arXiv:2303.00660v2 [cs.GT] 2 Mar 2023

计算能够通过投票的最佳政策

Andrei Constantinescu 苏
黎世联邦理工学院 瑞士苏黎
世 aconstantine
@ethz.ch

Roger Wattenhofer 苏黎
世联邦理工学院 瑞士苏黎
世
wattenhofer@ethz.ch

摘要

一个由 n 名投票者组成的议会需要对 t 个相互独立的二元议题作出决定。每位选民对这些议题都有自己的意见，这些意见由一个 t位向量表示。安斯库姆悖论表明，在每个议题上都遵循多数意见的政策，可能无法通过同一批 n 名投票者的投票；也就是说，相较于认为自己得到代表的投票者，可能有更多投票者觉得自己未被这种多数驱动的政策代表。一个自然的解决方案是制定一项与多数政策略有偏离、但不再受到选民更多反对而非支持的政策。我们通过一种依赖潜在政策空间中结构保持对称性的新概率论证，证明汉明距离多数政策至多为 $\lfloor (t-1)/2 \rfloor$ 的政策总能得到保证。除非选民在所有议题的两个选项之间恰好平分，否则我们实际上还证明，在这一距离界内存在一项能够严格赢得投票的政策。我们的方法还导出了一个确定性的多项式时间算法，用于寻找具有上述保证的政策，从而解决了先前工作提出的一个未解决问题。对于奇数 t，除上述病态情形外，我们还给出了一种更简单、更高效的算法，该算法以期望多项式时间运行，并具有相同的保证。我们进一步证明，检验是否能够达到严格小于 $\lfloor (t-1)/2 \rfloor$ 的距离是NP困难的，而检验是否能够达到至多某个输入 k 则关于若干个自然参数是固定参数可处理的。

关键词

计算社会选择；判断聚合；多项公投；认可选票；计算复杂性；概率方法；随机化算法；安斯库姆悖论

ACM 引用格式：
Andrei Constantinescu 和 Roger Wattenhofer。2023。《计算经投票后仍能存续的最佳政策》。载于 第*22*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集（*AAMAS 2023*），英国伦敦，*2023*年*5*月*29*日至*6*月*2*日，国际自主代理与多智能体系统基金会，11页。

1 引言

很久很久以前，有一个国家由一位贤明的女王统治。女王总会以是非题的形式，询问公民对国内当前各项议题的意见。随后，她会根据每项议题上的多数意见制定政策。有些民众会对政策感到不满，因为他们反对该政策的程度超过了赞同的程度。只要这些不满的公民仍是少数，女王就不会介意。

第*22*届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集（*AAMAS 2023*），*A. Ricci*、*W. Yeoh*、*N. Agmon*、*B. An*（编），*2023*年*5*月*29*日至*6*月*2*日，英国伦敦。 © 2023 国际自主代理与多智能体系统基金会（www.ifaamas.org）。保留所有权利。

	i_1	i_2	i_3
v_1	1	0	0
v_2	0	1	0
v_3	0	0	1
v_4	1	1	1
v_5	1	1	1

图1：安斯库姆悖论。五位投票者（行）表达了他们对三个同等重要议题（列）的意见。对于每个议题，意见1 都是多数意见，因此自然会提出政策111。然而，政策111无法在投票中通过，因为前三位投票者会投票反对该政策。示例源自 [3]。

然而，有一天，女王注意到，按普遍意见制定的政策无法获得多数人的支持（例如图 1）。女王能否制定出一项能够获得多数人支持，同时又尽可能尊重民众意见的政策?

我们认为，这个问题与各种常见情境相关。例如，董事会可能会绘制一张完整的矩阵，列出每位董事对当前每项议题的看法。他们希望共同决定最佳政策。这项政策应尽可能体现每项议题上的多数意见，同时也应得到整个董事会的认可，即反对票不能多于支持票。

更形式化地说，我们使用 t位向量来表示政策提案和投票者的偏好，这种向量也称为认可选票 [21]。如果投票者的向量与政策向量之间的汉明距离小于 $t/2$，该投票者就支持这项提案。如果距离大于 $t/2$，该投票者就反对这项提案。如果 t 是偶数，且距离恰好为 $t/2$，该投票者就弃权。逐议题多数提案通过对每项议题分别采取多数意见来形成，平票时任意决定。图1所示的安斯库姆悖论 [2], 表明，即使没有弃权，且每项议题的某一选项都获得了严格多数支持，逐议题多数提案仍可能无法通过最终投票，因此这个问题并非平凡，值得研究。

我们的贡献。我们给出一个概率证明，证明始终存在一项与逐议题多数的距离至多为 $\lfloor (t-1)/2 \rfloor$ 的政策，且反对它的人数不超过支持它的人数。正如 [14] 所示，这一界是紧的。为此，我们设计了两个思想实验：一个的期望值很容易计算，但无法直接用于证明我们的论断；另一个的期望值看似难以计算，但只要其期望非负，就能轻易推出结论。通过观察政策空间中的逐选民对称性，我们证明这两个实验实际上具有相同的期望值，从而得出

上述结果。此外，除非所有议题上的选民都在两个选项之间平分，否则我们实际上可以保证对该提案的支持票严格多于反对票。

随后，我们通过对论证进行去随机化，证明可以在多项式时间内确定性地计算出满足我们保证的政策。此外，对于奇数 t 情形，除上述病态情形外，应用马尔可夫不等式可知，更简单且更高效的算法能够在期望多项式时间内运行：分轮次进行，每轮抽取并检查政策 $(p_k)_{t/2<k\le t}$，使其在恰好 k 个议题上与逐议题多数一致，并从具有这一性质的提案中均匀地随机抽取。

此外，我们还研究了一个问题：在投票中胜出的政策与逐议题多数之间能够达到的最小距离是多少。我们证明，即使投票者人数和议题数均为奇数，判断距离是否至多为 $\lfloor (t-1)/2 \rfloor - 1$ 仍是 NP 困难的。我们还从参数化视角研究这一问题，并证明对于三个自然参数，该问题是可处理的。

附录。正文之后，我们提供了一个附加部分，说明在某种意义上，投票后得以保留的政策空间可能高度不连通。

1.1 相关工作

Alon 等人 [1]从参数化复杂性的角度研究了如何找到一项获得多数投票者支持的政策。然而，在他们的设定中，当且仅当选民赞成该政策所赞成的议题中的多数议题时，该选民才会支持这项政策。我们以最小化与逐议题多数的距离为优化目标，这一点也不属于他们的建模范畴。他们关于选民支持哪些提案的模型，是 Fishburn 和 Pekeč [12, 13]提出并首次从计算角度进行研究的“阈值函数”的一个特例。当逐议题多数落败时，Laffond 和 Lainé [18], 研究了如何寻找妥协结果，并提出了多数妥协和赞成妥协的概念。后者可视为我们优化目标的对偶：他们优化的是支持某一结果的投票者数量，而不是优化与逐议题多数意见一致的议题数量。Elkind 等人 [9] 在一个与我们类似的模型中，对联盟形成进行了算法研究：投票者支持那些比给定“现状”政策更接近其向量的政策。

Lang 和 Xia [20] 从计算角度综述了组合域中的投票问题，其中可行结果集合是某个笛卡尔积的子集。在我们的案例中，这个域是超立方体 $\{0,1\}^t$. 当议题彼此对称且独立时（如我们的案例），这种设定称为多项公投。迄今为止，对多项公投的计算研究主要关注游说问题：自利的第三方试图通过更改选票来操纵结果 [4–6]。在 [7], Conitzer 等人研究了一种设定：议题依次逐一投票；他们表明，会议主席要通过选择议题的呈现顺序来影响结果，在计算上颇具难度。

判断聚合 [11] 是多项公投在非独立议题上的推广，其计算研究近来已成为一个活跃的研究领域。斯莱特规则是判断聚合中一个著名的聚合规则，其特点与我们的研究主题相似：它会计算出与逐议题多数最接近且逻辑上保持一致的提案。然而，对于相互独立的议题，它会退化为逐议题多数；而在我们的情形中，我们还要求所选提案获得的支持多于反对票，这是一项与斯莱特式规则不相容的全局约束。多席位选举也常以认可选票为基础进行研究，并由此产生了许多重要的计算结果 [16], 。但多席位选举与多项公投有着根本区别：在多席位选举中，每个议题都对应一个“否定议题”，而候选人并没有可供否定的概念。

安斯库姆悖论有多种不同的解读；例如，可以这样理解图1：一个政府由三个席位（列）组成，两个政党（0 和 1）展开竞争。每位选民（行）都对每个席位有偏好，表明他们更喜欢哪一政党的提名人。在直接民主制下，投票者对每个席位分别投票，结果政党 1 的候选人赢得所有席位。然而，在为单一政党组成的政府投票时（代议制民主），偏好政党 0 而非政党 1 的投票者更多，因此政党 0 赢得所有席位。两种民主形式所产生的结果之间的这一差异，通过安斯库姆悖论及其他相关的复合多数悖论 [22]得以说明。

大量研究旨在理解安斯库姆悖论及其推广形式奥斯特罗戈尔斯基悖论 [23], 在何种条件下会出现，以及如何减轻其影响。Wagner [24]提出了“ 3 4 [25] 1– / 规 $\alpha\beta$ 则”（后来又提出了推广后的“规则”），并指出悖论需要存在许多有争议的议题。具体而言，如果逐议题多数优势幅度的平均值至少为 3/4，那么安斯库姆悖论就不会出现。这也是某些高风险投票（如宪法修正案）需要获得 3/4 多数才能通过的原因之一。类似地，Laffond 和 Lainé [19]指出，悖论需要一个非凝聚的投票者群体。也就是说，如果任意两位投票者的意见在少于 $\sqrt{2}-1 \approx 41.4\%$ 的议题上有所不同，那么悖论同样不会出现（此外，降低这一比例可进一步提高与逐议题多数意见一致的投票者比例下限）。Deb 和 Kelsey [8] 从投票者人数与议题数量的组合角度，给出了安斯库姆悖论出现的充要条件：除非其中一个数量较小，否则悖论总是可能出现；他们还研究了相关推广形式。Gehrlein 和 Merlin [15] 研究了悖论出现的概率。Laffond 和 Lainé [17]定义了单次切换偏好的范围；在一个较弱的丰富性假设下，这是一个能够避免奥斯特罗戈尔斯基悖论的最大范围。本质上，这一约束类似于认可投票的极值区间 范围 [10],, 指出可以对议题进行排序并可能将部分议题取反，使得每位投票者赞成的议题要么构成一个前缀，要么构成一个后缀。

