arXiv:2303.00664v1 [math.DG] 1 Mar 2023

非结合规范理论中的库仑规范

Sergey Grigorian

2023年3月2日

摘要

本文旨在将标准规范理论中关于库仑规范的存在性结果推广到非结合情形。非结合规范理论以光滑拟群为基础，它们是李群的非结合类比物。该理论的主要组成部分包括有限维光滑环 $\mathbb{L}$、其切代数 $\mathfrak{l}$、有限维李群Ψ（即 $\mathbb{L}$的伪自同构群）、光滑流形 M 及其主 Ψ-丛$\mathcal{P}$，以及纤维分别为 $\mathbb{L}$ 和 $\mathfrak{l}$的伴随丛 $\mathcal{Q}$ 和 $\mathcal{A}$ 。该理论中的构型定义为一对 (s,ω)，其中 s 是 $\mathbb{Q}$ 的截面， ω 是 $\mathcal{P}$上的联络。挠率 $T^{(s,\omega)}$ 是该理论中的关键对象，其作用类似于标准规范理论中的联络。本研究最初的动机来自 G_2-几何，以及关于具有特定挠率类型的 G_2-结构是否存在的问题。具体而言，给定一个固定联络，当挠率在某个索伯列夫范数下足够小时，我们证明存在具有散度为零的挠率的构型。

目录

1 引言 2 光滑环路 3 环路值映射 4 规范理论 5 G_2-流形 A 附录

1
5
19
34
42
46

1 引言

本工作的主要目标是将标准规范理论中关于库仑规范变换存在性的结果推广到非结合情形。微分几何、分析学与数理物理交汇处最为成功的领域之一便是规范理论。众所周知，规范理论研究的是以特定李群为结构群的丛上的联络。在 [26], 中，作者开创了一套光滑环路理论；光滑环路是李群的非结合类比。作者还开始发展基于环路的规范理论，即非结合规范理论。非结合光滑环的一个关键例子是单位八元数环路。非结合规范理论包含以下组成部分：

1. 一个有限维光滑（右）环 $\mathbb{L}$，即一个光滑流形，并且对每个 $p \in \mathbb{L}$ 都定义了右乘微分同胚 R_p，还具有一个指定的单位元 $1 \in \mathbb{L}$，其在单位元处的切代数为 $\mathfrak{l}$。2. 一个有限维李群 Ψ，它是 $\mathbb{L}$的伪自同构群；伪自同构群是自同构群的一种非结合推广。3. 一个光滑流形 M，其上有一个主 Ψ-丛 $\mathcal{P}$，以及纤维分别为 $\mathbb{L}$ 和 $\mathfrak{l}$的伴随丛 $\mathcal{Q}$ 与 $\mathcal{A}$。4. 构型定义为一对(s, ω)，其中 s是 $\mathcal{Q}$的截面，ω是$\mathcal{P}$. 上的联络。两者共同定义挠率 $T^{(s,\omega)}$，它是 M. 上的一个取值于 $\mathcal{A}$的1-形式。挠率是该理论中的关键对象，正如联络是标准规范理论中的关键对象。5. 除了由 Ψ对 ω 实施的标准规范变换外，我们现在还有由环乘法诱导的 s变换。这两类变换都会诱导挠率的变换。

研究非结合规范理论的最初动机源自 G_2-几何 [24]。七维黎曼流形上的 G_2-结构，是将正交标架丛的结构群从 $SO(7)$ 约化到 G_2；后者是八元数的自同构群。G_2-结构与八元数之间的另一层联系是，八元数丛的单位范数截面可以参数化与同一度量相容的 G_2-结构，也称为等距 G_2-结构。G_2-结构的一个决定性特征是其挠率，而 G_2-几何中尚未解决的问题之一，是在固定的度量类中哪些挠率类型是允许的。G_2-结构理论的主要目标之一，是证明无挠率 G_2-结构的存在性，这类似于丘成桐定理 [49], 对卡拉比－丘流形的存在性问题给出的解答。尽管这一目标是以 G_2-结构的形式提出的，真正的问题却是是否存在整体群等于 G_2. 的黎曼度量。对于每个度量，都存在一整族与之相容的 G_2-结构，这一事实使该问题出现了退化。现有的一些方法涉及 G_2-结构的拉普拉斯流 [4, 5, 7, 8, 9, 23, 21, 33, 38, 39, 40]，希望流最终收敛到无挠率的 G_2-结构。如 [21], 所示，一般 G_2-结构的拉普拉斯流有一个分量会在同一度量类中移动，而该分量恰好由 $\operatorname{div} T$. 给出。对于闭 G_2-结构，拉普拉斯流的效果更好；在这种情况下，$\operatorname{div} T$ 自动为零，因此退化问题得以解决。不过，更一般地说，这种退化正是拉普拉斯流出现非抛物性的根源，例如在余闭 G_2-结构的情形下 [21]。因此，条件 $\operatorname{div} T = 0$ 可以视为一种规范固定条件。此外，[24], 发现，在紧流形上，满足 $\operatorname{div} T = 0$ 的 G_2-结构，恰好是将挠率的 L^2-范数限制在固定度量类时的临界点。如 [24, 26], 所示，在环丛框架下，这正是库仑规范条件的对应物。

若干作者从不同角度研究了具有散度为零的挠率的 G_2-结构的存在性：Bagaglini 于 [3]; Dwivedi、Gianniotis 和 Karigiannis 于 [12]；本文作者于[25]；Loubeau 和 S´a Earp 于 [41]。这些方法都依赖于等距 G_2-结构（或更一般地，[41] 和 [13]中的几何结构）的流，并证明了在逐点初始挠率足够小或另一种量——熵——足够小的条件下，具有散度为零的挠率的 G_2-结构可作为该流的长期极限而存在。

将等距 G_2-结构解释为八元数非结合规范理论，便可在这一框架下运用一些规范理论技术。此外，无需付出太多额外努力，还可以考虑更一般的环路，这可能带来更广泛的应用。

在规范理论中，根据所需的正则性 [11, 14, 15, 16, 17, 47, 48]，关于库仑规范下联络的局部和整体存在性结果有多种版本。本文采用 [17], 中给出的巴拿赫空间定量隐函数定理，证明以下主要结果。

定理A 设 $\mathbb{L}$ 是一个光滑紧致环，其切代数为 $\mathfrak{l}$ ，伪自同构群为 $\Psi.$ 。设（M, g）是一个维数为 $n \geq 2$的闭黎曼流形，且 $\mathcal{P}$ 是 M 上的一个Ψ-主丛， $\mathcal{A}$ 是与 $\mathcal{P}$ 相关联的向量丛，其纤维同构于$\mathfrak{l}$。设 ω 是 $\mathcal{P}.$ 上的一个光滑联络。此外，设 k 是一个非负整数，且 $r \geq 0$ 满足$kr > n.$。那么，存在常数 $\delta \in (0, 1]$ 以及 $K \in (0, \infty)$ ，使得若 $s \in \Gamma(\mathcal{Q})$ 是一个满足下述条件的光滑定义截面

$$\left\| T^{(s,\omega)} \right\|_{W^{k-1,r}} < \delta,$$

那么存在一个截面 $A \in W^{k,r}(\mathcal{Q}')$，使得

$$(d^{\omega})^* T^{(As,\omega)} = 0$$

and

$$\left\| T^{(As,\omega)} \right\|_{W^{k-1,r}} < K \left\| T^{(s,\omega)} \right\|_{W^{k-1,r}} \left(1 + \left\| T^{(s,\omega)} \right\|_{W^{k-1,r}}^{k-1} \right). \tag{1.1}$$

此外，如果 $(k-1)r \geq n$，那么 A 是光滑的。

对于 G_2-结构，这给出了以下关于存在挠率散度为零的光滑 G_2-结构的结果。

定理B 设 M 是一个闭七维流形，带有光滑的 G_2-结构 φ ，其挠率为 T ，相对于列维-奇维塔联络 $\nabla.$ 。设 $U\mathbb{O}M$ 是相应的单位八元数丛。此外，设 k 是一个正整数， r 是一个正实数，使得 $kr > 7.$。那么，存在常数 $\delta \in (0, 1]$ 和 $K \in (0, \infty)$，使得若 T满足

$$\|T\|_{W^{k,r}} < \delta,$$

那么存在一个光滑截面 $V \in \Gamma(U\mathbb{O}M)$，使得

$$\operatorname{div} T^{(V)} = 0$$

and

$$\left\| T^{(V)} \right\|_{W^{k,r}} < K \|T\|_{W^{k,r}} \left(1 + \|T\|_{W^{k,r}}^{k} \right). \tag{1.2}$$

本文所呈现的结果本身就很有趣且意义重大，但或许更重要的是，它们表明，经典规范理论中的一些著名结果和技巧可以在非结合背景下重新诠释并加以应用。特别是，这或许能为 Uhlenbeck 紧性的一些类比结果打开大门，并有助于更深入地理解非结合规范理论的挠率。此外，还可以考虑杨-米尔斯方程的非结合版本。而且，任何此类进展都将在 G_2-几何中带来直接结果。

本文的结构如下。第 2 节中，我们概述光滑环，推广了 [26]。我们给出光滑拟群 $\mathbb{L}$ 的基本性质，定义伪自同构

群 Ψ 以及单位元处的切代数 $\mathfrak{l}$。代数 $\mathfrak{l}$ 是李代数的推广，但由于 $\mathbb{L}$ 的非结合性，它不满足雅可比恒等式。与李代数的情形类似，也有指数映射的概念。然而，在 $\mathfrak{l}$上存在一族括号 $[\cdot,\cdot]^{(s)}$，它们针对每一点 $s\in\mathbb{L}$. 定义。为供后续使用，我们还给出指数映射和伴随映射的估计。特别地，我们分析以下关于取值于 $\mathfrak{l}$ 的映射 $\eta(t)$ 的初值问题：

$$\begin{cases} \frac{d\eta(t)}{dt}=[\xi,\eta(t)]^{(\exp_s(t\xi)s)} \\ \eta(0)=\eta_0 \end{cases}, \tag{1.3}$$

其中 $\xi\in\mathfrak{l}$ 和 $s\in\mathbb{L}$.

在第3节中，我们将注意力转向环路值映射。具体而言，给定一个光滑流形 M，考虑一个映射 $s:M\longrightarrow\mathbb{L}$. 利用此映射，我们可以定义 $\mathbb{L}$-值映射的乘积以及 $\mathfrak{l}$-值映射的括号。然后，利用右商，将微分 ds 平移到 $1\in\mathbb{L}$处的切空间，我们得到 M上的一个 $\mathfrak{l}$-值1-形式 θ_s，它是李群值映射 [45] 的Darboux导数的类似物。由 s 定义的各种运算的微分随后可用 θ_s. 表示。假设 $A(t)=\exp_s(t\xi)$, 其中 ξ. 是某个 $\mathfrak{l}$-值映射。我们证明 $\theta_{A(t)s}$ 满足(1.3)的一个非齐次版本。

此外，我们定义从 M到 $s\in W^k$的映射的索引空间，并在引理 3.9中证明，与李群的情形类似，$s\in W^{k,r}(M,\mathbb{L})$ 当且仅当 $\theta_s\in W^{k-1,r}(M,T^*M\otimes\mathfrak{l})$。利用 $\theta_{A(t)s}$ 所满足的演化方程，我们随后可以得到 $\theta_{A(t)s}$ 以及其他满足基于(1.3)的方程的量的索引空间估计。

定理C 设 M 为紧黎曼流形， $\mathbb{L}$ 为光滑紧致环。假设$kr>n=$维数为 M. 设 $s\in W^{k,r}(M,\mathbb{L})$且 $\xi\in W^{k,r}(M,\mathfrak{l})$，并假设 $A=\exp_s(\xi)$。则，

$$\|\theta_{As}\|_{W^{k-1,r}}\lesssim e^{Ck\|\xi\|_{C^0}}\left(\Theta^k+\Theta\right), \tag{1.4}$$

其中 $\Theta=\|\theta_s\|_{W^{k-1,r}}+\|\xi\|_{W^{k,r}}$.

S类似地，如果 $X=X(1)$，其中 $X(t)$是满足以下条件的 $\mathfrak{l}$值映射的单参数族 s

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt}=[\xi,X(t)]^{A(t)s}+Y \\ X(0)=X_0, \end{cases}$$

对于 $\mathfrak{l}$值映射 X_0 和 Y，则，

$$\|X\|_{W^{k,r}}\lesssim e^{C(k+1)\|\xi\|_{C^0}}\left(\|X_0\|_{W^{k,r}}+\|Y\|_{W^{k,r}}\right)\left(\Theta^{k+1}+\Theta\right). \tag{1.5}$$

在第4节中，我们在紧流形 M 上引入主 Ψ-丛 $\mathcal{P}$，随后将上述结果应用于从 $\mathcal{P}$ 到环 $\mathbb{L}$ 及其他相关空间的 Ψ-等变映射。这使我们能够立即考虑与 $\mathcal{P}$. 相关联的、定义在 M 上的丛的截面。具体而言，假设我们在 $\mathcal{P}$ 上有一个联络 ω，且 s 是相关联的环丛 $\mathcal{Q}$ 的一个截面，其纤维与 $\mathbb{L}$. 微分同胚。它唯一对应于一个 Ψ-等变映射 $\tilde{s}:\mathcal{P}\longrightarrow\mathbb{L}$，因此我们得到定义在 $\mathcal{P}$. 上的等变 $\mathfrak{l}$-值 1-形式 $\theta_{\tilde{s}}$。另一方面，联络 ω 将 $T\mathcal{P}$ 分解为垂直子空间和水平子空间。因此，我们可以将 $\theta_{\tilde{s}}$ 与水平投影复合，从而得到一个基本的（即水平且等变的） $\mathfrak{l}$-值 1-形式，其定义在 $\mathcal{P}$. 上。接着，这对应于定义在 M 上的一个丛的截面，并给出构型 (s,ω) 的挠率 $T^{(s,\omega)}$。通过定义纤维逐点的环乘法，我们看到，所有具有固定 ω 的可能构型，都可以通过将 s 与某个截面 A. 相乘而得到。因此，环规范变换恰好就是变换 $s\mapsto As$.。此外，正如先前已知的，在环满足适当代数条件的情况下，泛函 [24, 25, 27, 26, 41], 的临界点

vol 正是满足 $(d^{\omega})^{*}\, T_{(s,\omega)}=0$ 的截面 s，这与前面对散度为零的挠率和库仑规范的讨论有关。

考虑形如 $s\mapsto \exp_s(\xi)\, s$ 的 s 变换，其中 ξ 是取值于 $\mathfrak{l}$ 的截面，并利用第 2 节中发展的环指数映射，可证明量 $T_{(\exp_s(t\xi)s,\ \omega)}$ 满足一个齐次部分具有形式 (1.3) 的常微分方程。这使得可以用 (1.3) 的演化算子来改写 $T_{(\exp_s(t\xi)s,\ \omega)}$。随后，将方程 $(d^{\omega})^{*}\, T^{(\exp_s(\xi)s,\ \omega)}=0$ 写成关于 $\xi.$ 的二阶偏微分方程。该算子由此定义了适当的向量丛截面巴拿赫空间之间的光滑函数映射，从而可以应用 [17], 中的隐函数定理，证明当初始 $T^{(s,\omega)}$ 在适当的索伯列夫范数下足够小时解的存在性，并由此证明定理A。

在第5节中，我们仔细地将光滑环路的一般理论应用于 G_2-结构这一特例，定理B 随即作为定理A的直接推论得出。

致谢
作者获得了美国国家科学基金会项目 DMS-1811754 的资助。

2 光滑环

关于光滑环的详细介绍，请参阅 [26]。关于这些概念的讨论，也可参阅 [29, 34, 43, 44, 46] 。

定义2.1 环 $\mathbb{L}$ 是一个集合，配备二元运算 $p\cdot q$、单位元 1，以及相容的左商 $p\backslash q$ 和右商 p/q。

特别地，商的存在等价于：对于任意 $q\in\mathbb{L}$，左乘法映射 L_q 和右乘法映射 R_q 都是可逆映射。将讨论限制在光滑范畴中，便得到光滑拟群的定义。

定义2.2 光滑拟群是一个光滑流形 $\mathbb{L}$，其上带有拟群结构，使得左乘法映射和右乘法映射都是 $\mathbb{L}$.的微分同胚

注记2.3 在本文中，我们不会使用左商，因此实际上，下面的所有内容同样适用于光滑右环路，即只定义了右商，而左乘法不一定可逆。不过，为简洁起见，我们仍将其称为环路，而不是右环路。正如下方的例2.4所示，光滑右环十分常见且易于构造。

例2.4 假设 G 是一个李群，带有一个李子群 H，并考虑左商 $K=_H G$。假设 $\sigma:\ K\longrightarrow G$ 是 G 的一个截面，将其视为以 $K.$ 为底空间的丛。特别地，σ 将每个右陪集映射到该陪集的一个特定代表元。假设 $\sigma（H）=1.$ 于是，K 上的乘法结构由下式给出

$$(Ha)\circ(Hb)=Ha\,(\sigma\,(Hb))\,. \tag{2.1}$$

考虑方程 $(Hx)\circ(Ha)=Hb$，由于 σ 是一个截面，我们可以立即看出有唯一解 $Hx=Hb\,(\sigma\,(Ha))^{-1}$.因此，$(\mathbb{L},\circ)$ 有右除法，因而是一个右拟群[34, 43]。要定义左除法，从而获得完整的拟群结构，还需要更多结构。

定义 2.5 光滑拟群 $\mathbb{L}$ 的伪自同构是微分同胚 $h:\ \mathbb{L}\longrightarrow\mathbb{L}$，且存在另一个微分同胚 $h':\ \mathbb{L}\longrightarrow\mathbb{L}$，称为与 h对应的部分伪自同构，使得对于任意 $p,q\in\mathbb{L}$,

$$h\,(pq)=h'\,(p)\,h\,(q)\,. \tag{2.2}$$

特别地，$h' = R_{h\ 1()}^{-1} \circ h$ 和 $h'(1) = 1$. 元素 $h(1) \in \mathbb{L}$ 是 h'. 的伴随元。从 (2.2) 中，我们还可以看到 h' 关于商的以下性质：

$$h'(p/q) = h(p)/h(q). \tag{2.3}$$

容易看出，伪自同构和部分伪自同构的集合都是群。将前者记为 Ψ ，后者记为 Ψ'。我们还可以看到，环 $\mathbb{L}$ 的自同构群是子群 $H \subset \Psi$ ，该子群是 $1 \in \mathbb{L}$. 的稳定子

注 2.6 为避免引入额外的记号，但也可能造成一些歧义，我们将使用相同的记号 $\mathbb{L}$ 来表示底层流形、环以及带有 Ψ 的完全作用的 G-集。然而，由于 $\mathbb{L}$ 也允许 Ψ' 的作用，如果需要区分这些 G-集，我们将使用 $\mathbb{L}'$ 来表示带有 Ψ' 的作用的集合 $\mathbb{L}$ ，

设 $r \in \mathbb{L}$，则我们可以通过 $p \circ_r q = (p \cdot qr)/r$ 在 $\mathbb{L}$ 上定义修正乘积 $\circ_r$，从而将配备乘积 $\circ_r$ 的 $\mathbb{L}$ 记为 $(\mathbb{L}, \circ_r)$，相应的商记为 $/_r$. 。我们有以下性质 [26]。

引理 2.7 设 $h \in \Psi$。那么，对于任意的 p、q、$r \in \mathbb{L}$，

$$h'(p \circ_r q) = h'(p) \circ_{h(r)} h'(q) \qquad h'(p/_r q) = h'(p)/_{h(r)} h'(q). \tag{2.4}$$

此外，对于任意的 $A \in \mathbb{L}$，

$$(p \circ_r (q \circ_r A))/_r A = p \circ_{Ar} q. \tag{2.5}$$

引理 2.8 设 $A(t)$ 和 $B(t)$ 是 $\mathbb{L}$ 中的光滑曲线，且 $A(t_0) = A_0$ 和 $B(t_0) = B_0$，则

$$\frac{d}{dt} A(t)/B(t)\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt} A(t)/B_0\Big|_{t=t_0} - \frac{d}{dt} (A_0/B_0 \cdot B(t))/B_0\Big|_{t=t_0}. \tag{2.6}$$

考虑切空间 $\mathfrak{l} := T_1\mathbb{L}$ 在 $1 \in \mathbb{L}$. 处。对于任意的 $q \in \mathbb{L}$，右平移映射 R_q 的推前 $(R_q)_*$ 定义了一个从 $\mathfrak{l}$ 到 $T_q\mathbb{L}$. 的线性同构。特别地，记线性映射 $(R_q)_*\big|_1 : \mathfrak{l} \longrightarrow T_q\mathbb{L}$ 为 ρ_q，相应地，记 $\left(R_q^{-1}\right)_*\Big|_1 : T_q\mathbb{L} \longrightarrow \mathfrak{l}$ 为 ρ_q^{-1}. 。类似地，对于左乘法，定义 $\lambda_q = (L_q)_*\big|_1 : \mathfrak{l} \longrightarrow T_q\mathbb{L}$. 。在光滑右环路上， λ_q 不一定可逆。关于乘积 $\circ_r$ 的相应映射记为 $R_q^{(r)}$、 $\rho_q^{(r)}$、$\lambda_q^{(r)}$。

定义 2.9 对任意 $\xi \in \mathfrak{l}$，定义基本向量场 ρ $\rho_q \xi$. $\rho_q = (\xi)$，其中任意 $q \in \mathbb{L}$，$(\xi)()$

上述基本向量场的定义是李理论中右不变向量场的类似物。然而，在环的情形下，尽管该向量场在某种意义上是规范的，但它并不在右平移下保持不变。我们使用基本向量场来定义环指数映射。

定义 2.10 假设 $\mathbb{L}$ 是一个光滑拟群，并假设 $q \in \mathbb{L}$. 那么，给定 $\xi \in \mathfrak{l}$，对于足够小的 t，定义

$$p(t) = \exp_q(t\xi)\, q. \tag{2.7}$$

为方程的解

$$\begin{cases} \frac{dp(t)}{dt} = \rho(\xi)|_{p(t)} \\ p(0) = q \end{cases}. \tag{2.8}$$

等价地，$\tilde{p}(t) = \exp_q(t\xi)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{p}(t)}{dt} = \rho^{(q)}(\xi)\big|_{\tilde{p}(t)} \\ \tilde{p}(0) = 1 \end{cases}. \tag{2.9}$$

注 2.11 一般而言，解 $\exp_q$ 只在 $0 \in \mathfrak{l}$ 的某个邻域内有定义；然而，如 *[36, 42],* 所示，若环 $\mathbb{L}$ 是幂结合的，即元素 $p \in \mathbb{L}$ 的幂满足结合律，则 $p(nh) = p(h)^n$ 可以明确定义。我们将在下文从不同的角度证明这一点。由此便可将解 $p(t)$ 定义在所有 t 上，从而将 $\exp_q$ 扩展到所有 $\mathfrak{l}$. 上。

我们来考察 $d\exp_q \cdot$。根据 $\exp_q$ 的定义，对于任意 $\xi \in \mathfrak{l}$，有

$$d\exp_q\big|_0(\xi) = \frac{d}{dt}\exp_q(t\xi)\Big|_{t=0} = \xi. \tag{2.10}$$

特别地，$\exp_s$ 是光滑的；又由于恒等映射是线性同构，根据反函数定理，我们得到如下结论。

引理 2.12 对任意 $q \in \mathbb{L}$，映射 $\exp_q : \mathfrak{l} \longrightarrow \mathbb{L}$ 在 $0 \in \mathfrak{l}$ 附近是局部微分同胚。

注 2.13 为了区分 $\mathfrak{l}$ 上的指数映射与 $\mathfrak{p}$ 上的指数映射，我们将使用下标来表示指数映射所对应的 $\mathbb{L}$ 元素。$\mathfrak{p}$ 上的指数映射不带下标。

对于光滑环，我们可以定义一种类似于李群毛雷-卡当形式的形式。

定义 2.14（[**26**]）Maurer-Cartan形式 θ 是一个取值于 $\mathfrak{l}$ 的 1-形式，定义在 $\mathbb{L}$ 上，使得对于任意向量场 X 以及任意 $p \in \mathbb{L}$, $\theta(X)|_p = \rho_p^{-1}(X_p) \in \mathfrak{l}$. 等价地，对于任意 $\xi \in \mathfrak{l}$, $\theta(\rho(\xi)) = \xi$.

