V_4,X) = 54\sqrt{14} - 26X^1,\\
&\operatorname{div}_4 W(V_3,V_2,V_4) - W(V_3,V_2,V_4,X) = 144 - 4\sqrt{14}X^1,
\end{aligned}$$

由此可知，上述方程无解，因此 $H_3\rtimes\mathbb{R}$ 不是共形 C 空间。

我们以类似的方式处理定理 1.7-(ii) 中的度量。作用于二形式空间的韦尔曲率算子是三步幂零的，且该度量不是共形 C 空间，这表明这些度量也是严格巴赫平坦的。我们省略与前一种情形完全类似的细节。

7. Conclusions

对于四维李群上的左不变黎曼度量而言，巴赫平坦性是一个非常严格的条件 [1, 13]。洛伦兹情形则更为微妙，因为度量在三维正规子群 G 上的限制可能是正定度量、洛伦兹度量或退化度量。

我们对半直扩张 $H_3\rtimes\mathbb{R}$上的所有左不变巴赫平坦洛伦兹度量进行了分类。由此可知，非局部共形平坦的共形爱因斯坦度量类可归结为平面波和六个一般而言互不同相似的类（见定理 1.2）。相反，严格巴赫平坦度量类，即那些非共形爱因斯坦的度量，可归结为两个互不相似的族（见定理 1.7）。

当半直扩张是一个乘积时，会出现一种特殊情形。乘积李群 $H_3\times\mathbb{R}$ 上的巴赫平坦洛伦兹度量要么局部共形平坦，要么是具有平行里奇张量的平面波（见注 1.1）。

在巴赫平坦度量中，存在一个唯一的度量，它对所有二次曲率泛函都是临界的，同时又既非对称度量，也非平面波（见定理 1.2–(D.i)）。这与黎曼情形形成鲜明对比 [7]。此外，定理 1.2–(L.iii) 中的共形爱因斯坦度量是 RG2 流的收缩型代数孤立子，而定理 1.2–(L.ii) 中的度量族则给出了 RG2 流的巴赫平坦稳态孤立子，因此它们是该流的自相似解。

最后需要指出的是，除与定理 1.2–(L.iii) 对应的度量外，所有共形爱因斯坦半直积扩张 $H_3\rtimes\mathbb{R}$ 均与一个 pp- 波共形等价；对于这些度量，作用于二形式空间的韦尔曲率算子并非幂零。

References

[1] E. Abbena、S. Garbiero 和 S. Salamon,

4 *C. R. Math.* 维的巴赫

Acad. Sci. Paris **351** 2013 303 306
平坦李群, ( ), –。[2] R. Bach, 《关于韦尔相对论及韦尔对曲率张量概念的扩展》, *Math. Z.* **9** (1921), 110–135。[3] M. Blau 和 M. O'Loughlin, 《齐性平面波》 *Nuclear Physics B* **654** (2003), 135–176。[4] H. W Brinkmann, 《与爱因斯坦空间共形等价的黎曼空间》, *Math. Ann.* **91** (1924), 269–278。[6] H. W Brinkmann, 《彼此共形映射的爱因斯坦空间》,

Math. Ann. ( ), –。

94 1925 119 145
[7] M. Brozos-V´azquez、S. Caeiro-Oliveira、E. Garc´ıa-R´ıo 和 R. V´azquez-Lorenzo, 《二次曲率泛函的四维齐性临界度量》, 即将出版。[8] M. Brozos-V´azquez、E. Garc´ıa-R´ıo 和 X. Valle-Regueiro, 《各向同性拟爱因斯坦流形》, *Classical Quantum Gravity* **36** (2019), 245005（13页）。[9] M. Cahen、J. Leroy、M. Parker、F. Tricerri 和 L. Vanhecke, 《以洛伦兹对称空间为模型的洛伦兹流形》,
J. Geom. Phys. **7** (1990), 571–581。[10] G. Calvaruso 和 A. Zaeim, 《海森堡群半直扩张的共形几何》,
J. Math. Phys. Anal. Geom. **17** (2021), 407–421。[11] G. Calvaruso 和 A. Zaeim, 《四维洛伦兹李群》,