Fritsch 和 Wattenhofer [14]以非构造性方式证明，在我们的设定中，始终存在一个遭到至多半数选民反对的提案，其距离为 $\lfloor (t-1)/2 \rfloor$. 如果没有弃权（奇数t），这也意味着反对票不会超过支持票；但存在弃权时，一个棘手的情况是：除三名选民外，其他人全部弃权，而这三人中有两人反对我们的提案。我们通过处理 t的奇偶两种情况，改进了他们的结果。不过，我们的主要不同之处在于，提供了以多项式时间计算此类政策的方法。

2 预备知识

对于任意非负整数 m，记 $[m]=\{1,2,\ldots,m\}$ 和 $\mathbb{B}=\{0,1\}$。一个由 n 名选民组成的议会，选民编号从 1 到 n，对 t 个相互独立的二元议题（也称主题或动议）表达偏好，这些议题编号从 1 到 t，合称为议程。每位选民 i 对各议题的意见用向量（选票）$v_i \in \mathbb{B}^t$ 表示，其中 $v_{i,j}$ 当且仅当选民 i 赞成动议 j 时为 1。矩阵 $P=(v_{i,j})_{i\in[n],j\in[t]}$ 称为投票者判断矩阵，或偏好剖面／矩阵。记 d_H: $\mathbb{B}^t\times\mathbb{B}^t\to\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 为汉明距离 $d_H(x,y)=\sum_{j=1}^{t}|x_j-y_j|$。政策（也称政策提案或结果）是一个元素 $p\in\mathbb{B}^t$；我们用 $\overline{p}$ 表示相反政策；也就是说，对于所有议题 j，$\overline{p}_j+p_j=1$。若 $d_H(v_i,p)\leq t/2$，则选民 i 支持（赞成）p；若 $d_H(v_i,p)>t/2$，则反对（不赞成）p；若对于 p，$d_H(v_i,p)=t/2$，则无偏好（弃权）。记 $b_{v_i,p}=t-2d_H(v_i,p)$，表示 v_i 与 p 相同的议题数减去 v_i 与 p 不同的议题数。那么，当 $b_{v_i,p}>0$ 时，i 赞成 p；当 $b_{v_i,p}<0$ 时，不赞成 p；当 $b_{v_i,p}=0$ 时，则无偏好。

对于偏好剖面 P 和提案 p，我们将 p 在 P 下的赞成票与反对票之差定义为支持 p 的选民人数 $a_{p,P}$ 减去反对 p 的选民人数 $d_{p,P}$，即 $b_{p,P}=a_{p,P}-d_{p,P}$。因此，如果 $b_{p,P}$ 为正、零或负，我们就说政策 p 在投票中获胜、打平或落败；p 分别是获胜、打平或失败提案。请注意，提案 p 只要没有落败，就能在投票中存续。如果 $b_{p,P}=n$，则提案 p 为全票通过。为了后续使用，任何选票（即投票或政策）$p\in\mathbb{B}^t$ 都可以视为函数 $p\colon[t]\to\mathbb{B}$，也可以视为一个集合 $p\subseteq[t]$，其中包含获赞成的议题；令 $|p|$ 表示集合基数，$b_p=|p|-(t-|p|)=2|p|-t$ 表示 p 中获赞成议题与不赞成议题数量之差

给定一个偏好剖面 P，逐议题多数政策（简称 IWM）是这样一种政策 $p\in\mathbb{B}^t$：当超过 $n/2$ 的投票者支持动议 j 时，p_j 为 1；当少于 $n/2$ 的投票者支持该动议时，p_j 为 0；如果平票，则 p_j 可以取任意值。就我们的目的而言，在票数相等时，我们任意选择值 1。注意，对于任何使 IWM 在某些议题上返回 0 的投票档案 P，都可以通过对这些议题的 1 和 0 进行翻转，将其转换为逻辑等价的投票档案 P′。这不会改变选举格局，因为我们只是在对某些议题进行逻辑否定，且所有议题彼此独立；投票者自然应通过否定其原始答案来作答。下文中，不失一般性地，我们假设所考虑的所有投票档案的 IWM 结果均为全 1。

我们研究寻找一个不败提案 p 的问题，该提案使其与 IWM 的距离最小；也就是说，使 $|p|$ 最大化。更正式地，令 Win-Or-Tie-Prop 为如下判定问题：“给定一个 IWM 为全 1 的偏好剖面 P 以及一个数 k，是否存在一个不败提案 p，使得 $|p|\geq k$？”类似地，定义 k-Win-Or-Tie-Prop，其中 k 的值是 t 的固定整数函数；例如，$(\lfloor t/2\rfloor+2)$-Win-Or-Tie-Prop。此外，我们定义类似的问题 Una-Win-Prop，其中所寻找的提案 p 必须获得一致通过；也就是说，必须得到所有人的支持；以及类似的 k-Una-Win-Prop。

对于奇数 t，Fritsch 和 Wattenhofer [14] 证明，$(\lfloor t/2\rfloor+1)$-Win-Or-Tie-Prop 的答案始终为是，并且他们证明这一界对所有 t 都是紧的：

引理1。考虑投票档案 $\mathcal{P}_t$，其中有 $n=2t-1$ 名投票者，且 $v_i=\{i\}$ 对于 $i\leq t$ 以及对于 $v_i=[t]$ $i>t$。那么，一个提案 p 具有 $|p|\geq\lfloor t/2\rfloor+2$ 满足 $b_{p,\mathcal{P}_t}=-1$. 投票档案 $\mathcal{P}_3$ 如图*1*所示。

证明概要。最后的 $t-1$ 名 p 选民总是赞成，而前面的 t 名选民总是不赞成 p，因此 $b_{p,\mathcal{P}_t}=(t-1)-t=-1$。□

3 寻找不败提案是困难的

本节将证明 $(\lfloor t/2\rfloor+2)$-Win-Or-Tie-Prop 是 NP 困难的，并由此推论 k-Win-Or-Tie-Prop 对于 $k\geq(\lfloor t/2\rfloor+2)$，除非 k 亚多项式级接近 t。随后我们将证明，针对三个自然参数，Win-Or-Tie-Prop 是可处理的。

定理 2。对于任意函数 $k\geq\lfloor t/2\rfloor+2$，存在一个从 k-Una-Win-Prop 到 k-Win-Or-Tie-Prop 的多项式时间 *Karp* 归约。

证明。考虑一个 $n\times t$ 实例 P，它属于 k-Una-Win-Prop。我们可以在多项式时间内，从 P 构造出一个新实例 P′，方法是将引理1中定义的构件 $G=P_t$ 垂直连接 n 个副本。形式化地说，$P'=P\mid G_1\mid\ldots\mid G_n$，其中 $\mid$ 表示偏好矩阵的垂直连接，而 $(G_i)_{i\in[n]}$ 是 G 的副本。为证明正确性，设 p 是一个提案，满足 $|p|\geq k$。提案 p 在 P 中全票通过，当且仅当 $b_{p,\mathcal{P}}=n$，或者等价地，$b_{p,\mathcal{P}}\geq n$。两边同时加上 $n\,b_{p,G}$ 后，这等价于 $b_{p,\mathcal{P}}+n\,b_{p,G}\geq 0$，这与 $b_{p,\mathcal{P}'}$ 相同，根据引理 1。关键是要注意，对于 P′，IWM 也全部为 1，因为 G 的每一列中 1 的个数都多于 0 的个数。□

定理 3. $(\lfloor t/2\rfloor+2)$-Una-Win-Prop 即使限定在奇数 n、奇数 t 的情形或偶数 n、奇数 t 的情形下，仍是 *NP* 困难。

证明。在继续之前，我们先提出几点观察，并约定一些便于使用的记号。具体而言，我们将投票 v_i 视为集合 $v_i\subseteq[t]$，并将潜在提案 p 视为 $\{\pm1\}^t$ 中的向量，对应关系为 $0\mapsto-1$，$1\mapsto 1$。在这些假设下，当且仅当 v 时，投票为 p 的选民才赞成 $\sum_{i\in v}p_i-\sum_{i\notin v}p_i>0$ 该提案。注意，选民所导出的可能不等式，其形式为 $\sum_{i\in v}p_i-\sum_{i\notin v}p_i>0$，与形式为 $\sum_i c_ip_i>0$ 的不等式一一对应，其中 $c\in\{\pm1\}^t$。

准备就绪后，我们仿照 [9]，从独立集问题进行归约。假设给定一个图 $G=(V,E)$，其中有 $|V|=n$ 个顶点和 $|E|=m$ 条边，以及一个数 k。我们将说明如何在多项式时间内构造一个投票档案 P，使得 G 含有大小至少为 k 的独立集，当且仅当存在一个提案 p，满足 $|p|\geq\lfloor t/2\rfloor+2$。

对于议程，我们为 V 的每个顶点引入两个议题，即 $x_1,x'_1,x_2,x'_2,\ldots,x_n,x'_n$。此外，对于稍后选定的某个 ℓ，我们还引入议题 $a_1,a'_1,a_2,a'_2,\ldots,a_\ell,a'_\ell$。最后，我们再引入一个额外议题 a_0。为方便起见，令 $A=\{a_0,a_1,a'_1,a_2,a'_2,\ldots,a_\ell,a'_\ell\}$。

要添加为 P 的行的投票，将采用上文介绍的线性不等式记号表示。我们向 P 中添加以下不等式：

集合 1。我们要求对所有 $\alpha\in A$，都有 $\alpha=1$ 成立。为此，将 A 任意写成 $A=\{\alpha\}\cup A_0\cup A_1$，其中 $|A_0|=|A_1|=\ell$

并添加与以下不等式对应的投票：

$$\alpha + \sum_{y\in A_0} y - \sum_{y\in A_1} y + \sum_{i\in[n]} (x_i - x'_i) > 0 \tag{1}$$

$$\alpha - \sum_{y\in A_0} y + \sum_{y\in A_1} y - \sum_{i\in[n]} (x_i - x'_i) > 0 \tag{2}$$