环的 Maurer-Cartan 形式使我们能够在 $\mathfrak{l}$. 上定义括号。对于每个 $p \in \mathbb{L}$，定义括号$[\cdot,\cdot]^{(p)}$，对任意 $\xi, \eta \in \mathfrak{l}$，其定义为

$$[\xi,\eta]^{(p)} = -\theta([\rho(\xi), \rho(\eta)])|_p.$$

如 [26, 定理 3.7], 所示，我们也可以等价地定义

$$\begin{aligned} [\xi,\gamma]^{(p)} &= \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Ad}^{(p)}_{\exp(t\xi)}\gamma\right)\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d^2}{dtd\tau}\exp(t\xi)\circ_p\exp(\tau\gamma)\Big|_{t,\tau=0} \\ &\quad - \frac{d^2}{dtd\tau}\exp(\tau\gamma)\circ_p\exp(t\xi)\Big|_{t,\tau=0}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

其中，对于 $p, q \in \mathbb{L}$，$\mathrm{Ad}^{(p)}_q$: $\mathfrak{l} \longrightarrow \mathfrak{l}$ 是共轭映射 $r \mapsto (q \circ_p r)/_p q \in \mathbb{L}$.在 $1 \in \mathbb{L}$ 处的微分

注 2.15 在 *[26],* 中，共轭映射 $r \mapsto (q \circ_p r) /_p q$ 记作 $\mathrm{Ad}_q^{(p)}$，其微分记作 $\left(\mathrm{Ad}_q^{(p)}\right)_*$. 。不过，这里我们采用了更符合李理论标准用法的记号。

定义2.16 配备括号 $[\cdot,\cdot]^{(p)}$ 的向量空间 $\mathfrak{l}$ 称为环切代数 $\mathfrak{l}^{(p)}$.

定义括号函数 b： $\mathbb{L} \longrightarrow \mathfrak{l} \otimes \Lambda^2 \mathfrak{l}^*$ 为如下映射：它将 $p \mapsto [\cdot,\cdot]^{(p)} \in \mathfrak{l} \otimes \Lambda^2 \mathfrak{l}^*$映射为 $b(\theta,\theta)$，因此后者是 $\mathbb{L}$上的一个 $\mathfrak{l}$值二形式，即 $b(\theta,\theta) \in \Omega^2(\mathfrak{l})$。

定义2.17 对任意 η、 γ、 $\xi \in \mathfrak{l}$和 $p \in \mathbb{L}$，在 $\mathfrak{l}^{(p)}$ 上的结合子 $[\cdot,\cdot,\cdot]^{(p)}$ 定义为

$$\begin{aligned}[\eta,\gamma,\xi]^{(p)} &= \frac{d^3}{dtd\tau d\tau'} \exp(\tau\eta) \circ_p (\exp(\tau'\gamma) \circ_p \exp(t\xi))\Big|_{t,\tau,\tau'=0} \\ &\quad - \frac{d^3}{dtd\tau d\tau'} (\exp(\tau\eta) \circ_p \exp(\tau'\gamma)) \circ_p \exp(t\xi)\Big|_{t,\tau,\tau'=0}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

此外，定义 $\mathbb{L}$ 与 $\mathfrak{l}$中元素之间的混合结合子。对于任意 p、 $q \in \mathbb{L}$ 和 $\xi \in \mathfrak{l}$，定义一个$(\mathbb{L},\mathbb{L},\mathfrak{l})$-结合子为

$$[p,q,\xi]^{(s)} = \left(L_p^{(s)} \circ L_q^{(s)}\right)_* \xi - \left(L_{p\circ_s q}^{(s)}\right)_* \xi \in T_{p\circ_s q}\mathbb{L} \tag{2.13}$$

而对于一个 $p \in \mathbb{L}$和 η、 $\xi \in \mathfrak{l}$，定义一个$(\mathbb{L},\mathfrak{l},\mathfrak{l})$-结合子为

$$\begin{aligned}[p,\eta,\xi]^{(s)} &= \frac{d}{dtd\tau} (p \circ_s (\exp(t\eta) \circ_s \exp(\tau\xi)))\Big|_{t,\tau=0} \\ &\quad - \frac{d}{dtd\tau} ((p \circ_s \exp(t\eta)) \circ_s \exp(\tau\xi))\Big|_{t,\tau=0},\end{aligned} \tag{2.14}$$

由此可见 $[p,\eta,\xi]^{(s)} \in T_p\mathbb{L}$. 。其他组合也类似。此外，定义左交替结合子 a： $\mathbb{L} \longrightarrow \mathfrak{l} \otimes \Lambda^2 \mathfrak{l}^* \otimes \mathfrak{l}^*$，其定义为

$$a_p(\eta,\gamma,\xi) = [\eta,\gamma,\xi]^{(p)} - [\gamma,\eta,\xi]^{(p)}. \tag{2.15}$$

我们可以称之为左交替结合子。

注 2.18 根据结合子的定义，很容易看出，若 $(\mathbb{L},\circ_s)$ 是幂结合的，给定 $\xi \in \mathfrak{l}$，则三个位置中任意组合的 ξ 和 $\exp_s(t\xi)$ 所构成的结合子，对于任意 t 的取值，都将为零。例如，

$$[\xi,\xi,\xi]^{(s)} = 0 \tag{2.16a}$$

$$[\xi,\xi,\exp_s(t\xi)]^{(s)} = 0 \tag{2.16b}$$

$$[\xi,\exp_s(t\xi),\exp_s(\tau\xi)]^{(s)} = 0, \tag{2.16c}$$

以及任意排列。

同样，如果 $(\mathbb{L},\circ_s)$ 是左幂结合的，那么前两个位置由 ξ 和 $\exp_s(t\xi)$ 任意组合而成的结合子都将消失，例如

$$\begin{aligned}[\xi,\xi,\eta]^{(s)} &= 0 &(2.17a)\\ [\xi,\exp_s(t\xi),\eta]^{(s)} &= 0 &(2.17b)\\ [\exp_s(t\xi),\exp_s(\tau\xi),\eta]^{(s)} &= 0, &(2.17c)\end{aligned}$$

对于任意 $\eta\in\mathfrak{l}$，同样地，将第三个条目替换为 $\mathbb{L}$. 中的一个元素

由 [26]，我们引用这些括号和结合子的几个有用性质。

定理 2.19（[**26,** 定理 **3.20**]）设 p、$s\in\mathbb{L}$ 和 ξ、$\eta\in\mathfrak{l}.$，则括号 $[\cdot,\cdot]^{(ps)}$ 与 $[\cdot,\cdot]^{(s)}$ 通过以下表达式相关

$$[\xi,\eta]^{(ps)}=[\xi,\eta]^{(s)}+\left(\rho_p^{(s)}\right)^{-1}a_s(\xi,\eta,p). \tag{2.18}$$

定理 2.20（[**26,** 定理 **3.10**]）形式 θ 满足

$$d\theta=\frac{1}{2}b(\theta,\theta), \tag{2.19}$$

其中默认 **1**-形式的楔积。此外，对于任意 ξ、$\eta\in\mathfrak{l}$，我们有

$$db(\xi,\eta)=a(\xi,\eta,\theta). \tag{2.20}$$

由此可得 ξ、η、$\gamma\in\mathfrak{l}$，广义 Jacobi 恒等式成立：

$$\mathrm{Jac}^{(s)}(\xi,\eta,\gamma)=a_s(\xi,\eta,\gamma)+a_s(\eta,\gamma,\xi)+a_s(\gamma,\xi,\eta), \tag{2.21}$$

其中

$$\mathrm{Jac}^{(s)}(\xi,\eta,\gamma)=\left[\xi,[\eta,\gamma]^{(s)}\right]^{(s)}+\left[\eta,[\gamma,\xi]^{(s)}\right]^{(s)}+\left[\gamma,[\xi,\eta]^{(s)}\right]^{(s)}. \tag{2.22}$$

注 2.21 方程 **(2.19)** 是环的毛雷尔–嘉当方程。它与李群上的毛雷尔–嘉当方程的关键区别在于：在非结合环上，$b(s)$ 在$\mathbb{L}$上不是常数；而在李群上，李代数上有唯一的括号，因此 $b(s)$ 是常数。特别地，非恒定的 b 导致非平凡的结合子 **(2.20)**，并使标准雅可比恒等式不再成立。

相对于 Ψ 的作用，括号和结合子满足以下性质。

引理 2.22 若 $h\in\Psi$ 和 $q\in\mathbb{L}$，则对任意的 ξ、η、$\gamma\in\mathfrak{l}$，

$$\begin{aligned}h'_*[\xi,\eta]^{(q)} &= [h'_*\xi,h'_*\eta]^{h(q)}\\ h'_*[\xi,\eta,\gamma]^{(q)} &= [h'_*\xi,h'_*\eta,h'_*\gamma]^{h(q)}.\end{aligned}$$

若 $A(t)$ 是 $\mathbb{L}$ 上的一条路径，且 $A(t_0)=A_0$，而 $\frac{d}{dt}A(t)/A_0\big|_{t=t_0}=\xi\in\mathfrak{l}$，则对任意的 p、$q\in\mathbb{L}$，

$$\frac{d}{dt}p\circ_{A(t)}q\bigg|_{t=t_0}=[p,q,\xi]^{(A_0)}\in T_{p\circ_{A_0}q}\mathbb{L}. \tag{2.23}$$

此外，对于任意 $\eta,\gamma\in\mathfrak{l}$，

$$\frac{d}{dt}[\eta,\gamma]^{A(t)}\bigg|_{t=t_0}=a_{A_0}(\eta,\gamma,\xi) \tag{2.24}$$

证明。第一部分见 [26, 引理 3.17]。为证明 (2.23)，考虑

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}p\circ_{A(t)}q\right|_{t=t_0} &= \left.\frac{d}{dt}\left(p\left(qA\left(t\right)\right)\right)/A\left(t\right)\right|_{t=t_0}\\ &= \left.\frac{d}{dt}\left(p\left(qA\left(t\right)\right)\right)/A_0\right|_{t=t_0}-\left.\frac{d}{dt}\left(\left(p\circ_{A_0}q\right)\cdot A\left(t\right)\right)/A_0\right|_{t=t_0},\end{aligned}$$

其中我们用到了 (2.6)。现在，

$$\begin{aligned}\left(p\left(qA\left(t\right)\right)\right)/A_0 &= \left(p\left(q\left(A\left(t\right)/A_0\cdot A_0\right)/A_0\cdot A_0\right)\right)/A_0\\ &= p\circ_{A_0}\left(q\circ_{A_0}\left(A\left(t\right)/A_0\right)\right)\\ \left(\left(p\circ_{A_0}q\right)\cdot A\left(t\right)\right)/A_0 &= \left(p\circ_{A_0}q\right)\circ_{A_0}\left(A\left(t\right)/A_0\right).\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}p\circ_{(t)}q\right|_{t=t_0} &= \left.\frac{d}{dt}p\circ_{A_0}\left(q\circ_{A_0}\left(A\left(t\right)/A_0\right)\right)\right|_{t=0}\\ &\quad-\left.\frac{d}{dt}\left(p\circ_{A_0}q\right)\circ_{A_0}\left(A\left(t\right)/A_0\right)\right|_{t=0}.\end{aligned}$$

为证明 (2.24)，我们可以使用 (2.20)，但更直接地说，可以根据定义并利用 (2.11) 得到：

$$\begin{aligned}\left[\xi,\gamma\right]^{(A(t))} &= \left.\frac{d^2}{d\tau d\tau'}\exp\left(\tau\eta\right)\circ_{A(t)}\exp\left(\tau'\gamma\right)\right|_{\tau,\tau'=0}\\ &\quad-\left.\frac{d^2}{d\tau d\tau'}\exp\left(\tau'\gamma\right)\circ_{A(t)}\exp\left(\tau\eta\right)\right|_{\tau,\tau'=0}.\end{aligned}\tag{2.25}$$

然后，由 (2.23) 得到，

$$\begin{aligned}\left.\frac{d}{dt}\exp\left(\tau\eta\right)\circ_{A(t)}\exp\left(\tau'\gamma\right)\right|_{t=t_0} &= \left[\exp\left(\tau\eta\right),\exp\left(\tau'\gamma\right),\xi\right]^{(A_0)}\\ \left.\frac{d}{dt}\exp\left(\tau'\gamma\right)\circ_{A(t)}\exp\left(\tau\eta\right)\right|_{t=t_0} &= \left[\exp\left(\tau'\gamma\right),\exp\left(\tau\eta\right),\xi\right]^{(A_0)}\end{aligned}$$

再由定义 (2.12)，我们得到 (2.24)。 ■

设 $\xi\in\mathfrak{l}$ 和 $s\in\mathbb{L}.$。再设 $A(t)=\exp_s(t\xi)$，其中 t 属于包含 0 的某个区间 $I\subset\mathbb{R}$。接着，考虑满足以下初值问题的一族 $\eta(t)\in\mathfrak{l}$：

$$\begin{cases}\frac{d\eta(t)}{dt}=\left[\xi,\eta\left(t\right)\right]^{(A(t)s)}\\ \eta\left(0\right)=\eta_0\end{cases}.\tag{2.26}$$

换言之，这是一个一阶线性常微分方程 $\dot{\eta}=\mathrm{ad}_\xi^{(A(t)s)}\eta$，因此对于所有 $t\in I$，存在一个演化算子 $U_\xi^{(s)}(t)\in GL(\mathfrak{l})$，满足 $U_\xi^{(s)}(0)=\mathrm{id}_\mathfrak{l}$，使得

$$\eta\left(t\right)=U_\xi^{(s)}\left(t\right)\eta_0.\tag{2.27}$$

根据标准常微分方程理论，回顾可知，如果 $\tau', \tau'' \in I$，那么 $U_{(s)\xi}(\tau'')\, U_{(s)\xi}(\tau')^{-1}$是从 τ'到 τ'' 的演化算子，其表达式为:

$$\begin{aligned} U_{\xi}^{(s)}(\tau'')\, U_{\xi}^{(s)}(\tau')^{-1} &= \mathrm{id}_{\mathfrak{l}} + \int_{\tau'}^{\tau''} \mathrm{ad}_{\xi}^{((\exp_s t_1 \xi) s)}\, dt_1 \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{\tau'}^{\tau''} \int_{\tau'}^{t_n} \cdots \int_{\tau'}^{t_2} \mathrm{ad}_{\xi}^{((\exp_s t_n \xi) s)} \cdots \mathrm{ad}_{\xi}^{((\exp_s t_1 \xi) s)}\, dt_1 \ldots dt_n. \end{aligned} \tag{2.28}$$

$U_{\xi}^{(s)}(t)$ 的以下性质可立即得到。

引理 2.23 演化算子 $U_{\xi}^{(s)}(t)$ 满足以下性质:

1. $U_{(s)\tau\xi}(t) = U_{(s)\xi}(\tau t)$，对于任意 t 和 τ，只要 $\exp_s(t\xi)$ 和 $\exp_s(\tau t \xi)$ 都有定义 .
2. $U_{\xi}^{(s)}(t)\, \xi = \xi$.
3. 如果 $\mathbb{L}$ 是紧致的，且 $\mathfrak{l}$ 配备了内积，那么在相容的算子范数下，存在一个常数 $C = \sup_{s\in\mathbb{L}} |b_s|$, 使得

$$\left| U_{\xi}^{(s)}(\tau'')\, U_{\xi}^{(s)}(\tau')^{-1} - \mathrm{id}_{\mathfrak{l}} \right| \leq e^{C|\tau''-\tau'||\xi|} - 1. \tag{2.29}$$

证明。第 1 项由对（2.26）进行变量代换得到。对于第 2 项，考虑

$$X(t) = U_{\xi}^{(s)}(t)\, \xi - \xi.$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= \frac{d\left(U_{\xi}^{(s)}(t)\, \xi\right)}{dt} = \left[\xi, U_{\xi}^{(s)}(t)\, \xi\right]^{(A(t)s)} \\ &= \left[\xi, X(t)\right]^{(A(t)s)}, \end{aligned}$$

由于 $[\xi, \xi]^{(A(t))} = 0$. 因此， $X(t) = U_{\xi}^{(s)}(t)\, X(0)$，但 $X(0) = 0$，所以对于所有 t, $X(t) = 0$。对于该估计，由 (2.28) 可得

$$\begin{aligned} \left| U_{\xi}^{(s)}(\tau'')\, U_{\xi}^{(s)}(\tau')^{-1} - \mathrm{id}_{\mathfrak{l}} \right| &\leq \exp\left(\int_{\tau'}^{\tau''} \left| \mathrm{ad}_{\xi}^{((\exp_s t\xi) s)} \right| dt \right) - 1 \\ &\leq \exp\left(|\tau'' - \tau'|\, |\xi| \sup_{s\in\mathbb{L}} |b_s| \right) - 1 \end{aligned}$$

现在， $s \mapsto |b_s|$ 是紧流形上的光滑实值映射，因此有界。因此，存在常数 $C = \sup_{s\in\mathbb{L}} |b_s|$，从而 $\sup_{t\in[0,1]} \left| b_{(\exp_s t\xi) s} \right| \leq C$. 于是,

$$\left| U_{\xi}^{(s)}(\tau'')\, U_{\xi}^{(s)}(\tau')^{-1} - \mathrm{id}_{\mathfrak{l}} \right| \leq e^{C|\tau''-\tau'||\xi|} - 1.$$

■

注 2.24 由于 $U_{\xi}^{(s)}(t) = U_{(s)t\xi}(1)$，为简便起见，我们将算子 $U_{(s)\xi}(t)$ 记为 $U_{(s)t\xi}$.

