arXiv:2303.00648v2 [physics.comp-ph] 8 Nov 2023

面向 hi-χ框架内强场量子电动力学模拟的优化事件生成器

V. Volokitin[a]、J. Magnusson[b]、A. Bashinov[c]、E. Efimenko[c]、A. Muraviev[c]、I. Meyerov[a]

[a]下诺夫哥罗德洛巴切夫斯基国立大学，俄罗斯下诺夫哥罗德*603950*[b]物理系，哥德堡大学，瑞典哥德堡 *SE-41296*[c]俄罗斯科学院应用物理研究所，俄罗斯下诺夫哥罗德*603950*

摘要

由强场量子电动力学（SFQED）过程产生光子和电子-正电子对的概率生成，往往是开展动理学模拟时最耗费计算资源的部分；这些模拟是对当前及未来高强度激光设施实验研究进行建模所必需的。为降低计算需求，可以采用预计算速率制表、时间步子循环、粒子/光子系综动态降采样等方法。作为此前各项改进的集大成之作，本文所述方法可使每个 QED事件所需的速率计算次数尽可能少。在部分测试中，该方法使性能提升了一个数量级以上。此计算程序作为开源框架 hi-χ 的一部分公开提供，该框架是为协作开发而设计的 Python 控制工具箱。

关键词：强场量子电动力学、康普顿过程、布赖特-惠勒过程、粒子网格、性能优化

1. 引言

现代高强度激光为实现足以触发强场量子电动力学（SFQED）过程的电磁场强度提供了可能，这些过程包括非线性康普顿散射和 Breit-Wheeler 对产生 [1]。这些过程会引发多种现象，影响新生等离子体中的单粒子动力学和集体动力学，并具有

作为新型粒子源和辐射源的潜在应用价值，同时也可用于强场量子电动力学、等离子体物理和天体物理学相关的基础研究 [2]。

采用概率方法处理强场量子电动力学过程的数值模拟，在该领域即将开展的实验项目中，对于理论研究和实验设计都发挥着重要作用。一种特别有效的方法是在粒子模拟方法中扩展一个模块，通过概率生成宏光子、电子和正电子，使其以规模适当的系综对三维三动量分布进行采样 [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]。这种方法的实现也称为 QED-PIC代码，包括 EPOCH [6],PIConGPU [11], VPIC 2.0 [12], OSIRIS [13], Smilei [9], Tristan-MP [14],Calder [15], PICADOR [16], PICSAR-QED [10] 等。

尽管 QED-PIC方法具有实用性，但由于两个主要原因，其计算成本可能很高：(1) 新粒子/光子的高产率生成；(2) 为解析 SFQED事件之间的特征时间区间，有时需要采用极短的时间步长（相较于激光波周期以及所模拟过程的其他宏观尺度而言）。对于前一个问题，通常通过对系综进行重采样来解决，方法包括合并宏粒子/宏光子 [17, 18, 19, 20] ，或移除部分宏粒子/宏光子，并将其统计权重重新分配给剩余的宏粒子/宏光子 [21, 3, 22, 23]。

处理 SFQED事件之间较短的特征时间所带来的计算需求，取决于用于对这些事件进行采样的方法。采用拒绝采样 意味着，对于每个时间步长以及每个光子/粒子，都要生成两个随机数：一个用于确定待生成光子/粒子的候选能量，另一个用于决定是否接受该候选值 [3]。这种方法的实现尤其简单，因为只需计算两个特殊函数，更准确地说，是一些标准库中提供的第一和第二类同步辐射函数 [7], 。通过重要性采样[24]方法增加对低能候选值的采样次数，可以消除康普顿散射概率分布中的低能奇点。通过设定时间步长要求并实施时间步长子循环以满足这些要求，还可以满足任何模拟设置下的一般拒绝采样要求 [7]。对于每个粒子/光子，该过程允许在每个全局时间步长内生成任意多个事件（甚至是局部级联），

使整个计算方法能够灵活用于极端过程的研究 [25, 26, 27]。

然而，拒绝采样有一个缺点：即使放宽对子步长的限制，每次接受一个强场量子电动力学事件，都需要多次计算相关的特殊函数，有时计算成本还很高。 [28] 原因在于，为了准确计数，事件在每个时间步内必须足够稀少。当时间步长趋于较大时，提案被接受的概率为 1，因而每个时间步都会产生一个事件。这会导致事件以不真实的均匀方式生成，并排除在单个时间子步内发生多个事件的情况。

为避免不必要的特殊函数计算，可以使用逆抽样，通过分布的累积分布进行抽样。这种方法已用于粒子网格模拟，以计入电离过程（例如，参见 [29]）。对于强场量子电动力学过程，使用逆抽样意味着采用以下步骤 [30, 6, 31]。对于每个粒子/光子，我们在单位区间内生成一个均匀分布的随机数 p，并通过求逆$p = 1–e^{-d}$计算所谓的光学深度 d。若将事件在时间区间 $(t, t + t_1)$ 内不 发生的概率表示为 $P(t, t + t_1) = 1 - \exp\left(-\int_t^{t+t_1} R(\tau)d\tau\right)$，其中$R(\tau)$是粒子沿轨迹运动时的瞬时事件率，则指数项相当于累积光学深度。随着粒子传播，我们采用一阶欧拉积分计算指数项中的积分，直至其达到 d，此时便判定事件发生。通过逆抽样随机确定出射粒子的能量，所用的是预先计算的查找表；查找表以能量和量子非线性参数 χ为两个自变量，存储累积概率的逆函数。随后生成新的光学深度，以确定下一次事件发生的时刻，依此类推。

在刚才描述的逆抽样过程中，计算需求最高的环节之一是速率的计算，这项计算每个全局时间步都要针对每个粒子进行一次。包括 [6, 10] 在内的许多先进 QED-PIC 代码都采用这种做法。在许多情况下，全局时间步长由场求解器的要求决定，这并不会造成太大限制，因为无论如何都需要在这一时间尺度上重新计算速率，以计入场演化的影响。

然而，与前面描述的拒绝采样方案一样，为确保事件较为罕见，全局时间步长必须足够小。这意味着出于前文所述的同一原因，需要多次计算速率。此外，根据模拟中预期出现的最高速率来选择全局时间步长，可能会带来额外的计算需求。

尽管有许多降低计算需求的技术，但要以精确且通用的方式评估性能并不容易，因为性能在很大程度上取决于问题、方法、硬件以及各种实现细节等因素。本文介绍了多种常用于提升 SFQED 计算性能的方法。不过，针对任何给定情境，性能都可能因上述因素而有所不同。因此，开发并实现一种用于比较 PIC代码性能的统一方法，是一项极具挑战性的工作。不过，我们可以着重减少时间步子循环。无论硬件和软件环境如何，也无论QED-PIC方法各个组件的实现特性如何，减少时间步子循环都应能加快模拟。这正是本文的重点。

本文介绍了一种方法的实现，该方法将上述逆采样方法与子循环相结合。通过这种方式，在每个全局时间步内，我们允许由单个粒子/光子（包括次级粒子）产生多个 SFQED 事件。达到光学深度后，我们生成新粒子，为每个粒子分配光学深度，并继续这一过程，直至全局时间步结束。此时，我们会重新评估系综中所有粒子/光子的速率，因为全局时间步通常决定了场不再能被假定为保持不变的时间尺度。因此，该过程将可能的速率评估次数降至最低：当光学深度短于全局时间步时，每个事件评估一次；当光学深度长于全局时间步时，每个全局时间步评估一次。此外，我们的实现（详见第 3 节）还采用了累积分布函数的高精度近似，并对极限情况进行了解析处理。计算精度见第 4 节，我们在第 5 节进行了全面测试。

2. 动机

QED-PIC事件生成器可以通过多种不同方式实现，但这些方式有一个共同点：它们都按照稍后在方程3 和 6中所述的偏部分速率对事件进行抽样。抽取谱最常见的两种方法是拒绝采样和逆变换抽样。对于前一种方法，首先随机选取一个能量值，然后对偏部分速率（$\mathrm{d}W/\mathrm{d}E$）进行拒绝采样，以确定事件是否发生。对于后一种方法，首先利用事件率（$W = \int(\mathrm{d}W/\mathrm{d}E)\mathrm{d}E$）判断事件是否发生，然后通过对偏部分速率进行逆变换抽样来确定能量。

这两种方法各有优缺点。例如，后一种方法需要对逆累积分布函数进行制表，但在这两种情况下，一个时间步长内发生 QED事件的概率自然都必须小于 1。更严格地说，为了使较长时间内的事件数目准确，一个时间步长内发生单个事件的概率实际上必须远小于 1。其原因在于，我们通常忽略单个时间步长内发生多个事件的情况。因此，在大量时间步长内的事件总数平均而言应被低估（未考虑任何量子干涉效应）。通过使事件变得罕见，可以将这一差异降至最低。此外，较高的事件概率还会导致此类事件之间出现表面上存在、但实际上并不具有物理意义的时间相关性。

这通常只会在 χ 极高的情况下成为问题。确保精度足够的最简单方法是减小全局时间步长，因此在大多数情况下可以忽略此问题。但也不能完全忽视这一问题，因为减小全局时间步长可能会非常低效。归根结底，只有经历高 χ 的粒子才需要更高的时间分辨率，而且通常只需维持很短一段时间，因为产生高 χ 的强场往往在时间和空间上都局限于很小的范围。因此，通用的解决方案是实现所谓的子循环：仅对确有需要的粒子减小时间步长，具体依据是它们瞬时的 χ 值。这可以完全在粒子推进器中完成，无需改动 PIC循环的其余部分；通常的做法是将时间步长拆分为若干个整数个子步长，并仅应用于选定的粒子。

尽管通常只有系综中的一部分会参与 QED过程，但对时间步长的要求会影响整个事件生成器的效率，因为其精度依赖于较高的拒绝—接受比。这意味着每个被接受的事件都需要进行大量速率计算。通过计算下一次发射何时 发生，而不是是否 会在当前时间步长内发生，可以提升效率。这样能最大限度地减少每个事件所需的昂贵计算次数，在特定条件下甚至可使其接近于一次，同时不损失精度。此外，这种方法还能使 QED 事件生成器与经典粒子网格循环的时间尺度完全分离，从而可以仅依据常规的PIC约束（例如场求解器的稳定性）来设定全局时间步长。

3. 方法

3.1. 无记忆性

如果假设事件是离散且相互独立的，那么事件之间的时间间隔可以用指数分布描述。由于指数分布具有无记忆性，因此可以利用这一性质创建一个不依赖于 PIC 模拟所选全局时间步长的事件生成器。具体做法是计算距下一次事件发生的时间。如果确定事件会在当前时间步长内发生，就可以通过自适应子循环，在确定的时刻执行该事件。否则，可以舍弃该事件，并将模拟推进到下一个时间步长。

我们可以利用指数分布的累积分布函数（CDF）轻松证明，无论如何选择时间步长 Δt，都能对分布函数进行一致的采样：$P_{\mathrm{e}}(t^* \leq t) = 1 - \exp(-\lambda t)$，其中 λ 是事件率，t^* 是距下一次事件发生的时间。我们还假设 λ 在一个时间步长内保持不变。对于 $t \leq \Delta t$，事件在当前时间步长内发生的概率很容易确定，因为它完全由指数分布决定。

$$P(t^* \leq t; t \leq \Delta t) = P_{\mathrm{e}}(t^* \leq t). \tag{1}$$

然而，对于 $t > \Delta t$，累积分布函数包含两个项：（1）在并行时间步内发生事件的概率（$P_{\mathrm{e}}(t^* \leq \Delta t)$），以及（2）在并行时间步内事件被拒绝且