注意，将这两个不等式相加得到 $2\alpha > 0$，当且仅当 $\alpha = 1$时成立。然而，仅有对所有 $\alpha \in A$ 满足 $\alpha = 1$，目前还不足以保证**集合 1** 中的所有不等式都成立。

集合 2。我们强制要求对所有 $i \in [n]$，都有 $x_i = x_{\bar{\imath}}$。为此，我们添加与以下不等式对应的投票：

$$x_i - x'_i + \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} (x_j - x'_j) + a_0 + \sum_{j\in[\ell]} (a_j - a'_j) > 0 \tag{3}$$

$$x_i - x'_i - \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} (x_j - x'_j) + a_0 - \sum_{j\in[\ell]} (a_j - a'_j) > 0 \tag{4}$$

注意，将两个不等式相加可得 $2(x_i - x_{\bar{\imath}} + a_0) > 0$，这等价于 $x_i - x'_i + a_0 > 0$，也就是 $x_i - x'_i \geq 0$，因为在存在**集合 1**的情况下，$a_0 = 1$成立。通过在 (3) 和 (4) 中改变 x_i和 $x_{\bar{\imath}}$的符号，我们可以得到类似的不等式 (5) 和 (6)，从而强制要求 $x'_i - x_i \geq 0$，我们也将其添加到 P 中：

$$x'_i - x_i + \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} (x_j - x'_j) + a_0 + \sum_{j\in[\ell]} (a_j - a'_j) > 0 \tag{5}$$

$$x'_i - x_i - \sum_{j\in[n]\setminus\{i\}} (x_j - x'_j) + a_0 - \sum_{j\in[\ell]} (a_j - a'_j) > 0 \tag{6}$$

总而言之，我们得到 $x_i = x_{\bar{\imath}}$。现在，假设**集合 1** 和**集合 2** 都已添加，我们可以看到，正如我们所证明的，它们不仅蕴含 $\alpha = 1, \forall\alpha \in A$和 $x_i = x_{\bar{\imath}}, \forall i \in [n]$，反过来也成立。具体而言，将 $\alpha = 1, \forall\alpha \in A$和$x_i = x_{\bar{\imath}}, \forall i \in [n]$代入 (1)–(6)，每次都会得到 $1 > 0$，因此**集合 1** 和 **2**成立，当且仅当 $\alpha = 1, \forall\alpha \in A$和 $x_i = x_{\bar{\imath}}, \forall i \in [n]$。

集合 3。我们施加独立集约束。对于每条边 $(a,\ b) \in E$，我们希望施加约束 $x_a + x_b < 1$；这在整数范围内等价于 $x_a + x_b < 0.5$。这与 $2(x_a + x_b) < 1$ 相同，也等价于 $x_a + x_b + x'_a + x'_b < 1$。乘以 -1 后，这与 $-x_a - x_b - x_{\bar{a}} - x'_b > -1$. 相同。最后，这等价于 $-x_a - x_b - x_{\bar{a}} - x'_b + a_0 > 0$。引入 0 项以确保每个变量恰好使用一次，我们得到等价形式，并将其加入 P：

$$-x_a - x_b - x'_a - x'_b + a_0 + \sum_{j\in[n]\setminus\{a,b\}} (x_j - x'_j) + \sum_{j\in[\ell]} (a_j - a'_j) > 0 \tag{7}$$

集合 4。最后，我们来施加约束，要求独立集的大小至少为 k。为此，请注意：

$$\sum_{i\in[n]:x_i=1} x_i \geq k \iff 2 \sum_{i\in[n]:x_i=1} x_i \geq 2k$$

$$\iff \sum_{i\in[n]:x_i=1} x_i + \left(n + \sum_{i\in[n]:x_i=-1} x_i \right) \geq 2k$$

$$\iff \sum_{i\in[n]} x_i \geq 2k - n$$

$$\iff \sum_{i\in[n]} (x_i + x'_i) + a_0 > 4k - 2n \tag{8}$$

最后一行可写为 $\sum_{i\in[n]} (x_i + x_{\bar{\imath}}) + a_0 + 2(n - 2k) > 0$，因此，只要 $\ell \geq |n - 2k|$，我们就可以将 $2(n - 2k)$ 写成集合 $A \setminus \{a_0\}$中变量的一个线性 ± 1组合，从而得到一个恰好使用每个变量一次的不等式，随后可将其加入 P。

说完这些，现在让我们考察（隐含于 $(\lfloor t/2 \rfloor + 2)$-Una-Win-Prop 定义中的）约束：所求结果中的变量至少有$\lfloor t/2 \rfloor + 2$必须取值为 1。在我们的情形中，$t = 2n + 2\ell + 1$. 和之前一样，第一步是将 1 的个数转换为变量之和。这样一来，结果中至少有 $\lfloor t/2 \rfloor + 2$ 个 1 等价于：

$$\sum_{i\in[n]} (x_i + x'_i) + a_0 + \sum_{i\in[\ell]} (a_i + a'_i) \geq 2(\lfloor t/2 \rfloor + 2) - (2n + 2\ell + 1)$$

$$\iff \sum_{i\in[n]} (x_i + x'_i) + a_0 \geq 3 - 2\ell$$

左侧的量与式 (8) 中的相同，并且注意到 $4k - 2n \geq 3 - 2\ell \Leftarrow \Rightarrow \ell \geq n + 3/2 - 2k$。在这种情况下，**集合 4** 中的不等式比关于 1 的总数的约束更强，因此我们可以忽略关于 1 的个数的约束。因此，假设 $k \geq 1$，我们可以设定 $\ell = n$，使得 $\ell \geq |n - 2k|$ 和 $4k - 2n \geq 3 - 2\ell$ 均成立。

还有一件事需要处理：我们需要确保按此方式构造的判断矩阵 P 中，每一列的 1 都比 0 多，而目前我们的构造尚未满足这一点。为解决这个问题，注意约束**集合 4** 和**1**具有以下性质：

集合 1。在方程 (1) 和 (2) 中，每个变量都恰好出现一次正项和一次负项，但 α 本身除外，它出现了两次正项。也就是说，如果最后得到的矩阵在某个对应于 A 中变量的列上违反了所要求的性质，我们可以将**集合 1** 中的相应不等式复制多项式次，直到不再出现此类违反，因为每增加一个副本，只会改变单列中 1 与 0 的平衡，并使其增加。

集合 4。这里只会出现变量 A 取负值的情况。因此，如果某个时刻我们得到一个矩阵，其中某个变量 x_i或 $x_{\bar{\imath}}$违反了该性质，那么我们就再添加一个**集合 4**的副本，从而使变量 x_i和 $x_{\bar{\imath}}$的 1 与 0 的平衡增加 1。经过多项式次这样的添加后，我们就能得到一个矩阵，使其所有对应于图中顶点的列都满足该性质。

综上所述，我们的归约现在可以概括如下：首先，我们按照上述方式构造一个判断矩阵P；然后，我们执行上述针对**集合 4** 所描述的变换，直到形如 x_i和 $x_{\bar{\imath}}$的所有变量在其对应列上的 1 与 0 的平衡均为正；最后，我们执行所描述的变换

对于上述**集合 1**，继续执行变换，直到对应于 A 中变量的所有列也都具有正的 1 与 0 的平衡。注意，所生成的实例具有 $t = 2n + 2\ell + 1$，这是奇数。为了控制投票者数量的奇偶性，如有必要，我们可以在后处理阶段再添加一个**集合 4** 的副本，因为随后使用**集合 1** 进行的变换不会改变投票者数量的奇偶性。□

结合定理 2 和定理 3，我们得到如下主要结果：

定理 4. $(\lfloor t/2 \rfloor + 2)$-Win-Or-Tie-Prop 即使限定在奇数 n、奇数 t 的情形，或偶数 n、奇数 t 的情形下，仍然是 *NP* 困难。[1]

不过，检查是否存在一项能达成更多一致的政策，也许没那么困难？毕竟，检查距离是否不超过任意给定常数，可以在多项式时间内完成。答案大多是否定的，我们将在定理 3 的以下更技术性表述中证明这一点：

定理 5. k-Una-Win-Prop 是 *NP* 困难的，如果 $t - k$ 对于某个常数 $0 < \epsilon \leq 1$而言是 $\Omega(t^\epsilon)$。

证明。为了区分 k（即所求独立集的大小）和 k（即我们要归约到的 Una-Win-Prop 的参数化），我们用$f(t)$表示后者。换言之，我们将独立集问题归约到 $f(t)$-Una-Win-Prop。

假设 $0 < \epsilon \leq 1$ 满足 $t - f(t)$ 为 $\Omega(t^\epsilon)$。具体而言，假设 $C > 0$ 和 $t_0 \geq 1$ 满足：对于所有 $t \geq t_0$，都有$t - f(t) \geq Ct^\epsilon$。证明过程与定理 3 非常相似，区别在于如何选择 ℓ。首先，和之前一样，我们需要有 $\ell \geq |n-2k|$，以便写出约束**集合 4**。其次，至少 $f(t)$ 个变量必须设为 1 这一（隐式）约束现在写作如下，其中回想一下，$t = 2n + 2\ell + 1$：

$$\sum_{i\in[n]} (x_i + x_i') + a_0 + \sum_{i\in[\ell]} (a_i + a_i') \geq 2f(t) - (2n + 2\ell + 1)$$
$$\iff \sum_{i\in[n]} (x_i + x_i') + a_0 \geq 2f(2n + 2\ell + 1) - (2n + 4\ell + 1)$$

和之前一样，我们希望这一约束被独立集大小对应的约束支配，因此要求 $4k - 2n \geq 2f(2n + 2\ell + 1) - (2n + 4\ell + 1)$，$4k \geq (\,)(\,)$，$2f(2n+2\ell+1) - 4\ell + 1$. $\ell \geq$ 这等价于 $(\,)(\,)$。现在我们要证明，存在一个满足这一约束且取值受 n 中某个多项式界定的$|n-2k|$（否则，我们的归约将不再生成多项式规模的矩阵）。为此，我们将证明存在这样的 ℓ满足更强的条件 $2f(2n + 2\ell + 1) \leq 4\ell + 1$，事实上还有 $f(2n + 2\ell + 1) \leq 2\ell.$。由于对于 $2n + 2\ell + 1 \geq t_0$，有 $f(2n + 2\ell + 1) \leq 2n + 2\ell + 1 - C(2n + 2\ell + 1)^\epsilon$，因此只需找到满足 $2n + 2\ell + 1 - C(2n + 2\ell + 1)^\epsilon \leq 2\ell.$ 的 ℓ。最后一个条件等价于 $2n + 1 \leq C(2n + 2\ell + 1)^\epsilon$，进而等价于

$$\left(\frac{2n+1}{C}\right)^{1/\epsilon} \leq 2n + 2\ell + 1 \iff \ell \geq \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2n+1}{C}\right)^{1/\epsilon} - 1\right) - n$$