Differential Geom. ( ), –。

Appl. **31** 2013 496 509
[12] G. Calvaruso 和 M. Castrill´on, 《循环洛伦兹李群》, *Geom. Dedicata* **181** (2016), 119–136。[13] E. Calvi˜no-Louzao、X. Garc´ıa-Mart´ınez、E. Garc´ıa-R´ıo、I. Guti´errez-Rodr´ıguez 和 R. V´azquez-Lorenzo, 《共形爱因斯坦及巴赫平坦四维齐性流形》, *J. Math. Pures Appl. (9)* **130** (2019), 347–374。[14] M. Carfora, 《重整化群与Ricci流》, *Milan J. Math.* **78** (2010), 319–353。[15] A. Coley、S. Hervik 和 N. Pelavas, 《由标量曲率不变量刻画的时空》, *Classical Quantum Gravity* **26** (2009), 025013（33页）。[16] D. Cox、D. Little 和 D. O'Shea,

Ideals varieties and algorithms. An introduction to compu- , 《 》,
tational algebraic geometry and commutative algebra
《数学本科教材》。Springer, Cham, 2015。[17] W. Decker、G.-M. Greuel、G. Pfister 和 H. Sch

¨ Singular *4-3-0 — A computer*
algebra system for polynomial computations `https://www.singular.uni-kl.de` 2022

onemann, 《 》, [18] 。

Gravitation: an
introduction to current research 49 1962 J. Ehlers

和 W. Kundt, 《引力场方程的精确解》, [19] , –101, Wiley, 纽约, *J. Fixed Point Theory Appl.* **14** 。[20] K. Gimre、Ch. Guenther 和 J. Isenberg, 《二圈重整化群流的几何导论》, *C*(2013), 3–20。
Q. J. Math. **58** A. R. Gover 和 P. A. Nagy, 《四维共形[21] -空间》, *Tohoku Math. J. (2)* **75** (2007), 443–462。[22] Y. Kondo 和 H. Tamaru, 《某些幂零李群上的左不变洛伦兹度量分类》,

Gen. Relativity (2023),

Gravitation **17** 1985 343 352
即将出版。[23] C. N. Kozameh、E. T. Newman 和 K. P. Tod, 《共形爱因斯坦空间》,
Ann. of Math. (2) **91** ( ), –。[24] R. S. Kulkarni, 《曲率与度量》, *Math. Ann.* **319** (1970), 311–331。[25] J. Lauret, 《里奇孤子齐性幂零流形》, *Differ-*
ential Geom. Appl. **24** 2006 458 478 (2001),

715–733。[26] T. Leistner, 《C-空间、Ricci平坦流形和洛伦兹流形的共形整体性》,

n *pp* *Comm. Math.* ( ), –。

Phys. **296** 2010 881 898
[27] T. Leistner 和 P. Nurowski, 《 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **56** 维 -波的环境度量》 ( ) , –。[28] P. D. Mannheim, 《暗物质和暗能量的替代方案》, *Found. Phys.* **42** (2006), 340–445。[29] P. D. Mannheim, 《为共形引力辩护》, *Adv. Math.* **21** (2012), 388–420。J. Milnor, 《李群上左不变度量的曲率》, (1976), 293–329。

[30] D. M¨uller 与 F. Ricci, 《海森堡群上二阶微分算子的分析 I》, *Invent. math.* **101** (1990), 5454–582。[31] S. Rahmani, 《三维单模李群上的洛伦兹度量》, *J. Geom. Phys.* **9** (1992), 295–302。[32] R. F. Streater, 《振子群的表示》, *Comm. Math. Phys.* **4** (1967), 217–236。[33] Th. H. Wears, 《三维李群上几何演化方程的代数孤立子》, *Tbilisi Math. J.* **9** (2016), 33–58。

ECL: I.E.S Eduardo Pondal, 15706 Santiago de Compostela, Spain*Email address*: estebcl@edu.xunta.galEGR: Department of Mathematics, CITMAga, University of Santiago de Compostela,15782 Santiago de Compostela, Spain
Email address: eduardo.garcia.rio@usc.es
IDGR: Facultad de Ciencias de la Educación y del Deporte, University of Vigo, 36005 Pontevedra, Spain*Email address*: ixchel.dzohara.gutierrez.rodriguez@uvigo.es

RVL: I.E.S de Ribadeo Dionisio Gamallo, 27700 Ribadeo, Spain
Email address: ravazlor@edu.xunta.gal