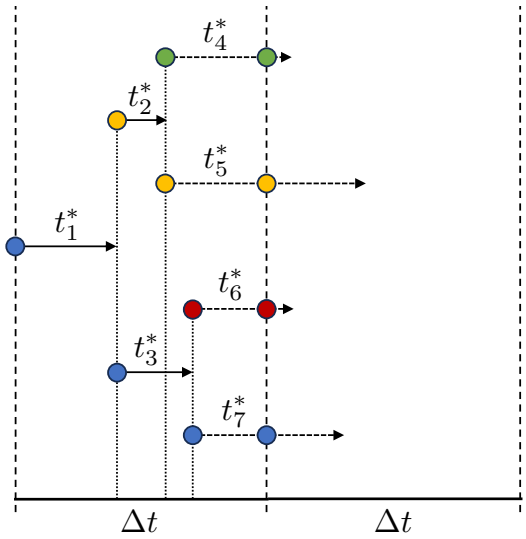


图 1：子循环方案工作原理的示意图。分别为每个粒子（彩色圆圈）计算到下一次事件 t^* 发生所需的时间。如果计算得出事件将在当前全局时间步（Δt）内发生，就将粒子推进到该时间点，随后执行事件（实线箭头）。如果事件将在当前全局时间步之外发生，则将粒子推进到全局时间步末尾，并舍弃该事件（虚线箭头）。为简便起见，此处将每个事件都描绘为会产生一个额外粒子。

并在后续时间步中被接受。

$$\begin{aligned} P(t^* \leq t; t > \Delta t) &= P_{\mathrm{e}}(t^* \leq \Delta t) + P_{\mathrm{e}}(t^* > \Delta t) P_{\mathrm{e}}(t^* \leq t - \Delta t) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t} + \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t}(1 - \mathrm{e}^{-\lambda (t - \Delta t)}) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} = P_{\mathrm{e}}(t^* \leq t) \end{aligned} \tag{2}$$

因此，无论 Δt的值如何，均有 $P\left(t^* \leq t\right) = P_{\mathrm{e}}\left(t^* \leq t\right)$。因此，就事件生成器而言，时间步长的选择可以简单地视为任意的同步点，从而使由粒子事件引起的任何时间步长要求都能与场所带来的约束完全解耦。

这一重要特性带来了相较于通用方法的两项显著改进 [6, 30, 31]。首先，我们无需对时间步长施加过小的限制来积分光学深度。相反，在每个时间步长内，我们为每个粒子采样事件；如果当前步长内未发生事件，我们只需将粒子移动完整的

时间步长，并丢弃该事件。否则，我们将粒子移动与光学深度相对应的时间步长分数，直至次级粒子产生的位置。该过程确保了时间局域性，即所有事件处理都在单个时间步长内完成，且无需在不同时间步长之间保存任何状态（例如光学深度）。其次，在事件发生后，我们可以从初始粒子和次级粒子中采样新事件，并移动它们，直到所有粒子都移动到时间步长的末尾。图1展示了这一子循环工作方式的示意图。因此，我们可以在单个时间步长内处理多个事件；当次级粒子大量产生时，这也放宽了对时间步长的时间约束。

3.2. 确定下一个事件

对于康普顿散射和布赖特-惠勒对产生，事件率只需由总速率 $\lambda = W(\chi) = \int(\mathrm{d}W/\mathrm{d}E)\,\mathrm{d}E$ 确定。已知发射之间的时间 t^* 遵循指数分布，通过逆抽样可得 $t^* = -\log(r)/W(\chi)$，其中 $r \sim U(0,\ 1)$ 是均匀分布随机数。这个过程等同于确定粒子的光学深度。

3.3. 光子发射

非线性康普顿散射的部分速率为 [32, 33, 34,35]:

$$\frac{\mathrm{d}W_\gamma}{\mathrm{d}\varepsilon} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{\alpha}{\tau_C}\frac{\chi}{\gamma}\left[\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}F_1(z) + \varepsilon F_2(z)\right], \quad z = \frac{2}{3\chi}\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}, \tag{3}$$

其中，$\varepsilon = \hbar\omega/\gamma mc^2$ 是以辐射粒子的能量为基准归一化的光子能量，$\hbar$ 是普朗克常数，ω 是光子频率，γ 是洛伦兹因子，m 是电子质量，c 是光速，α 是精细结构常数，τ_C 是康普顿时间。$F_1(x) = x\int_x^\infty K_{5/3}(x')\mathrm{d}x'$ 和 $F_2(x) = xK_{2/3}(x)$ 分别是第一和第二类同步辐射函数。

3.3.1. 事件率

考虑光子发射的总速率:

$$W_\gamma(\chi) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{\alpha}{\tau_C}\frac{\chi}{\gamma}\int_0^1\left(\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}F_1(z) + \varepsilon F_2(z)\right)\mathrm{d}\varepsilon \tag{4}$$

如上所述，新方法的主要思想是估计光子发射前的时间t^*。为实现这一点，康普顿率 $W_\gamma(\chi)$在 χ上通过分段函数进行近似，识别出局部趋势后，再使用多项式近似进行细化（区间和局部趋势见附录 A）。为使叙述更加简洁，关于 χ上的区间以及局部趋势的表格见补充材料部分。采用最高达 9^{th} 阶的多项式，可实现 10^{-3}的相对精度，具体将在下文展示。多项式值可以使用基于融合乘加（FMA）指令的霍纳法 [36],进行计算，从而以更高的精度和性能在一次操作中完成乘法与加法（$a{\cdot}b{+}c$）。因此，这些计算对于现代 CPU 而言相对轻量。需要指出的是，所提出的方法还可以实现更高的精度，但这将需要额外的计算，并且速度会显著降低。我们认为，所提出的近似参数在精度和计算效率之间实现了最佳折中，同时精度至少与之前的方法 [7]相当。

3.3.2. 确定能量（康普顿）

能量可通过对部分速率进行逆变换抽样获得，这需要计算累积分布函数

$$\mathrm{cdf}_\gamma(\chi,\varepsilon)=\frac{W_\gamma(\chi,\varepsilon)}{W_\gamma(\chi)}, \tag{5}$$

其中 $W_\gamma(\chi,\ \varepsilon)=\int_0^\varepsilon \mathrm{d}W\,\mathrm{d}\varepsilon'(\chi,\ \varepsilon')\,\mathrm{d}\varepsilon'$。

为了获得所需的 ε 值，必须对 $r\sim U(0,\ 1)$ 中的逆函数 $\mathrm{cdf}_\gamma^{-1}(\chi,\ \varepsilon)$（康普顿逆累积分布函数）求值，因此采用了逆函数制表法。逆函数的定义域用如下网格表示：在 $r_2\in[0.05,0.93]$ 上为均匀网格（96 个点），从 1 到 $r_2\in[0.93,1]$ 反向对数压缩（96 个点），并在 $\chi\in[1.5^{-30},1.5^{30}]$ 上采用对数网格（61 个点）。在各节点处对逆函数求值。在后续计算中，主区域内的节点之间采用线性插值，而在 $r_2\in[0.0,0.05]$ 上采用渐近近似。在此方法中，我们认为指定定义域内的相对偏差低于 10^{-2} 即可接受。典型值为 10^{-3}。通过实验我们发现，这种复杂的点分布能够使函数近似得足够准确

，从而避免 [37]中所述的问题。实现细节见附录 B。

3.3.3. 考虑量子电动力学效应的粒子推进算法

所构建的近似使我们能够在主 PIC 循环的单个全局时间步内，在考虑量子电动力学效应的情况下，为带电粒子制定一种新的粒子推进算法（算法1）。该算法的工作方式如下。在粒子退出循环之前（第 3–14 行），即当前时间步结束之前，下一个光子的发射时间会持续更新（第 4–6 行）。如果必须在该时间步长内发射一个光子，则将粒子推进至与发射时间相对应的坐标（第 11 行），随后以相应的能量发射一个光子（第 14 行）（第 13 行）。否则，将粒子推进至与时间步长结束相对应的坐标（第 8 行）。发射出的光子采用第 3.4.3 节所述的算法进行推进。请注意，χ、$rate$和t^* 会在每个时间子步开始时更新，而根据 PIC 方法的通常假设，场在整个全局时间步内被视为恒定。

算法1 考虑量子电动力学效应的粒子推进算法（适用于带电粒子）

1: **过程** ParticlePush（$particle$, E, B, dt）
2: $t = 0$
3: **当** $t < dt$ **时执行**
4: $Update\ \chi$
5: $rate = ComptonRate(\chi)$
6: $t^* = -log(random()/rate)$
7: **如果** $t + t^* > dt$ **则**
8: $Pusher(particle, E, B, dt - t)$
9: $t = dt$
10: **else**
11: $Pusher(particle, E, B, t^*)$
12: $t = t + t^*$
13: $invCDF = ComptonInvCDF(\chi, random())$
14: $EmissionPhoton(particle, invCDF)$

3.4. 光子衰变为电子-正电子对 *3.4.1.* 事件率（布赖特–惠勒）

布赖特-惠勒对产生的部分速率由 [33] 给出：

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\varepsilon_e} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{\alpha}{\tau_C}\frac{mc^2\chi_\gamma}{\hbar\omega}\left[(\varepsilon_e-1)\varepsilon_e F_1(z_p) + F_2(z_p)\right], \tag{6}$$

其中 $z_p = \frac{2}{3\chi_\gamma (1-\varepsilon_e)\varepsilon_e}$。该表达式给出了光子衰变为电子-正电子对的概率，其中两者的能量分别为 $\varepsilon_e\hbar\omega$ 和 $(1-\varepsilon_e)\hbar\omega$。

与处理光子发射的方式类似，光子衰变的时间由总对产生率确定：

$$W_p(\chi_\gamma) = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{\alpha}{\tau_C}\frac{mc^2\chi_\gamma}{\hbar\omega}\int_0^1 \left((\varepsilon_e-1)\varepsilon_e F_1(z_p) + F_2(z_p)\right)\mathrm{d}\varepsilon_e. \tag{7}$$

通过计算 Breit-Wheeler 速率 $W_p(\chi_\gamma)$，可以根据第 t^* 节确定事件发生的时间点。3.2。为了快速计算，使用具有已识别局部趋势并通过多项式进行细化的分段函数（区间和局部趋势见附录 C）。所需精度与光子发射的情况相同。

3.4.2. 确定能量（布赖特–惠勒）

为了获得生成电子的无量纲能量 ε_e（正电子的能量则为 $1-\varepsilon_e$），采用与第3.3.2节相同的方法。

$$\mathrm{cdf}_p(\chi_\gamma, \varepsilon_e) = \frac{W_p(\chi_\gamma, \varepsilon_e)}{W_p(\chi_\gamma)}, \tag{8}$$

其中 $W_p(\chi_\gamma, \varepsilon_e) = \int_0^{\varepsilon_e} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\varepsilon'_e}(\chi_\gamma, \varepsilon'_e)\,\mathrm{d}\varepsilon'_e$。

为了计算逆函数累积分布函数 $\mathrm{cdf}_p^{-1}(\chi_\gamma, \varepsilon_e)$（布赖特–惠勒逆累积分布函数），采用一个关于 $r_2 \in [0.0, 0.05]$ 对数分布的网格（64 个点），关于 $r \in [0.05, 0.5]$ 均匀分布的网格（64 个点），以及关于 $\chi \in [1.5^{-30}, 1.5^{30}]$ 对数分布的网格（61 个点）。由于该函数关于 $r_2 = 0.5$ 对称，因此不使用 $r \in [0.5, 1]$ 的值，在这种情况下，$\mathrm{cdf}_p^{-1}(\chi_\gamma, r) = 1 - \mathrm{cdf}_p^{-1}(\chi_\gamma, 1-r)$。实现细节见附录 D。