若 $\mathfrak{l}$是李代数，则 $\mathrm{ad}_{\xi}^{(A(t)s)} = \mathrm{ad}_{\xi}$与 t 无关，因此 $U_{t\xi}^{(s)} = \exp\left(t\,\mathrm{ad}_{\xi}\right) = \mathrm{Ad}_{\exp t\xi}\cdot$。在非结合情形下，这通常不再成立，而是需要额外的假设，正如下文的定理 2.25 所示。

定理 2.25 设 $s \in \mathbb{L}$、 ξ、 $\eta \in \mathfrak{l}$和 $A(t) = \exp_s(t\xi)$。假设 $U_{t\xi}^{(s)}$ 是方程 (2.26) 的演化算子，如 (2.27) 所示。那么，

$$\mathrm{Ad}_{A(t)}^{(s)}\eta = U_{t\xi}^{(s)}\eta + U_{t\xi}^{(s)}\int_0^t \left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1}\left(\rho_{A(\tau)}^{(s)}\right)^{-1}\left(\left[\xi, A(\tau), \eta\right]^{(s)}\right)d\tau. \tag{2.30}$$

此外，

1. 若 $\mathbb{L}$ 是紧致的，且 $\mathfrak{l}$ 配备了内积，则在相容的算子范数下，存在一个仅依赖于 $\mathbb{L}$ 的常数 C，使得，

$$\left|\mathrm{Ad}_{A(t)}^{(s)} - U_{t\xi}^{(s)}\right| \le C\left(e^{C|\xi|t} - 1\right). \tag{2.31}$$

2. 若 $(\mathbb{L}, \circ_s)$ 是左幂交替的，则

$$\mathrm{Ad}_{A(t)}^{(s)} = U_{t\xi}^{(s)}. \tag{2.32}$$

3. 若 $(\mathbb{L}, \circ_s)$ 同时是左幂交替和右幂交替的，则

$$\mathrm{Ad}_{A(t)}^{(s)} = \exp\left(t\,\mathrm{ad}_{\xi}^{(s)}\right). \tag{2.33}$$

证明。令 $x(t) = \mathrm{Ad}_{A\ t()}^{(s)}\eta$，并注意 $x(0) = \eta.$。那么，考虑 $x(t)$ 的导数。令 $B(t) = \exp_s(t\eta)$。由 (2.9) 可得

$$\frac{dA(t)}{dt} = \rho_{A(t)}^{(s)}(\eta) = \left.\frac{d}{d\tau}B(\tau)\circ_s A(t)\right|_{\tau=0}$$

然后，利用（2.6）可得

$$\begin{aligned}
\frac{dx(t)}{dt} &= \left.\frac{d^2}{dtd\tau}\left(A(t)\circ_s\left(B(\tau)\right)\right)/_s A(t)\right|_{\tau=0} \\
&= \left.\frac{d^2}{d\tau d\tau'}\left(A(\tau')\circ_s A(t)\right)\circ_s\left(B(\tau)\right)/_s A(t)\right|_{\tau',\tau=0} \\
&\quad - \left.\frac{d^2}{d\tau d\tau'}(\left(\left(A(t)\circ_s\left(B(\tau)\right)\right)/_s A(t)\right)\circ_s\left(A(\tau')\circ_s A(t)\right))/_s A(t)\right|_{\tau',\tau=0} \\
&= -\left(\rho_{A(t)}^{(s)}\right)^{-1}\left[\xi, A(t), \eta\right]^{(s)} + \left.\frac{d}{d\tau'}\left(A(\tau')\circ_s\left(\mathrm{Ad}_{A(t)}^{(s)}\eta\circ_s A(t)\right)\right)/_s A(t)\right|_{\tau'=0} \\
&\quad - \left.\frac{d}{d\tau}(\mathrm{Ad}_{A(t)}^{(s)}\eta\circ_s\left(A(\tau')\circ_s A(t)\right))/_s A(t)\right|_{\tau=0}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

利用（2.5），（2.34）中的第二项变为

$$\left.\frac{d}{d\tau'}\left(A(\tau')\circ_s\left(\mathrm{Ad}_{A(t)}^{(s)}\eta\circ_s A(t)\right)\right)/_s A(t)\right|_{\tau'=0} = \left.\frac{d}{d\tau'}A(\tau')\circ_{A(t)s} x(t)\right|_{\tau'=0}$$

类似地，（2.34）中的第三项变为

$$\frac{d}{d\tau}(\mathrm{Ad}^{(s)}_{A(t)}\,\eta\circ_s\left(A\left(\tau'\right)\circ_s A\left(t\right)\right))/_s A\left(t\right)\Big|_{\tau=0}=\frac{d}{d\tau'}x\left(t\right)\circ_{A(t)s}A\left(\tau'\right)\Big|_{\tau'=0}.$$

利用 (2.11)，我们进而得出

$$\frac{dx\left(t\right)}{dt}=\left[\xi,x\left(t\right)\right]^{(A(t)s)}-\left(\rho^{(s)}_{A(t)}\right)^{-1}\left[\xi,A\left(t\right),\eta\right]^{(s)}. \tag{2.35}$$

这是一个非齐次一阶线性常微分方程。其齐次部分恰好是 (2.26)，因此我们恰好得到 (2.30)。

对于这个估计，假设 $\mathbb{L}$ 是紧致的。于是，利用 (2.30) 和 (2.29)，我们有

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{Ad}^{(s)}_{A(t)}-U^{(s)}_{t\xi}\right| &\leq |\xi|\int_0^t\left|U^{(s)}_{t\xi}\left(U^{(s)}_{\tau\xi}\right)^{-1}\right|\left|\left(\rho^{(s)}_{A(\tau)}\right)^{-1}\left(\left[\cdot,A\left(\tau\right),\cdot\right]^{(s)}\right)\right|d\tau\\ &\leq |\xi|\int_0^t e^{C|\xi|(t-\tau)}\left|\left(\rho^{(s)}_{A(\tau)}\right)^{-1}\left(\left[\cdot,A\left(\tau\right),\cdot\right]^{(s)}\right)\right|d\tau.\end{aligned}$$

然而，$(A,s)\ \mapsto\ \left|\rho_A^{-1}\left(\left[\cdot,A,\cdot\right]^{(s)}\right)\right|$ 是紧流形上的一个实值函数，因此存在一个常数 C'，它是该函数在 $\mathbb{L}\times\mathbb{L}$. 上的上确界。因此，

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{Ad}^{(s)}_{A(t)}-U^{(s)}_{t\xi}\right| &\leq C'|\xi|\int_0^t e^{C|\xi|(t-\tau)}d\tau\\ &= \frac{C'}{C}\left(e^{C|\xi|t}-1\right).\end{aligned}$$

将常数 C重新命名后，我们得到 (2.31)。

现在，如果 $(\mathbb{L},\circ_s)$ 是左交错的，因此 (2.35) 右端的第二项为零，因为

$$\left[\xi,A\left(t\right),\eta\right]^{(s)}=\left[\xi,\exp_s\left(t\xi\right),\eta\right]^{(s)}=0.$$

那么，$\mathrm{Ad}^{(s)}_{A\ t()}\ \eta$ 满足齐次方程，因此解就是 $\mathrm{Ad}^{(s)}_{A\ t()}\ \eta=U^{(s)}_{t\xi}\eta$·由 (2.18)，我们有

$$\left[\xi,x\left(t\right)\right]^{(A(t)s)}=\left[\xi,x\left(t\right)\right]^{(s)}+\left(\rho^{(s)}_{A(t)}\right)^{-1}a_s\left(\xi,x\left(t\right),A\left(t\right)\right).$$

如果 $(\mathbb{L},\circ_s)$ 是左幂交替的，那么首先，结合子在前两个位置上是斜对称的，因此

$$a_s\left(\xi,x\left(t\right),A\left(t\right)\right)=-2\left[x\left(t\right),\xi,A\left(t\right)\right]^{(s)},$$

然而，由于右幂交错性，$[x(t)\ \ \xi,\ \exp_s(t\xi)]^{(s)}=0.$ 因此，在这种情况下，

$$\left[\xi,x\left(t\right)\right]^{(A(t)s)}=\left[\xi,x\left(t\right)\right]^{(s)}.$$

那么，$x(t)$ 满足常系数一阶齐次常微分方程:

$$\frac{dx\left(t\right)}{dt}=\mathrm{ad}^{(s)}_{\xi}\left(x\left(t\right)\right),$$

因此 $U_{\xi}(t) = \exp\left(t\,\mathrm{ad}_{\xi}^{(s)}\right)$，从而解为

$$x(t) = \exp\left(t\,\mathrm{ad}_{\xi}^{(s)}\right)\eta.$$

■

推论 2.26 若 $(\mathbb{L}, \circ_s)$ 是幂结合的，则

1. $\mathrm{Ad}^{(s)}{}_{\exp_s(t\xi)}\,\xi = \xi$, 2. $\exp_s(2t\xi) = \exp_s(t\xi) \circ_s \exp_s(t\xi)$.

证明。由 (2.30),

$$\mathrm{Ad}_{A(t)}^{(s)}\,\xi = U_{t\xi}^{(s)}\xi + U_{t\xi}^{(s)}\int_0^t \left(U_{t\xi}^{(s)}\right)^{-1}\rho_{A(\tau)}^{-1}\left(\left[\xi, A(\tau), \xi\right]^{(s)}\right)d\tau. \tag{2.36}$$

然而，由幂结合性 (2.16),

$$\left[\xi, A(\tau), \xi\right]^{(s)} = \left[\xi, \exp_s(\tau\xi), \xi\right]^{(s)} = 0.$$

因此，利用引理 2.23，我们得到

$$\mathrm{Ad}_{A(t)}^{(s)}\,\xi = U_{t\xi}^{(s)}\xi = \xi.$$

对于第二部分，定义

$$r(t) = \exp_s(t\xi) \circ \exp_s(t\xi).$$

于是，非正式地，我们写作

$$\begin{aligned}\frac{dr(t)}{dt} &= \exp_s(t\xi) \circ_s (\xi \circ_s \exp_s(t\xi)) \\ &\quad + (\xi \circ_s \exp_s(t\xi)) \circ_s \exp_s(t\xi).\end{aligned}$$

现在利用幂结合性，我们看到 ξ 与 $\exp_s(t\xi)$ 可结合；又由于 $\mathrm{Ad}^{(s)}{}_{\exp_s(t\xi)}\,\xi = \xi$，此外 ξ 与 $\exp_s(t\xi)$ 可交换。因此，我们可以改写为

$$\frac{dr(t)}{dt} = 2\xi \circ_s (\exp_s(t\xi) \circ_s \exp_s(t\xi)) = 2\xi \circ_s r(t).$$

因此，解为

$$r(t) = \exp_s(2t\xi),$$

因此，根据解的唯一性，我们便得到所需的等式。 ■

注记 2.27 推论 2.26 因此表明，幂结合性确实允许将 $\exp_s(t\xi)$ 延拓到所有 t。与 *[36, 42]* 相比，这是对此事实略有不同的证明。推论 2.26 的结果还可得出，若 $(\mathbb{L}, \circ_s)$ 是幂结合的，则

$$\exp_s(t\xi) \circ_s \exp_s(\tau\xi) = \exp_s((t+\tau)\xi). \tag{2.37}$$

定理 2.28 假设 $\xi(t)$ 是 $\mathfrak{l}$ 中的一条路径，其导数为 $\dot{\xi}(t)$，则

$$\frac{d}{dt}\left(\exp_s\left(\xi\left(t\right)\right)\right)=\rho^{(s)}_{\exp_s(\xi(t))}U^{(s)}_{\xi(t)}\int_0^1\left(U^{(s)}_{\tau\xi(t)}\right)^{-1}\dot{\xi}\left(t\right)d\tau.$$

此外，

1. 若 $(\mathbb{L},\circ_s)$ 是左幂交替的，则

$$\frac{d}{dt}\left(\exp_s\left(\xi\left(t\right)\right)\right)=\lambda^{(s)}_{\exp_s(\xi(t))}\int_0^1\left(\mathrm{Ad}^{(s)}_{\exp_s\tau\xi(t)}\right)^{-1}\dot{\xi}\left(t\right)d\tau.$$

2. 若 $(\mathbb{L},\circ_s)$ 同时满足左幂交替和右幂交替，则

$$\frac{d}{dt}\left(\exp_s\left(\xi\left(t\right)\right)\right)=\lambda^{(s)}_{\exp_s(\xi(t))}\int_0^1\exp\left(-\tau\,\mathrm{ad}^{(s)}_{\xi(t)}\right)\dot{\xi}\left(t\right)d\tau.$$

证明。采用与李群情形类似的方法，令

$$\Gamma\left(\tau,t\right)=\left(\rho^{(s)}_{\exp_s(\tau\xi(t))}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\exp_s\left(\tau\xi\left(t\right)\right).$$

我们可以将其（不太严谨地）写成

$$\Gamma\left(\tau,t\right)=\left(\frac{\partial}{\partial t}\exp_s\left(\tau\xi\left(t\right)\right)\right)/_s\exp_s\left(\tau\xi\left(t\right)\right)\tag{2.38}$$

注意 $\Gamma\left(0,t\right)=0$. 然后，考虑

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Gamma}{\partial\tau}&=\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\xi\left(t\right)\circ_s\exp_s\left(\tau\xi\left(t\right)\right)\right)\right)/_s\exp_s\left(\tau\xi\left(t\right)\right)\\&\quad-\left(\Gamma\left(\tau,t\right)\circ_s\left(\xi\left(t\right)\circ_s\exp_s\left(\tau\xi\left(t\right)\right)\right)\right)/_s\exp_s\left(\tau\xi\left(t\right)\right)\\&=\frac{\partial\xi\left(t\right)}{\partial t}+\left(\xi\left(t\right)\circ_s\frac{\partial}{\partial t}\exp_s\left(\tau\xi\left(t\right)\right)\right)/_s\exp_s\left(\tau\xi\left(t\right)\right)\\&\quad-\Gamma\left(\tau,t\right)\circ_{\exp_s(\tau\xi(t))s}\xi\left(t\right)\\&=\frac{\partial\xi\left(t\right)}{\partial t}+\left[\xi\left(t\right),\Gamma\left(\tau,t\right)\right]^{\exp_s(\tau\xi(t))s}.\end{aligned}$$

对于每个 t，常微分方程的齐次部分恰好是 (2.26)，并且由于初始条件为$\Gamma\left(0,t\right)=0$，我们得出非齐次方程的解为

$$\Gamma\left(\tau,t\right)=U^{(s)}_{\tau\xi(t)}\int_0^\tau\left(U^{(s)}_{\tau'\xi(t)}\right)^{-1}\frac{\partial\xi\left(t\right)}{\partial t}d\tau'.$$

令 $\tau=1$，我们得到

$$\left(\rho^{(s)}_{\exp_s(\xi(t))}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial t}\exp_s\left(\xi\left(t\right)\right)=U^{(s)}_{\xi(t)}\left(1\right)\int_0^1U^{(s)}_{\xi(t)}\left(\tau'\right)^{-1}\frac{\partial\xi\left(t\right)}{\partial t}d\tau'.$$

特殊情形现在可直接由 (2.32) 和 (2.33) 得出。 ■

推论 2.29 令 $\xi,\eta\in\mathfrak{l}$，则

$$\left(\rho^{(s)}_{\exp_s\xi}\right)^{-1}d\exp_s|_\xi(\eta)=U^{(s)}_\xi(1)\int_0^1 U^{(s)}_\xi(\tau')^{-1}\eta d\tau'. \tag{2.39}$$

此外，如果 $\mathbb{L}$ 是紧致的，在 $\mathfrak{l}$ 上给定一个范数及相应的算子范数，

$$\left|\left(\rho^{(s)}_{\exp_s\xi}\right)^{-1}d\exp_s|_\xi-\mathrm{id}_{\mathfrak{l}}\right|\le e^{C|\xi|}-1, \tag{2.40}$$

其中 $C>0$ 是一个依赖于 $\mathbb{L}$.的常数

证明。表达式 (2.39) 直接由定理 2.28 得出。因此我们有

$$\left(\rho^{(s)}_{\exp_s\xi}\right)^{-1}d\exp_s|_\xi-\mathrm{id}_{\mathfrak{l}}=\int_0^1\left(U^{(s)}_\xi\left(U^{(s)}_{\tau'\xi}\right)^{-1}-\mathrm{id}_l\right)d\tau'. \tag{2.41}$$

由 (2.41) 可得 (2.40)。 ■

现在我们来考察 $\exp_s$ 对 $s.$ 的依赖关系。特别地，假设有一个光滑的 1 参数族 $s(\tau)$，其中 $s(0)=s\in\mathbb{L}$，且 $\frac{d}{d\tau}s(\tau)\big|_{\tau=0}=\rho_s(\eta)\in T_s\mathbb{L}$，其中 $\eta\in\mathfrak{l}.$。对于每个 τ，$p(t,\tau)=\exp^{s(\tau)}(t\xi)$ 满足

$$\begin{cases}\frac{dp(t,\tau)}{dt}=\rho^{(s(\tau))}(\xi)\big|_{p(t,\tau)}\\ p(0,\tau)=1\end{cases}. \tag{2.42}$$

现在，对于每个 t，$\frac{d}{d\tau}p(t,\tau)\big|_{\tau=0}\in T_{p(t,0)}\mathbb{L}$，因此定义

$$\begin{aligned}\sigma(t)&=\left(\rho^{(s)}_{p(t,0)}\right)^{-1}\frac{d}{d\tau}p(t,\tau)\Big|_{\tau=0}\\&=\frac{d}{d\tau}\left(p(t,\tau)/_sp(t,0)\right)\Big|_{\tau=0},\end{aligned} \tag{2.43}$$

因此，特别地，$\sigma(t)\in\mathfrak{l}.$

引理 2.30 设 $A(t)=\exp_s(t\xi)$，则量 $\sigma(t)$ 可表示为

$$\sigma(t)=\left(U^{(s)}_{t\xi}-\mathrm{Ad}^{(s)}_{A(t)}\right)\eta. \tag{2.44}$$

特别地，若 $(\mathbb{L},\circ_s)$ 是左幂交替的，则对所有 $t.$，$\sigma(t)=0$

证明。由 (2.42)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{dp(t,\tau)}{dt}&=\rho^{(s(\tau))}(\xi)\big|_{p(t,\tau)}\\&=\frac{d}{d\varepsilon}\exp_{s(\tau)}(\varepsilon\xi)\circ_{s(\tau)}p(t,\tau)\Big|_{\varepsilon=0}\\&=\frac{d}{d\varepsilon}p(\varepsilon,\tau)\circ_{s(\tau)}p(t,\tau)\Big|_{\varepsilon=0},\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(t)}{dt} &= \frac{d^2}{dtd\tau}\left(p(t,\tau)/_s p(t,0)\right)\Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(\varepsilon,\tau)\circ_{s(\tau)} p(t,\tau)\right)/_s p(t,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0} \\ &\quad - \frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(t,\tau)/_s p(t,0)\circ_s\left(p(\varepsilon,0)\circ_s p(t,0)\right)\right)/_s p(t,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0},\end{aligned} \tag{2.45}$$

这里用到了商法则的导数 (2.6)，以及 $p(0,\tau)=1$ 对于所有τ.注意到，对于任意 τ，$\frac{d}{d\varepsilon}p(\varepsilon,\tau)\Big|_{\varepsilon=0}=\xi$，考虑 (2.45) 的第一项:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(\varepsilon,\tau)\circ_{s(\tau)} p(t,\tau)\right)/_s p(t,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0} &= \frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(\varepsilon,0)\circ_{s(\tau)} p(t,\tau)\right)/_s p(t,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0} \\ &= \frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(\varepsilon,0)\circ_{s(\tau)} p(t,0)\right)/_s p(t,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0} \\ &\quad + \frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(\varepsilon,0)\circ_s p(t,\tau)\right)/_s p(t,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0}.\end{aligned}$$

Now,

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(\varepsilon,0)\circ_{s(\tau)} p(t,0)\right)/_s p(t,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0} &= \left(\rho^{(s)}_{\exp_s(t\xi)}\right)^{-1}[\xi,\exp_s(t\xi),\eta]^{(s)} \\ \frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(\varepsilon,0)\circ_s p(t,\tau)\right)/_s p(t,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0} &= \frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(\varepsilon,0)\circ_s\left(p(t,\tau)/_s p(t,0)\right)\circ_s p(t,0)\right)/_s p(t,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0} \\ &= \frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}p(\varepsilon,0)\circ_{p(t,0)s}\left(p(t,\tau)/_s p(t,0)\right)\Big|_{\varepsilon,\tau=0}.\end{aligned}$$

(2.45) 的第二项为

$$\frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(t,\tau)/_s p(t,0)\circ_s\left(p(\varepsilon,0)\circ_s p(t,0)\right)\right)/_s p(t,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0} = \frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(t,\tau)/_s p(t,0)\right)\circ_{p(t,0)s} p(\varepsilon,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0}.$$

总之，(2.45) 变为

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(t)}{dt} &= \frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}p(\varepsilon,0)\circ_{p(t,0)s}\left(p(t,\tau)/_s p(t,0)\right)\Big|_{\varepsilon,\tau=0} \\ &\quad - \frac{d^2}{d\varepsilon d\tau}\left(p(t,\tau)/_s p(t,0)\right)\circ_{p(t,0)s} p(\varepsilon,0)\Big|_{\varepsilon,\tau=0} \\ &\quad + \left(\rho^{(s)}_{\exp_s(t\xi)}\right)^{-1}[\xi,\exp_s(t\xi),\eta]^{(s)} \\ &= [\xi,\sigma(t)]^{(\exp_s(t\xi)s)} + \left(\rho^{(s)}_{\exp_s(t\xi)}\right)^{-1}[\xi,\exp_s(t\xi),\eta]^{(s)}.\end{aligned}$$

这恰好是 $-\mathrm{Ad}^{(s)}_{A_t()}\eta$ 满足的方程 (2.35)，不过其初始条件为 $\sigma(0)=0$.因此，解为

$$\sigma(t)=\left(U^{(s)}_{t\xi}-\mathrm{Ad}^{(s)}_{A(t)}\right)\eta.$$

如果 $(\mathbb{L},\circ_s)$ 是左幂结合的，那么根据定理 2.25，$\mathrm{Ad}^{(s)}_{A\ t()} = U^{(s)}_{t\xi}$，因此 $\sigma(t) = 0$ 对所有 t 都成立。

我们将假定 Ψ 的伪自同构群是一个有限维李群，并设 Ψ 和 $H_s =$ 自同构群 $(\mathbb{L},\circ_s)$ 的李代数分别为 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{h}_s$。特别地，$\mathfrak{h}_s$ 是 $\mathfrak{p}$的一个李子代数。此外，我们还将假定 Ψ 在 $\mathbb{L}$上传递地作用。Ψ 在$\mathbb{L}$ 上的作用诱导出李代数 $\mathfrak{p}$ 在 $\mathfrak{l}$上的一个作用，我们将其记为 $\cdot$. ■

定义 2.31 定义映射 $\varphi\colon \mathbb{L}\longrightarrow \mathfrak{l}\otimes\mathfrak{p}^*$，使得对每个 $s\in\mathbb{L}$ 和 $\gamma\in\mathfrak{p}$ ，

$$\varphi_s(\gamma) = \frac{d}{dt}(\exp(t\gamma)(s))/s\Big|_{t=0} \in \mathfrak{l}. \tag{2.46}$$

引理 2.32（[**26,** 定理 3.**25**]）如式 **(2.46)** 所示的映射 φ 关于 Ψ的相应作用是等变的，特别地，对于 $h\in\Psi$、 $s\in\mathbb{L}$、 $\gamma\in\mathfrak{p}$，我们有

$$\varphi_{h(s)}\left((\mathrm{Ad}_h)_*\gamma\right) = (h')_*\varphi_s(\gamma). \tag{2.47}$$

此外， φ_s 的像为 $\mathfrak{l}^{(s)}$，其核为 $\mathfrak{h}_s$，因此，$\mathfrak{p}\cong\mathfrak{h}_s\oplus\mathfrak{l}^{(s)}$。

引理 2.33（[**26,** 引理 3.33 和引理 3.**35**]）设 $\xi\in\mathfrak{p}$ 且 $\eta,\gamma\in\mathfrak{l}$，则

$$\xi\cdot[\eta,\gamma]^{(s)} = [\xi\cdot\eta,\gamma]^{(s)} + [\eta,\xi\cdot\gamma]^{(s)} + a_s(\eta,\gamma,\varphi_s(\xi)) \tag{2.48a}$$

$$\xi\cdot\varphi_s(\eta) = \eta\cdot\varphi_s(\xi) + \varphi_s\left([\xi,\eta]_{\mathfrak{p}}\right) + [\varphi_s(\xi),\varphi_s(\eta)]^{(s)}. \tag{2.48b}$$