用 x 表示后一个右侧表达式的值。由于对于任意固定常数 $C > 0$ 和 $0 < \epsilon \leq 1$，x 都是关于 n 的多项式，因此它可以推出，我们可以取 $\ell = \lceil \max\{t_0,\ |n - 2k|,\ x\} \rceil$ 来完成证明。□

[1]对于奇数 n、奇数 t 的情形，实际上我们需要在定理 2 的证明中使用 $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \mid G_1 \mid \ldots \mid G_{n-1}$，但细节类似。

推论 6. k-Win-Or-Tie-Prop 是 *NP* 困难的，如果 $k \geq \lfloor t/2 \rfloor + 2$ 且 $t - k$ 对于某个常数 $0 < \epsilon \leq 1$为 $\Omega(t^\epsilon)$。例如，判断是否存在一个在至少 99% 的所有议题上达成一致，或在至少 $t - \sqrt{t}$ 个议题上达成一致的不败结果，是 *NP* 困难的。

现在我们转而关注参数化复杂性。

定理 7. Win-Or-Tie-Prop 关于参数 n、t以及 $h = \max_{i,j} d_H(v_i, v_j)$均为固定参数可处理。此外，Una-Win-Prop 关于 n和 t.也为固定参数可处理

证明。对于参数 t，直接枚举所有提案 p，然后统计赞成和反对 p的投票者人数，对两个问题都可达到复杂度 $O(nt2^t)$，从而证明了这一结论。对于参数 h，k-Win-Or-Tie-Prop 的情况也大同小异：文献 [19] 表明，当 t超过某个阈值时，如果 $h < (\sqrt{2} - 1)t$，那么逐议题多数不会输；这一点可以很容易地在继续之前检查。否则，我们知道 $h \geq (\sqrt{2} - 1)t$，此时 $t \leq (1 + \sqrt{2})h$. 因此，这种情况下的穷举搜索运行时间为 $O(nt2^t) \subseteq O(nh2^{(1+\sqrt{2})h}) \subseteq O(n5.34^h)$。最后，关于 n 的可处理性证明更为复杂，接下来将予以介绍。

我们从 k-Una-Win-Prop 开始。证明过程类似于 [9]，将问题表述为一个整数线性规划。这里的主要洞见是，偏好矩阵中至多存在 2^n 个不同的列。对于每个可能的列 $c \in \mathbb{B}^n$，令 t_c 表示矩阵中类型为 c 的列数；也就是说，表示与 c 完全相同的列数。由于相同的列在所有实际意义上都可以互换，因此引入变量 $(x_c)_{c\in\mathbb{B}^n}$，其中 x_c 表示在所求提案中，类型为 c 的 t_c 列在相应位置取 1 的列数。注意，这样一来，$t_c - x_c$ 列将在相应位置取 0。对每个 $c \in \mathbb{B}^n$都加入以下不等式，即可强制满足一致性要求：

$$0 \leq x_c \leq t_c \tag{9}$$

以下不等式是我们的“优化目标”：

$$\sum_{c\in\mathbb{B}^n} x_c \geq k \tag{10}$$

对每个选民 $i \in [n]$，加入以下不等式，断言i 不反对由 x描述的提案：

$$\sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n \\ c_i=1}} x_c + \sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n \\ c_i=0}} (t_c - x_c) > \frac{t}{2}$$

由于这些 t_c 项的和为 $t - |v_i|$，因此等价于

$$\sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n \\ c_i=1}} x_c - \sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n \\ c_i=0}} x_c > |v_i| - \frac{t}{2}$$

可以改写为更标准的形式：

$$\sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n \\ c_i=1}} x_c - \sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n \\ c_i=0}} x_c \geq |v_i| - \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor \tag{11}$$

由 (9)、(10) 和 (11) 描述的约束集合共同构成我们的整数线性规划。变量数为 2^n，约束数为 $2^{n+1}+1+n$，这意味着相应系统矩阵的形状为 $(2^{n+1}+n+1)\times(2^n+1)$，因此单元格总数为 $O(4^n)$。矩阵中的系数的绝对值不超过 t，这意味着该整数线性规划实例可以用 $O(4^n \log t)$ 比特存储。Lenstra算法（及其后续改进）求解整数线性规划所需的时间随变量数呈指数增长，但随表示实例矩阵所需的比特数呈线性增长，因此我们的结论得证。

对于 k-Win-Or-Tie-Prop，我们保留基于整数线性规划的证明思路，但需要对细节进行一些完善。我们保留相同的变量，以及由（9）和（10）产生的所有不等式，但需要将（11）替换为表示 x 所描述的提案不会落败的不等式。为对此进行建模，引入 $3n$ 个额外的二进制变量（a_i）$_{i\in[n]}$，（d_i）$_{i\in[n]}$，（f_i）$_{i\in[n]}$，其含义是：当且仅当选民 i 赞成该提案时，a_i 为 1；当且仅当选民 i 反对该提案时，d_i 为 1；当且仅当选民 i 对该提案无偏好时，f_i 为 1。对每个选民 $i\in[n]$，添加以下不等式，以强制满足一致性要求：

$$a_i, d_i, f_i \geq 0 \tag{12}$$

$$a_i + d_i + f_i = 1 \tag{13}$$

为了确保每个具有 $a_i = 1$ 的选民 $i\in[n]$ 确实赞成该提案，我们使用以下不等式：

$$\sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n\\ c_i=1}} x_c - \sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n\\ c_i=0}} x_c \geq |v_i| - \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - \beta(1-a_i) \tag{14}$$

其中，$\beta = 10t+10$ 被选为关于 t的足够大的线性常数。注意，对于 $a_i = 1$，上面的不等式变为（11）；而对于 $a_i = 0$，它始终成立，因为左侧始终介于 $-t$ 和 t. 之间。同样，为了确保每个满足 $i\in[n]$ 和$d_i = 1$的选民实际上都反对该提案，我们使用以下类似的不等式：

$$\sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n\\ c_i=1}} x_c - \sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n\\ c_i=0}} x_c \leq |v_i| - \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 2 + \beta(1-d_i) \tag{15}$$

最后，为了确保每个满足 $i\in[n]$ 和 $f_i = 1$ 的选民实际上对该提案无偏好，我们使用以下不等式：

$$\sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n\\ c_i=1}} x_c - \sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n\\ c_i=0}} x_c \leq |v_i| - \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 1 + \beta(1-f_i) \tag{16}$$

$$\sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n\\ c_i=1}} x_c - \sum_{\substack{c\in\mathbb{B}^n\\ c_i=0}} x_c \geq |v_i| - \left\lfloor \frac{t-1}{2} \right\rfloor - 1 - \beta(1-f_i) \tag{17}$$

综上，（9）、（10）和（12）–（17）所描述的约束集合构成了我们的整数线性规划。对应的系统矩阵的形状为（ $2^{n+1}+$ $9n+1 \times 2^n+3n+1$. $O\ 4^n$ ）（）。单元格的数量为（），，每个单元格需要O（log t）位来存储，因此该整数线性规划实例可以用O（4^nlog t）位存储。使用Lenstra算法，结论再次成立。 □

4 情形 $k = \lfloor t/2 \rfloor + 1$

我们已经看到，($\lfloor t/2 \rfloor$+2)-Win-Or-Tie-Prop 是 NP 困难。Fritsch 和 Wattenhofer [14] 给出了一个非构造性证明，证明如果 t 为奇数那么就存在一个不败提案 p，满足 $|p| \geq \lfloor t/2 \rfloor + 1$.他们的证明依赖于一个代数组合恒等式，作者发现很难对其作直观解释。此外，他们将如何在多项式时间内找到此类提案的问题留待解决。本节有三个目的：首先，通过揭示提案空间中保持选民层面结构的对称性，我们为他们的结果给出一种新的概率论证，并将其扩展到偶数 t 的情况；接着，我们说明这如何导出一种简单的随机化算法：在假设奇数 t且 $\Delta > 0$ （见下文记号）的情况下，该算法的运行时间为期望多项式时间；最后，利用去随机化，我们给出一种确定性多项式时间算法，用于找到一个不败提案 p，满足 $|p| \geq \lfloor t/2 \rfloor + 1$，这次适用于一般 t 和 Δ.。我们注意到，尽管确定性算法能够处理一般实例，但随机化算法效率更高，也更易于描述和实现。

本节始终采用固定的 $n\times t$ 偏好剖面 P。我们用 Δ 表示矩阵P中 1 的总数减去 0 的总数。由于我们假设逐议题多数结果为全1向量，因此可以保证 $\Delta \geq 0$ 。

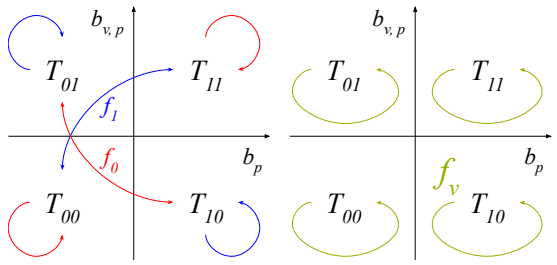
4.1 保持结构的对称性与概率证明

本节中，我们为每位选民构造提案之间两个保持结构的双射对应。我们利用它们推导出第三个对应关系；只要 b_p 和 $b_{v,\ p}$ 不为零，其符号就保持不变。这一性质将在我们的证明中发挥关键作用。我们认为，这些观察到的对称性本身也具有独立的研究价值。之后，我们定义两个概率思想实验：第一个实验的期望易于计算，且可以看出是非负的，但单独来看意义不大；第二个实验的期望看起来可能难以计算，但若其值非负，便能轻易推出我们的结论。然后，我们利用上述第三个对应关系，推导出这两个期望相等，从而证明对于 t. 的任意奇偶性， [14] 均成立

首先，考虑某位选民，其投票为 v，其中 $|v| = \ell$.。令 $B^* \subseteq \mathbb{B}^t$ 表示满足 p、 $b_p \neq 0$ 且 b_v、$_p \neq 0$. 的提案集合。我们将 B^* 中的提案分为四个不同的类别，分别称为 T_{00}、 T_{01}、 T_{10}、 T_{11}。具体而言，下标的第一位根据 b_p 是负还是正而取 0/1，第二位则根据 b_v、$_p$ 是负还是正而取 0/1。现在定义两个双射 f_v、1、 f_v、0： $B^* \to B^*$.。当 v 的含义根据上下文明确时，我们将 f_v、1 和 f_v、0 简写为 f_1 和 f_0。不失一般性，假设 v 的前 ℓ 个议题为 1，其余 $t-\ell$ 个议题为 0。因此，任意提案 $p\in B^*$ 都可以写成 $p = p_1p_0$，其中 $p_1\in\mathbb{B}^\ell$ 且 $p_0\in\mathbb{B}^{t-\ell}$。为方便起见，我们也写作 $v = v_1v_0$，其中 $v_1 = 1^\ell$ 且 $v_0 = 0^{t-\ell}$.。于是，两个双射分别定义为 $f_0(p_1p_0) = p_1p_0$ $p_1p_0 =$ p_1p_0 —）和 f_0 ()。—

引理 8。 f_0将类型为 T_{ij}的提案映射为类型为 T_{ji}的提案，对于 $i,\ j\in\{0,1\}$。此外，对于任意 $p\in B^*$，我们有 $b_{v,\ f_0(p)} = b_p$.