3.4.3. 考虑量子电动力学效应的粒子推进算法（适用于光子）

在全局时间步结束时，考虑量子电动力学效应的光子推进算法（算法2）与带电粒子的算法类似。与算法1不同，我们不需要 while 循环，因为光子在对产生过程中会被移除，无需再对其进行处理。如果光子必须在此时间步内衰变，则将光子推进到对应于衰变时刻的坐标（第 10 行），随后按照相应的能量（第 12 行）生成一个电子-正电子对（第 13 行），并删除该光子（第 14 行）。否则，将光子推进到对应于时间步长结束时刻的坐标（第 7 行）。生成的粒子使用上文第3.3.3节所述的算法进行推进。

算法2 考虑量子电动力学效应的粒子推进算法（适用于光子）

1: **过程** PhotonPush($particle, E, B, dt$)
2: $t = 0$
3: $Update\ \chi_\gamma,\ v$
4: $rate = BreitWheelerRate(\chi_\gamma)$
5: $t^* = -log(random()/rate)$
6: **如果** $t^* > dt$ **则**
7: $particle.position\ +\!= dt \cdot v$
8: $t = dt$
9: **else**
10: $particle.position\ +\!= t^* \cdot v$
11: $t = t^*$
12: $invCDF = BreitWheelerInvCDF(\chi_\gamma,\ \ random())$
13: $PairProduction(particle,\ \ invCDF)$
14: $Delete\ particle$

4. 验证

我们通过将已实现函数与真实值进行比较，展示其准确性。这些真实值通过分段积分以及对被积函数发散进行特殊处理，以很高的精度（约为 10^{-15}）计算得到。

4.1. 事件率

已实现的康普顿率 $W_\gamma(\chi)$，定义见方程 4，以及其相对准确度显示于图 2 中，并与最低阶渐近近似进行了比较。对于 2×10^{-6} 的所有取值，已实现函数的相对误差均小于 χ。类似地，已实现的布赖特–惠勒速率 $W_p(\chi_\gamma)$，定义见方程 7，也显示于图 2中。对于所有 10^{-6}，已实现的布莱特-惠勒函数相对误差均小于 $\chi_\gamma \gtrsim 10^{-2}$。对于 $\chi_\gamma \lesssim 10^{-2}$，相对误差增大到约 10^{-3}；但由于该区域内布莱特-惠勒速率（以及绝对误差）小于 $10^{-70}\mathrm{s}^{-1}$，因此这类误差在计算上无关紧要。

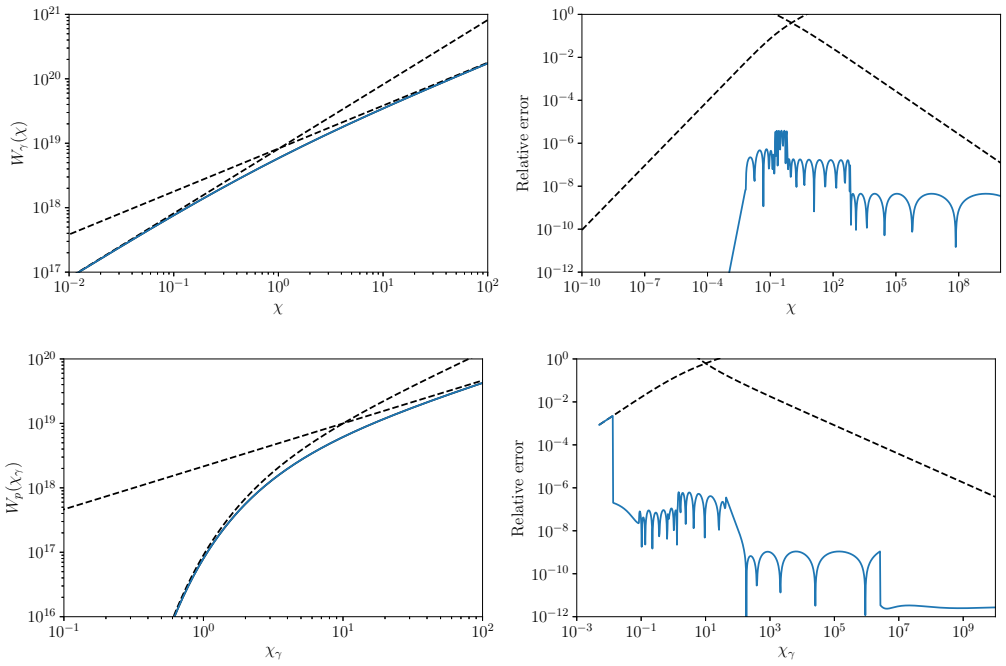


图2：左侧各图显示已实现的康普顿（上方，蓝色）和布赖特–惠勒（下方，蓝色）速率，它们与真实值（黑色实线）无法区分；同时还显示了最低阶渐近近似（虚线），它们是量子非线性参数 χ的函数。右侧各图显示已实现函数的相对误差，以及渐近近似的相对误差。

4.2. 谱

粒子谱由累积分布函数对能量的导数定义。由于涉及求导、数值离散化以及累积分布函数具有二维特性，生成的谱的精度比速率函数的精度更难评估。因此，在解读逆累积分布函数的误差及其与生成谱之间的关系时，必须谨慎。

鉴于这些注意事项，图中展示了逆累积分布函数及其生成的数目谱（由部分速率给出）3，涵盖康普顿过程和布赖特-惠勒过程。对于能量（ε， ε_e）和量子非线性参数（χ， χ_γ）的广泛取值范围，累积分布函数和谱均表现出良好的一致性。然而，由于当 $\varepsilon \to 1$ 时，累积分布函数变得不可逆，因此相对误差在此极限下会发散。不过，正如某些情况下的布赖特-惠勒速率所呈现的那样

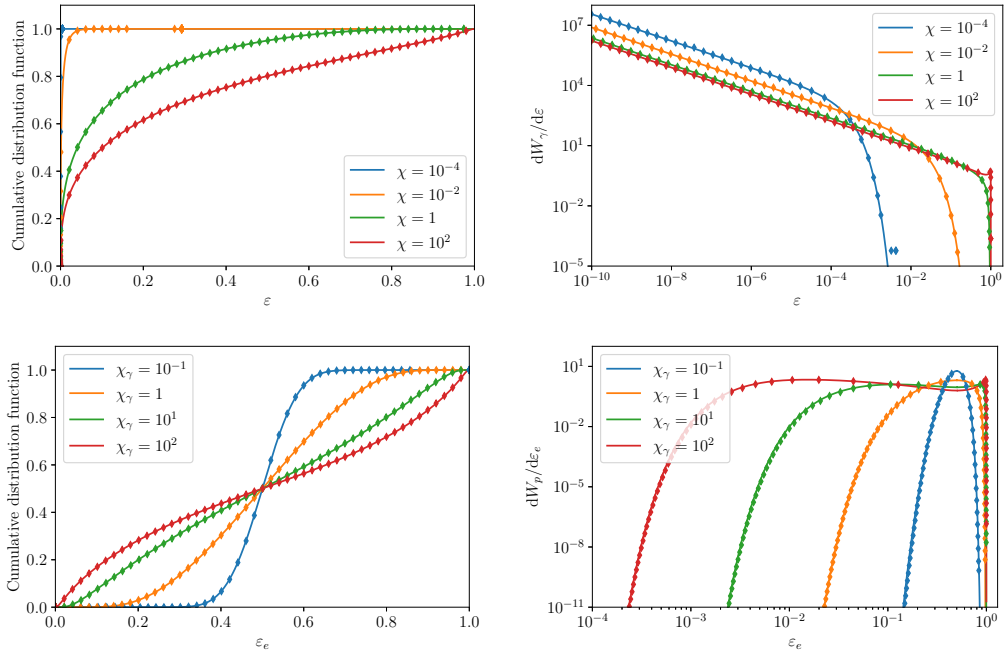


图3：左侧各面板展示了实现的康普顿（上图，标记）和 Breit-Wheeler（下图，标记）逆累积分布函数随能量的变化，并与不同 χ 和 χ_γ 下的真实值（实线）进行比较。右侧各面板展示了由逆累积分布函数得到的相应数目谱（部分速率）。

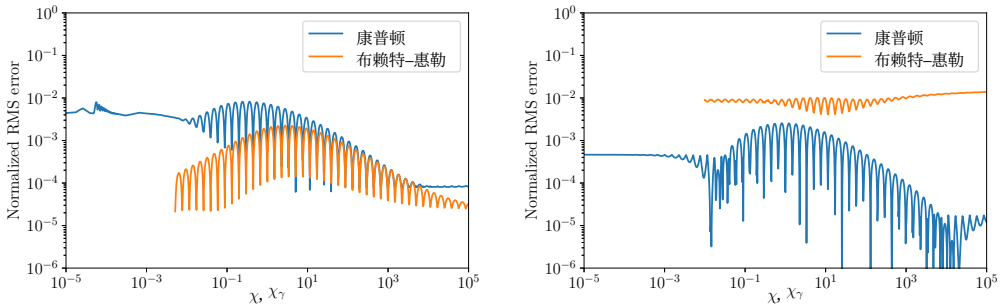


图4：对于康普顿（蓝色）和布赖特–惠勒（橙色）过程，已实现的逆累积分布函数（左）和由此得到的数目谱（右）相对于量子非线性参数 (χ, χ_γ) 的归一化均方根误差。

在这些区域，谱的绝对误差通常小到完全可以忽略。

图中展示了两个逆累积分布函数和谱的归一化均方根（RMS）误差4随 χ (χ_γ)的变化情况。其计算依据为

$$\sqrt{\int \left(f(\chi,\varepsilon) - f_0(\chi,\varepsilon)\right)^2 \mathrm{d}\varepsilon \Big/ \int f_0(\chi,\varepsilon)^2 \,\mathrm{d}\varepsilon}\,, \tag{9}$$

其中， f 是已实现的函数， f_0 是真实函数。总体而言，逆累积分布函数及其生成的谱表现出典型误差，误差量级为10^{-2}-10^{-3}，具体取决于所处区域和过程。

5. 数值验证

最后，我们通过若干基准案例测试实现，并与此前发表的结果进行比较。

5.1. 级联发展

在此基准测试中，我们模拟由一个初始能量为 $\varepsilon_0 = 100$吉电子伏特的单个电子引发的级联发展过程。该电子在强恒定磁场（$H_0 = 0.2E_S$）中运动，磁场方向与电子的运动方向垂直。在图5 中，我们展示了能量高于 $10^{-3}\varepsilon_0$ 的电子和正电子数量随时间的变化。结果