Simi与李群的情形类似，我们可以在 $\mathfrak{l}^{(s)}$ 上定义 Killing 型 $K^{(s)}$。对于 $\xi,\eta\in\mathfrak{l}$，有

$$K^{(s)}(\xi,\eta) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}^{(s)}_\xi\circ\mathrm{ad}^{(s)}_\eta\right), \tag{2.49}$$

其中 $\circ$ 只是 $\mathfrak{l}$ 上线性映射的复合，而 $\mathrm{ad}^{(s)}_\xi(\cdot) = [\xi,\cdot]^{(s)}$。显然， $K^{(s)}$ 是 $\mathfrak{l}$. 上的对称双线性型。在 [26] 中证明了，对于 $h\in\Psi$ 和 $\xi,\eta\in\mathfrak{l}$，它满足 $K^{(h(s))}(h'_*\xi,h'_*\eta) = K^{(s)}(\xi,\eta)$。

目前尚不清楚环代数具有非退化 Killing 型的一般判据，但已知 [37] 对于半单马尔采夫代数，Killing 型是非退化的。马尔采夫代数是 Moufang 环路的切代数，也是一种满足以下恒等式 [36, 42] 的交错代数:

$$\left[\xi,\gamma,[\xi,\eta]^{(s)}\right]^{(s)} = \left[[\xi,\gamma,\eta]^{(s)},\xi\right]^{(s)}. \tag{2.50}$$

此外，在这种情况下， $K^{(s)}$ 是 $\mathfrak{p}$-不变且 $\mathrm{ad}^{(s)}$-不变的 [26]。假设 $s(t) = \exp_s(t\gamma)\,s$，那么由 **(2.24)** 可知，一般而言，

$$\begin{aligned}\frac{dK^{(s(t))}}{dt}(\xi,\xi) &= \frac{d}{dt}\left(\mathrm{Tr}\left(\left[\xi,[\xi,\cdot]^{(s(t))}\right]^{(s(t))}\right)\right) \\ &= 2\,\mathrm{Tr}\left(\left[\xi,a_{s(t)}(\xi,\cdot,\gamma)\right]^{(s(t))}\right).\end{aligned} \tag{2.51}$$

在 $\mathbb{L}$ 为 Moufang 环路的特殊情况下，因此每个 $\mathfrak{l}^{(s)}$ 都是马尔采夫代数，我们有如下结论。

引理 2.34 假设 $\mathbb{L}$ 是 Moufang 环路。那么， $K^{(s)}$ 与 s 无关，并且对于每个 $\gamma \in \mathfrak{l}$，映射 $\mathrm{ad}_\gamma^{(s)}$关于 $K^{(s)}$.是斜自伴的

证明。如果 $\mathbb{L}$ 是 Moufang 环路，那么任意 $(\mathbb{L}, \circ_s)$ 也是 Moufang 环路，因此对于任意 s、 $\mathfrak{l}^{(s)}$ 都是马尔采夫代数。由于马尔采夫代数是交错代数， $a^{(s)}(\cdot,\cdot,\cdot) = 2[\cdot,\cdot,\cdot]^{(s)}$，并且还是完全斜对称的。特别地，Malcev 恒等式 (2.50) 可以写成

$$a_s\left(\xi,\gamma,[\xi,\eta]^{(s)}\right) = \left[a_s\left(\xi,\gamma,\eta\right),\xi\right]^{(s)}. \tag{2.52}$$

特别地，取迹可得

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr} a_s\left(\xi,\gamma,[\xi,\cdot]^{(s)}\right) &= \operatorname{Tr}\left[a_s\left(\xi,\gamma,\cdot\right),\xi\right]^{(s)}\\ &= -\operatorname{Tr}\left[a_s\left(\xi,\gamma,[\xi,\cdot]\right)\right]^{(s)}\\ &= 0.\end{aligned} \tag{2.53}$$

于是，由 (2.51) 得到 $\frac{dK^{(s(t))}}{dt}(\xi,\xi) = 0$. 这表明 $K^{(s)}$ 在 $\mathbb{L}$. 上是常数

对于第二部分，由广义 Jacobi 恒等式 (2.21)，我们得到

$$\begin{aligned}K^{(s)}\left([\gamma,\eta]^{(s)},\xi\right) &= -K^{(s)}\left(\eta,[\gamma,\xi]^{(s)}\right)\\ &\quad+\operatorname{Tr}\left[\eta,a_s\left(\cdot,\xi,\gamma\right)+a_s\left(\xi,\gamma,\cdot\right)+a_s\left(\gamma,\cdot,\xi\right)\right]^{(s)}\\ &\quad+\operatorname{Tr}\left[\xi,a_s\left(\cdot,\eta,\gamma\right)+a_s\left(\eta,\gamma,\cdot\right)+a_s\left(\gamma,\cdot,\eta\right)\right]^{(s)}.\end{aligned} \tag{2.54}$$

然而，对于交错代数，这可简化为

$$\begin{aligned}K^{(s)}\left([\gamma,\eta]^{(s)},\xi\right) &= -K^{(s)}\left(\eta,[\gamma,\xi]^{(s)}\right)\\ &\quad+3\operatorname{Tr}\left[\eta,a_s\left(\cdot,\xi,\gamma\right)\right]^{(s)}+3\operatorname{Tr}\left[\xi,a_s\left(\cdot,\eta,\gamma\right)\right]^{(s)}.\end{aligned} \tag{2.55}$$

第二行关于 ξ 和 η 对称，因此只需考虑 $\xi = \eta$. 的情形。事实上，对于 $\xi = \eta$，利用 (2.53)，该项为零，因此我们得到

$$K^{(s)}\left(\mathrm{ad}_\gamma^{(s)}\eta,\xi\right) = -K^{(s)}\left(\eta,\mathrm{ad}_\gamma^{(s)}\xi\right). \tag{2.56}$$

■

注 2.35 请注意，在引理 2.34 中，我们只用到了 Malcev 恒等式的迹。半单 Malcev 代数中 Killing 型的非退化性也取决于性质 (2.56)，这与半单 Lie 代数的情况相同。这表明，对于这些关键性质，较弱的条件或许就足够了。

3 环路值映射

设 M 是一个光滑的 n 维流形，并设 $s : M \longrightarrow \mathbb{L}$ 是一个光滑映射。映射 s 可用于在从 M 到 $\mathbb{L}'$ 值映射的集合上定义一种乘积，并在 $\mathfrak{l}$ 值映射的集合上定义相应的括号。具体而言，设 $A, B\colon M \longrightarrow \mathbb{L}'$ 和 $\xi, \eta\colon M \longrightarrow \mathfrak{l}$ 是光滑映射，则对每个 $x \in M$，定义

$$As\big|_x = A_x s_x \in \mathbb{L} \tag{3.1a}$$

$$A \circ_s B\big|_x = A_x \circ_{s_x} B_x \in \mathbb{L} \tag{3.1b}$$

$$A/_s B\big|_x = A_x/_{s_x} B_x \in \mathbb{L} \tag{3.1c}$$

$$[\xi,\eta]^{(s)}\Big|_x = [\xi_x,\eta_x]^{(s_x)} \in \mathfrak{l}. \tag{3.1d}$$

特别地，括号 $[\cdot,\cdot]^{(s)}$ 定义了映射 $b_s\colon M\longrightarrow \Lambda^2\mathfrak{l}^*\otimes\mathfrak{l}$。我们还有相应的结合子 $[\cdot,\cdot,\cdot]^{(s)}$，以及左交替结合子映射 $a_s\colon M\longrightarrow \Lambda^2\mathfrak{l}^*\otimes\mathfrak{l}^*\otimes\mathfrak{l}$。类似地，定义映射 $\varphi_s\colon M\longrightarrow \mathfrak{p}^*\otimes\mathfrak{l}$.

那么，与映射到李群的情形类似，我们可以定义 θ_s 关于 s的（右）Darboux导数，它是 $\mathfrak{l}$上的一个 M 值1-形式，由 $s^*\theta$ 对 $\mathbb{L}$ [45]上的Maurer-Cartan形式的拉回给出。特别地，在每个 $x\in M$处，

$$(\theta_s)|_x=\rho_{s(x)}^{-1}\,ds|_x\,, \tag{3.2}$$

对于任意向量 $X\in T_xM$

$$(\theta_s)|_x(X)=\theta|_{s(x)}\left(ds|_x(X)\right)\in\mathfrak{l}.$$

显然，θ_s作为 θ的拉回，满足环Maurer-Cartan结构方程（2.19）。特别地，对于任意向量 X、$Y\in T_xM$,

$$d\theta_s(X,Y)-[\theta_s(X),\theta_s(Y)]^{(s)}=0. \tag{3.3}$$

接下来我们可以计算这些映射（3.1）的导数。

定理3.1（[26, 定理3.51]）设 M为一个光滑流形，并假设 $s\in C^\infty$（M，$\mathbb{L}$）且A、$B\in C^\infty$（M，$\mathbb{L}'$），则

$$\begin{aligned}
d(As) &= \rho_s(dA)+\lambda_A(ds) && (3.4a)\\
d(A\circ_s B) &= \rho_B^{(s)}(dA)+\lambda_A^{(s)}(dB)+[A,B,\theta_s]^{(s)} && (3.4b)\\
d(A/_sB) &= \left(\rho_B^{(s)}\right)^{-1}dA-\left(\rho_B^{(s)}\right)^{-1}\left(\rho_{A/_sB}^{(s)}dB\right) && (3.4c)\\
&\quad -\left(\rho_B^{(s)}\right)^{-1}[A/_sB,B,\theta_s]^{(s)} && (3.4d)
\end{aligned}$$

现在设 ξ，$\eta\in C^\infty$（M，$\mathfrak{l}$），则

$$d[\xi,\eta]^{(s)}=[d\xi,\eta]^{(s)}+[\xi,d\eta]^{(s)}+a_s(\xi,\eta,\theta_s)\,. \tag{3.5}$$

取值于 $\mathfrak{l}\otimes\mathfrak{p}^*$ 的映射 $\varphi_s\colon M\longrightarrow\mathfrak{l}\otimes\mathfrak{p}^*$ 满足

$$d\varphi_s=\mathrm{id}_{\mathfrak{p}}\cdot\theta_s-[\varphi_s,\theta_s]^{(s)}\,, \tag{3.6}$$

其中，$\mathrm{id}_{\mathfrak{p}}$ 是 $\mathfrak{p}$的恒等映射，$\cdot$ 表示李代数 $\mathfrak{p}$ 在 $\mathfrak{l}$ 上的作用。Th
e Killi *ng form* $K^{(s)}:M\longrightarrow\mathrm{Sym}^2\mathfrak{l}^*$ *satisfies*

$$dK^{(s)}(\xi,\xi)=2\,\mathrm{Tr}\left([\xi,a_s(\xi,\cdot,\theta_s)]^{(s)}\right). \tag{3.7}$$

给定 $A\colon M\longrightarrow\mathbb{L}'$ 和 $s\colon M\longrightarrow\mathbb{L}$，如 [26], 所示，我们有 θ_{As}的以下表达式

$$\theta_{As}=\mathrm{Ad}_A^{(s)}\theta_s+\left(\rho_A^{(s)}\right)^{-1}dA. \tag{3.8}$$

此外，让我们考虑 $\theta_{A(t)s}$ 对于某个 ξ 满足的演化方程： $A(t)=\exp_s(t\xi)\ M\longrightarrow\mathfrak{l}$. 由此得到如下结果。

引理 3.2 设 $A(t) = \exp_s(t\xi)$，其中 $\xi \in C^\infty(M, \mathfrak{l})$，则

$$\frac{d\theta_{A(t)s}}{dt} = \left[\xi, \theta_{A(t)s}\right]^{A(t)s} + d\xi \tag{3.9}$$

因此

$$\theta_{A(t)s} = U_{t\xi}^{(s)}\theta_s + \left(U_{t\xi}^{(s)}\int_0^t \left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1} d\tau\right) d\xi. \tag{3.10}$$

此外，若 $\mathbb{L}$ 是紧致的，并且在 M 上给定一个度量、在 $\mathfrak{l}$ 上给定一个内积，

$$\left|\theta_{A(t)s}\right| \leq e^{Ct|\xi|}\left(|\theta_s| + t\,|d\xi|\right). \tag{3.11}$$

证明。我们将符号地写作

$$\frac{dA}{dt} = \xi \circ_s A,$$

so

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_{A(t)s}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(d\left(As\right)/As\right) \\
&= d\left(\frac{dA}{dt}s\right)/As \\
&\quad -\left(\left(d\left(As\right)/As\right)\cdot\left(\frac{dA}{dt}s\right)\right)/As \\
&= d\left(\left(\xi \circ_s A\right)s\right)/As \\
&\quad -\left(\theta_{As}\cdot\left(\left(\xi \circ_s A\right)s\right)\right)/As \\
&= d\left(\xi\left(As\right)\right)/As \\
&\quad +\left(\theta_{As}\cdot\left(\xi\left(As\right)\right)\right)/As \\
&= d\xi + \left(\xi\cdot d\left(As\right)\right)/As \\
&\quad -\theta_{As}\circ_{As}\xi \\
&= d\xi + \left[\xi, \theta_{As}\right]^{(As)}
\end{aligned}$$

解这个常微分方程，取 $\theta_{A(0)s} = \theta_s$，我们得到 (3.10)。为得到这个估计，我们首先有

$$\left|\theta_{A(t)s}\right| \leq \left|U_{t\xi}^{(s)}\right|\left|\theta_s\right| + \left|d\xi\right|\int_0^t \left|U_{t\xi}^{(s)}\left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1}\right| d\tau,$$

但由 (2.29)，$\left|U_{t\xi}^{(s}\right| \leq e^{Ct|\xi|)}$和 $\left|U_{t\xi}^{(s}\left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1}\right| \leq e^{C(t-\tau)|\xi|)}$，所以

$$\int_0^t \left|U_{t\xi}^{(s)}\left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1}\right| d\tau \leq te^{Ct|\xi|}, \tag{3.12}$$

由于 $t \geq 0$，因此，

$$\left|\theta_{A(t)s}\right| \leq e^{Ct|\xi|}\left|\theta_s\right| + te^{Ct|\xi|}\left|d\xi\right|,$$

因此，我们确实得到了（3.11）。 ■

以非常相似的方式，我们得到关于 φ_s. 的相同结果

引理 3.3 设 $A(t) = \exp_s(t\xi)$ 且 $\gamma \in \mathfrak{p}$，则

$$\frac{d\varphi_{A(t)s}(\gamma)}{dt} = \left[\xi, \varphi_{A(t)s}(\gamma)\right]^{A(t)s} + \gamma \cdot \xi \tag{3.13}$$

因此

$$\varphi_{A(t)s}(\gamma) = U_{t\xi}^{(s)}\varphi_s(\gamma) + \left(U_{t\xi}^{(s)}\int_0^t \left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1} d\tau\right)(\gamma \cdot \xi). \tag{3.14}$$

此外，若 $\mathbb{L}$ 是紧致的，并且在 M 上给定一个度量，在 $\mathfrak{l}$ 上给定一个内积，

$$\left|\varphi_{A(t)s}(\gamma)\right| \leq e^{Ct|\xi|}\left(|\varphi_s(\gamma)| + t|\gamma \cdot \xi|\right). \tag{3.15}$$

由此可见，三个重要的量 $\theta_{A(t)s}$、$U_{t\xi}^{(s)}$、$\varphi_{A(t)s}$ 满足相似的常微分方程 s:

$$\begin{aligned}
\frac{d\theta_{A(t)s}}{dt} &= \left[\xi, \theta_{A(t)s}\right]^{A(t)s} + d\xi \\
\frac{dU_{t\xi}^{(s)}}{dt} &= \left[\xi, U_{t\xi}^{(s)}\right]^{A(t)s} \\
\frac{d\varphi_{A(t)s}}{dt} &= \left[\xi, \varphi_{A(t)s}\right]^{A(t)s} + \mathrm{id}\cdot\xi.
\end{aligned}$$

假设我们在 M 上有一个仿射联络 ∇，那么通过对上述常微分方程求导，我们可以得到 θ_{As}、$U_{\xi}^{(s)}$ 和 φ_{As}. 的导数表达式。不过，首先我们需要一个有用的技术引理。

引理 3.4 设 $A:\ M \longrightarrow \mathbb{L}'$，且 $s:\ M \longrightarrow \mathbb{L}$，并且 $\alpha_{A,s}$ 是 $\mathfrak{l}$. 上的 k-线性映射。那么，对 $\xi_1, ..., \xi_k \in \mathfrak{l}$,

$$\begin{aligned}
\left(d\alpha_{A,s}\right)(\xi_1, ..., \xi_k) &= \alpha_{A,s}^{(1)}(\xi_1, ..., \xi_k, \theta_s) \\
&\quad + \alpha_{A,s}^{(2)}(\xi_1, ..., \xi_k, \theta_{As}),
\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 $\alpha_A^{(1)},_s$ 和 $\alpha_A^{(2)},_s$ 是 $\mathfrak{l}$. 上的 $(k+1)$-线性映射

特别地，给定 M 上的度量和 $\mathfrak{l}$ 上的范数，我们有如下逐点界

$$\left|\nabla^k db_s\right| \leq f^{(k)}(s) \sum_{(i_1,...,i_{k+1})\in I} |\theta_s|^{i_1} |\nabla\theta_s|^{i_2} ... \left|\nabla^k\theta_s\right|^{i_{k+1}} \tag{3.17}$$

其中 $I = \left\{(i_1, ..., i_{k+1}) \in \mathbb{N}_0^{k+1},\ \text{使得}\ \sum_{m=1}^{k+1} m i_m = k+1\right\}$ 和 $f^{(k)}$: 对于每个 k，$\mathbb{L} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ 是连续函数。

证明。由于 α 依赖于 s 和 A，$d\alpha_{A,s}$，根据链式法则可得

$$\begin{aligned}
d\alpha_{A,s} &= \frac{\partial\alpha}{\partial s}\circ ds + \frac{\partial\alpha}{\partial A}\circ dA \\
&= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\circ\rho_s\right)\left(\rho_s^{-1}ds\right) + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial A}\circ\rho_A^{(s)}\right)\left(\left(\rho_A^{(s)}\right)^{-1}dA\right) \\
&= \left(\frac{\partial\alpha}{\partial s}\circ\rho_s + \frac{\partial\alpha}{\partial A}\circ\rho_A^{(s)}\circ\mathrm{Ad}_A^{(s)}\right)\theta_s \\
&\quad + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial A}\circ\rho_A^{(s)}\right)\theta_{As},
\end{aligned}$$

这里用到了（3.8）。因此现在我们可以设

$$\begin{aligned}\alpha_{A,s}^{(1)}(\xi_1,...,\xi_k,\xi_{k+1}) &= \left(\frac{\partial\alpha(\xi_1,...,\xi_k)}{\partial s}\circ\rho_s\right)\xi_{k+1}\\ &\quad+\left(\frac{\partial\alpha(\xi_1,...,\xi_k)}{\partial A}\circ\rho_A^{(s)}\circ\mathrm{Ad}_A^{(s)}\right)\xi_{k+1}\\ \alpha_{A,s}^{(2)}(\xi_1,...,\xi_k,\xi_{k+1}) &= \left(\frac{\partial\alpha(\xi_1,...,\xi_k)}{\partial A}\circ\rho_A^{(s)}\right)\xi_{k+1}.\end{aligned}$$

因此，我们得到 (3.16)。

由 (3.5) 可知，对于 $\xi,\eta\in\mathfrak{l}$,

$$(db_s)(\xi,\eta)=a_s(\xi,\eta,\theta_s),$$

其中 a　　交错结合子 a_s 是 $\mathfrak{l}$. 上的三线性形式。因此，我们有以下估计　　e

$$|db_s|\leq C|a_s||\theta_s|,$$

其中 C 是某个普适常数。然而， a_s 在 s 上是光滑的，因此 $|a_s|$ 特别是 $\mathbb{L}$. 上的连续实值函数。因此我们可以写成

$$|db_s|\leq f^{(0)}(s)|\theta_s| \tag{3.18}$$

对于某个正实值函数 f^0. 。现在，正如我们刚刚证明的，

$$da_s(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=a_s^{(1)}(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\theta_s),$$

对于某个四线性形式 $a_s^{(1)}$. 因此，对于 M 上的向量场 X_1 ,

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_1}db_s)(\xi,\eta) &= (d_{X_1}a_s)(\xi,\eta,\theta_s)+a_s(\xi,\eta,\nabla_{X_1}\theta_s)\\ &= a_s^{(1)}(\xi,\eta,\theta_s,\theta_s(X_1))+a_s(\xi,\eta,\nabla_{X_1}\theta_s),\end{aligned}$$

因此，我们得到如下估计

$$\begin{aligned}|\nabla db| &\leq C\left(\left|a_s^{(1)}\right||\theta_s|^2+|a_s||\nabla\theta_s|\right)\\ &\leq f^{(1)}(s)\left(|\theta_s|^2+|\nabla\theta_s|\right),\end{aligned} \tag{3.19}$$

其中 $f^{(1)}(s)=C\max\left(\left|a_s^{(1)}\right|,|a_s|\right)$ 是连续的。

类似地，对于 $\mathfrak{l}$ 上的多重线性映射 $a_s^{(2)}$，我们得到 db_s 的二阶导数表达式：

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}db_s)(\xi,\eta) &= a_s^{(2)}(\xi,\eta,\theta_s,\theta_s(X_1),\theta_s(X_2))+a_s^{(1)}(\xi,\eta,\nabla_{X_2}\theta_s,\theta_s(X_1))\\ &\quad+a_s^{(1)}(\xi,\eta,\nabla_{X_1}\theta_s,\theta_s(X_2))+a_s^{(1)}(\xi,\eta,\theta_s,\nabla_{X_2}\theta_s(X_1))\\ &\quad+a_s(\xi,\eta,\nabla_{X_2}\nabla_{X_1}\theta_s),\end{aligned}$$

其中， X_1 和 X_2 是 M上的向量场。因此，

$$\begin{aligned}\left|\nabla^2db_s\right| &\leq C\left(\left|a_s^{(2)}\right||\theta_s|^3+3\left|a_s^{(1)}\right||\theta_s||\nabla\theta_s|+|a_s|\left|\nabla^2\theta_s\right|\right)\\ &\leq f^{(2)}(s)\left(|\theta_s|^3+|\theta_s||\nabla\theta_s|+\left|\nabla^2\theta_s\right|\right),\end{aligned}$$

对于连续函数 $f^{(2)}$.