证明。考虑一个提案 $p = p_1p_0 \in B^*$.那么，$b_{f_0($ p =)„同样，,() $b_{p_1p_0} = b_{p_1} + b_{p_0} = b_{v_1\,p_1} + b_{v_0\,p_0} = b_{v\,p}$. $b_{v\,f_0\ p}$ f_0„因此，
$b_{v_1v_0\,p_1p_0} = b_{v_1\,p_1} + b_{v_0\,p_0} = b_{\overline{p_1}} + b_{p_0} = b_{p_1p_0} = b_p$.



(a) 双射 $f_{v,0}$ 和 $f_{v,1}$。 **(b) 双射 f_v.**

图 2：与投票 v对应的双射 $f_{v,0}$，$f_{v,1}$ 和 f_v。

交换了这两个量 b_p和 $b_{v,p}$，这意味着如果 p的类型为 T_{ij}，那么 $f_0(p)$ 的类型为 T_{ji}. □

引理 9。 f_1将类型 T_{ij}的提案映射为类型 $T_{(1-j)(1-i)}$ 提案，对于 i，$j \in \{0,1\}$。此外，对于任意 p，都有 $b_{v,f_1(p)} = -b_p$.

证明。 考虑一个提案 $p = p_1p_0 \in B^*$.那么，$b_{f_1(p)} = b_{\overline{p_1}p_0} = b_{\overline{p_1}} + b_{p_0} = -b_{v_1,p_1} - b_{v_0,p_0} = -b_{v,p}$. $b_{v,f_1(p)} = b_{v_0\overline{v_1},p_1p_0} = b_{v_1,p_1} + b_{\overline{v_0},p_0} = -b_{p_1} - b_{p_0} = -b_{p_1p_0} = -b_p$. 类似地，$f_1(p) = p_1\overline{p_0}$，因此，$f_1$ 交换并取反了两个量 b_p和 $b_{v,p}$，这意味着，如果 p属于类型 T_{ij}，那么 $f_1(p)$ 就属于类型 $T_{(1-j)(1-i)}$. □

引理 8 和引理 9 如图 2a 所示。

利用 $f_{v,0}$ 和 $f_{v,1}$，我们现在可以定义一个“混合”双射f_v：$B^* \to B^*$，如下所示：任取 $p \in B^*$，若 p属于类型 T_{00}或 T_{11}，则 f_v映射到 $p \mapsto f_{v,0}(p)$；否则，f_v映射到 $p \mapsto f_{v,1}(p)$。注意，这三个双射都是自反的。新映射f_v 继承了引理 8 和 9 中其他映射的性质：

推论 10。 f_v将类型为 T_{ij}的提案映射为类型为 T_{ij} 的提案。此外，对于任意类型为 T_{00} 或 T_{11} 的提案，我们有 $b_{v,f_v(p)} = b_p$；对于任意类型为 T_{01} 或 T_{10} 的提案，我们有 $b_{v,f_v(p)} = -b_p$。

证明。首先，考虑一个针对 $ij \in \{00,11\}$、类型为 T_{ij}的提案 p。根据定义，f_v将 $p \mapsto f_{v,0}(p)$ 映射到……。根据引理 8，我们有 $f_{v,0}(p)$ 属于类型 T_{ji}，这与 $ij \in \{00,11\}$时的 T_{ij}相同，并且 $b_{v,f_0(p)} = b_p$。其次，考虑一个针对 $ij \in \{01,10\}$、类型为 T_{ij}的提案 p。根据定义，f_v将 $p \mapsto f_{v,1}(p)$ 映射到……。根据引理 9，我们有 $f_{v,1}(p)$ 属于类型 $T_{(1-j)(1-i)}$，这与 $ij \in \{01,10\}$时的 T_{ij}相同，并且 $b_{v,f_1(p)} = -b_p$，证明完毕。□

推论 10 在图 2b 中进行了说明。接下来，我们介绍第一个思想实验。单独来看，它并无多大帮助，但其期望相对容易计算。为简洁起见，引入记号 $B_m = \{p \in \mathbb{B}^t : |p| > t/2\}$，其大小在 t 为奇数时是 $|B_m| = 2^{t-1}$，在 t 为偶数时是 $|B_m| = 2^{t-1} - \frac{1}{2}\binom{t}{t/2}$。

思想实验 ***TE1***。 我们从提案中均匀地随机抽取一个 $p \in B_m$，并将全局计数器初始化为 $X = 0$；随后，每位选民i查看自己的投票 v_i，对于 v_i与 p一致的每个位置，都将 X加 1；对于不一致的每个位置，则将 X减 1。总的来说，选民 i 将 $b_{v_i,p}$加到 X上。我们关注其期望值 $\mathbb{E}[X]$。

定理 11. $\mathbb{E}[X] = \Delta|B_m|^{-1}\binom{t-1}{t/2}$，其中 Δ表示偏好剖面 $\mathcal{P}$ 中 *1* 的个数减去 *0* 的个数。

证明。令 $X = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{t} X_{i,j}$，其中 $X_{i,j} = 1$当 $v_{i,j} = p_j$ 时，否则为 -1。根据期望的线性性

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{t} X_{i,j}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{t}\mathbb{E}\left[X_{i,j}\right]$$

因此，我们只需计算 $\mathbb{E}\left[X_{i,j}\right]$。对于 $v_{i,\ j} = 1$这种情况，有 $\mathbb{E}\left[X_{i,j}\right] = \mathbb{P}(p_j = 1) - \mathbb{P}(p_j = 0)$；而对于 $v_{i,\ j} = 0$ 这种情况，有 $\mathbb{E}\left[X_{i,j}\right] = \mathbb{P}(p_j = 0) - \mathbb{P}(p_j = 1)$。因此，我们得到 $\mathbb{E}[X] = \Delta(\mathbb{P}(p_j = 1) - \mathbb{P}(p_j = 0))$。由于 $p \in B_m$ 是均匀抽取的，可得 $\mathbb{P}(p_j = 1) - \mathbb{P}(p_j = 0) = |B_m|^{-1}(N_1 - N_0)$，其中 $(N_k)_{k\in\{0,\ 1\}}$是满足 $p_j = k.$ 的提案 $p \in B_m$ 总数。因此，还需计算 $N_1 - N_0$。

根据对称性，$(N_k)_{k\in\{0,1\}}$不依赖于 j，因此不妨设 $j = 1$。考虑双射 q：$\mathbb{B}^t \to \mathbb{B}^t$将提案中的第一个条目翻转。考虑一个满足 $p_1 = 1$的提案 $p \in B_m$。如果 $|p| > \lfloor t/2\rfloor + 1$，则 $|q(p)| \geq \lfloor t/2\rfloor + 1$ 和 $q(p)_1 = 0$ 成立，因此 p 和 $q(p)$ 在 $N_1 - N_0$. 中相互抵消。这就只需在 N_1 中统计满足 $|p| = \lfloor t/2\rfloor + 1$ 且满足 $p_1 = 1$的那些提案 $p \in \mathbb{B}^t$，因为只有它们尚未被计入。这等于从 $t-1$ 个可用位置中选择 $\lfloor t/2\rfloor$ 个条目的方法数，因为 p_1 被设为 1，结果为 $\binom{t-1}{\lfloor t/2\rfloor}$. □

由于 $\Delta \geq 0$，可知 $\mathbb{E}[X] \geq 0$，但这本身并没有太大用处，因为它只意味着存在一个提案 $p \in B_m$ 满足$\sum_{i=1}^{n} b_{v_i,\ p} \geq 0$，而当 p为全1向量时，这一点本就成立；该提案可能输给全0向量，即安斯库姆悖论。现在我们定义一个稍显不那么自然的思想实验，计算一个数值 Y。随后，我们将利用逐选民的双射 f_{v_i}得出 $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$，进而推出我们的主要结果。

思想实验 ***TE2***。 我们从所有提案中均匀随机抽取一个 $p \in B_m$，并将全局计数器初始化为 $Y = 0$。接着，每位选民 i 将 p与自己的投票 v_i.进行比较。如果 i赞成 p，就将 b_p加到 Y上；如果 i反对 p，就从 Y中减去 b_p；如果对于 p而言，i无偏好，则保持 Y不变。我们关注其期望值 $\mathbb{E}[Y]$。

对于提案 $p \in \mathbb{B}^t$，回想一下，$b_{p,\ \mathcal{P}} = a_{p,\ \mathcal{P}} - d_{p,\ \mathcal{P}}$是偏好剖面 P 中赞成提案 p的选民人数减去反对提案 p 的选民人数。由此可知，值得注意的是 $Y = b_p \cdot b_{p,\ \mathcal{P}} = (2|p| - t) \cdot b_{p,\ \mathcal{P}}$。以下这个令人意外的联系构成了我们论证的关键洞见。

Theorem 12. $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y] = \Delta|B_m|^{-1}\binom{t-1}{t/2}$