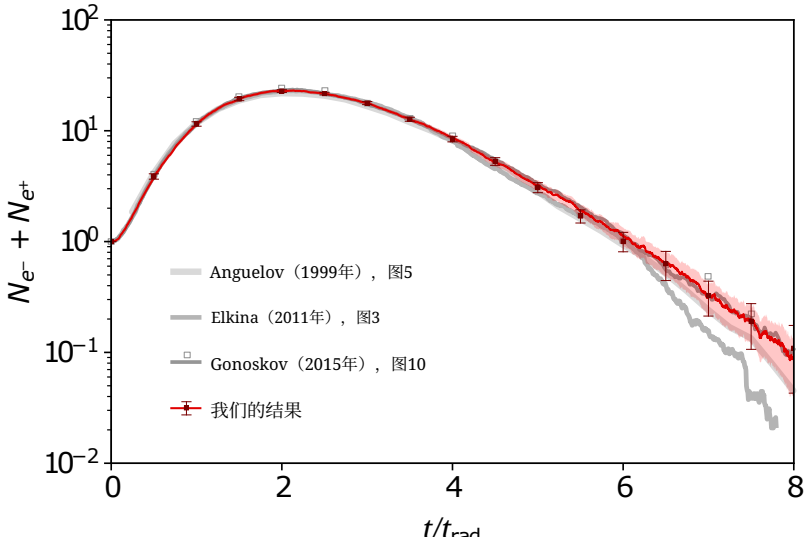


图5：级联中能量超过 $10^{-3}\varepsilon_0$ 的电子和正电子数量。该级联由伽马因子为 $\gamma_0 = \varepsilon_0/m_ec^2 = 2\times10^5$ 的单个电子引发，该电子处于恒定磁场中；磁场垂直于电子速度，强度为 $0.2E_S$，结果以时间为函数呈现。图中以实线显示 [38]（浅灰色）、[4]（中灰色）的结果。我们的结果（红色）以及 [7]（深灰色）的结果，分别针对两种不同的时间步长 $0.5t_{\rm rad}$（标记）和 $10^{-3}t_{\rm rad}$（线条）给出。误差棒和彩色区域表示对 1000 次模拟计算所得的均值标准误（1σ）。

对 1000 次模拟结果取平均值，并分别采用两个不同的时间步长 $10^{-3}t_{\rm rad}$ 和 $0.5t_{\rm rad}$进行计算，其中 $t_{\rm rad} = 3.85\times\gamma_0^{1/3}\,(E_S/H_0)^{2/3}\hbar^2/(mce^2)$。基准测试表明，这两种时间步长的结果彼此吻合极佳，也与先前发表的结果 [38, 4, 7] 一致。对于 $t/t_{\rm rad} > 6$，可以看到一些偏差，但所有差异均在 1-2 个标准差范围内。

5.2. 级联谱

接下来，我们再次模拟由单个电子在垂直于电子运动方向的强恒定磁场中触发的级联，但此处场强为 $H_0 = 10^{-3}E_{\rm S}$，初始电子能量为 $\gamma_0 = 1000$。图中给出了电子分布 $\Phi_-(\gamma,\ t)$、正电子 $\Phi_+(\gamma,\ t)$和光子 $\Phi_\gamma(\gamma,\ t)$作为能量函数的分布，以及级联发展1 fs后的结果。我们的结果取 10^8 次模拟运行的平均值，并与 [6, 7], 的结果进行比较，二者吻合极佳。

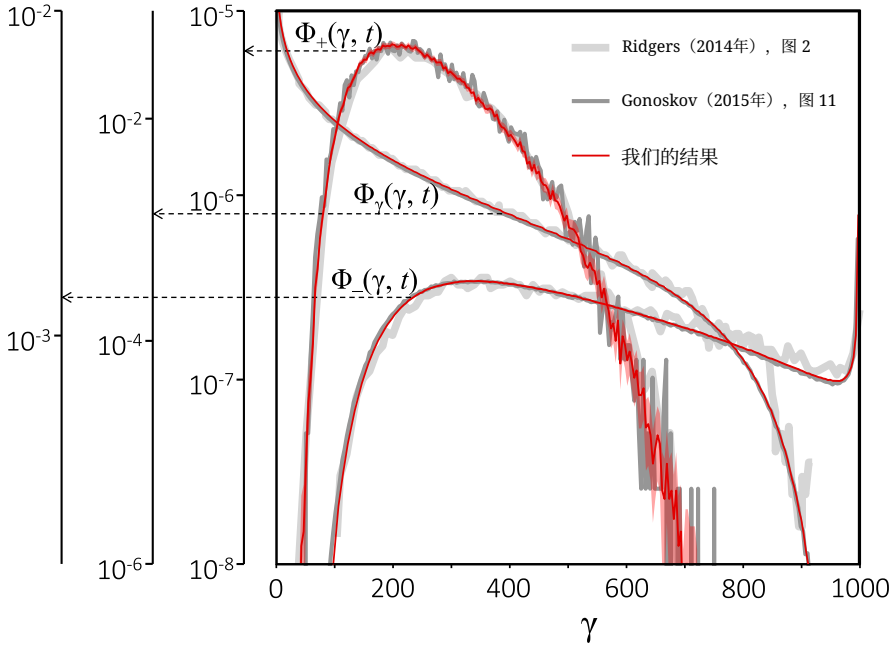


图 6：电子分布 $\Phi_-(\gamma,\ t)$、正电子 $\Phi_+(\gamma,\ t)$ 和光子 $\Phi_\gamma(\gamma,\ t)$ 随能量的函数，归一化至 mc^2，经过 $t = 1$fs 级联发展后。实线显示了 [6]（浅灰色）、[7]（中灰色）和我们的结果（红色）。彩色区域表示 10^8 次模拟的均值标准误（一个标准差）。

5.3. 圆偏振驻波中的 *QED*级联

本节将展示所开发的QED过程处理方法的能力。我们考虑一个模型示例，它虽然并非全然如此，却极具启发性，且常用于获得物理认识：圆偏振驻平面波 [39, 40, 41, 42,43, 44, 45]中的QED级联。这种波沿电场和磁场方向均匀分布；电场和磁场随时间旋转，其振幅在局部保持恒定。在电场波腹附近，QED过程发生得更为频繁，电子和正电子在发射光子后迅速获得能量，而光子衰变的概率也很高。在这种场构型中，当QED级联达到稳态时，电子、正电子和光子的数量随时间呈指数增长；此外，辐射损失会抑制粒子逃离波腹区域 [44]。因此，与其他场结构相比，所考虑的场构型可能导致处理QED过程的函数被调用得最为频繁

这些函数涉及的过程及其计算可能会占用相当一部分计算时间。

我们对驻波圆偏振平面波中的 QED级联进行了多组模拟，采用了不同的时间步长和波幅。我们分析了结果，并使用不同的事件生成器比较了计算性能：AEG（自适应事件生成器）[7], mAEG（改进的自适应事件生成器） [28] 以及 FQED（本文所讨论的快速 QED 事件生成器）。使用这些事件生成器进行模拟时，我们采用了相同的配置。模拟盒为$64 \times 2 \times 2$ 个网格单元，且 $2\lambda \times 2\lambda \times 2\lambda$ 沿 x方向， y 以及 z，其中 $\lambda = 0.8$ μm 是激光波长。时间步长在 $T/6000$ 至 $T/50$范围内变化，其中 $T \approx 2.67$ fs 是激光周期。在 $10T$时间内考察了 QED级联发展。该时间段足以确定级联增长率。

场以解析形式设定：

$$\begin{aligned} E_y &= A/\sqrt{2} \times \cos(kx)\sin(\omega t), \\ E_z &= A/\sqrt{2} \times \cos(kx)\cos(\omega t), \\ B_y &= -A/\sqrt{2} \times \sin(kx)\sin(\omega t), \\ B_z &= -A/\sqrt{2} \times \sin(kx)\cos(\omega t), \end{aligned} \tag{10}$$

其他场分量为零。振幅 A 的取值范围为 $700R_f$ 至 $2100R_f$，其中 $R_f = 2\pi mc/eT = 1.3 \times 10^8$ G 或 statV/cm。对于每个振幅和每个时间步长，我们进行了六次模拟：每个 QED 事件生成器各进行两次模拟，并使用不同的随机数生成器（RNG）种子。模拟结果以及它们在特定物理参数下的性能，均取这两次模拟的平均值。

最初，电子和正电子均匀分布在整个模拟盒中，二者的数量均为 5×10^4。一个宏粒子（粒子模拟代码中若干物理粒子的集合）等于一个真实粒子。由于连续波的平面结构，粒子的边界条件为周期性边界条件。为了避免QED级联发展导致内存不足，我们采用了全局均衡重采样技术 [22], ，该技术不允许任何单个类型的宏粒子数量大幅超过人工指定的阈值。所选的重采样方法在粒子系综中产生的数值伪影最小[22]。重采样阈值设置为：当任一给定类型的宏粒子数量超过 10^6 时运行重采样。

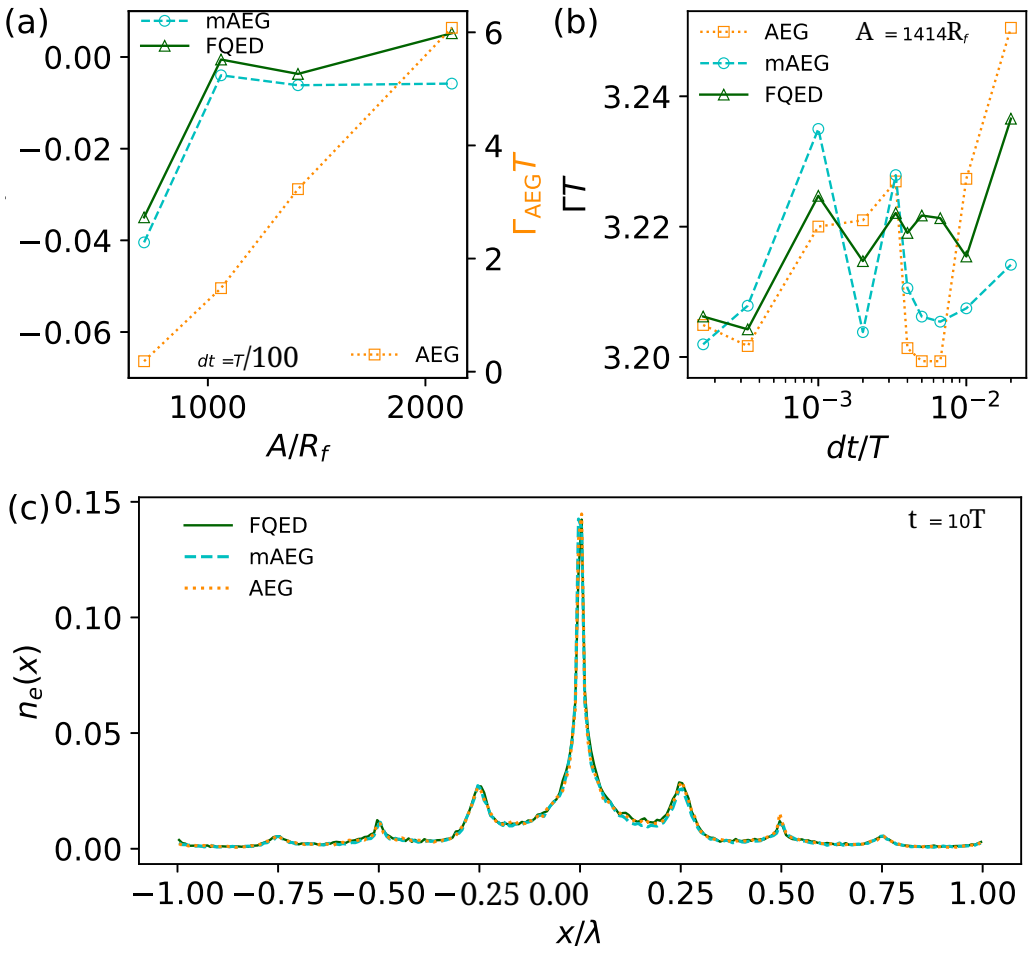


图7：（a）使用不同事件生成器时，QED级联增长率随场振幅的变化，时间步长为 $dt = T/100$。实线和虚线分别表示使用 FQED 和 mAEG 计算的增长率与使用 AEG 计算的增长率 Γ_{AEG} 之间的相对差异 η_Γ（左侧 y 轴）；AEG 计算的增长率以点线表示（右侧 y 轴）。（b）在波幅 $A = 1414R_f$ 下，利用不同事件生成器确定的增长率随时间步长的变化。标记表示已执行的模拟。（c）使用不同 QED 事件生成器进行模拟时，最后时刻 $t = 10T$ 沿 x 轴的电子密度分布。