注意，在这些情况下，对于 $k=0$、1、2，我们可以符号地写成

$$\nabla^k db_s = \sum_{(i_1,...,i_{k+1})\in I} a_{i_1...i_{k+1}} \left((\theta_s)^{i_1}, (\nabla\theta_s)^{i_2}, ..., \left(\nabla^k\theta_s\right)^{i_{k+1}} \right) \tag{3.20}$$

其中 $a_{i_1...i_{k+1}}$ 是依赖于 s 和 $I = \left\{ (i_1、...、 i_{k+1}) \in \mathbb{N}_0^{k+1} \text{的多重线性映射，使得 } \sum_{m=1}^{k+1} m i_m = k+1 \right\}$。运用归纳法，考虑

$$\begin{aligned}
\nabla^{k+1} db_s &= \nabla \sum_{(i_1,...,i_{k+1})\in I} a_{i_1...i_{k+1}} \left((\theta_s)^{i_1}, (\nabla\theta_s)^{i_2}, ..., \left(\nabla^k\theta_s\right)^{i_{k+1}} \right) \qquad (3.21)\\
&= \sum_{(i_1,...,i_{k+1})\in I} a^{(0)}_{i_1...i_{k+1}} \left((\theta_s)^{i_1+1}, (\nabla\theta_s)^{i_2}, ..., \left(\nabla^k\theta_s\right)^{i_{k+1}} \right)\\
&\quad + \sum_{(i_1,...,i_{k+1})\in I} a^{(1)}_{i_1...i_{k+1}} \left((\theta_s)^{i_1-1}, (\nabla\theta_s)^{i_2+1}, ..., \left(\nabla^k\theta_s\right)^{i_{k+1}} \right)\\
&\quad + ... + \sum_{(i_1,...,i_{k+1})\in I} a^{(k+1)}_{i_1...i_{k+1}} \left((\theta_s)^{i_1}, (\nabla\theta_s)^{i_2}, ..., \left(\nabla^{k-1}\theta_s\right)^{i_k-1}, \left(\nabla^k\theta_s\right)^{i_{k+1}+1} \right)\\
&\quad + \sum_{(i_1,...,i_{k+1})\in I} a^{(k+2)}_{i_1...i_{k+1}} \left((\theta_s)^{i_1}, (\nabla\theta_s)^{i_2}, ..., \left(\nabla^k\theta_s\right)^{i_{k+1}-1}, \nabla^{k+1}\theta_s \right)
\end{aligned}$$

其中 $a^{(j)}_{i_1...i_{k+1}}$ 是新的多重线性形式。形式 $a^{(0)}_{i_1...i_{k+1}}$ 由 $\nabla a_{i_1...i_{k+1}}$ 得到，并增加另一个 $\theta_s.$。注意，由于 $\sum_{m=1}^{k+1} m i_m = k+1$，将 i_1 替换为 i_1+1 会使这个和增加 1。

剩余 的项由对 $\theta_s.$ 的导数求导得到。符号地，

$$\nabla\left(\left(\nabla^j\theta\right)^{i_{j+1}} \right) \sim \left(\nabla^j\theta\right)^{i_{j+1}-1} \left(\nabla^{j+1}\theta\right),$$

因此，对每一项求导都会使 $\nabla^j\theta$ 的幂次减一，并增加另一个 $\nabla^{j+1}\theta.$。同样，在和式 $\sum_{m=1}^{k+1} m i_m = k+1$ 中，将 $ji_j + (j+1)\ i_{j+1}$ 替换为 $j\ (i_j - 1) + (j+1)\ (i_{j+1}+1)$，会使这个和增加 1。

综上，我们可以将 (3.21) 改写为

$$\nabla^{k+1} db_s = \sum_{(i_1,...,i_{k+1},i_{k+2})\in I'} a_{i_1...i_{k+2}} \left((\theta_s)^{i_1}, (\nabla\theta_s)^{i_2}, ..., \left(\nabla^{k+1}\theta_s\right)^{i_{k+2}} \right)$$

其中 $I' = \left\{ (i_1, ..., i_{k+2}) \in \mathbb{N}_0^{k+2}, \text{ 使得 } \sum_{m=1}^{k+2} m i_m = k+2 \right\}$，从而证明了归纳步骤。估计随即得出。

■

引理 3.5 我们有以下逐点估计

$$\left|\nabla^j \theta_{A(t)s}\right| \le C e^{C(j+1)t|\xi|} p_j(t),$$

其中

$$p_j(t) = t\left|\nabla^j d\xi\right| + \sum_{J_j} t^{k_1+...+k_j} |\theta_s|^{i_1} |\nabla\theta_s|^{i_2} ... \left|\nabla^j\theta_s\right|^{i_j} |d\xi|^{k_1} |\nabla d\xi|^{k_2} ... \left|\nabla^{j-1} d\xi\right|^{k_j}, \tag{3.22}$$

其中 $J_j=\left\{(i_1,...,i_j,k_1,...,k_j)\in\mathbb{N}_0^{2j}:\ \sum_{m=1}^{j}mi_m+\sum_{m'=1}^{j}m'k_{m'}=j+1\right\}$.
特别地，对于 $k=1$ 和 $k=2$，我们有

$$\begin{aligned}\left|\nabla\theta_{A(t)s}\right| &\leq Ce^{2Ct|\xi|}\left(|\theta_s|^2+t\,|d\xi|\,|\theta_s|+t^2\,|d\xi|^2+|\nabla\theta_s|+t\,|\nabla d\xi|\right) &(3.23)\\ \left|\nabla^2\theta_{A(t)s}\right| &\leq Ce^{3Ct|\xi|}\left(\left|\nabla^2\theta_s\right|+|\nabla\theta_s|\,|\theta_s|+|\theta_s|^3+t\,|\nabla\theta_s|\,|d\xi|+t\,|\theta_s|^2\,|d\xi|+t\,|\theta_s|\,|\nabla d\xi|\right. &(3.24)\\ &\quad\left.+t^2\,|\theta_s|\,|d\xi|^2+t^3\,|d\xi|^3+t\left|\nabla^2 d\xi\right|\right).\end{aligned}$$

证明。对 (3.9) 求导可知，k-阶协变导数满足以下初值问题：

$$\begin{aligned}\frac{d\nabla^k\theta_{A(t)s}}{dt} &= \sum_{k_1+k_2+k_3=k}\left(\nabla^{k_1}b_{A(t)s}\right)\left(\nabla^{k_2}\xi,\nabla^{k_3}\theta_{A(t)s}\right)+\nabla^k d\xi\\ \nabla^k\theta_{A(0)s} &= \nabla^k\theta_s\end{aligned}$$

对于 k_1、k_2、$k_3\geq 0.$。特别地，

$$\frac{d\nabla^k\theta_{A(t)s}}{dt}=\left[\xi,\nabla^k\theta_{A(t)s}\right]^{A(t)s}+\sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k\\ k_3<k}}\left(\nabla^{k_1}b_{A(t)s}\right)\left(\nabla^{k_2}\xi,\nabla^{k_3}\theta_{A(t)s}\right)+\nabla^k d\xi,$$

因此，常微分方程的解为

$$\begin{aligned}\nabla^k\theta_{A(t)s} &= U_{t\xi}^{(s)}\nabla^k\theta_s+\left(U_{t\xi}^{(s)}\int_0^t\left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1}d\tau\right)\nabla^k d\xi &(3.25)\\ &\quad+U_{t\xi}^{(s)}\int_0^t\left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1}\sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k\\ k_3<k}}\left(\nabla^{k_1}b_{A(\tau)s}\right)\left(\nabla^{k_2}\xi,\nabla^{k_3}\theta_{A(\tau)s}\right)d\tau.\end{aligned}$$

为了估计 $\left|\nabla^k\theta_{A(t)s}\right|$，考虑

$$\begin{aligned}\left|U_{t\xi}^{(s)}\nabla^k\theta_{A(t)s}\right| &\leq e^{Ct|\xi|}\left|\nabla^k\theta_s\right|\\ \left|\left(U_{t\xi}^{(s)}\int_0^t\left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1}d\tau\right)\nabla^k d\xi\right| &\leq te^{Ct|\xi|}\left|\nabla^k d\xi\right|\end{aligned}$$

利用 (2.29) 和 (3.12)，此外，

$$\left|\left(\nabla^{k_1}b_{A(\tau)s}\right)\left(\nabla^{k_2}\xi,\nabla^{k_3}\theta_{A(\tau)s}\right)\right|\leq\left|\nabla^{k_1}b_{A(\tau)s}\right|\left|\nabla^{k_2}\xi\right|\left|\nabla^{k_3}\theta_{A(\tau)s}\right|.$$

由 (3.17)，并利用 $\mathbb{L}$ 是紧致的这一事实，可知

$$\left|\nabla^{k_1}b_{A(\tau)s}\right|\leq C\sum_{(i_1,...,i_{k_1})\in I_{k_1}}\left|\theta_{A(\tau)s}\right|^{i_1}\left|\nabla\theta_{A(\tau)s}\right|^{i_2}...\left|\nabla^{k_1-1}\theta_{A(\tau)s}\right|^{i_{k_1}} \tag{3.26}$$

其中 $I_{k_1}=\left\{(i_1,...,i_{k_1})\in\mathbb{N}^{k_1},\ \text{使得}\ \sum_{m=1}^{k_1}mi_m=k_1\right\}$，并且 C 是一个仅依赖于 $\mathbb{L}.$ 的常数

为了进行归纳论证，我们现在需要完成基础步骤。首先，由 (3.11) 可知

$$\left|\theta_{A(t)s}\right| \leq e^{Ct|\xi|}\left(|\theta_s| + t\,|d\xi|\right).$$

因此，对于 $k=1$,

$$\begin{aligned}
\left|\nabla\theta_{A(t)s}\right| &\leq e^{Ct|\xi|}\left(|\nabla\theta_s| + t\,|\nabla d\xi|\right) \\
&\quad + Ce^{Ct|\xi|}\int_0^t e^{-C\tau|\xi|}\left(\left|b_{A(\tau)s}\right||d\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right| + \left|db_{A(\tau)s}\right||\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right|\right)d\tau \\
&\leq e^{Ct|\xi|}\left(|\nabla\theta_s| + t\,|\nabla d\xi|\right) \\
&\quad + Ce^{Ct|\xi|}\int_0^t e^{-C\tau|\xi|}\left(|d\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right| + \left|\theta_{A(\tau)s}\right|^2|\xi|\right)d\tau
\end{aligned}$$

其中我们使用了估计 $\left|db_{A(\tau)s}\right| \leq C\left|\theta_{A(\tau)s}\right|$ (3.18)。此外,

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{-C\tau|\xi|}|\nabla\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right|d\tau &\leq \int_0^t |\nabla\xi|\left(|\theta_s| + \tau\,|d\xi|\right)d\tau \\
&\leq t\,|\nabla\xi|\,|\theta_s| + t^2\,|d\xi|^2 \\
\int_0^t e^{-C\tau|\xi|}\left|\theta_{A(\tau)s}\right|^2|\xi|\,d\tau &\leq \int_0^t e^{C\tau|\xi|}\left(\left(|\theta_s| + \tau\,|d\xi|\right)^2|\xi|\right)d\tau \\
&\leq \frac{1}{C}e^{Ct|\xi|}\left(|\theta_s| + t\,|d\xi|\right)^2.
\end{aligned}$$

因此，对于某个新的整体常数 C，我们有

$$\left|\nabla\theta_{A(t)s}\right| \leq Ce^{2Ct|\xi|}\left(|\theta_s|^2 + t\,|d\xi|\,|\theta_s| + t^2\,|d\xi|^2 + t\,|\nabla d\xi| + |\nabla\theta_s|\right). \tag{3.27}$$

我们也来完成 $k=2$ 情形。

$$\begin{aligned}
\left|\nabla^2\theta_{A(t)s}\right| &\leq e^{Ct|\xi|}\left(\left|\nabla^2\theta_s\right| + t\left|\nabla^2 d\xi\right|\right) \\
&\quad + Ce^{Ct|\xi|}\int_0^t e^{-C\tau|\xi|}\left(\sum_{k_1+k_2+k_3=2}\left|\nabla^{k_1}b_{A(\tau)s}\right|\left|\nabla^{k_2}\xi\right|\left|\nabla^{k_3}\theta_{A(\tau)s}\right|\right)d\tau.
\end{aligned}$$

更明确地说,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=2\\ k_3<2}}\left|\nabla^{k_1}b_{A(\tau)s}\right|\left|\nabla^{k_2}\xi\right|\left|\nabla^{k_3}\theta_{A(\tau)s}\right| &= \left|\nabla db_{A(\tau)s}\right||\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right| \\
&\quad + \left|db_{A(\tau)s}\right||d\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right| \\
&\quad + \left|db_{A(\tau)s}\right||\xi|\left|\nabla\theta_{A(\tau)s}\right| \\
&\quad + \left|b_{A(\tau)s}\right||\nabla d\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right|.
\end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned}
p_0(\tau) &= |\theta_s| + \tau\,|d\xi| \\
p_1(\tau) &= |\theta_s|^2 + \tau\,|d\xi|\,|\theta_s| + \tau^2\,|d\xi|^2 + |\nabla\theta_s| + \tau\,|\nabla d\xi|
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\left|\theta_{A(\tau)s}\right| &\leq e^{C\tau|\xi|}p_0(\tau)\\ \left|\nabla\theta_{A(t)s}\right| &\leq Ce^{2C\tau|\xi|}p_1(\tau).\end{aligned}$$

再利用 (3.18) 和 (3.19)，可得

$$\begin{aligned}\left|\nabla db_{A(\tau)s}\right||\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right| &\leq Ce^{3C|\xi|\tau}|\xi|p_0\left(p_0^2+p_1\right)\\ \left|db_{A(\tau)s}\right||d\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right| &\leq Ce^{2C|\xi|\tau}p_0^2|d\xi|\\ \left|db_{A(\tau)s}\right||\xi|\left|\nabla\theta_{A(\tau)s}\right| &\leq Ce^{2C|\xi|\tau}|\xi|p_0p_1\\ \left|b_{A(\tau)s}\right||\nabla d\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right| &\leq Ce^{C|\xi|\tau}|\nabla d\xi|p_0.\end{aligned}$$

由于 p_0 和 p_1 是 τ 的非递减函数，我们可以在 $\tau=t$ 处对它们求值。特别地，

$$\begin{aligned}e^{Ct|\xi|}\int_0^t e^{-C\tau|\xi|}\left|\nabla db_{A(\tau)s}\right||\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right|d\tau &\leq C|\xi|p_0\left(p_0^2+p_1\right)e^{Ct|\xi|}\int_0^t e^{2C\tau|\xi|}d\tau\\ &\leq Ce^{3C\tau|\xi|}p_0\left(p_0^2+p_1\right)\\ e^{Ct|\xi|}\int_0^t e^{-C\tau|\xi|}\left|db_{A(\tau)s}\right||d\xi|\left|\theta_{A(\tau)s}\right|d\tau &\leq Cte^{2|\xi|t}p_0^2|d\xi|\leq Cte^{3|\xi|t}p_0^2|d\xi|,\end{aligned}$$

其他项也类似。综上，我们得到

$$\begin{aligned}\left|\nabla^2\theta_{A(t)s}\right| &\leq Ce^{3Ct|\xi|}\left(p_0\left(p_0^2+p_1\right)+tp_0^2|d\xi|+p_0p_1+t|\nabla d\xi|p_0+\left|\nabla^2\theta_s\right|+t\left|\nabla^2 d\xi\right|\right)\\ &\leq Ce^{3Ct|\xi|}\Big(\left|\nabla^2\theta_s\right|+|\nabla\theta_s||\theta_s|+|\theta_s|^3+t|\nabla\theta_s||d\xi|+t|\theta_s|^2|d\xi|+t|\theta_s||\nabla d\xi|\\ &\quad +t\left|\nabla^2 d\xi\right|+t^2|\theta_s||d\xi|^2+t^3|d\xi|^3\Big).\end{aligned}$$

假设对每个 $j<k$,

$$\left|\nabla^j\theta_{A(t)s}\right|\leq Ce^{(j+1)Ct|\xi|}p_j(t),$$

其中

$$p_j(t)=t\left|\nabla^j d\xi\right|+\sum_{J_j}t^{k_1+...+k_j}|\theta_s|^{i_1}|\nabla\theta_s|^{i_2}...\left|\nabla^j\theta_s\right|^{i_{j+1}}|d\xi|^{k_1}|\nabla d\xi|^{k_2}...\left|\nabla^{j-1}d\xi\right|^{k_j},$$

其中 $J_j=\left\{(i_1,...,i_{j+1},k_1,...,k_{j+1})\in\mathbb{N}^{2j+2}:\sum_{m=1}^{j+1}mi_m+\sum_{m=1}^{j}mk_m=j+1\right\}$.

因此,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k\\ k_3<k}}\left(\nabla^{k_1}b_{A(\tau)s}\right)\left(\nabla^{k_2}\xi,\nabla^{k_3}\theta_{A(\tau)s}\right)\right| &\leq C\sum_{(i_0,i_1,...,i_k)\in I'_k}\left|\nabla^{i_0}\xi\right|\left|\theta_{A(\tau)s}\right|^{i_1}\left|\nabla\theta_{A(\tau)s}\right|^{i_2}...\left|\nabla^{k-1}\theta_{A(\tau)s}\right|^{i_k}\\ &\leq C\sum_{(i_0,i_1,...,i_k)\in I'_k}e^{C(k+1-i_0)\tau|\xi|}\left|\nabla^{i_0}\xi\right|p_0^{i_1}p_1^{i_2}...p_{k_1-1}^{i_{k_1}}\\ &\leq C\sum_{\substack{(i_0,i_1,...,i_k)\in I'_k\\ i_0>0}}e^{C(k+1-i_0)\tau|\xi|}\left|\nabla^{i_0}\xi\right|p_0^{i_1}p_1^{i_2}...p_{k-1}^{i_k}\\ &\quad +C\sum_{(0,i_1,...,i_k)\in I'_k}e^{C(k+1)\tau|\xi|}|\xi|p_0^{i_1}p_1^{i_2}...p_{k_1-1}^{i_{k_1}},\end{aligned}$$

其中 $I_k' = \left\{(i_0, i_1, ..., i_k) \in \mathbb{N}_0^{k+1}, \text{ 使得 } \sum_{m=1}^{k} m i_m + i_0 = k+1\right\}$.

现在，由 (3.25) 可得

$$\begin{aligned}
\left|\nabla^k \theta_{A(t)s}\right| &\leq Ce^{Ct|\xi|}\left|\nabla^k \theta_s\right| + te^{Ct|\xi|}\left|\nabla^k d\xi\right| \\
&\quad + Ce^{Ct|\xi|}\int_0^t \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_{k_1})\in I_{k_1} \\ k_1+k_2=k,\ k_2>0}} e^{Ck_1\tau|\xi|} p_0^{i_1} p_1^{i_2} \ldots p_{k_1-1}^{i_{k_1}} \left|\nabla^{k_2}\xi\right| d\tau \\
&\quad + Ce^{Ct|\xi|}\int_0^t \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_k} e^{Ck\tau|\xi|} p_0^{i_1} p_1^{i_2} \ldots p_{k-1}^{i_k} |\xi| \, d\tau \\
&\leq Ce^{Ct|\xi|}\left|\nabla^k \theta_s\right| + te^{Ct|\xi|}\left|\nabla^k d\xi\right| \\
&\quad + C \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_{k_1})\in I_{k_1} \\ k_1+k_2=k,\ k_2>0}} te^{C(k_1+1)t|\xi|} p_0^{i_1} p_1^{i_2} \ldots p_{k_1-1}^{i_{k_1}} \left|\nabla^{k_2}\xi\right| \\
&\quad + C \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_k} e^{C(k+1)t|\xi|} p_0^{i_1} p_1^{i_2} \ldots p_{k-1}^{i_k},
\end{aligned}$$

其中，由于这些函数是非递减的，我们对 $p_i(\tau) \leq p_i(t)$ 进行了界定。此外，在第一个积分中，我们对 $\int_0^t e^{Ck_1\tau|\xi|} d\tau \leq te^{Ck_1 t|\xi|}$ 进行了界定；在第二个积分中，我们使用了 $\int_0^t e^{Ck\tau|\xi|}|\xi| \, d\tau \leq C' e^{Ck|\xi|}$，其中 C'. 为某个新的常数。进一步地，我们可以界定

$$\begin{aligned}
\left|\nabla^k \theta_{A(t)s}\right| &\leq Ce^{C(k+1)t|\xi|}\left(\left|\nabla^k \theta_s\right| + \left|\nabla^k d\xi\right|\right. \\
&\quad + \sum_{\substack{(i_1,\ldots,i_{k_1})\in I_{k_1} \\ k_1+k_2=k,\ k_2>0}} t p_0^{i_1} p_1^{i_2} \ldots p_{k_1-1}^{i_{k_1}} \left|\nabla^{k_2}\xi\right| \\
&\quad \left. + \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_k} p_0^{i_1} p_1^{i_2} \ldots p_{k-1}^{i_k} \right) \\
&\leq Ce^{C(k+1)t|\xi|} p_k(t).
\end{aligned}$$

■

推论 3.6 对于 $k > 0$, $b_{A(t)s}$ 满足

$$\left|\nabla^k b_{A(t)s}\right| \lesssim e^{Ckt|\xi|} p_{k-1}(t),$$

其中， $p_k(t)$ 由 (3.22) 给出。

证明。由 (3.17) 可得，

$$\left|\nabla^k b_{As}\right| \lesssim \sum_{(i_1,\ldots,i_k)\in I_k} |\theta_{As}|^{i_1} |\nabla\theta_{As}|^{i_2} \ldots \left|\nabla^{k-1}\theta_{As}\right|^{i_k} \tag{3.28}$$