为证明这一点，写作 $Y = \sum_{i\in[n]} Y_i$，其中 Y_i在 i赞成 p 时为 b_p，在 i反对 p时为 $-b_p$，其他情况下为 0。回想一下，$X = \sum_{i\in[n]} b_{v_i,\ p}$。根据期望的线性性，只需证明 $\mathbb{E}[b_{v_i,p}] = \mathbb{E}[Y_i]$，下面我们就来证明这一点。

Lemma 13. *For any voter $i \in [n]$, we have $\mathbb{E}[b_{v_i,p}] = \mathbb{E}[Y_i]$.*

证明。令 B_+和 B_-分别表示 B_m中 i赞成和不赞成的提案集合。为简洁起见，记作 $v = v_i$。

那么，我们可以写成：

$$\mathbb{E}[b_{v,p}] = |B_m|^{-1} \sum_{p\in B_m} b_{v,p} = |B_m|^{-1}\left(\sum_{p\in B_+} b_{v,p} + \sum_{p\in B_-} b_{v,p}\right)$$
$$= |B_m|^{-1}\left(\sum_{p\in B_+} b_{f_v(p)} - \sum_{p\in B_-} b_{f_v(p)}\right)$$

对于最后一个等式，我们用到了推论 10 以及 f_v是自反的这一事实。此外，根据同一结论，我们知道，对于任意 $s \in \{+, -\}$，当且仅当 $f_v(p) \in B_s$时，$p \in B_s$。由于 f_v是一个双射，因此我们可以在两个求和式中都作变量替换 $p \mapsto f_v(p)$，得到：

$$= |B_m|^{-1}\left(\sum_{p\in B_+} b_p - \sum_{p\in B_-} b_p\right) = \mathbb{E}[Y_i]$$

最后一个求和等于 $\mathbb{E}[Y_i]$这一事实直接由 Y_i的定义得出。□

由此可得我们的主要结果：

定理 14. 假设 $\Delta \geq 0$，则存在一个不败提案 $p \in B_m$. 假设 $\Delta > 0$，则存在一个获胜提案 $p \in B_m$.

证明。由定理 12 可得 $\mathbb{E}[Y] = \Delta|B_m|^{-1}\binom{t-1}{\lfloor t/2\rfloor}$，当 $\Delta \geq 0$时为 ≥ 0，当 $\Delta > 0$时为 > 0。因此，鉴于 $Y = b_p \cdot b_{p,\mathcal{P}}$，其中 $b_p = 2|p| - t > 0$适用于 $p \in B_m$，可知存在一个提案 $p \in B_m$，使得$b_{p,\mathcal{P}} \geq 0$ 适用于 $\Delta \geq 0$，且 $b_{p,\mathcal{P}} > 0$ 适用于 $\Delta > 0$, 证明完毕。□

4.2 获胜提案的多项式计算

根据定理 14，我们知道非失败（获胜）提案$p \in B_m$ 始终存在，但并不能保证能够通过多项式算法找到它。本节将介绍两种这样的算法：一种是简单且相对高效的随机算法，对于奇数 t 和 $\Delta > 0$具有多项式运行时间的期望；另一种则是适用于一般情况的更为复杂的确定性多项式时间算法。

我们首先给出一个对两种算法都很有用的引理。引入记号 $\mathbb{P}_k[\cdot] = \mathbb{P}[\cdot \text{ 给定 } |p| = k]$，类似地有 $\mathbb{E}_k$.

Lemma 15. *There exists* $k \geq \lfloor t/2\rfloor+1$ *s.t.* $\mathbb{E}_k[b_{p,\mathcal{P}}] \geq \frac{\Delta}{t|B_m|}\binom{t-1}{\lfloor t/2\rfloor}$.

证明。将 Y 的期望写成如下形式：

$$\mathbb{E}[Y] = \sum_{k=\lfloor t/2\rfloor+1}^{t} \mathbb{E}_k[Y]\mathbb{P}(|p| = k)$$

根据定理 12，我们知道 $\mathbb{E}[Y] = \Delta|B_m|^{-1}\binom{t-1}{\lfloor t/2\rfloor}$。由于 $\mathbb{P}(|p| = k)$ 系数之和为 1，这意味着存在某个数 $k \geq \lfloor t/2\rfloor + 1$，使得 $\mathbb{E}_k[Y] \geq \Delta|B_m|^{-1}\binom{t-1}{\lfloor t/2\rfloor}$。由于 $Y = b_p \cdot b_{p,\mathcal{P}} = (2|p| - t) \cdot b_{p,\mathcal{P}}$，这意味着 $\mathbb{E}_k[Y] = (2k - t)\mathbb{E}_k[b_{p,\mathcal{P}}]$，由此

$$\mathbb{E}_k[b_{p,\mathcal{P}}] = \frac{\Delta}{(2k-t)|B_m|}\binom{t-1}{\lfloor t/2\rfloor} \geq \frac{\Delta}{t|B_m|}\binom{t-1}{\lfloor t/2\rfloor}$$ □

随机化算法。这里我们假设 t 是奇数且 $\Delta > 0$。由于 t 是奇数，注意到 $|B_m|^{-1} = 2^{1-t}$，而且 $a_{p,\mathcal{P}} = n - d_{p,\mathcal{P}}$，由此 $b_{p,\mathcal{P}} = 2a_{p,\mathcal{P}} - n$.。此外，注意在这种情况下，$\mathbb{P}_k(b_{p,\mathcal{P}} > 0) = \mathbb{P}_k(a_{p,\mathcal{P}} > n/2)$。由此，利用马尔可夫不等式，并用斯特林型结果对中心二项式系数进行界定，可得：

引理 16。假设 k 满足 $\mathbb{E}_k[b_{p,\mathcal{P}}] \geq \frac{\Delta 2^{1-t}}{t}\binom{t-1}{\lfloor t/2\rfloor}$，则

$$\mathbb{P}_k(b_{p,\mathcal{P}} > 0) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Delta}{nt^{3/2}}.$$

证明。回顾 $b_{p,\mathcal{P}} = 2a_{p,\mathcal{P}} - n$，因此我们可以写成

$$\mathbb{E}_k[b_{p,\mathcal{P}}] = 2\mathbb{E}_k[a_{p,\mathcal{P}}] - n \iff \mathbb{E}_k[a_{p,\mathcal{P}}] = \frac{1}{2}\mathbb{E}_k[b_{p,\mathcal{P}}] + \frac{n}{2}$$

这意味着

$$\mathbb{E}_k[a_{p,\mathcal{P}}] \geq \frac{n}{2} + \frac{\Delta 2^{-t}}{t}\binom{t-1}{\lfloor t/2\rfloor}$$

现在，注意到 $\mathbb{P}_k[b_{p,\mathcal{P}} > 0] = \mathbb{P}_k[a_{p,\mathcal{P}} > n/2] = 1 - \mathbb{P}_k[a_{p,\mathcal{P}} \leq n/2]$. $\mathbb{P}(\mathcal{P})\mathbb{P}(\mathcal{P})$ 应用马尔可夫不等式，我们得到 $\mathbb{P}_k(a_{p,\mathcal{P}} - n/2 \geq n - a_{p,\mathcal{P}}) \leq \frac{2}{n}\mathbb{E}_k[n - a_{p,\mathcal{P}}]$. $= \frac{2}{n}(n - \mathbb{E}_k[a_{p,\mathcal{P}}])$. $\mathbb{P}$总之，这意味着 $\mathbb{P}(\mathcal{P})\mathbb{P}(\mathcal{P})$。现在我们使用中心二项式系数的以下紧确估计：

$$\frac{4^m}{\sqrt{\pi(m+\frac{1}{2})}} \leq \binom{2m}{m} \leq \frac{4^m}{\sqrt{\pi m}} \quad \text{(for all } m \geq 1)$$

从而得到

$$\mathbb{P}_k(a_{p,\mathcal{P}} > n/2) \geq \frac{\Delta 2^{1-t}}{nt}\frac{2^{t-1}}{\sqrt{\pi(\lfloor t/2\rfloor + \frac{1}{2})}} = \frac{\Delta}{nt\sqrt{\pi(\lfloor t/2\rfloor + \frac{1}{2})}}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Delta}{nt^{3/2}}$$ □

有了这些准备，我们现在在以下定理中给出我们的随机化算法。

定理 17。对于奇数 t，可以在期望时间 $O(n^2t^{5/2}/\Delta)$内找到一个获胜提案 $p \in B_m$。如果只能保证 $\Delta > 0$，则为$O(n^2t^{7/2})$。然而，如果每一列中 *1* 的个数都多于 *0* 的个数，那么$\Delta \geq t$，因此该算法的期望时间为 $O(n^2t^{5/2})$。

证明。引入记号 $K = \{\lfloor t/2\rfloor+1, \ldots\ldots, t\}$。我们分轮次进行。在每一轮中，我们对提案 $(p_k)_{k\in K}$进行均匀随机采样。如果采样出的提案中有任何一个获胜，我们就停止并返回该提案。否则，我们进入下一轮。每轮执行需要 $O(nt^2)$ 时间，因此只需界定轮数的期望。由引理 15 和引理 16，可知存在 $k^* \in K$ 使得 $\mathbb{P}_k(b_{p,\mathcal{P}} > 0) \geq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\Delta}{nt^{3/2}}$，也就是说，每轮采样出的提案 p_{k^*}至少以此概率获胜。因此，根据几何分布的期望，直到 p_{k^*} 获胜所需轮数的期望为 $O(nt^3/^2/\Delta)$，这也构成轮数期望的一个上界。因此，我们的算法运行时间为 $O(nt^2nt^3/^2/\Delta) = O(n^2t^7/^2/\Delta)$，符合要求。□

确定性算法。回顾一下，提案是一个映射 $p\colon [t] \to \mathbb{B}$。部分提案是一个映射 $p\colon [t] \to \{0, 1, \text{‘?’}\}$。将 p 视为部分函数，p 的定义域为 $\mathrm{D}p = \{i \in [t] : p_i \neq \text{‘?’}\}$。部分提案 p 也可以看作集合 $\{i \mapsto p_i : i \in \mathrm{D}p\}$。我们将先前的记号 $|p|$ 一致地扩展为表示 $|\{i : p_i = 1\}|$。。两个部分提案 p_1 和 p_2 的并集（按集合意义）$p_1 \cup p_2$ 仅当 $\mathrm{D}p_1 \cap \mathrm{D}p_2 = \varnothing$. 时才有定义。若对于所有 $i \in [t]$，要么 $p_i = p'_i$，要么 $p_i = \text{‘?’}$，则称部分提案 p'细化部分提案 p。给定一个部分提案 p，细化它的一种方法是选取 $i \notin \mathrm{D}p$，并且 $b \in \mathbb{B}$，然后赋值 $p_i \leftarrow b$；用集合记法，细化后的提案写作 $p \cup \{i \mapsto b\}$。