为了测试所开发的事件生成器，我们使用了俄罗斯科学院联合超级计算中心的一台双CPU节点，配备Intel Xeon Gold 6248R。我们使用1个MPI进程和96个线程运行测试。

首先，我们分析使用不同事件生成器进行的模拟在物理上的一致性。

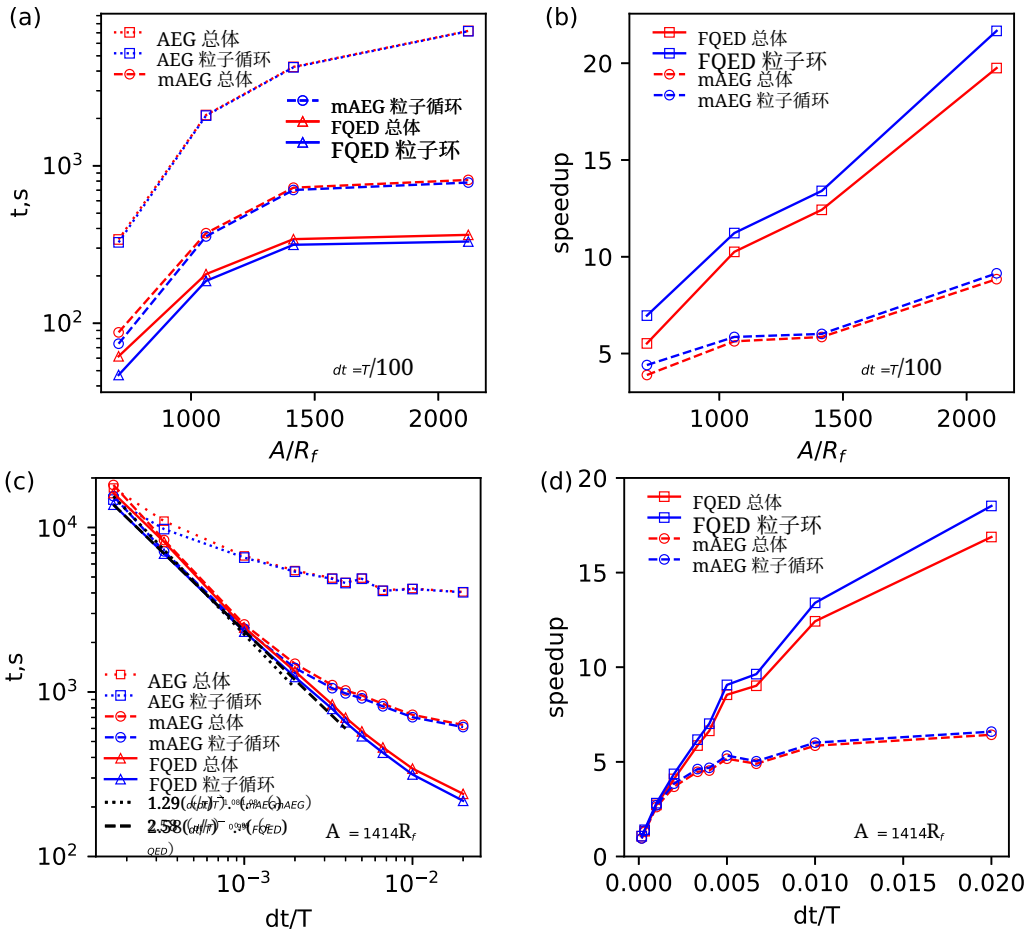


图8：使用不同事件生成器时，粒子循环阶段的持续时间和模拟总持续时间分别随（a）圆偏振驻平面波的波幅变化（时间步长为 $dt = T/100$ ），以及随（c）时间步长变化（波幅为$A = 1414R_f$）。mAEG 和 FQED 相对于 AEG 的粒子循环阶段加速比和模拟整体加速比分别随（b）波幅和（d）时间步长变化。使用 mAEG 和 FQED 事件生成器时，粒子循环阶段持续时间的渐近行为分别以黑色点线和黑色虚线表示。

我们将 QED 级联增长率 Γ 作为主要比较结果。为了确定 Γ ，我们计算模拟盒中电子总数随时间 $N_e(t)$ 的变化，然后 $\Gamma = \ln\left[N_e(10T)/N_e(8T)\right]/(2T)$。作为增长率的参考值，我们考虑此前使用 AEG 事件生成器获得的数值 Γ_{AEG}

用于许多研究中（例如，参见 [22, 25, 26, 27, 44]）。

图 7 (a) 显示，$\eta_\Gamma = (\Gamma_{\text{mAEG, FQED}} - \Gamma_{\text{AEG}})/\Gamma_{\text{AEG}}$（增长率的相对差异）约为 1%。在振幅范围 $A/R_f >$1000 内，其中 $\Gamma T > 1$，相对差异最小（$\lesssim$ 1%）。然而，在较低的振幅范围 $A/R_f < 1000$ 内，对于 mAEG 和 FQED 事件生成器，η_Γ 达到几个百分点。$|\eta_\Gamma|$ 的增加可以用 $\Gamma T < 1$ 的低值来解释，因此结果的离散程度较大，这可能需要对使用不同随机数生成器种子进行的两次以上模拟结果取平均。

为了确定 Γ 对时间步长的依赖关系，我们选择 $A = 1414R_f$，此时 $\Gamma T > 1$，并假定结果的离散程度可以忽略不计。对于三种事件生成器，增长率的波动均在 1% 以内（平均增长率 $\approx 3.215T$），见图 7 (b)。使用 FQED 事件生成器时，波动最小，为 0.6%；而 AEG 导致的波动最大，约为 1%。所考虑的最大时间步长为$dt = T/50$，因为根据我们的模拟，对于更长的时间步长，在给定场振幅下，粒子运动的时间分辨率会变得不足 $A = 1414R_f$。

除了基于模拟盒中的粒子数量计算的增长率之外，我们还展示了 [见图7 (c)]，采用不同事件生成器进行模拟所得到的空间电子分布彼此非常接近。这些分布是局部特征，也进一步证实所开发的 QED 事件生成器几乎完全一致。

其次，我们比较了不同事件生成器的可实现性能。对于所考虑的设置，计算的主要部分与粒子处理有关，因为每次模拟的总时长仅略长于粒子循环阶段所花费的总时间（图8 (a), (c)）。此外，粒子循环中的大量计算用于处理 QED过程，尤其是针对 $A > 1414R_f$。振幅增大使 QED过程发生的概率提高，从而产生更多电子-正电子对和光子，显著增加粒子循环所花费的时间以及总计算时间。然而，由于重采样（在 $A \gtrsim 1000R_f$ 时不仅针对光子，也针对电子-正电子对进行重采样），$t(A)$是一个凹函数（见图8(a)）。

在所考虑的振幅范围内，FQED事件生成器的速度最快。其相对于AEG的加速比随振幅增加，并且可能超过20倍（图8 （b））。另一个事件生成器mAEG表现出定性相似的行为，但加速比约为2–2.5。

对于给定的波幅 $A = 1414R_f$，我们还研究了不同时间步长下的性能 [图8 （b）、（d）]。在时间步长 $dt \ll T/3000$ 下，三个事件生成器的性能都非常接近，计算时间的缩放关系为 $\sim 1/dt$。AEG和mAEG不需要子循环，主要启用算法1的第7–9行，以及FQED算法2 的第6–8行。

随着时间步长增加，AEG 事件生成器最先开始使 t偏离 $1/dt$ 依赖关系。在 $dt > dt_{AEG} \approx T/3000$ 处，它能够更频繁地进行子循环，因此在 $dt > T/150$ 处，使用该事件生成器的模拟性能几乎不再依赖时间步长。QED 事件生成器 mAEG 能够更精确地确定子步长 [28]。因此，对于该事件生成器，计算时间 t 按 1.2（dt/T）$^{-1.08}$进行缩放，直至 $dt_{mAEG} \approx T/1000$；在 $dt \gtrsim T/100$ 处，函数 t（dt）的斜率显著降低。

在所考察的事件生成器中，事件生成器 FQED 的性能最佳。当 t（dt）改变其依赖关系时，对应的阈值时间步长为 $dt_{FQED} \approx T/500$；随着 dt 增加，其偏离该依赖关系的速度相当缓慢。在可能的最大 dt 下可获得最大的加速比：使用 FQED 的模拟性能比使用 AEG 时高出一个数量级以上，比使用 mAEG 时最高可高出一个数量级。

由于粒子运动的特性， [44], 所研究问题中 QED 过程的特征时间大约为 $t_{\mathrm{QED}} \sim 1.5T(R_f/A)^{0.645} \approx T/70$。对比 $dt_{AEG、mAEG、FQED}$与 t_{QED}后，我们得出结论：AEG 在子循环期间使用的时间步长过短（$t_{QED}/dt_{AEG} > 40$）。mAEG 中实现的更精确子循环子步长估算（$t_{QED}/dt_{mAEG} \approx 14$）显著提升了性能，但同时基于光学深度方法和子循环的 FQED 事件生成器性能最佳。对于该事件生成器而言，子循环是必需的（算法 1的第 11–14 行，以及算法 2的第 10–14 行），这一点在最接近 t_{QED} ($t_{QED}/dt_{FQED} \approx 7$) 的时间步长下尤为明显；光学深度方法则能以最少的函数调用次数创建粒子或光子，并据此确定 QED 速率和生成随机数。

总而言之，所开发的用于生成 QED过程事件的 FQED 事件生成器相比 mAEG 和 AEG 均具有优势：其精度大致相同，但性能提升了一个数量级甚至更多。FQED 的最大优势体现在 QED速率最高时（场幅 $\gtrsim 1000R_f$）且时间步长相当长的情况下。

不过，值得注意的是，在所考虑的场幅下，可能存在限制因素（计算方面或物理方面），使得无法采用较长的时间步长，从而阻碍计算性能的提升。例如，粒子运动或等离子体振荡可能要求（在所采用的数值方案中）极高的时间分辨率；在这种情况下，即使场幅更大，FQED 提供的加速比也不那么显著。

5.4. 两束碰撞的紧聚焦激光束中的 *QED*级联

尽管在前一个示例中，所开发的事件生成器 FQED 展现出了卓越的性能，但需要注意的是，使用这种方法所带来的益处取决于具体问题。参与 QED 过程的粒子系综比例至关重要，电磁场的强度以及所需的时间分辨率也同样重要。这些方面可能彼此关联。例如，如果我们希望增强 QED 过程，可以通过更紧密的激光聚焦来提高激光强度。这会缩小场最强的区域，使其变得更加不均匀。因此，粒子可能更快地逃离强场区域，使得持续参与 QED 过程的粒子系综比例更小。此外，更强的场幅可能需要更短的时间步长。因此，不同因素之间的相互作用可能会削弱 FQED 的部分优势。