其中 $I_k = \left\{(i_1, ..., i_k) \in \mathbb{N}_0^k, \text{ 使得 } \sum_{m=1}^{k} m i_m = k\right\}$. 然而，根据引理 3.5，

$$\left|\nabla^j \theta_{A(t)s}\right| \lesssim e^{C(j+1)t|\xi|} p_j(t),$$

其中

$$p_j(t) = t\left|\nabla^j d\xi\right| + \sum_{J_j} t^{k_1+...+k_j} |\theta_s|^{i_1} |\nabla\theta_s|^{i_2} ... \left|\nabla^j\theta_s\right|^{i_{j+1}} |d\xi|^{k_1} |\nabla d\xi|^{k_2} ... \left|\nabla^{j-1} d\xi\right|^{k_j},$$

其中 $J_j = \left\{(i_1, ..., i_{j+1}, k_1, ..., k_j) \in \mathbb{N}_0^{2j+1} : \sum_{m=1}^{j+1} m i_m + \sum_{m'=1}^{j} m' k_{m'} = j+1\right\}$. 因此

$$\begin{aligned}\left|\nabla^k b_{A(t)s}\right| &\lesssim e^{Ckt|\xi|} \sum_{(i_1,...,i_k)\in I_k} p_0^{i_1} p_1^{i_2} ... p_{k-1}^{i_k} \\ &\lesssim e^{Ckt|\xi|} p_{k-1}\end{aligned}$$

■

更一般地，假设我们有一个单参数族 $X(t)$，它是取值于 $\mathfrak{l}$ 的映射，并满足 s

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = [\xi, X(t)]^{A(t)s} + Y \\ X(0) = X_0, \end{cases}, \tag{3.29}$$

其中 Y 也是一个取值于 $\mathfrak{l}$ 的映射。我们知道

$$X(t) = U_{t\xi}^{(s)} X_0 + \left(U_{t\xi}^{(s)} \int_0^t \left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1} d\tau\right) Y, \tag{3.30}$$

特别是,

$$|X(t)| \lesssim e^{tC|\xi|} \left(|X_0| + t|Y|\right). \tag{3.31}$$

对 (3.29) 求导，我们得到关于 X. 的高阶导数的估计

引理 3.7 设 $X(t)$ 是一个单参数族 $X(t)$，其为取值于 $\mathfrak{l}$ 的映射并满足 (3.29)。那么,

$$\left|\nabla^k X(t)\right| \lesssim e^{(k+1)Ct|\xi|} \sum_{k'+k''=k} p_{k'-1}(t) \left(\left|\nabla^{k''} X_0\right| + t\left|\nabla^{k''} Y\right|\right),$$

其中 $p_{-1}(t) = 1$ 且对于 $k \geq 0$, $p_k(t)$ 由 (3.22) 给出。

证明。对 (3.29) 求导，对于 $k \geq 1$，得到

$$\frac{d\nabla^k X(t)}{dt} = \left[\xi, \nabla^k X(t)\right]^{A(t)s} + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_3<k}} \left(\nabla^{k_1} b_{A(t)s}\right) \left(\nabla^{k_2}\xi, \nabla^{k_3} X(t)\right) + \nabla^k Y,$$

因此,

$$\begin{aligned}\nabla^k X(t) &= U_{t\xi}^{(s)} \left(\nabla^k X_0\right) + \left(U_{t\xi}^{(s)} \int_0^t \left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1} d\tau\right) \nabla^k Y \\ &\quad + \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_3<k}} \left(U_{t\xi}^{(s)} \int_0^t \left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1} \left(\nabla^{k_1} b_{A(\tau)s}\right) \left(\nabla^{k_2}\xi, \nabla^{k_3} X(\tau)\right) d\tau\right)\end{aligned}$$

令 $q_0(t) = |X_0| + t|Y|$, 则

$$|X(t)| \lesssim e^{tC|\xi|} q_0(t).$$

假设对于所有 $j<k$,

$$\left|\nabla^{j}X\left(t\right)\right|\lesssim e^{(j+1)Ct|\xi|}q_{j}\left(t\right),$$

其中 $q_j(t)$ 是非递减的。于是,

$$\begin{aligned}\left|U_{t\xi}^{(s)}\int_{0}^{t}\left(U_{\tau\xi}^{(s)}\right)^{-1}\left(\nabla^{k_1}b_{A(\tau)s}\right)\left(\nabla^{k_2}\xi,\nabla^{k_3}X\left(\tau\right)\right)d\tau\right| &\lesssim e^{Ct|\xi|}\int_{0}^{t}e^{k_3C\tau|\xi|}\left|\nabla^{k_1}b_{A(\tau)s}\right|\left|\nabla^{k_2}\xi\right|q_{k_3}\left(\tau\right)d\tau\\ &\lesssim e^{Ct|\xi|}\int_{0}^{t}e^{(k_1+k_3)C\tau|\xi|}p_{k_1-1}\left|\nabla^{k_2}\xi\right|q_{k_3}\left(\tau\right)d\tau\end{aligned}$$

对于 $k_2=0$,

$$e^{Ct|\xi|}\int_{0}^{t}e^{k_3C\tau|\xi|}\left|\nabla^{k_1}b_{A(\tau)s}\right|\left|\xi\right|q_{k_3}\left(\tau\right)d\tau\lesssim e^{(k+1)Ct|\xi|}p_{k_1-1}q_{k_3}\left(t\right)$$

对于 $k_2>0$,

$$\begin{aligned}e^{Ct|\xi|}\int_{0}^{t}e^{k_3C\tau|\xi|}\left|\nabla^{k_1}b_{A(\tau)s}\right|\left|\nabla^{k_2}\xi\right|q_{k_3}\left(\tau\right)d\tau &\lesssim e^{(k_1+k_3+1)Ct|\xi|}p_{k_1-1}\left|\nabla^{k_2}\xi\right|q_{k_3}\left(t\right)\\ &\lesssim e^{(k+1)Ct|\xi|}p_{k_1+k_2-1}q_{k_3}\left(t\right).\end{aligned}$$

因此,

$$\left|\nabla^{k}X\left(t\right)\right|\lesssim e^{(k+1)Ct|\xi|}\left(\left|\nabla^{k}X_{0}\right|+t\left|\nabla^{k}Y\right|+\sum_{k'+k''=k-1}p_{k'}q_{k''}\right)$$

因此,对于 $k\geq1$,

$$q_{k}=\left|\nabla^{k}X_{0}\right|+t\left|\nabla^{k}Y\right|+\sum_{k'+k''=k-1}p_{k'}q_{k''}.$$

令 $x_k=\left|\nabla^{k}X_{0}\right|+t\left|\nabla^{k}Y\right|$,则容易看出

$$q_{k}=\sum_{L_{k}}p_{0}^{j_0}p_{1}^{j_1}...p_{k-1}^{j_{k-1}}x_{l}$$

其中

$$L_{k}=\left\{\left(j_{0},...,j_{k-1},x_{l}\right)\in\mathbb{N}_{0}^{k+2}:l+\sum_{m=0}^{j-1}\left(m+1\right)j_{m}=k\right\},$$

因此

$$q_{k}\lesssim x_{k}+\sum_{k'+k''=k-1}p_{k'}x_{k''}.$$

因此,

$$\left|\nabla^{k}X\left(t\right)\right|\lesssim e^{(k+1)Ct|\xi|}\sum_{k'+k''=k}p_{k'-1}\left(\left|\nabla^{k''}X_{0}\right|+t\left|\nabla^{k''}Y\right|\right),$$

其中 $p_{-1}=1$. ■

我们需要能够定义具有索伯列夫正则性的环路值映射。首先,让我们回顾一下流形之间函数的索伯列夫空间 $W^{k,\ p}$。

引理 3.8 设 M 是一个紧致的 n 维流形,且 N 是一个 l 维流形。设 k 是一个非负整数,且 $r\geq0$ 使得 $kr>n.$。令 $\Phi:\ N\longrightarrow\mathbb{R}^{2l}$ 为一个光滑嵌入(根据惠特尼嵌入定理),并设 $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ 是 $N.$的一个图册。设 $f:\ M\longrightarrow N$ 是一个连续映射。那么,以下命题等价:

1. $f \in W^{k,r}(M,N)$ 2. $\Phi \circ f \in W^{k,r}\left(M,\mathbb{R}^{2l}\right)$3.
$\phi_\alpha \circ f \in W^{k,r}\left(\phi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \quad \mathbb{R}^l\right)$ 对于任意坐标图 (U_α,ϕ_α)

4. $f^*\theta_G \in W^{k-1,r}(M,T^*M\otimes\mathfrak{g})$ 在 $N=G$ 为紧致李群的情况下，其李代数为$\mathfrak{g}$，且 θ_G 是 $G.$上的 Maurer-Cartan 形式

特别地，条件 (2) 和 (3) 分别与嵌入 Φ 以及图册 (U_α,ϕ_α) 的选取无关。

请注意，由于索伯列夫嵌入 $W^{k,r}\subset C^0$，条件 $kr>n$ 是引理 3.8 中所必需的，其中 $kr>n.$。我们将根据环 Maurer-Cartan形式给出环值 $W^{k,p}$-映射的一个刻画，这与引理 3.8 中的第 (4) 项类似。

引理 3.9 设 M 是一个紧致的 n 维流形，并设 $\mathbb{L}$ 是一个维数为 l 的光滑拟群，其切代数为 $\mathfrak{l}$，且带有 $\mathfrak{l}$值 Maurer-Cartan形式 θ。令 k 为非负整数，并令 $r\geq 0$ 满足 $kr>n.$。设 $s:M\longrightarrow\mathbb{L}$ 是一个连续映射。那么，$s\in W^{k,r}(M,\mathbb{L})$ 当且仅当 $\theta_s\in W^{k-1,r}(M,T^*M\otimes\mathfrak{l})$。

证明。假设 $s\in W^{k,\ r}(M,\mathbb{L})$。由引理 3.8，若 $\{(U_\alpha,\phi_\alpha)\}$ 是 $\mathbb{L}$的图册，则对每个坐标图 (U_α,ϕ_α) $\phi_\alpha\circ s\in W^{k,\ r}\left(\phi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \quad \mathbb{R}^l\right).$现在，$\left\{s^{-1}(U_\alpha)\right\}$ 是 M的开覆盖；但利用 M的紧性，取 $\left\{s^{-1}(U_i)\right\}$ 为一个有限子覆盖，并假设 $\{u_i\}$ 是从属于该子覆盖的光滑单位分解。那么，我们可以写成

$$\begin{aligned}\theta_s &= \theta s_* = \sum_i (u_i\theta)\, s_* \\ &= \sum_i \left((u_i\theta)\left(\phi_i^{-1}\right)_*\right)\left((\phi_i)_*\, s_*\right).\end{aligned}$$

对每个 i，$(\phi_i)_*\, s_* = (\phi_i\circ s)_* \in W^{k-1,\ r}\left(\phi_i^{-1}(U_i) \quad \mathbb{R}^l\right).$另一方面，$(u_i\theta)\left(\phi_i^{-1}\right)_*$是光滑函数，因此与它复合得到一个连续映射 $W^{k-1,\ r}\left(\phi_i^{-1}(U_i) \quad \mathbb{R}^l\right)\longrightarrow W^{k-1,\ r}\left(\phi_i^{-1}(U_i) \quad T^*U_i\otimes\mathfrak{l}\right)$（使用引理 B.8]）。总而言之，我们看到这个有限和的每一项在 $W^{k-1,\ r}$ 范数下都有界，因此 $\theta_s\in W^{k-1,\ r}(M,T^*M\otimes\mathfrak{g})$。

反之，现设 $\theta_s\in W^{k-1,\ r}(M,T^*M\otimes\mathfrak{g})$。我们将使用引理 3.8 中的第 (2) 项来证明 $s\in W^{k,\ r}(M,\mathbb{L})$。这改编自 $[48,$引理 B.5] 的证明。令 $\Phi:\mathbb{L}\longrightarrow\mathbb{R}^{2l}$ 为光滑嵌入，从而 $\Phi\circ s$ 是连续的。特别地，$\Phi\circ s\in L^r\left(M,\mathbb{R}^{2l}\right).$现在，令 $x\in M$ 并考虑

$$\begin{aligned}d(\Phi\circ s)|_x &= d\Phi|_{s(x)}\, ds|_x \\ &= \left(d\Phi|_{s(x)}\,\rho_{s(x)}\right)\left(\rho_{s(x)}^{-1}\, ds|_x\right) \\ &= E(s(x))\,(\theta_s)_x,\end{aligned}$$

其中，对于每个 $p\in\mathbb{L}$，我们都有线性映射 $E(p)=d\Phi|_p\,\rho_p:\mathfrak{l}\longrightarrow\mathbb{R}^{2l}$，而映射 $p\mapsto E(p)$ 是从 $\mathbb{L}$到 $\mathrm{Hom}\left(\mathfrak{l},\mathbb{R}^{2l}\right).$的光滑映射。因此，我们可以写成

$$d(\Phi\circ s)=(E\circ s)\,\theta_s,$$

由于 s 连续， $E\circ s$ 在算子范数下有界。因此，存在一个常数$C>0$，使得

$$\|d(\Phi\circ s)\|_{L^r}\leq C\|\theta_s\|_{L^r}\leq C\|\theta_s\|_{W^{k-1,r}}$$

这表明 $\Phi\circ s\in W^{1,\,r}\left(M,\mathbb{R}^{2l}\right)$. 为了进一步证明 $\Phi\circ s\in W^{k,\,r}\left(M,\mathbb{R}^{2l}\right)$, $k\geq 2$，通过考察高阶导数可以得到类似的估计。

■

定理 3.10 设 M 为紧黎曼流形。假设 $kr>n=$ 维数 M. 设 $s\in W^{k,\,r}(M,\mathbb{L})$ 且 $\xi\in W^{k,\,r}(M,\mathfrak{l})$，并假设 $A=\exp_s(\xi)$。则，

$$\|\theta_{As}\|_{W^{k-1,r}}\lesssim e^{Ck\|\xi\|_{C^0}}\left(\Theta^k+\Theta\right), \tag{3.32}$$

其中 $\Theta=\|\theta_s\|_{W^{k-1,r}}+\|\xi\|_{W^{k,r}}$.

类似地，如果 $X=X(1)$，其中 $X(t)$ 是满足 (3.29) 的 $\mathfrak{l}$值映射的单参数族。那么，

$$\|X\|_{W^{k,r}}\lesssim e^{C(k+1)\|\xi\|_{C^0}}\left(\|X_0\|_{W^{k,r}}+\|Y\|_{W^{k,r}}\right)\left(\Theta^{k+1}+\Theta\right)$$

证明。根据引理 3.5，对于每个 $j\leq k$，我们都有逐点估计

$$\left|\nabla^{j-1}\theta_{As}\right|\lesssim e^{Cj|\xi|}p_{j-1},$$

其中

$$p_{j-1}=\sum_{J_{j-1}}|\theta_s|^{i_1}\left|\nabla\theta_s\right|^{i_2}...\left|\nabla^{j-1}\theta_s\right|^{i_j}\left|d\xi\right|^{k_1}\left|\nabla d\xi\right|^{k_2}...\left|\nabla^{j-1}d\xi\right|^{k_j}, \tag{3.33}$$

其中 $J_{j-1}=\left\{(i_1,...,i_j,k_1,...,k_j)\in\mathbb{N}_0^{2j}\colon\ \sum_{m=1}^{j}mi_m+\sum_{m=1}^{j}mk_m=j\right\}$. 因此，

$$\left\|\nabla^{j-1}\theta_{As}\right\|_{L^r}\lesssim e^{Cj\|\xi\|_{C^0}}\left\|p_{j-1}\right\|_{L^r}.$$

现在，根据引理 A.1，若 $\sum_{i'=1}^{k'}q_{i'}m_{i'}\leq k$，则

$$\left\|\prod_{i'=1}^{k'}A_{i'}^{m_{i'}}\right\|_{L^r}\lesssim\prod_{i'=1}^{k'}\|A_{i'}\|_{W^{k-q_{i'},r}}^{m_{i'}}. \tag{3.34}$$

We c并将其应用于 (3.33)，对每个 $\left|\nabla^i\theta_s\right|$ 或 $\left|\nabla^{i-1}d\xi\right|$ 因子赋予权重 $q_i=i$。 n,

$$\begin{aligned}\|p_{j-1}\|_{L^r}&\lesssim\sum_{J_{j-1}}\prod_{i'=1}^{j-1}\left\|\nabla^{i'-1}\theta_s\right\|_{W^{k-i',r}}^{i_{i'}}\prod_{i''=1}^{j}\left\|\nabla^{i''-1}d\xi\right\|_{W^{k-i'',r}}^{k_{i''}}\\&=\sum_{J_{j-1}}\|\theta_s\|_{W^{k-1,r}}^{i_1}...\left\|\nabla^{j-1}\theta_s\right\|_{W^{k-(j-1),r}}^{i_{j-1}}\|d\xi\|_{W^{k-1,r}}^{k_1}...\left\|\nabla^{j-1}d\xi\right\|_{W^{k-j,r}}^{k_j}.\end{aligned}$$

由于对于每个 $i'\leq k$, $\left\|\nabla^{i'-1}\theta_s\right\|_{W^{k-i',\,r}}\lesssim\|\theta_s\|_{W^{k-1,\,r}}$和$\left\|\nabla^{i'-1}d\xi\right\|_{W^{k-i',\,r}}\lesssim\|\xi\|_{W^{k,\,r}}$，我们得到

$$\|p_{j-1}\|_{L^r}\lesssim\sum_{J_{j-1}}\|\theta_s\|_{W^{k-1,r}}^{i_1+...+i_{j-1}}\|\xi\|_{W^{k,r}}^{k_1+...+k_j}. \tag{3.35}$$

因此，(3.35) 式的右侧是关于$\|\theta_s\|_{W^{k-1,\,r}}$ 和$\|\xi\|_{W^{k,\,r}}$ 的多项式。根据 J_{j-1}的定义，该多项式的次数为 j，最低阶项为$\|\theta_s\|_{W^{k-1,\,r}}$ 和$\|\xi\|_{W^{k,\,r}}$。因此，我们可以写成

$$\left\|\nabla^{j-1}\theta_{As}\right\|_{L^r}\lesssim e^{Cj\|\xi\|_{C^0}}\left(\Theta^j+\Theta\right)$$

其中 $\Theta = \|\theta_s\|_{W^{k-1,\,r}} + \|\xi\|_{W^{k,\,r}}$。特别地，

$$\|\theta_{As}\|_{L^r} \lesssim e^{C\|\xi\|_{C^0}}\Theta \lesssim e^{Cj\|\xi\|_{C^0}}\left(\Theta^j+\Theta\right).$$

现在，由于

$$\|\theta_{As}\|_{W^{k-1,r}} \lesssim \|\theta_{As}\|_{L^r} + \left\|\nabla^{k-1}\theta_{As}\right\|_{L^r} \lesssim e^{Ck\|\xi\|_{C^0}}\left(\Theta^k+\Theta\right),$$

这就得到了式（3.32）。

现在，根据引理 3.7，对于每个 j，

$$\left|\nabla^j X\right| \lesssim e^{(j+1)C|\xi|}\sum_{j'+j''=j} p_{j'-1}\left(\left|\nabla^{j''}X_0\right| + \left|\nabla^{j''}Y\right|\right),$$

因此，

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla^j X\right\|_{L^r} &\lesssim e^{(j+1)C\|\xi\|_{C^0}}\sum_{j'+j''=j}\left\|p_{j'-1}\left(\left|\nabla^{j''}X_0\right| + \left|\nabla^{j''}Y\right|\right)\right\|_{L^r} \\
&\lesssim e^{(j+1)C\|\xi\|_{C^0}}\sum_{J'_{j-1}}\left\|\left|\theta_s\right|^{i_1}\left|\nabla\theta_s\right|^{i_2}...\left|\nabla^{j-1}\theta_s\right|^{i_{j-1}}\left|d\xi\right|^{k_1}\left|\nabla d\xi\right|^{k_2}...\left|\nabla^{j-1}d\xi\right|^{k_j}\times\right. \\
&\quad \left.\times\left(\left|\nabla^{j''}X_0\right| + \left|\nabla^{j''}Y\right|\right)\right\|_{L^r}
\end{aligned}$$

其中

$$J'_{j-1} = \left\{(i_1,...,i_j,k_1,...,k_j,j'')\in\mathbb{N}_0^{2j+1} : \sum_{m=1}^{j} mi_m + \sum_{m=1}^{j} mk_m + j'' = j\right\}.$$

因此，根据引理 A.1，

$$\begin{aligned}
\left\|\nabla^j X\right\|_{L^r} &\lesssim e^{(j+1)C\|\xi\|_{C^0}}\sum_{J'_{j-1}}\left(\left\|\nabla^{j''}X_0\right\|_{W^{k-j'',r}} + \left\|\nabla^{j''}Y\right\|_{W^{k-j'',r}}\right)\prod_{i'=1}^{j-1}\left\|\nabla^{i'-1}\theta_s\right\|_{W^{k-i',r}}^{i_{i'}}\times \\
&\quad\times\prod_{i''=1}^{j}\left\|\nabla^{i''-1}d\xi\right\|_{W^{k-i'',r}}^{k_{i''}} \\
&\lesssim e^{(j+1)C\|\xi\|_{C^0}}\left(\|X_0\|_{W^{k,r}} + \|Y\|_{W^{k,r}}\right)\sum_{J'_{j-1}}\|\theta_s\|_{W^{k-1,r}}^{i_1+...+i_j}\|\xi\|_{W^{k,r}}^{k_1+...+k_j} \\
&\lesssim e^{C(j+1)\|\xi\|_{C^0}}\left(\|X_0\|_{W^{k,r}} + \|Y\|_{W^{k,r}}\right)\left(\Theta^j+\Theta\right),
\end{aligned}$$

与之前类似。因此，我们得出

$$\|X\|_{W^{k,r}} \lesssim e^{C(k+1)\|\xi\|_{C^0}}\left(\|X_0\|_{W^{k,r}} + \|Y\|_{W^{k,r}}\right)\left(\Theta^{k+1}+\Theta\right).$$

■

推论3.11 假设 $A\in C^0(M,\mathbb{L}')$ 和 $s\in W^{k,\,r}(M,\mathbb{L})$，其中 $kr > n = \dim M$.。那么，$A\in W^{k,\,r}(M,\mathbb{L}')$ 当且仅当 $\theta_{As}\in W^{k-1,\,r}(M,T^*M\otimes\mathfrak{l})$。