为便于表述，对于一个部分提案 p^*，引入记号 $\mathbb{P}_{p^*}[\,] = \mathbb{P}[\,\cdot \text{ given refines } p^*]$ 和 $\mathbb{P}_{k\,p^*}[\,] = \mathbb{P}[\,|p| = k \text{ and } \cdot \text{ given refines } p^*]$. $\mathbb{E}_{p^*}$ 和 $\mathbb{E}_{k\,p^*}$ 我们类似地定义。以下引理的证明主要是语法上的操作。

引理 18。对于任意部分提案 $p^*\colon [t] \to \{0, 1, \text{‘?’}\}$ 以及任意数 $|p^*| \le k \le t - |\mathcal{D}_{p^*}|$，期望 $\mathbb{E}_{k,\,p^*}[b_{p,\mathcal{P}}]$ 可在多项式时间内计算。

证明。与往常一样，根据期望的线性性，$\mathbb{E}_{k,\,p^*}[b_{p,\mathcal{P}}]$ 可写为和 $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}_{k,\,p^*}[Z_i]$，其中，若 i 赞成 p，则 Z_i 为 1；若其反对该提案，则为 -1；否则为 0。假设代理人 i 的投票是 v_i，且具有 $|v_i| = \ell$。令 B_+ 为由 p 细化、具有 $|p| = k$ 且 i 赞成的提案集合。类似地，令 B_- 为由 p 细化、具有 $|p| = k$ 且 i 反对的提案集合。现在，我们可以写为：

$$\mathbb{E}_{k,p^*}[Z_i] = \binom{t - |\mathcal{D}_{p^*}|}{k - |p^*|}^{-1} (|B_+| - |B_-|)$$

二项式系数可以在多项式时间内计算，因此现在只需说明如何在多项式时间内计算 $|B_+|$ 和 $|B_-|$。我们先从 B_+. 开始。首先，确定 v 与 p^* 在 $\mathrm{D}p^*$中的议题上相匹配的数量，即 $m = |\{j \in \mathrm{D}p^* : v_j = p^*_j\}|$。。接着，令 $\alpha = |v \setminus \mathrm{D}_{p^*}|$ 表示不属于 $\mathrm{D}p^*$ 且 i 赞成的议题数量，并令 $\beta = t - |\mathrm{D}_{p^*}| - \alpha$ 表示不属于 $\mathrm{D}p^*$ 且 i 反对的议题数量。对于任意提案 p，定义 $x(p) = |p \setminus \mathrm{D}_{p^*}|$ 和 $y(p) = t - |\mathrm{D}_{p^*}| - |p \setminus \mathrm{D}_{p^*}|$，分别表示不属于 $\mathrm{D}p^*$ 且在 p 对应位置上为 1/0 的议题数量。注意，假设二项式系数在未定义时均为 0，则所有以 p 细化 p^*，且满足某些数值 x、y 使得 $x(p) = x$ 和 $y(p) = y$ 的提案总数为 $\binom{\alpha}{x}\binom{\beta}{y}$。据此，$p \in B_+$ 成立，当且仅当 $|p^*| + x(p) + y(p) = k$ 且 $m + x(p) + \alpha + \beta - y(p) > t/2$。因此，计算 $|B_+|$ 时，我们可以遍历所有满足 $|p^*| + x + y = k$ 和 $m + x + \alpha + \beta - y > t/2$ 的数对 (x, y)，其中 $0 \le x, y \le \alpha + \beta$（这样的数对数量为多项式级），并将每一对对应的值 $\binom{\alpha}{x}\binom{\beta}{y}$ 累加起来。对于 B_-，唯一的区别是第二个条件变为 $m + x + \alpha + \beta - y < t/2$. □

有了这一点，我们现在可以陈述并证明主要结果。

定理 19. 存在一种多项式时间确定性算法，可以计算出一个非失败策略 $p \in B_m$. 如果 $\Delta > 0$，那么计算得到的策略就是获胜策略。

证明。我们只证明断言中的“不会失败”部分。对于“获胜”部分，只需将下文中的非负替换为正即可。首先，对于所有满足 $t/2 < k \le t$ 的值 k，我们计算值 $\mathbb{E}_k[b_{p,\mathcal{P}}]$。这可以在多项式时间内完成方法是调用引理 18，并使用 $p^* = \varnothing$。根据引理 15，至少有一个这样的 k 会使计算所得的期望非负，因此取这样的一个 k 作为 k^*。随后，算法将以迭代方式构建输出策略，初始从 $p^* = \varnothing$ 开始。在算法的第 $1 \le i \le t$ 步，当前提案 p^* 将具有 $\mathrm{D}p^* = \{1, \ldots, i-1\}$，并保持不变量 $\mathbb{E}_{k^*,\,p^*}[b_{p,\mathcal{P}}] \ge 0$。在第 i 步，我们考虑 p^* 的两种细化，即 $p_0 = p^* \cup \{i \mapsto 0\}$ 和 $p_1 = p^* \cup \{i \mapsto 1\}$。借助它们，我们可以写出：

$$\mathbb{E}_{k^*,p^*}[b_{p,\mathcal{P}}] = \sum_{j \in \{0,1\}} \mathbb{E}_{k^*,p_j}[b_{p,\mathcal{P}}]\mathbb{P}_{k^*,p^*}(p_i = j)$$

根据不变量，我们知道 $\mathbb{E}_{k^*,p^*}[b_{p,\mathrm{P}}] \ge 0$；并且由于 $\sum_{j\in\{0,1\}} \mathbb{P}_{k^*,p^*}(p_i = j) = 1$，可知对于某个 $j \in \{0, 1\}$，有 $\mathbb{E}_{k^*,p_j}[b_{p,\mathrm{P}}] \ge 0$ 成立。由于利用引理 18 可以在多项式时间内计算出这两个值 $\mathbb{E}_{k^*,p_j}[b_{p,\mathrm{P}}]$，因此我们可以令 j^* 满足 $\mathbb{E}_{k^*,p_{j^*}}[b_{p,\mathrm{P}}] \ge 0$。现在可以设置 $p^* \leftarrow p_{j^*}$ 并继续执行算法。一个技术性注意事项是 $|p_1| > k^*$ 的情况，此时一个期望没有定义。在这种情况下，我们只需令 $j^* = 0$，而无需计算任何期望。最后，提案 p^* 将会完备，且 $\mathbb{E}_{k^*,p^*}[b_{p,\mathrm{P}}] \ge 0$ 将成立，这意味着 $b_{p^*,\mathrm{P}} \ge 0$，因此我们可以输出 p^*. □

确定性算法的一个缺点是执行时需要使用高精度算术。事实上，期望是有理数，其分母/分子的数量级为 $\approx 2^t$.。这使得高效实现颇具挑战，但若在整数上进行运算，并将期望乘以公分母，则可以在多项式时间内实现。我们省略这些细节。对于随机化算法，合理的问题是，能否通过预先计算 k^*，并只对其进行采样来优化算法。答案是，这基本上需要与确定性算法相同的机制，因此时间复杂度不那么理想。

最后请注意，我们的多项式算法输出的不败提案，与 IWM 至少有 $\lfloor t/2 \rfloor + 1$ 项一致；而根据定理 4，判断是否可能达到至少 $\lfloor t/2 \rfloor + 2$ 项一致是 NP 困难的。或许有悖直觉的是，这并不意味着我们的算法输出的提案恰好有 $\lfloor t/2 \rfloor + 1$ 项一致，因为这样的提案实际上未必总是存在（附录A中有一个例子）。

5 结论与未来工作

我们研究了这样一个问题：确定一项政策，使其与逐议题多数结果的距离最小，同时还能在议会的最终投票中胜出，从而被采纳为结果。本质上，我们的研究结果确立了一个紧确二分：总能在多项式时间内实现至多为 $\lfloor (t-1)/2 \rfloor$ 的距离，而判断是否能实现更小的距离则是 NP 困难。通过一般判断聚合（即相依议题）的视角重新审视我们的结果，以确定哪些扩展是可行的，将是很自然的下一步。此外，我们假设投票者对所有议题的权重相同，但研究一种投票者在提交选票时同时给出议题重要性评分的设定，将更具意义。另外，有些投票者可能比其他人更挑剔，要求与其偏好达成远超 50% 的一致，才会支持一项提案。将这种行为也纳入我们的模型会很有意思。赞成

“支持/反对”模式也可以由其他投票机制取代，例如基于汉明距离定义的机制，但不设固定的赞成“阈值”。最后，研究非二元议题的设定也会很有意思。

奥斯特罗戈尔斯基悖论是安斯库姆悖论的推广。具体而言，在安斯库姆悖论中，逐议题多数会败给相反的（逐议题少数）提案；而在奥斯特罗戈尔斯基悖论中，逐议题多数会败给任意提案。事实上，奥斯特罗戈尔斯基悖论可以看作是针对我们这一设定的孔多塞悖论的等价形式（例如，见 [18]）。奥斯特罗戈尔斯基悖论的算法版本提出了以下问题：给定选民偏好，是否存在一项政策，能在一对一较量中击败所有其他政策？已知如果这项政策存在，它必定是逐议题多数 [18], ，但判断这一点是否成立似乎很有趣，且在计算上并非易事。

致谢

我们感谢 Robin Fritsch 和 Edith Elkind 就本研究展开的诸多富有成效的讨论。此外，我们感谢 Robin Fritsch 指出一种情形：可能不存在与逐议题多数有 $\lfloor t/2 \rfloor + 1$ 项一致的非失败提案。我们感谢匿名审稿人提出建设性的反馈和宝贵建议，帮助改进本文。