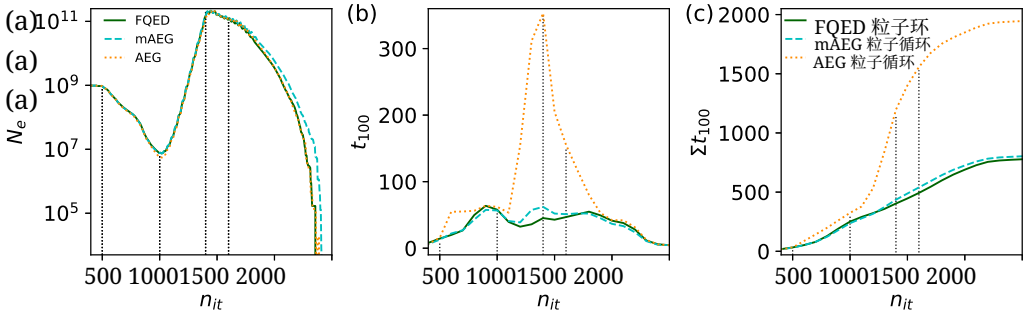


图 9：两束功率为 25 PW、持续时间为 30 fs 的反向传播线偏振紧聚焦激光脉冲照射半径为 1λ 、初始电子密度为 $5n_{cr}$ 的球形靶所得结果。(a) 平面 $y = 0$ （$-0.03\lambda < y < 0.03\lambda$）附近电子 N_e 的数量随迭代次数 n_{it}的变化。(b) 计算 100 次迭代所需的时间 t_{100} 随迭代次数的变化。(c) 截至某次迭代 n_{it} （Σt_{100}）的 t_{100} 累积和。(b) 和 (c) 的图例相同。黑色竖向虚线将激光-等离子体相互作用划分为不同阶段。

本节将探讨一种预期实验的基本方案，该实验利用对向传播的拍瓦级激光脉冲研究 QED级联（例如，参见 [3, 46, 47, 48, 49]）。得益于激光科学与技术的显著进步，此类激光脉冲如今已接近投入运行 [50]。与上一节的示例不同，本节采用更贴近实际的数值设置。两束聚焦角均为 45° 的相同对向传播拍瓦级激光束，照射位于两束激光共同焦点处、半径为 1λ 的球形类氢靶。数值测试中假设靶的电子密度为 $n_e = 5n_{cr}$ 其中 $n_{cr} = 1.38 \times 10^{21}$ 厘米$^{-3}$；激光束功率为 25 PW（共同焦点处的最大场振幅为 $2600R_f$），激光脉冲持续时间为 30 fs，脉冲具有 sin^2 包络。

模拟盒为 $264 \times 296 \times 296$ 个网格单元，沿x、 y 和 z方向的尺寸分别为 $8.2\lambda \times 9.1\lambda \times 9.1\lambda$，其中 $\lambda = 0.9$ μ米。时间步长为 $T/64$，即 $T \approx 3$ 飞秒。模拟时间为 $41T$。使用总场–散射场技术对紧聚焦激光脉冲进行建模时，需要更大的模拟盒和更长的模拟时间 [51]，方法是在靠近完美匹配层（PML）的封闭界面处设置电流 [52]。完美匹配层确保场满足吸收边界条件；粒子和光子也会在模拟盒边界处被吸收。E模激光束沿 x 轴传播，电场的最大分量沿 z轴。种子球体的中心位于坐标原点。初始时，该球体包含 10^7 个宏观电子和类氢宏观离子；这些宏粒子的数量相当于统计权重为1100的粒子。粒子和光子重采样的阈值为 10^7个宏粒子。我们采用了能够更清晰展示不同事件生成器能力的最低充分时空分辨率。这种较粗的分辨率在优化各种激光脉冲或种子靶参数时也可以实际使用，因为此类优化可能需要进行相当多次模拟。

这些测试使用了俄罗斯科学院联合超级计算中心的 2 个双 CPU 节点，配备 Intel Xeon Gold 6248R 处理器。我们使用 2 个 MPI进程运行测试，每个进程包含 96 个线程。

为了展示使用不同 QED 事件生成器进行模拟所得结果的一致性，我们给出了电子数量随时间的演化 N_e，该数量是在平面 $y = 0$ ($-0.03\lambda < y < 0.03\lambda$) 附近的（图9(a)）。相互作用开始时，初始靶在激光脉冲前沿的作用下发生形变并被摧毁。因此， N_e 逐渐减少

次迭代 $500 < n_{it} < 1000$之间。在此阶段，激光场已达到相对论强度，但还不足以引发快速的 QED 过程。然而，AEG 中过多的子循环会增加计算粒子循环阶段所需的时间，相较于 mAEG 和 FQED 的对应时间更长。为便于分析，我们将该时间按每连续 100 次迭代求和，并将这个总时间称为 t_{100}。在此阶段，FQED 和 mAEG 的性能相同（图9(b)）。

在下一阶段，激光场变得足够强，触发了QED级联，并导致 N_e 迅速增长（$1000 < n_{it} < 1400$）。强场振幅和不太短的时间步长使FQED在这一阶段展现出显著的性能：AEG的速度最多慢6倍（mAEG仅稍慢）。

当电子-正电子等离子体密度达到相对论临界密度的量级时，激光与极高密度电子-正电子等离子体相互作用进入非线性自洽机制（$1400 < n_{it} < 1600$）。由于吸收和屏蔽，稠密等离子体内部的场振幅急剧降低，因此使用FQED和mAEG进行粒子环计算的加速比也随之降低（图9（b））。FQED的性能略优于mAEG。

最后一个阶段是由于入射脉冲的场强减弱而导致的等离子体膨胀。在这一阶段，三种QED 事件生成器的性能非常相似，因为 N_e 显著降低（图 9 （a））。值得注意的是，对于mAEG， N_e 与使用AEG和FQED得到的结果有所不同。这种差异可由几个因素解释。首先，N_e（n_{it}）是一个随机值；随着粒子数量减少，该随机值的离散程度会增大。导致 N_e 在 $n_{it} \approx 1000$ （初始球形靶变形并被破坏的末期）出现差异的原因也类似。其次，重采样会使采用不同QED 事件生成器进行模拟时得到不同的宏粒子系综。因此，在模拟盒边界处吸收统计权重不同的宏粒子，会进一步增大 N_e的离散程度。

因此，在全部迭代中有三分之一（$1000 < n_{it} < 1800$）使用 FQED 事件生成器时，粒子循环阶段显著加速，使粒子循环总时间从使用 AEG 时的 1952 s 降至 786 s。图 t_{100} 展示了这一点，具体体现为累积和 9 (c)。mAEG 事件生成器的性能（粒子循环阶段为 811 s）与 FQED 的情况非常接近。这个问题的加速比远低于上一节，原因在于相互作用的特性

。激光脉冲持续时间相当短，因此最大场振幅只在相对较短的时间内达到。最大场集中在相当小的区域内，粒子会相对较快地逃离该区域。此外，生成的高密度电子-正电子等离子体会因吸收而降低场振幅，并阻止强场向内渗透。除粒子循环阶段外，还有其他计算阶段，包括电流沉积、通信和数据输出；无论使用哪种 QED 事件生成器，这些阶段分别约需 900 s、1100 s 和 1100 s。因此，总计算时间所体现的性能差异较小：使用 AEG、mAEG 和 FQED 时，总时间分别为 6912 s、5211 s 和 5049 s。尽管如此，新开发的 QED 事件生成器仍可将这类对 QED 过程计算要求不高的问题的模拟速度提高 30%，而粒子循环阶段的加速比可达 2.5。

6. 结论

本文提出了一种新算法，用于在资源密集型强场量子电动力学数值模拟中考虑量子电动力学效应。与其他方法不同，我们的方案能够避免对时间步长进行过度细分，从而显著加快模拟速度。我们的实现已作为开源 hi-χ 项目的一部分公开，该项目旨在提供一个用于协作开发的 Python 控制工具箱。我们计划进一步优化代码，以更好地利用现代 CPU 的计算资源。

7. 作者贡献声明

VV：概念构思、软件开发、验证、核查、初稿撰写、编辑。**JM**：概念构思、验证、初稿撰写。**AB**：验证、核查、初稿撰写、编辑。**AM**：验证、初稿撰写、编辑。**EE**：概念构思、指导、验证、核查、初稿撰写、编辑。**IM**：概念构思、指导、方法、经费获取、初稿撰写、编辑。

8. 致谢

VV、AB、AM、EE 和 IM 感谢洛巴切夫斯基大学和俄罗斯科学院联合超级计算中心提供计算资源。VV 和 IM 感谢俄罗斯联邦科学和高等教育部的资助，项目编号 FSWR-2023-0034。AB 和 AM 感谢俄罗斯联邦科学和高等教育部的资助，项目编号 FFUF- 2024-0030。

作者谨此感谢 Arkady Gonoskov 所作的有益讨论。

参考文献

[1] A. Di Piazza、C. Muller、K. Z. Hatsagortsyan、C. H. Keitel，极高强度激光与基本量子系统的相互作用，《现代物理评论》84（2012）1177–1228。 doi:10.1103/RevModPhys.84.1177。[2] A. Gonoskov、T. G. Blackburn、M. Marklund、S. S. Bulanov，强电磁场中的带电粒子运动与辐射（2021年）。arXiv:arXiv:2107.02161。[3]E. N. Nerush、I. Y. Kostyukov、A. M. Fedotov、N. B. Narozhny、N. V. Elkina、H. Ruhl，自生成电子-正电子对等离子体中的激光场吸收，《物理评论快报》106（2011年）035001。doi:10.1103/PhysRevLett.106.035001。URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.035001[4] N. V. Elkina、A. M. Fedotov、I. Y. Kostyukov、M. V. Legkov、N. B. Narozhny、E. N. Nerush、H. Ruhl，圆偏振激光场诱导的QED级联，《物理评论专题——加速器与束流》14（5）（2011年5月）。doi:10.1103/physrevstab.14.054401。URL https://doi.org/10.1103/physrevstab.14.054401[5]I. V. Sokolov、N. M. Naumova、J. A. Nees，激光-等离子体相互作用中辐射主导及量子电动力学强场区间的数值模拟，Physics of Plasmas 18（9）（2011年）093109。doi:10.1063/1.3638138。URL http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.3638138

[6]C. Ridgers、J. Kirk、R. Duclous、T. Blackburn、C. Brady、K. Ben- nett、T. Arber、A. Bell，高强度激光–物质相互作用中的伽马射线光子发射及对产生建模，《计算物理学杂志》260（2014年）273–285。doi:https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.12.007。URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999113008061[7] A. Gonoskov、S. Bastrakov、E. Efimenko、A. Ilderton、M. Marklund、I. Meyerov、A. Muraviev、A. Sergeev、I. Surmin、E. Wallin，适用于超强激光场物理的扩展粒子网格方案：综述与发展，《物理评论E》92（2）（2015年）023305。doi:10.1103/PhysRevE.92.023305。URL http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.023305https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.92.023305[8] H. Chang、Z. Xu、W. Yao、Y. Xie、B. Qiaon，通过量子电动力学粒子网格模拟研究极端等离子体动力学，《中国计算物理》34（5）（2017年）526。URL http://www.cjcp.org.cn/EN/Y2017/V34/I5/526[9] J. Derouillat、A. Beck、F. P´erez、T. Vinci、M. Chiaramello、A. Grassi、M. Fl´e、G. Bouchard、I. Plotnikov、N. Aunai、J. Dargent、C. Riconda、M. Grech，Smilei：用于等离子体模拟的协作式、开源、多用途粒子网格代码，《计算机物理通讯》222（2018年）351–373。doi:10.1016/j.cpc.2017.09.024。URL https://doi.org/10.1016/j.cpc.2017.09.024[10] L. Fedeli、N. Za¨ım、A. Sainte-Marie、M. Th´evenet、A. Huebl、A. Myers、J.-L. Vay、H. Vincenti，Picsar-qed：用于在面向百亿亿次级架构的粒子网格代码中模拟强场量子电动力学的蒙特卡罗模块（2021年）。arXiv:arXiv:2110.00256，doi:10.1088/1367-2630/ac4ef1。[11] M. Bussmann、H. Burau、T. E. Cowan、A. Debus、A. Huebl、G. Juckeland、T. Kluge、W. E. Nagel、R. Pausch、F. Schmitt、U. Schramm、J. Schuchart、R. Widera，相对论开尔文-亥姆霍兹不稳定性的辐射特征，载于：国际高性能计算、网络、存储与分析会议论文集，