证明。映射 $\mu:\ \mathbb{L}'\times\mathbb{L}\longrightarrow\mathbb{L}$ 由 $(A,s)\ \mapsto\ As$ 给出，是光滑的，因此与 μ 的复合是从 $W^{k,r}(M,\mathbb{L}'\times\mathbb{L})$ 到 $W^{k,r}(M,\mathbb{L})$ 的连续映射。如果 $A\in W^{k,r}(M,\mathbb{L}')$，那么由于 $s\in W^{k,r}(M,\mathbb{L})\ \subset C^0(M,\mathbb{L})$ $As\in W^{k,r}(M,\mathbb{L})$，从而根据引理 3.9，$\theta_{As}\in W^{k-1,r}(M,T^*M\otimes\mathfrak{l})$，进而 $\theta_A^{(s)}\in W^{k-1,r}(M,T^*M\otimes\mathfrak{l})$。

反之，如果 $\theta_{As}\in W^{k-1,\,r}(M,T^*M\otimes\mathfrak{l})$，那么 $As\in W^{k,\,r}(M,\mathbb{L})$。由于右除法是光滑映射，且 $s\in C^0(M,\mathbb{L})$，我们得出 $A\in W^{k,\,r}(M,\mathbb{L}')$。 ■

4 规范理论

设 M 是一个光滑的有限维流形，其上带有一个 Ψ-主丛 $\pi:\ \mathcal{P}\longrightarrow M.$

定义 4.1 令 $s\colon\ \mathcal{P}\longrightarrow\mathbb{L}$ 为一个等变映射。特别地，给定 $p\in\mathcal{P}$，等价类 $\lfloor p,s_p\rfloor_\Psi$ 定义了伴随丛 $\mathcal{Q}=\mathcal{P}\times_\Psi\mathbb{L}$的一个截面，其中 $\lfloor p,s_p\rfloor_\Psi$ 是关于 Ψ的作用的等价类:

$$(p,s_p)\sim(ph,l_{h^{-1}}(s_p))=(ph,s_{ph})\quad for\ any\ h\in\Psi. \tag{4.1}$$

我们将 s 称为定义映射或定义截面。

我们将定义几个与 $\mathcal{P}$. 相关的伴随丛。众所周知，伴随丛的截面等价于等变映射。基于这一点，我们还给出与这些丛的截面相对应的等变映射的性质。令 $h\in\Psi$，并且如前所述，用 h' 表示 h的部分作用。

丛	等变映射	等变性
$\mathcal{P}$	$k:\ \mathcal{P}\longrightarrow\Psi$	$k_{ph}=h^{-1}k_p$
$\mathcal{Q}'=\mathcal{P}\times_{\Psi'}\mathbb{L}'$	$q:\ \mathcal{P}\longrightarrow\mathbb{L}'$	$q_{ph}=\ (h')^{\ -1}q_{\ p}$
$\mathcal{Q}=\mathcal{P}\times_\Psi\mathbb{L}$	$r:\ \mathcal{P}\longrightarrow\mathbb{L}$	$r_{ph}=h^{-1}\ (r_p)$
$\mathcal{A}=\mathcal{P}\times_{\Psi'_*}\mathfrak{l}$	$\eta:\ \mathcal{P}\longrightarrow\mathfrak{l}$	$\eta_{ph}=\ (h')\ _*^{\ -1}\eta_{\ p}$
$\mathfrak{p}_\mathcal{P}=\mathcal{P}\times_{(\mathrm{Ad}_\xi)\ _*}\mathfrak{p}$	$\xi:\ \mathcal{P}\longrightarrow\mathfrak{p}$	$\xi_{ph}=\left(\mathrm{Ad}_h^{-1}\right)_*\xi_p$
$\mathrm{Ad}\ (\mathcal{P})\ =\mathcal{P}\times_{\mathrm{Ad}_\Psi}\Psi$	$u:\ \mathcal{P}\longrightarrow\Psi$	$u_{ph}=h^{-1}u_ph$

(4.2)

给定等变映射 $q,r:\ \mathcal{P}\longrightarrow\mathbb{L}'$，利用 s定义等变乘积，对任意$p\in\mathcal{P}$，其定义如下

$$q\circ_s r\big|_p=q_p\circ_{s_p}r_p. \tag{4.3}$$

根据引理 2.7，相应的映射 $q\circ_s r:\ \mathcal{P}\longrightarrow\mathbb{L}'$ 是等变的，因此 $\circ_s$ 在 $\mathcal{Q}$的截面上诱导出逐纤维乘积。类似地，我们定义 $\mathcal{Q}$.的截面的逐纤维商。同样，我们定义等变括号 $[\cdot,\cdot]^{(s)}$ 和等变映射 φ_s。同样，Killing 型 $K^{(s)}$ 也是等变的。

假设主 Ψ-丛 $\mathcal{P}$ 具有由分解 $T\mathcal{P}=\mathcal{HP}\oplus\mathcal{VP}$ 给出的主 Ehresmann联络，以及相应的垂直 $\mathfrak{p}$ 值联络 1-形式 $\omega.$。给定等变映射 $f\colon\ \mathcal{P}\longrightarrow S$，定义

$$d^\omega f:=f_*\circ\mathrm{proj}_\mathcal{H}:T\mathcal{P}\longrightarrow\mathcal{HP}\longrightarrow TS. \tag{4.4}$$

由于它在任意垂直向量上都为零，因此这是一个水平映射。映射 $d^\omega f$ 仍然是等变的，因此在伴随丛 $\mathcal{P}\times_\Psi S$ 的截面上诱导出协变导数。如果 S 是一个向量空间，那么这就化为向量丛值函数的外协变导数的通常定义，而 $d^\omega f$ 是一个向量丛值1-形式。

接下来 [26], ，我们来定义定义映射 s 相对于联络 ω的挠率。

定义 4.2 定义映射 s 相对于 ω 的挠率 $T^{(s,\omega)}$ 是 $\mathcal{P}$ 上的一个水平 $\mathfrak{l}$ 值 1-形式，由 $T^{(s,\omega)}=($ $s^*\theta)\circ\mathrm{proj}_\mathcal{H}$ 给出，其中 θ 是 $\mathbb{L}$ 的 Maurer-Cartan形式。等价地，在 $p\in\mathcal{P}$ 处，我们有

$$T^{(s,\omega)}\Big|_p=\left(R_{s_p}^{-1}\right)_*d^\omega s\big|_p\,. \tag{4.5}$$

因此， $T^{(s,\omega)}$ 是 $\theta_s = s^*\theta.$ 的水平分量。我们也很容易看出它是 Ψ-等变的。因此， $T^{(s,\omega)}$ 是 $\mathcal{P}$ 上的一个基本（即水平且等变的） $\mathfrak{l}$ 值 1-形式，从而在 M 上定义了一个取值于伴随向量丛 $\mathcal{A} = \mathcal{P}\times_{\Psi'_*}\mathfrak{l}.$ 的 1-形式

回顾一下，联络 ω 在 $\mathcal{P}$ 上的曲率 $F^{(\omega)} \in \Omega^2(\mathcal{P}, \mathfrak{p})$由下式给出

$$F^{(\omega)} = d\omega \circ \mathrm{proj}_{\mathcal{H}} = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega]_{\mathfrak{p}}\,, \tag{4.6}$$

其中楔积是隐含的。给定定义映射 s，将$\hat{}F^{(s,\omega)} \in \Omega^2(\mathcal{P}, \mathfrak{l})$定义为曲率 $F^{(\omega)}$ 相对于 s到 $\mathfrak{l}$的投影，使得对于任意 $X_p, Y_p \in T_p\mathcal{P}$,

$$\hat{F}^{(s,\omega)} = \varphi_s\left(F^{(\omega)}\right). \tag{4.7}$$

定理 4.3（[26, 定理4.19]）$\hat{}F^{(s,\omega)}$和 $T\ (s,\ \omega)$ 满足以下结构方程

$$\hat{F}^{(s,\omega)} = d^{\omega}T^{(s,\omega)} - \frac{1}{2}\left[T^{(s,\omega)}, T^{(s,\omega)}\right]^{(s)}, \tag{4.8}$$

其中1-形式 $T^{(s,\omega)}$ 之间的楔积是隐含的。

对于7维流形上的八元数丛，挠率与某个曲率分量之间的这种关系已在 [24]中得到证明。

如前所述， $\mathcal{P}$ 上的等变水平形式对应于基流形 $M.$ 上相应伴随丛的截面。现在让我们转换视角，以丛的截面来进行讨论。具体而言，我们将 s 视为丛$\mathcal{Q}$的光滑截面，因此记作 $s \in \Gamma(\mathcal{Q})$，并称之为定义截面。同样，我们也可以考虑截面 $A \in \Gamma(\mathcal{Q}')$，它们具有 $\Psi.$ 的部分作用。 $\mathbb{L}'$和 $\mathbb{L}$中元素的乘积也由此推广到丛的截面上，因此我们得到乘积 $\Gamma(\mathcal{Q}') \times \Gamma(\mathcal{Q}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{Q})$。

于是， ω 上的联络会在伴随丛上诱导出联络，并相应地在这些丛的截面上诱导出协变导数。前文定义的挠率 $T^{(s,\omega)}$是 $\mathcal{P}$ 上的一个取值于 $\mathfrak{l}$的水平等变1-形式，因此它唯一对应于M上的一个取值于丛 $\mathcal{A}$的1-形式；也就是说，我们现在将 $T^{(s,\omega)} \in \Omega^1(\mathcal{A})$。

在标准规范理论中，关键对象是联络；然而，在非结合理论中，除了联络 ω 之外，我们还有定义截面 $s.$。接下来给出如下定义。

定义 4.4 非结合规范理论由以下对象定义：

1. 一个光滑拟群 $\mathbb{L}$ ，其具有有限维伪自同构李群 Ψ ，且单位元处的切代数为 $\mathfrak{l}$。2. 一个光滑流形 M ，其上有一个主 Ψ-丛 $\mathcal{P}$，以及伴随丛 $\mathcal{Q}$、 $\mathcal{Q}'$、 $\mathcal{A}$，它们的纤维分别为 $\mathbb{L}$、 $\mathbb{L}'$和 $\mathfrak{l}$。3. 一个构型 (s, ω)，其中 $s \in \Gamma(\mathcal{Q})$ 是定义截面， ω 是 $\mathcal{P}.$ 上的联络。每个构型都带有挠率 $T^{(s,\omega)} \in \Omega^1(\mathcal{A})$。

如我们所见，关键组成部分是环 $\mathbb{L}$及其伪自同构群，以及相应的主丛 $\mathcal{P} \longrightarrow M.$。选定构型 (s, ω) 后，其余部分便都唯一确定。特别是，伴随丛是唯一的，因为定义它们时使用了 Ψ的特定作用。

群 Ψ 通过标准规范变换作用于 ω，也作用于截面 $s.$。如 [26],所示，这些作用之间存在如下关系。

$$T^{(s,h^*\omega)} = (h'_*)^{-1} T^{(h(s),\omega)}, \tag{4.9}$$

其中 h 是 $\mathrm{Ad}\,\mathcal{P}$ 的一个截面，因此在 $\Psi.$ 中是纤维逐点的。不过，我们将以下述方式定义环规范变换。

定义 4.5 环规范变换是指将定义截面 s 右乘一个截面 $A \in \Gamma(\mathcal{Q}')$ 所得到的变换，其中 $s \mapsto As$，因而 $T^{(s,\omega)} \mapsto T^{(As,\omega)}$.

˄ 关于环规范变换，挠率和曲率 F 按以下方式变换。

引理 4.6（[**26,** 定理 **4.28**]）设 $A \in \Gamma(\mathcal{Q}')$ 且 $s \in \Gamma(\mathcal{Q})$。那么，

$$T^{(As,\omega)} = \left(\rho_A^{(s)}\right)^{-1} d^\omega A + \mathrm{Ad}_A^{(s)}\, T^{(s,\omega)} \tag{4.10a}$$

$$\hat{F}^{(As,\omega)} = \left(\rho_A^{(s)}\right)^{-1} (F' \cdot A) + \mathrm{Ad}_A^{(s)}\, \hat{F}^{(s,\omega)}, \tag{4.10b}$$

其中 $F' \cdot A$ 表示 $\mathfrak{p}$ 对 $\mathbb{L}.$ 的无穷小作用

固定联络 ω，并设有一条路径 $\mathrm{exp}_s(t\xi)\, s \in \Gamma(\mathcal{Q})$。那么由引理 3.2，只需取水平投影，便可立即得到相应的一参数挠率族满足一个类似的常微分方程。

引理 4.7 假设 $T^{(s,\omega)}$ 是相对于定义截面 $s \in \Gamma(\mathcal{Q})$ 和联络 $\omega.$ 的挠率。假设 $A_t = \mathrm{exp}_s(t\xi) \in \Gamma(\mathcal{Q}')$，则

$$\frac{d}{dt} T^{(A_t s,\omega)} = \left[\xi, T^{(A_t s,\omega)}\right]^{(A_t s)} + d^\omega \xi \tag{4.11}$$

利用 (4.10a) 和 (3.10)，给定 $\xi \in \Gamma(\mathcal{A})$，可得

$$\begin{aligned} T^{((\exp_s \xi)s,\omega)} &= U_\xi^{(s)} T^{(s,\omega)} \\ &\quad + U_\xi^{(s)} \left(\int_0^1 U_\xi^{(s)}(\tau)^{-1}\, d\tau \right) d^\omega \xi. \end{aligned} \tag{4.12}$$

现在假设基流形 M 是带有度量 g 的紧致黎曼流形，并且环 $\mathbb{L}$ 在 $\mathfrak{l}.$ 上具有非退化 Killing 型。于是，定义泛函

$$\mathcal{E}_\omega(s) = \int_M \left| T^{(s,\omega)} \right|^2_{(s)} \mathrm{vol}_g, \tag{4.13}$$

其中 $||_{(s)}$ 是 M 上的度量 g 与 $\mathcal{A}.$ 截面上的 Killing 型 $\langle\rangle^{(s)}$ 的组合。因此，临界点成为规范理论 [10, 24, 25, 27, 26, 41] 中库仑规范条件的类似物。

定理 4.8 设 $\mathbb{L}$ 是一个半单 Moufang 环，则泛函 (4.13) 关于定义截面 s 的变形的临界点满足

$$(d^\omega)^*\, T^{(s,\omega)} = 0. \tag{4.14}$$

证明。由引理 2.34 可知，对于 Moufang 环， $K^{(s)}$ 实际上与 s. 无关。此外，它在 $\mathrm{ad}^{(s)}$. 下保持不变。考虑 s 的变形。半单条件意味着 $K^{(s)}$ 是非退化的。考虑路径 $s_t = \exp_s(t\xi)\, s$，其中 $\xi \in \Gamma(\mathcal{A})$。那么，

$$\begin{aligned}
\left.\frac{d}{dt}\mathcal{E}(s_t,\omega)\right|_{t=0} &= \left.\frac{d}{dt}\int_M \left|T^{(s_t,\omega)}\right|_s^2 \mathrm{vol}_g\right|_{t=0} \\
&= 2\int_M \left\langle T^{(s,\omega)}, \left.\frac{d}{dt}T^{(s_t,\omega)}\right|_{t=0}\right\rangle \mathrm{vol}_g \\
&= 2\int_M \left\langle T^{(s,\omega)}, \left[\xi, T^{(s,\omega)}\right]^{(s)} + d^\omega\xi\right\rangle \mathrm{vol}_g,
\end{aligned}$$

此处我们用到了 (4.11)。注意，

$$\begin{aligned}
\left\langle T^{(s,\omega)}, \left[\xi, T^{(s,\omega)}\right]^{(s)}\right\rangle &= g^{ab}\left\langle T_a^{(s,\omega)}, \left[\xi, T_b^{(s,\omega)}\right]^{(s)}\right\rangle \\
&= -g^{ab}\left\langle \left[T_a^{(s,\omega)}, T_b^{(s,\omega)}\right], \xi^{(s)}\right\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

因此，

$$\left.\frac{d}{dt}\mathcal{E}(s_t,\omega)\right|_{t=0} = 2\int_M \left\langle (d^\omega)^* T^{(s,\omega)}, \xi\right\rangle \mathrm{vol}_g .$$

因此， $\mathcal{E}$ 关于 s 变形的临界点满足

$$(d^\omega)^* T^{(s,\omega)} = 0. \tag{4.15}$$

■

注 4.9 在定理 4.8 中，我们用到了这样一个事实：Moufang 环路的切代数是马尔采夫代数，即它是交错的，并满足额外的恒等式 2.50。此外，半单条件意味着 Killing 型非退化。正如注 2.35 中所述，完整的马尔采夫代数条件可能过强；较弱的假设或许就足以获得这些关键性质，事实上也足以得到以 $(d^\omega)^* T^{(s,\omega)} = 0$ 为临界点方程。另一方面，在其他情形下，采用其他技巧，例如引入不同的度量（如李三系 *[35]* 上的 Killing-Ricci 型）或引入修正的联络，也可能产生类似的结果。

为了证明存在将 s 变换为 $(d^\omega)^* T^{(s,\omega)} = 0$ 的变换，我们将改编 [17], 中的步骤，尤其会应用巴拿赫空间隐函数定理（定理 A.2）。我们所需的相关巴拿赫空间是具有适当正则性的截面空间。此前使用的记号 Γ 和 Ω^k 将始终分别表示光滑截面和光滑丛值形式。给定一个光滑定义截面 $s \in \Gamma(\mathcal{Q})$ 和一个光滑联络 ω，对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 和 $q \in [1,\infty]$，记 $W^{k,\,q\,(s,\,\omega)}\left(\Lambda^l T^*M \otimes \mathcal{A}\right)$ 为 $\Lambda^l T^*M \otimes \mathcal{A}$ 的截面索伯列夫空间，其范数定义为

$$\|\chi\|_{W^{k,q}_{(s,\omega)}} = \left(\int_M |\chi|^q_{(s)}\,\mathrm{vol}_g\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_M \left|(d^\omega)^k \chi\right|^q_{(s)}\,\mathrm{vol}_g\right)^{\frac{1}{q}},$$

对于 $1 \le q < \infty$ 以及

$$\|\chi\|_{W^{k,\infty}_{(s,\omega)}} = \operatorname*{ess\,sup}_X |\chi|_{(s)} + \operatorname*{ess\,sup}_X \left|(d^\omega)^k \chi\right|_{(s)}.$$

类似地，我们将 $W^{0,\,r}\,(s,\,\omega)$ 记作 $L^r_{(s)}$.

根据定义 4.2，(s,ω) 的挠率就是 θ_s 的水平分量，因此我们可以立即改写第3节中的估计，得到以下挠率估计。

引理 4.10 设 $\mathbb{L}$ 是一个光滑紧致环，其切代数为 $\mathfrak{l}$，伪自同构群为 Ψ.。设 (M,g) 是一个维数为 $n\geq 2$ 的闭黎曼流形，$\mathcal{P}$ 是 M 上的一个 Ψ-主丛，且 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{P}$ 的伴随向量丛，其纤维与 $\mathfrak{l}$ 同构。设 ω 是 $\mathcal{P}$ 上的一个光滑联络，且 $s\in\Gamma(\mathcal{Q})$ 是一个光滑定义截面。此外，设 k 是一个非负整数，且 $r\geq 0$ 满足 $kr>n.$。令 $\xi\in W^{k,\,r\,(s,\,\omega)}(\mathcal{A})$，并设 $A=\exp_s(\xi)$。那么，

$$\left\|T^{(As,\omega)}\right\|_{W^{k-1,r}_{(s,\omega)}}\lesssim e^{Ck\left\|\xi_{(s,\omega)}\right\|_{C^0}}\left(\Theta^k+\Theta\right), \tag{4.16}$$

其中 $\Theta=\left\|T^{(s,\,\omega)}\right\|_{W^{k-1,\,r\,(s,\omega)}}+\|\xi\|_{W^{k,\,r}_{(s,\omega)}}$。

引理 4.11 现在设 $(k'-1)r\geq n$。在与引理 4.10相同的其他假设下，如果 $\xi\in W^{k',\,r\,(s,\omega)}(\mathcal{A})$，并且给定 $A=\exp_s(\xi)$ 使得

$$(d^\omega)^*\,T^{(As,\omega)}=0, \tag{4.17}$$

那么实际上 A 是光滑的。

证明。利用惠特尼嵌入定理，设 $\mathbb{L}$ 光滑地嵌入某个 $\mathbb{R}^N$.中。我们可以在该嵌入的像上定义环乘积和商。因此，丛 $\mathcal{Q}$和 $\mathcal{Q}'$ 可以看作 M上的一个向量丛的子丛。特别地，由于 s 是光滑的，且 $\exp_s:\mathfrak{l}\longrightarrow\mathbb{L}$也是一个光滑映射，我们发现，由于 $k'r>n$和 $\xi\in W^{k',\,r}(\mathcal{A})$，因此 $A=\exp_s(\xi)\in W^{k',\,r}(\mathcal{Q}')\subset C^0(\mathcal{Q}')$。利用 (4.10a)，我们有

$$\begin{aligned}(d^\omega)^*\,T^{(As,\omega)} &= (d^\omega)^*\left(\left(\rho_A^{(s)}\right)^{-1}d^\omega A+\mathrm{Ad}_A^{(s)}\,T^{(s,\omega)}\right)\\ &= \left(\rho_A^{(s)}\right)^{-1}(d^\omega)^*\,d^\omega A-\left\langle d^\omega\left(\rho_A^{(s)}\right)^{-1},d^\omega A\right\rangle_{TM}+(d^\omega)^*\left(\mathrm{Ad}_A^{(s)}\,T^{(s,\omega)}\right),\end{aligned}$$

其中，$\langle\cdot,\ \cdot\rangle_{TM}$是 $TM.$上的内积。因此，我们可以将（4.17）改写为

$$(d^\omega)^*\,d^\omega A = \rho_A^{(s)}\left\langle d^\omega\left(\rho_A^{(s)}\right)^{-1},d^\omega A\right\rangle_{TM}-\rho_A^{(s)}\left((d^\omega)^*\left(\mathrm{Ad}_A^{(s)}\,T^{(s,\omega)}\right)\right) \tag{4.18}$$

$$= -\left\langle\left(d^\omega\rho_A^{(s)}\right)\left(\rho_A^{(s)}\right)^{-1},d^\omega A\right\rangle_{TM}+\rho_A^{(s)}\left\langle d^\omega\,\mathrm{Ad}_A^{(s)},T^{(s,\omega)}\right\rangle \tag{4.19}$$

$$-\rho_A^{(s)}\left(\mathrm{Ad}_A^{(s)}\,(d^\omega)^*\,T^{(s,\omega)}\right). \tag{4.20}$$