参考文献

[1] Noga Alon、Robert Bredereck、Jiehua Chen、Stefan Kratsch、Rolf Niedermeier 和 Gerhard J. Woeginger。2016。《如何在集体二元决策中推动自己的议程》。*ACM*经济与计算汇刊4，1，文章 5（2016 年 1 月）。[2] Gertrude Elizabeth Margaret Anscombe。1976。《多数意愿得以实现时多数人受挫》。分析36，4（1976），161–168。[3] Th. Bezembinder 和 P. Van Acker。1985。《奥斯特罗戈尔斯基悖论及其与非传递选择的关系》。数学社会学杂志11，2（1985），131–158。[4] Daniel Binkele-Raible、Gábor Erdélyi、Henning Fernau、Judy Goldsmith、Nicholas Mattei 和 Jörg Rothe。2014。《概率游说的复杂性》。离散优化11（2014），1–21。[5] Robert Bredereck、Jiehua Chen、Sepp Hartung、Rolf Niedermeier、Ondřej Suchý 和 Stefan Kratsch。2012。《多项公投中游说的多变量复杂性分析》。载于第二十六届*AAAI*人工智能大会论文集（加拿大安大略省多伦多）*(AAAI'12)*。AAAI出版社，1292–1298。[6] Robin Christian、Michael R. Fellows、Frances A. Rosamond 和 Arkadii M. Slinko。2006。《多项公投中游说的复杂性》。经济设计评论11（2006），217–224。[7] Vincent Conitzer、Jérôme Lang 和 Lirong Xia。2009。《通过议程控制序贯选举有多难？》。载于第二十一届国际人工智能联合会议论文集（美国加利福尼亚州帕萨迪纳）*(IJCAI'09)*。Morgan Kaufmann Publishers Inc.，美国加利福尼亚州旧金山，103–108。[8] Rajat Deb 和 David Kelsey。1987。《构造广义奥斯特罗戈尔斯基悖论：必要且充分条件》。数学社会科学14，2（1987），161–174。[9] Edith Elkind、Abheek Ghosh 和 Paul W. Goldberg。2022。《审议式联盟形成的复杂性》。载于*AAAI*人工智能大会论文集，第36卷。4975–4982。[10] Edith Elkind 和 Martin Lackner。2015。《二分偏好中的结构》。载于第二十四届国际人工智能联合会议论文集（阿根廷布宜诺斯艾利斯）*(IJCAI'15)*。AAAI出版社，2019–2025。[11] Ulle Endriss。2016。《判断聚合》。载于计算社会选择手册（第1版），Felix Brandt、Vincent Conitzer、Ulle Endriss、Jérôme Lang 和 Ariel D. Procaccia（编）。剑桥大学出版社，美国，第17章。[12] Peter C. Fishburn 和 Aleksandar Pekeč。2004。委员会认可投票：阈值方法。技术报告。[13] Peter C. Fishburn 和 Aleksandar Pekeč。2018。《用于子集选择的认可投票方法》。https://people.duke.edu/~pekec/AVsubsetchoice.pdf[14] Robin Fritsch 和 Roger Wattenhofer。2022。《多数支持的代价》。载于第二十一届自主智能体与多智能体系统国际会议论文集（线上会议，新西兰）*(AAMAS'22)*。国际自主代理与多智能体系统基金会，南卡罗来纳州里奇兰，436–444。[15] William V. Gehrlein 和 Vincent Merlin。2021。《奥斯特罗戈尔斯基悖论发生的概率》。载于用概率模型评估投票系统：*William Gehrlein* 和 *Dominique Lepelley* 论文集暨纪念文集，Mostapha Diss 和 Vincent Merlin（编）。施普林格国际出版，查姆，119–135。[16] Martin Lackner 和 Piotr Skowron。2020。《基于认可投票的委员会投票：公理、算法与应用》。*CoRR* abs/2007.01795（2020）。arXiv: 2007 01795 2007 01795 。https://arxiv.org/abs/。[17] 2006 Gilbert Laffond 和 Jean Lainé。。《单次切换偏好与奥斯特罗戈尔斯基悖论》。数学社会科学52，1（2006），49–66。[18] Gilbert Laffond 和 Jean Lainé。2012。《在多项公投中寻求妥协》。群体决策与协商21，4（2012），551–569。[19] Gilbert Laffond 和 Jean Lainé。2013。《一致同意与安斯库姆悖论》。*TOP* 21（2013），590–611。[20] Jérôme Lang 和 Lirong Xia。2016。《组合领域中的投票》。载于计算社会选择手册（第1版），Felix Brandt、Vincent Conitzer、Ulle Endriss、Jérôme Lang 和 Ariel D. Procaccia（编）。剑桥大学出版社，美国，第9章。[21] Jean-François Laslier 和 M. Remzi Sanver（编）。2010。认可投票手册。施普林格柏林，海德堡。[22] Hannu Nurmi。1999。《复合多数悖论》。载于投票悖论及其应对方法。施普林格柏林海德堡，70–86。[23] Moisey Ostrogorski。1902。民主与政党组织。Calmann-Levy，巴黎。[24] Carl G. Wagner。1983。《安斯库姆悖论与四分之三规则》。理论与决策15（1983），303–308。[25] Carl G. Wagner。1984。《避免安斯库姆悖论》。理论与决策16（1984），233–238。

A 解空间是不连通的

我们的两个多项式算法并未完全令人满意，因为其正确性最终依赖于概率技术。是否存在完全构造性算法，仍有待研究。一种可能的思路是考察超立方体图 H_t 中由不败提案诱导的子图，其顶点集为 $\mathbb{B}^t$，并且当两个提案恰好在一个议题上不同时，它们之间存在边。如果该图连通性足够强，那么沿着由 $|p|$ 指引的路径行走，或许能够找到一个具有 $|p| \geq \lfloor t/2 \rfloor + 1$. 的提案。不幸的是，正如下文所示，该图实际上可能没有任何边，因此需要采用更精细的方法。特别地，我们给出一个实例，其中一个提案获胜，当且仅当它在奇数个议题上与逐议题多数一致；这是一个可能具有独立研究价值的组合学上的趣题。为方便起见，结果中的投票者/议题编号从0。开始。

	0	1	2	3	4
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	1	0
2	0	0	1	1	1
3	1	0	0	1	1
4	1	1	0	0	1

图3：定理20中的构造 $t = 5$. 这里，所有满足 p 且 $|p| \in \{1, 3, 5\}$ 的策略均获胜，而所有满足 $|p| \in \{0, 2, 4\}$ 的策略均失败。

定理20。 考虑一个具有奇数 $t = n$ 的判断矩阵 $\mathcal{P}$，其中选民 i 赞成议题 $\{i, i+1, \ldots, i+\lfloor t/2 \rfloor\}$，下标相加按模 t 计算。当且仅当 $|p|$ 为奇数时，提案 $p \in \mathbb{B}^t$ 获胜。图 *3* 展示了 $t = 5$ 对应的这一构造。

证明。为方便起见，我们将提案视为 $\{\pm 1\}^t$. 中的向量。令 $p \in \{\pm 1\}^t$ 为任意提案。为简洁起见，我们记 $b_i = b_{v_i,p}$. 注意到 $b_i = \sum_{j \in v_i} p_j - \sum_{j \notin v_i} p_j$. 观察到$b_i + b_{i+\lfloor t/2 \rfloor+1}$ 等于

$$\sum_{j=i}^{i+\lfloor t/2 \rfloor} p_j - \sum_{j=\lfloor t/2 \rfloor+1}^{i-1} p_j + \sum_{j=i+\lfloor t/2 \rfloor+1}^{i} p_j - \sum_{j=i+1}^{i+\lfloor t/2 \rfloor} p_j = 2p_i$$

为便于书写，记作 $g = \lfloor t/2 \rfloor + 1$.。由于 t 是奇数， g 是 $\mathbb{Z}_t$ 中的一个生成元；即 $\{ig\}_{0 \le i < t} = \mathbb{Z}_t$.。由上可知

$b_{ig} + b_{i+1}$ $p_{ig} \in \pm 1$ $2p_{ig} \equiv_{()g} = 2p_{ig\cdot}$。由于 $\{\}$, 2 4 . b_i $0 \le i < t$ 可得 (mod)。因为对于所有 ,, 均为奇数，上述结论意味着 $b_{ig} \equiv b_{(i+1)g} \pmod 4$. 由于 g 生成 $\mathbb{Z}_t$, 这意味着存在一个数 $c \in \{\pm 1\}$，使得 $b_i \equiv c \pmod 4$. 注意到

$$\sum_{i=0}^{t-1} b_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{t-1} b_i + \sum_{i=0}^{t-1} b_{i+\lfloor t/2 \rfloor+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{t-1}(b_i + b_{i+\lfloor t/2 \rfloor+1}) = \sum_{i=0}^{t-1} p_i$$

这意味着 $tc \equiv 2|p| - t$ (模 4)，由此可得 $t(c+1) \equiv 2|p|$ (模 4)，也就是说，若 $|p|$ 为奇数，则 $c = 1$；若 $|p|$ 为偶数，则 $c = -1$.

现在，由于 $b_{ig} + b_{(i+1)g} = 2p_{ig}$，且这两个加数都是奇数，注意到 b_{ig} 和 $b_{(i+1)g}$ 的符号相反，除非它们都为 1 或都为 -1。令 s_i 表示所有 $0 \le i < t$ 对应的 b_i 的符号。注意，$b_{p,\ \mathcal{P}} = \sum_{i=0}^{t-1} s_i$。现在，将 $b_{p,\ \mathcal{P}}$ 写成如下形式：

$$b_{p,\mathcal{P}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=0}^{t-1} s_{ig} + \sum_{i=0}^{t-1} s_{(i+1)g}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{t-1}(s_{ig} + s_{(i+1)g})$$

最后一个表达式等于 $c|S|$, 其中 $S \subseteq \mathbb{Z}_t$ 是满足 $s_{ig} = s_{(i+1)g}$ 的指标集合i；在所有其他情况下，符号相反。由于 c 取决于 $|p|$ 是偶数还是奇数，因此得出结论。□

注意，对于 $t = 7$，我们的构造具有这样的性质：不存在 $|p| = \lfloor t/2 \rfloor + 1$ 的不败提案，但存在具有更高 $|p|$ 的不败提案。这表明，尽管判断是否可能达到 $|p| > \lfloor t/2 \rfloor + 1$ 是 NP 困难的，我们的多项式算法确实不保证输出满足 $|p| = \lfloor t/2 \rfloor + 1$，的提案，这进一步阐明了我们先前的评论。