ACM，2013。 doi:10.1145/2503210.2504564。网址 https://doi.org/10.1145/2503210.2504564[12] R. Bird、N. Tan、S. V. Luedtke、S. L. Harrell、M. Taufer、B. Albright，VPIC 2.0：新一代粒子网格模拟，《IEEE 并行与分布式系统汇刊》33 (4) (2022) 952–963。doi:10.1109/tpds.2021.3084795。网址 https://doi.org/10.1109/tpds.2021.3084795

[13] R. A. Fonseca、L. O. Silva、F. S. Tsung、V. K. Decyk、W. Lu、C. Ren、W. B. Mori、S. Deng、S. Lee、T. Katsouleas、J. C. Adam，OSIRIS：一种用于建模等离子体加速器的三维全相对论粒子网格代码，载于：《计算机科学讲义》，施普林格·柏林·海德堡，2002年，第342–351页。doi:10.1007/3-540-47789-6_36。网址 https://doi.org/10.1007/3-540-47789-6_36

[14]A. Spitkovsky，相对论性无碰撞激波的模拟：激波结构与粒子加速，载于：《AIP会议论文集》，AIP，2005年。 doi:10.1063/1.2141897。网址 https://doi.org/10.1063/1.2141897[15] A.Lifschitz, X.Davoine, E. Lefebvre, J. Faure, C.Rechatin, V.Malka,采用傅里叶分解对激光–等离子体相互作用进行粒子网格建模，《计算物理学杂志》228 (5) (2009) 1803–1814。 doi:10.1016/j.jcp.2008.11.017。网址 https://doi.org/10.1016/j.jcp.2008.11.017[16] S.Bastrakov, R. Donchenko, A.Gonoskov, E.Efimenko, A. Malyshev,I.Meyerov, I. Surmin, 异构集群系统上的粒子网格等离子体模拟，《计算科学杂志》3 (6) (2012) 474–479。 doi:10.1016/j.jocs.2012.08.012。网址 https://doi.org/10.1016/j.jocs.2012.08.012[17] G. Lapenta, J. U. Brackbill, 动力学等离子体模拟中粒子数量的动态选择性控制，《计算物理学杂志》115 (1) (1994) 213–227。 doi:10.1006/jcph.1994.1188。网址 https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1188

[18] S. Rjasanow, W. Wagner，玻尔兹曼方程的随机加权粒子方法，《计算物理学杂志》124 (2) (1996) 243–253。 doi:10.1006/jcph.1996.0057。网址 https://doi.org/10.1006/jcph.1996.0057[19] P. T. Luu, T. T¨uckmantel, A. Pukhov，适用于PIC代码的Voronoi粒子合并算法，《计算机物理通讯》202 (arXiv:1504.00636) (2015年) 165–174，备注：11幅图。 doi:10.1016/j.cpc.2016.01.009。网址 https://cds.cern.ch/record/2006714[20] M. Vranic, T. Grismayer, J. L. Martins, R. A. Fonseca, L. O. Silva，适用于PIC代码的粒子合并算法，《计算机物理通讯》191 (2015年) 65–73。 arXiv:1411.2248, doi:10.1016/j.cpc.2015年.01.020.[21] A. N. Timokhin，中子星磁层中的时变对级联——I. 无中子星表面粒子供给时的极冠级联动力学，《皇家天文学会月报》408 (4) (2010) 2092–2114。 arXiv:http://mnras.oxfordjournals.org/content/408/4/2092.full.pdf+html, doi:10.1111/j.1365-2966.2010.17286.x。网址 http://mnras.oxfordjournals.org/content/408/4/2092.abstract[22] A. Muraviev, A. Bashinov, E. Efimenko, V. Volokitin, I. Meyerov, A. Gonoskov，PIC模拟中的粒子重采样策略，《计算机物理通讯》262 (2021年) 107826。 doi:10.1016/j.cpc.2021.107826。网址 https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.107826[23] A. Gonoskov，用于优化统计表示和PIC模拟的无先验守恒下采样，《计算机物理通讯》271 (2022) 108200。 doi:10.1016/j.cpc.2021.108200。网址 https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108200[24] S. Tokdar, R. Kass，重要性采样：综述。《Wiley跨学科评论：计算统计》2，54–60 (2010)

[25]A. Gonoskov、A. Bashinov、S. Bastrakov、E. Efimenko、A. Il derton、A. Kim、M. Marklund、I. Meyerov、A. Muraviev、A. Sergeev, 《通过激光偶极波中的受控电磁级联产生超亮吉电子伏特光子源》, Physical Review X 7 (4)（2017年10月）。 arXiv:1610.06404, doi:10.1103/PhysRevX.7.041003.[26] E. S. Efimenko、A. V. Bashinov、S. I. Bastrakov、A. A. Gonoskov、A. A. Muraviev、I. B. Meyerov、A. V. Kim、A. M. Sergeev, 《激光控制的真空击穿中的极端等离子体状态》, Scientific Reports 8 (1)（2018年）2329。 doi:10.1038/s41598-018-20745-y。URL http://www.nature.com/articles/s41598-018-20745-yhttps://doi.org/10.1038/s41598-018-20745-y[27] E. S. Efimenko、A. V. Bashinov、A. A. Gonoskov、S. I. Bastrakov、A. A. Muraviev、I. B. Meyerov、A. V. Kim、A. M. Sergeev, 《e^-e^+ 级联中的激光驱动等离子体箍缩》, Physical Review E 99（2019年）031201。 doi:10.1103/PhysRevE.99.031201。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.99.031201[28] V. Volokitin、S. Bastrakov、A. Bashinov、E. Efimenko、A. Muraviev、A. Gonoskov、I. Meyerov, 《QED-PIC代码中事件生成器的优化例程》, Journal of Physics: Conference Series 1640 (1)（2020年）012015。 doi:10.1088/1742-6596/1640/1/012015。URL https://doi.org/10.1088/1742-6596/1640/1/012015[29] R. Nuter、L. Gremillet、E. Lefebvre、A. L´evy、T. Ceccotti、P. Martin, 《粒子网格代码中实现并应用于激光加速碳离子的场电离模型》, Physics of Plasmas 18 (3)（2011年）033107。 doi:10.1063/1.3559494。URL https://doi.org/10.1063/1.3559494[30]R. Duclous、J. G. Kirk、A. R. Bell, 《高强度激光-等离子体相互作用中对产生的蒙特卡罗计算》, Plasma Physics and Controlled Fusion 53 (1)（2011年）015009。 doi:10.1088/0741-3335/53/1/015009。URL http://stacks.iop.org/0741-3335/53/i=1/a=015009?key=crossref.a8a8821fd000c941572db8818a245120

[31] S. Montefioria、M. Tamburini, 《Sfqedtoolkit：用于在粒子网格和蒙特卡罗代码中精确模拟强场QED过程的高性能库》（2023年）。 arXiv:arXiv:2301.07684。[32] A. Nikishov、V. Ritus, 《平面电磁波场与恒定场中的量子过程 I》, 《苏联物理学报》19 (2)（1964年）529–541。[33] V. B. Berestetskii、E. M. Lifshitz、L. P. Pitaevskii, 《量子电动力学：第4卷》, 第4卷, Butterworth-Heinemann, 1982年。[34] A. Nikishov、V. Ritus, 《强电磁波场与恒定场中光子的对产生及电子的光子发射》, 《苏联物理学报》25 (6)（1967年）1135–1142。[35]V. Baier、V. Katkov, 《磁轫致辐射中的量子效应》, Physics Letters A 25 (7)（1967年）492–493。[36] Horner, W. XXI.《通过连续近似求解任意阶数值方程的新方法》。《伦敦皇家学会哲学汇刊》, 308-335（1819年）[37]Guo, Y.、Geng, X.、Ji, L.、Shen, B. 和 Li, R.《在粒子网格蒙特卡罗模拟中通过对量子电动力学表进行Sigmoid采样提高硬光子发射的精度》。《*Physical Review E*》。105, 025309（2022年）[38] V. Anguelov、H. Vankov, 《强磁场中的电磁簇射》, Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics 25 (8)（1999年）1755。 doi:10.1088/0954-3899/25/8/317。[39]A. R. Bell、J. G. Kirk, 《高功率激光器产生大量对的可能性》, 《物理评论快报》101（2008年）200403。doi:10.1103/PhysRevLett.101.200403。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.101.200403[40]A. M. Fedotov、N. B. Narozhny、G. Mourou、G. Korn, 《高功率激光器可达到的强度限制》, 《物理评论快报》105（2010年）080402。 doi:10.1103/PhysRevLett.105.080402。

URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.080402[41]V. F. Bashmakov、E. N. Nerush、I. Y. Kostyukov、A. M. Fedotov、N. B. Narozhny，激光偏振对量子电动力学级联的影响，《等离子体物理》21 (1) (2014) 013105。arXiv:https://doi.org/10.1063/1.4861863, doi:10.1063/1.4861863。URL https://doi.org/10.1063/1.4861863[42] I. Y. Kostyukov、E. N. Nerush，超高强度激光-箔相互作用中正电子的产生与动力学，《等离子体物理》23 (9) (2016) 093119。arXiv:https://doi.org/10.1063/1.4962567, doi:10.1063/1.4962567。URL https://doi.org/10.1063/1.4962567[43] T. Grismayer、M. Vranic、J. L. Martins、R. A. Fonseca、L. O. Silva，对向传播激光脉冲中的种子QED级联，Physical Review E 95 (2017) 023210。 doi:10.1103/PhysRevE.95.023210。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.95.023210[44] A. V. Bashinov、P. Kumar、A. V. Kim，圆偏振驻波中QED级联时的粒子动力学与空间e^-e^+密度结构，《物理评论A》95 (2017) 042127。doi:10.1103/PhysRevA.95.042127。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.042127[45] C. Slade-Lowther、D. Del Sorbo、C. P. Ridgers，识别高强度激光-物质相互作用中的电子–正电子级联区域，《新物理学杂志》21 (1) (2019) 013028。 doi:10.1088/1367-2630/aafa39。URL https://dx.doi.org/10.1088/1367-2630/aafa39[46] A. A. Mironov、A. M. Fedotov、N. B. Narozhny，超相对论电子与强激光场斜向碰撞中量子电动力学级联的产生，《量子电子学》46 (4) (2016) 305。 doi:10.1070/QEL16057。URL https://dx.doi.org/10.1070/QEL16057[47] I. I. Artemenko、I. Y. Kostyukov，惰性气体中的电离诱导激光驱动QED级联，《物理评论A》96 (2017) 032106。 doi:10.1103/

PhysRevA.96.032106。URL https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.96.032106[48] M. Tamburini、A. Di Piazza、C. H. Keitel，种子QED级联的激光脉冲形状控制，《Sci. Rep.》7 (5694) (2017) 1–8。URL https://doi.org/10.1038/s41598-017-05891-z[49] M. Jirka、O. Klimo、M. Vranic、S. Weber、G. Korn，采用10拍瓦级激光器的QED级联，《Sci. Rep.》7 (15302) (2017) 1–7。URL https://doi.org/10.1038/s41598-017-15747-1[50] C. Radier、O. Chalus、M. Charbonneau、S. Thambirajah、G. Deschamps、S. David、J. Barbe、E. Etter、G. Matras、S. Ricaud 等，eli-np的10拍瓦峰值功率飞秒激光脉冲，High Power Laser Sci. Eng. 10 (2022) e21。doi:10.1017/hpl.2022.11。[51] A. Taflove、S. Hagness，《计算电动力学：有限差分时域法》，Artech House, Inc.，波士顿，2005年。[52] J.-P. Berenger，用于吸收电磁波的完美匹配层，J. Comput. Phys. 114 (2) (1994) 185–200。doi:https://doi.org/10.1006/jcph.1994.1159。URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999184711594[53] Hi-Chi: FastQED(2022)。URL https://github.com/hi-chi/pyHiChi/tree/FastQED

[54] R.M.Corless、G.H.Gonnet、D.E. Hare、D.J.Jeffrey、D.E. Knuth，《关于 Lambert W 函数》，《计算数学进展》5 (1) (1996) 329–359。

附录 A. 康普顿率近似

非线性康普顿散射的部分速率 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}\varepsilon$ 由公式 3 给出。为了近似总速率函数 $W(\chi)$，我们将其视为两个函数之和：

$$W(\chi) = C_1(\chi) + C_2(\chi), \tag{A.1}$$

其中 C_1 和 C_2 分别对应于（公式3）中包含第一和第二个同步辐射函数的项。我们分别使用局部趋势近似对每一项进行近似，并通过多项式因子进行优化，以近似去趋势函数：

$$C_i(\chi) \approx Polynom(f(\chi)) \cdot Trend(C_i(\chi)) \tag{A.2}$$

这种方法会提取初始函数的主要趋势，通常能使近似多项式的形式更简单。根据康普顿率的渐近形式，选取了其主要趋势：

$$W_\gamma(\chi) = \frac{\alpha}{\tau_C}\frac{1}{\gamma}\begin{cases} \frac{5}{2\sqrt{3}}\chi & \approx 1.44\chi, & \text{if } \chi \ll 1 \\ \frac{14\Gamma(\frac{2}{3})}{9\sqrt[3]{3}}\chi^{2/3} & \approx 1.46\chi^{2/3}, & \text{if } \chi \gg 1 \end{cases}, \tag{A.3}$$

函数 $C_1(\chi)$ 和 $C_2(\chi)$ 的基本信息分别列于表 A.1和 A.2。函数的精确形式（包括多项式系数）可在开源代码 hi-χ [53] 中找到。

表 A.1：康普顿率中 $C_1(\chi)$ 项的近似详情。

χ 区间	$C_1(\chi)$ 趋势	$f(\chi)$	附加信息关于近似 of $C_1(\chi)$
$\frac{2}{3\chi} < 10^{-12}$	$\sqrt[3]{\frac{2}{3\chi}}$	$\frac{2}{3\chi}$	一阶多项式
$10^{-12} \leqslant \frac{2}{3\chi} < 10^{-3}$	1	$\sqrt[6]{\frac{2}{3\chi}}$	六阶多项式
$10^{-3} \leqslant \frac{2}{3\chi} < 1$	1	$\sqrt[3]{\frac{2}{3\chi}}$	有理多项式 $\frac{P(f(\chi))}{Q(f(\chi))}$，分别为六阶和四阶
$1 \leqslant \frac{2}{3\chi} < 4$	$\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3\chi}\right)^2}$	$\frac{2}{3\chi}$	六阶多项式
$4 \leqslant \frac{2}{3\chi} < 100$	1	$\frac{2}{3\chi}$	六阶多项式
$\frac{2}{3\chi} \geqslant 100$	1	$\frac{3\chi}{2}$	四次多项式

附录 B. 康普顿逆累积分布函数近似

如第3.3.2节前文所述，在主域中采用基于网格上的预计算并列表化的值进行线性插值的方法。

表 A.2：康普顿率中 $C_2(\chi)$ 项近似的详细信息。

χ 区间	$C_2(\chi)$ 趋势	$f(\chi)$	附加信息关于近似 of $C_2(\chi)$
$\frac{2}{3\chi} < 10^{-3}$	1	$\sqrt[3]{\frac{2}{3\chi}}$	三次多项式
$10^{-3} \leqslant \frac{2}{3\chi} < 4$	$\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3\chi}\right)^7}$; $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3\chi}\right)^{11}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{3\chi}}$; $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3\chi}\right)^5}$; $\frac{2}{3\chi}$; $\left(\frac{2}{3\chi}\right)^2$	$\left(\frac{2}{3\chi}\right)^2$	$C_2(\chi)$ 视为一个和由 6 个具有各自趋势的函数组成，这些函数分别进行近似。对于每一项，其次数的该多项式为 10。
$4 \leqslant \frac{2}{3\chi} < 100$	1	$\sqrt[4]{\frac{2}{3\chi}}$	有理多项式 $\frac{P(f(\chi))}{Q(f(\chi))}$，分别为 10 次和 2 次
$\frac{2}{3\chi} \geqslant 100$	1	$\frac{3\chi}{2}$	七次多项式

在 ε 的值较小时，累积分布函数的标度关系为

$$\mathrm{cdf}_\gamma(\chi, \varepsilon) = \frac{1}{W(\chi)} \frac{2 \cdot 3^{2/3}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \varepsilon^{1/3} \chi^{2/3}. \tag{B.1}$$

因此， $r_2(r_2 < 0.05)$ 的下界处的康普顿逆累积分布函数可用以下渐近形式近似：

$$\mathrm{cdf}_\gamma^{-1}(\chi, r_2) = D(\chi) \cdot \sqrt[3]{r_2} \tag{B.2}$$

系数 $D(\chi)$ 根据最接近网格节点处康普顿逆累积分布函数的连续性条件计算得出。

附录 C。布莱特–惠勒速率近似

为了近似函数 $W_p(\chi_\gamma)$，我们将其视为两个函数之和：

$$W_p(\chi_\gamma) = B_1(\chi_\gamma) + B_2(\chi_\gamma), \tag{C.1}$$

分别对应于式（6）中包含第一和第二个同步辐射函数的项。然后，使用与附录 A：相同的方法对每一项分别进行近似

$$B_i(\chi_\gamma) \approx Polynom(f(\chi_\gamma)) \cdot Trend(B_i(\chi_\gamma)) \tag{C.2}$$

布赖特–惠勒速率的主要趋势是根据其渐近形式选定的：

$$W_p(\chi_\gamma) = \frac{\alpha}{\tau_C}\frac{mc^2}{\hbar\omega}\begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{16\sqrt{2}}\chi_\gamma \mathrm{e}^{-8/3\chi_\gamma} & \approx & 0.23\chi_\gamma \mathrm{e}^{-8/3\chi_\gamma}, & \text{if } \chi_\gamma \ll 1 \\ \frac{20\pi^2}{7\sqrt[3]{3}\Gamma(\frac{1}{3})^4}\chi_\gamma^{2/3} & \approx & 0.38\chi_\gamma^{2/3}, & \text{if } \chi_\gamma \gg 1 \end{cases}, \tag{C.3}$$

函数 $B_1(\chi_\gamma)$ 和 $B_2(\chi_\gamma)$ 的基本信息分别见表 C.3和 C.4。

表 C.3：布赖特–惠勒速率中 $B_1(\chi_\gamma)$ 项的近似细节。

χ_γ 区间	$B_1(\chi_\gamma)$ 趋势	$f(\chi_\gamma)$	附加信息关于近似 of $B_1(\chi_\gamma)$
$\frac{8}{3\chi_\gamma} < 10^{-6}$	1	$\sqrt[3]{\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	四次多项式
$10^{-6} \leqslant \frac{8}{3\chi_\gamma} < 10^{-1}$	1	$\sqrt[3]{\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	八次多项式
$10^{-1} \leqslant \frac{8}{3\chi_\gamma} < 1$	$e^{-\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	$\sqrt[3]{\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	七次多项式
$1 \leqslant \frac{8}{3\chi_\gamma} < 4$	$e^{-\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	$\sqrt[3]{\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	七次多项式
$4 \leqslant \frac{8}{3\chi_\gamma} < 200$	$e^{-\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	$\frac{3\chi_\gamma}{8}$	七次多项式
$\frac{8}{3\chi_\gamma} \geqslant 200$	$e^{-\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	1	无多项式

附录 D. 布赖特–惠勒逆累积分布函数近似

如第3.4.2节所述，在主域中采用基于网格上预先计算并列表化的数值进行线性插值。

在 ε_e 较小时，累积分布函数的标度关系如下：

$$\mathrm{cdf}_p(\chi_\gamma, \varepsilon_e) = \frac{1}{W(\chi_\gamma)}\frac{3}{8\sqrt{\pi}}(\chi_\gamma\varepsilon_e)^{3/2}\exp(-\frac{2}{3\chi_\gamma\varepsilon_e}) \tag{D.1}$$

表 C.4：布赖特–惠勒速率中 $B_2(\chi_\gamma)$ 项的近似详情。

χ_γ 区间	$B_2(\chi_\gamma)$ 趋势	$f(\chi_\gamma)$	附加信息关于近似 of $B_2(\chi_\gamma)$
$\frac{2}{3\chi_\gamma} < 2^{-6}$	$\left(\frac{3\chi_\gamma}{2}\right)^4$	$\sqrt[3]{\frac{3\chi_\gamma}{2}}$	五次多项式
$2^{-6} \leqslant \frac{2}{3\chi_\gamma} < 2^{-3}$	$e^{-\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	$\sqrt[3]{\frac{2}{3\chi_\gamma}}$; $\sqrt[6]{\frac{3\chi_\gamma}{2}}$	系数 $Polynom(f(\chi_\gamma))$ 在C.2为
$2^{-3} \leqslant \frac{2}{3\chi_\gamma} < 2^{-1}$	$e^{-\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	$\sqrt[3]{\frac{2}{3\chi_\gamma}}$; $\sqrt[4]{\frac{3\chi_\gamma}{2}}$	计算为两个多项式的和 7次多项式
$2^{-1} \leqslant \frac{2}{3\chi_\gamma} < 1$	$e^{-\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	$\sqrt[6]{\frac{2}{3\chi_\gamma}}$; $\sqrt[4]{\frac{3\chi_\gamma}{2}}$	
$1 \leqslant \frac{2}{3\chi_\gamma} < 8$	$e^{-\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	$\sqrt[6]{\frac{2}{3\chi_\gamma}}$	七次多项式
$8 \leqslant \frac{2}{3\chi_\gamma} < 50$	$e^{-\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	$\frac{3\chi_\gamma}{2}$	七次多项式
$\frac{2}{3\chi} \geqslant 50$	$e^{-\frac{8}{3\chi_\gamma}}$	$\frac{3\chi_\gamma}{2}$	七次多项式

因此，在 r_2 ($r_2 < 10^{-5}$) 的下界处，布赖特–惠勒逆累积分布函数可用以下渐近形式近似：

$$\mathrm{cdf}_p^{-1}(\chi_\gamma, r_2) = L(\chi_\gamma) \cdot \frac{\chi_\gamma}{LambertW\left[M(\chi_\gamma) \cdot \left(\frac{\chi_\gamma}{r_2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]}, \tag{D.2}$$

其中使用了 $LambertW$ 函数 [54] 。系数 L 和 M根据最近网格节点处的函数连续性条件计算得出。