现在，由于 $A\in C^0$和 $T^{(s,\omega)}$ 是光滑的，对于任意 $p>0$,

$$\left\|(d^\omega)^*\,d^\omega A\right\|_{L^p}\leq c(A)\left(\left\||d^\omega A|^2\right\|_{L^p}+\|d^\omega A\|_{L^p}+\left\|(d^\omega)^*\,T^{(s,\omega)}\right\|_{L^p}\right) \tag{4.21}$$

此外，$\left\||d^\omega A|^2\right\|_{L^p}\leq\|d^\omega A\|^2_{L^{2p}}$. 由于$\frac{k'-1}{n}\geq\frac{1}{r}$，我们看到，对于任意 $q>0.$，$\frac{k'-1}{n}>\frac{1}{r}-\frac{1}{q}$根据索伯列夫嵌入定理，这表明

$$\|d^\omega A\|_{L^q}\lesssim\|d^\omega A\|_{W^{k'-1,r}}\lesssim\|A\|_{W^{k',r}}.$$

因此，(4.21)表明 $\left\|(d^{\omega})^{*} d^{\omega} A\right\|_{L^{p}}$ 是有界的。根据椭圆正则性，这意味着 $A \in W^{2,\ p}$.特别地，如果 $p>n$，那么 $k^{\prime}>\frac{n}{p}+1$，从而 $A \in C^{1}$. 通过反复应用椭圆正则性论证，我们进而得到 A 的光滑性。特别需要注意的是，这与嵌入的选择无关。

■

备注 4.12 引理 4.11 的证明改编自 *[11,* 命题 2.3 的证明，*4],*其中特别证明了规范变换到库仑规范的正则性。在该情形下， $r=2$ 和 $n=4$，因此条件 $kr>n$ 和（$k-1$） $r \geq n$ 是等价的，因为 k 是一个整数。更一般地，光滑性所需的条件要比连续性所需的条件稍强。

于是，我们得到主定理。

定理 4.13 设 $\mathbb{L}$ 是一个具有切代数 $\mathfrak{l}$ 和伪自同构群 Ψ. 的光滑紧致环。设（M， g）是一个维数为 $n \geq 2$的闭黎曼流形，并设 $\mathcal{P}$ 是Ψ-主丛在 M 上的丛，且设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathcal{P}$ 的伴随向量丛，其纤维同构于 $\mathfrak{l}$。设 ω 是 $\mathcal{P}$. 上的光滑联络。此外，设 k 是一个非负整数，且 $r \geq 0$ 满足 $kr>n.$。那么，存在常数 $\delta \in$ （$0,1]$ 和 $K \in$ （0， ∞），使得如果 $s \in \Gamma$ （$\mathcal{Q}$）是一个满足以下条件的光滑定义截面

$$\left\|T^{(s,\omega)}\right\|_{W^{k-1,r}_{(s,\omega)}}<\delta,$$

那么存在一个截面 $A \in W^{k,r}(\mathcal{Q}')$，使得

$$(d^{\omega})^{*} T^{(As,\omega)}=0$$

and

$$\left\|T^{(As,\omega)}\right\|_{W^{k-1,r}_{(s,\omega)}}<K\left\|T^{(s,\omega)}\right\|_{W^{k-1,r}}\left(1+\left\|T^{(s,\omega)}\right\|^{k-1}_{W^{k-1,r}}\right). \tag{4.22}$$

此外，若 $(k-1)r \geq n$，则 A 是光滑的。

证明。考虑 $\xi \in W^{k,r\,(s,\omega)}(\mathcal{A})$ 和 $a \in W_{(k-1)\ r\,(s,\omega)}(T^{*}M \otimes \mathcal{A})$。暂且省略函数空间中的 (s,ω) 下标。由于 k 和 r 满足 $kr>n$，根据索伯列夫嵌入定理，$W^{k,r}$ 嵌入于 C^{0}。定义函数

$$G: W^{(k-1),r}\left(T^{*}M \otimes \mathcal{A}\right) \times W^{k,r}\left(\mathcal{A}\right) \longrightarrow W^{(k-2),r}\left(\mathcal{A}\right)$$

by

$$G\left(a,\xi\right)=(d^{\omega})^{*}\left(U^{(s)}_{\xi} a+U^{(s)}_{\xi}\left(\int_{0}^{1} U^{(s)}_{\xi}\left(\tau\right)^{-1} d\tau\right) d^{\omega}\xi\right). \tag{4.23}$$

假设 $\xi \in C^{0}$，再结合 $U^{(s)}_{\xi}$ 和导数映射的光滑性，可得 G 是巴拿赫空间之间的光滑映射。注意，利用 (4.12)，我们可以写成

$$G\left(a,\xi\right)=(d^{\omega})^{*}\left(U^{(s)}_{\xi}\left(a-T^{(s,\omega)}\right)+T^{((\exp_{s}\xi)s,\omega)}\right) \tag{4.24}$$

利用联络 ω，我们定义丛值霍奇拉普拉斯算子

$$\Delta^{(\omega)}=(d^{\omega})^{*} d^{\omega}+(d^{\omega})^{*} d^{\omega}.$$

在 0-形式上，它化简为 $\Delta^{(\omega)}=(d^{\omega})^{*}\,d^{\omega}$. 它可扩展为索伯列夫空间上的算子，形式如下

$$\Delta^{(\omega)}:W^{k,r}\left(\Lambda^{l}T^{*}M\otimes\mathcal{A}\right)\longrightarrow W^{(k-2),r}\left(\Lambda^{l}T^{*}M\otimes\mathcal{A}\right),$$

根据标准椭圆理论，它是 Fredholm 算子，指标为 0，且具有闭值域

$$\left(\ker\Delta^{(\omega)}\right)^{\perp}\cap W^{(k-2),r}\left(\Lambda^{l}T^{*}M\otimes\mathcal{A}\right),$$

其中 $\perp$ 表示与 L^{2}正交的补空间。

为了能够在 (4.23) 中应用隐函数定理（定理 A.2），令我们约束$\xi\in\left(\ker\Delta^{(\omega)}\right)^{\perp}$，并且还可以看到 Im $G\subset\left(\ker\ \Delta^{(\omega)}\right)^{\perp}$。这一点显而易见。假设$\sigma=\left(d^{(\omega)}\right)^{*}\rho$对于某个 $\rho\in W^{(k-1),\ r}($ $T^{*}M\otimes\mathcal{A})$ 且 $\gamma\in\ker\ \Delta^{(\omega)}\subset W_{(k-2)^{r}}(\mathcal{A})$，那么

$$\langle\sigma,\gamma\rangle_{L^{2}}=\left\langle\left(d^{(\omega)}\right)^{*}\rho,\gamma\right\rangle_{L^{2}}=\left\langle\rho,d^{(\omega)}\gamma\right\rangle_{L^{2}}=0,$$

因为在紧流形上，$\gamma\in\ker\Delta^{(\omega)}$ 当且仅当 $d^{(\omega)}\gamma=0$. 因此，G 的像包含于 $\left(\ker\Delta^{(\omega)}\right)^{\perp}$ 中，为简便起见我们将其记作 $K^{\perp}$，所以实际上，

$$G:W^{(k-1),r}\left(T^{*}M\otimes\mathcal{A}\right)\times\left(K^{\perp}\cap W^{k,r}\left(\mathcal{A}\right)\right)\longrightarrow K^{\perp}\cap W_{A_{1}}^{(k-2),r}\left(\mathcal{A}\right).$$

现在让我们考虑 G 在 $(a,\xi)=0$ 沿 $(b,\eta)\in W_{(k-1)^{r}}(T^{*}M\otimes\mathcal{A})\times\left(K^{\perp}\cap W^{k,\ r}(\mathcal{A})\right)$ 方向上的微分：

$$\begin{aligned}DG|_{(0,0)}(b,\eta) &= \frac{d}{dt}\left(d^{\omega}\right)^{*}\left(U_{t\eta}^{(s)}(tb)+U_{t\eta}^{(s)}\left(\int_{0}^{1}U_{t\eta}^{(s)}(\tau)^{-1}\,d\tau\right)d^{\omega}(t\eta)\right)\Big|_{t=0}\\ &= \left(d^{\omega}\right)^{*}b+\left(d^{\omega}\right)^{*}d^{\omega}\eta,\end{aligned}$$

由于 $U_{0}^{(s)}=\mathrm{id}_{\mathrm{I}\,.}$，特别是，沿第二个方向的偏导数为

$$\partial_{2}G|_{(0,0)}(\eta)=\Delta^{(\omega)}\eta.$$

在定理 A.2 中，令

$$\begin{aligned}X &= W^{(k-1),r}\left(T^{*}M\otimes\mathcal{A}\right)\\ Y &= K^{\perp}\cap W^{k,r}\left(\mathcal{A}\right)\\ Z &= K^{\perp}\cap W_{A_{1}}^{(k-2),r}\left(\mathcal{A}\right).\end{aligned}$$

那么，映射 $\partial_{2}G|_{(0,0)}:Y\longrightarrow Z$ 是一个同构，并且我们定义

$$N=\left\|\left(\partial_{2}G|_{(0,0)}\right)^{-1}\right\|_{\mathrm{Hom}(Z,Y)}.$$

Let

$$\begin{aligned}U &= \left\{x\in W^{(k-1),r}\left(T^{*}M\otimes\mathcal{A}\right):\ \|x\|_{W^{(k-1),r}}<\zeta\right\}\subset X\\ V &= \left\{y\in K^{\perp}\cap W^{k,r}\left(\mathcal{A}\right):\ \|y\|_{W^{k,r}}<\zeta\right\}\subset Y,\end{aligned}$$

其中 $\zeta \in (0,1]$ 足够小，使得

$$\sup_{(x,y)\in U\times V}\left\|\partial_2 G|_{(x,y)}-\partial_2 G|_{(0,0)}\right\|_{\mathrm{Hom}(Y,Z)}\leq\frac{1}{2N}.$$

另外，将常数 β 定义为

$$\beta=\sup_{(x,y)\in U\times V}\left\|\partial_1 G|_{(x,y)}\right\|_{\mathrm{Hom}(X,Z)}<\infty.$$

˜于是，由定理 A.2 的结论可知，存在一个开集 $U\subset U$，其定义为

$$\tilde{U}=\left\{x\in W^{(k-1),r}\left(T^*M\otimes\mathcal{A}\right):\ \|x\|_{W^{(k-1),r}}<\delta\right\}\subset X,$$

其中 $\delta\in\left(0,\min\left\{\zeta,\frac{\zeta}{2\beta N}\right\}\right]$，以及唯一的光滑映射

$$\xi:\tilde{U}\longrightarrow V,$$

使得 $\xi(0)=0$，并且

$$\begin{aligned}G\left(a,\xi\left(a\right)\right) &= 0,\ \forall a\in\tilde{U}\\ D\xi|_a &= -\left(\partial_2 G|_{(a,\xi(a))}\right)^{-1}\partial_1 G|_{(a,\xi(a))}\in\mathrm{Hom}\left(X,Y\right),\ \forall a\in\tilde{U}\\ \left\|\xi\left(a_1\right)-\xi\left(a_2\right)\right\|_Y &\leq 2\beta N\left\|a_1-a_2\right\|_{X,}\ \forall a_1,a_2\in\tilde{U}.\end{aligned}$$

特别地，对于任意 $a\in W_{(k-1)^r}(T^*M\otimes\mathcal{A})$，满足 $\|a\|_{W^{(k-1),r}}<\delta$，存在一个截面 $A(a)=\exp_s(\xi(a))$，满足 $\xi\in W^{k,r}(\mathcal{A})$，使得

$$(d^\omega)^*\left(U_\xi^{(s)}\left(a-T^{(s,\omega)}\right)+T^{(As,\omega)}\right)=0,$$

and

$$\left\|\xi\left(a\right)\right\|_{W^{k,r}}\leq 2\beta N\left\|a\right\|_{W^{(k-1),r}}.$$

由于 s 是光滑的，且 $\exp_s:\mathfrak{l}\longrightarrow\mathbb{L}$ 是一个光滑映射，这表明 $A\in W^{k,r}(\mathcal{Q}')$.

现在假设 s 和 ω 满足 $\left\|T_{(s,\omega)}\right\|_{W^{(k-1),r}}<\delta$，那么令 $a=T_{(s,\omega)}$ 可得 $\xi_{(s,\omega)}=\xi\left(T^{(s,\omega)}\right)$，其中

$$\begin{aligned}(d^\omega)^*\left(T^{(As,\omega)}\right) &= 0\\ \left\|\xi_{(s,\omega)}\right\|_{W^{k,r}} &< \zeta\\ \left\|\xi_{(s,\omega)}\right\|_{W^{k,r}} &\leq 2\beta N\left\|T^{(s,\omega)}\right\|_{W^{(k-1),r}},\end{aligned}$$

其中 $A=\exp_s\left(\xi_{(s,\omega)}\right)$. 由 (4.16) 可得

$$\left\|T^{(As,\omega)}\right\|_{W^{k-1,r}}\lesssim e^{Ck\|\xi_{(s,\omega)}\|_{C^0}}\left(\Theta^k+\Theta\right),\tag{4.25}$$

其中 $\Theta=\left(\left\|T_{(s,\omega)}\right\|_{W^{k-1,r}}+\left\|\xi_{(s,\omega)}\right\|_{W^{k,r}}\right)$·现在，利用用 T 表示的 ξ 的估计，我们得到

$$\Theta\lesssim(1+2\beta N)\left(\left\|T^{(s,\omega)}\right\|_{W^{k-1,r}}\right),$$

并且由于 $kr > n$， $\|\xi_{(s,\omega)}\|_{C^0} \lesssim \|\xi_{(s,\omega)}\|_{W^{k,\,r}} < \zeta$. 总之，将这些常数合并为一个常数 K后，我们得到

$$\left\|T^{(As,\omega)}\right\|_{W^{k-1,r}} < K\left\|T^{(s,\omega)}\right\|_{W^{k-1,r}}\left(1+\left\|T^{(s,\omega)}\right\|_{W^{k-1,r}}^{k-1}\right), \tag{4.26}$$

从而得到（4.22）。

如果 $(k-1)\,r \geq n$，那么根据引理 4.11，我们看到 A 是光滑的。■

5 G_2流形

现在可以将前几节所讨论的一般图景专门化到具有 G_2结构的流形情形。14维群 G_2 是五个例外李群中最小的一个，并定义为单位八元数环路 $U\mathbb{O}$的自同构群。设 M 是一个紧致的7维流形，且其第一、第二施蒂费尔-惠特尼类均为零，因此该流形既可定向，又具有自旋结构。那么，众所周知 [18, 19]， M 具有一个G_2结构，即将标架丛的结构群约化为 G_2. 由于 G_2 是 $SO\,(7)$ 的子群， G_2 结构可以唯一地扩展为一个 $SO(7)$ 结构，从而在 M. 上定义一个黎曼度量 g 和定向。等价地，给定一个黎曼度量 g， M上的一个 $SO\,(7)$ 结构可以提升为一个自旋结构，即一个主 Spin (7) 结构。给定该自旋结构，我们随后可以构造一个旋量丛 $\mathcal{S}$，它必然具有一个处处不为零的截面。任意这样的旋量截面都会将 M上的自旋结构约化为一个 G_2结构。事实上，任意单位旋量都由此定义一个与度量 g.相容的 G_2结构。

回顾一下，Spin (7) 有三个低维实不可约表示：1 维表示 V_1、7 维“向量”表示 V_7，以及 8 维“旋量”表示 S_7 [2]。表示 V_1 和 V_7 可下降为 $SO\,(7)$ 的表示。此外，克利福德乘积给出了映射

$$V_7 \times S_7 \longrightarrow S_7. \tag{5.1}$$

取定 $V_8 = V_1 \oplus V_7$后，我们便可将此映射扩展为 $m:\ V_8 \times S_7 \longrightarrow S_7$. 此乘法是非退化的，固定 $\xi \in S_7$ 后即可将 V_8 识别为 S_7. 。随后将这两个空间都识别为八元数，而乘法 m 便产生了八元数乘法。元素 ξ 被识别为 $1 \in \mathbb{O}$. 。Spin (7) 作用下 $\xi \in S_7$ 的稳定子同构于 G_2. 。注意，这里的 V_8 对应于 Spin (8) 的不可约“向量”表示，而 S_7 的两个副本则分别被识别为 Spin (8) 的不可约 8 维手征旋量表示 $S_8^{\pm}$，从而得到 Spin (8) 的赋范三重性 [2]。由于映射 m 保持范数，它限制为 V_8 和 S_7 中的单位球面，我们分别将其记为 $U\mathbb{O}'$ 和 $U\mathbb{O}$，因为它们分别对应于第 2 节一般理论中的 $\mathbb{L}'$ 和 $\mathbb{L}$ 。显然， $U\mathbb{O}$ 是一个紧致光滑环路。 $U\mathbb{O}$ 在 1 处的切空间同构于 $\mathbb{R}^7 \cong \mathrm{Im}\ \mathbb{O}$. 。因此，我们得到如下对象识别。

对象	环路	八元数
伪自同构群	Ψ	Spin (7)
部分伪自同构群	Ψ'	$SO\,(7)$
自同构群	H	G_2
Ψ 的李代数	$\mathfrak{p}$	$\mathfrak{so}\,(7)$
具有 Ψ 完全作用的环	$\mathbb{L}$	$U\mathbb{O} \subset S_7$
Ψ的部分作用环	$\mathbb{L}'$	$U\mathbb{O}' \subset V_8$
切代数	$\mathfrak{l}$	$\mathrm{Im}\,\mathbb{O} \cong V_7 \cong \mathbb{R}^7$

因此，在上述流形 M 上，自旋结构对应于一般理论中的一个主 Ψ-丛，单位旋量丛 $U\mathcal{S}$ 对应于丛 $\mathcal{Q}$，而 $\mathbb{O}M \cong \Lambda^0 \oplus TM$ 的单位子丛 $U\mathbb{O}M$ 对应于 $\mathcal{Q}'$.。这正是 [24] 中引入的八元数丛。因此，我们得到如下字典，用于联系一般环丛理论中的对象与 G_2-几何。

环丛	G_2-几何
$\mathcal{P}$	自旋结构： M 上的主 Spin (7) 丛
$\mathcal{Q}' = \mathcal{P} \times_{\Psi'} \mathbb{L}'$	单位八元数丛 $U\mathbb{O}M$
$\mathcal{Q} = \mathcal{P} \times_{\Psi} \mathbb{L}$	单位旋量丛 $U\mathcal{S}$
$\mathcal{A} = \mathcal{P} \times_{\Psi'_*} \mathfrak{l}$	虚八元数丛： TM
$\mathfrak{p}_{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \times_{(\mathrm{Ad}_{\mathfrak{S}})_*} \mathfrak{p}$	$\mathfrak{so}$ (7)-丛，位于 $M \cong \Lambda^2 T^*M$ 上
Ad $(\mathcal{P})$ $= \mathcal{P} \times_{\mathrm{Ad}_{\Psi}} \Psi$	SO(7) 规范变换

G_2-结构也可以用微分形式来描述，因为 G_2 也可以定义为保持某个 3-形式 φ_0 [30] 的 $GL(7,\mathbb{R})$ 的子群。

定义 5.1 设 $\left(e^1, e^2, ..., e^7\right)$ 是 $\left(\mathbb{R}^7\right)^*$ 的标准基，并用 e^{ijk} 表示 $e^i \wedge e^j \wedge e^k$。那么定义 φ_0 为 $\mathbb{R}^7$ 上由下式给出的 3-形式

$$\varphi_0 = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356}. \tag{5.2}$$

那么， G_2 被定义为保持 φ_0的 $GL(7,\mathbb{R})$子群。

事实证明，7 维流形上的 G_2-结构与满足以下条件的光滑 3-形式 φ 一一对应：由 (5.3) 定义的取值于 7-形式的双线性形式 B_φ 是正定的（更多细节请参见 [6] 以及 [28] 的 arXiv 版本）。

$$B_\varphi(u,v) = \frac{1}{6}(u \lrcorner \varphi) \wedge (v \lrcorner \varphi) \wedge \varphi. \tag{5.3}$$

此处的 s 符号 」表示向量与微分形式的缩并：$(u \lrcorner \varphi)_{mn} = u^a \varphi_{amn}$.

若光滑 3-形式 φ 满足 B_φ 是一个正定双线性形式与处处不为零的 7-形式的张量积，则称其为正的。在这种情况下，它唯一确定一个黎曼度量g_φ 和体积形式 vol$_\varphi$ ，使得对于向量 u 和 v，有以下关系

$$g_\varphi(u,v)\,\mathrm{vol}_\varphi = \frac{1}{6}(u \lrcorner \varphi) \wedge (v \lrcorner \varphi) \wedge \varphi. \tag{5.4}$$

定义正3形式 φ的一种等价方式是：在每一点处， φ 位于$GL(7,\mathbb{R})$对 φ_0的轨道中。容易验证，$\varphi = \varphi_0$的度量 (5.4) 实际上恰好是 $\mathbb{R}^7$上的标准欧几里得度量 g_0。因此，任何位于 $GL(7,\mathbb{R})$对 φ_0 的轨道中的 φ，都具有一个相应的黎曼度量 g，该度量位于 $GL(7,\mathbb{R})$对 g_0. 的轨道中。唯一的区别在于，在此轨道中， g_0 （连同定向）的稳定子是群 SO(7)，而 φ_0的稳定子是 $G_2 \subset SO(7)$。这表明，对应于同一度量、即彼此等距的正3形式，由 $SO(7)/G_2 \cong \mathbb{RP}^7 \cong S^7/\mathbb{Z}_2$参数化。因此，在黎曼流形上，与度量相容的 G_2-结构由一个 $\mathbb{RP}^7$-丛的截面参数化，或者等价地，由一个 S^7-丛的截面参数化，其中对径点被视为相同。等距G_2-结构的精确参数化见定理 5.2。

定理 5.2（[7]）设 M 为一个7维光滑流形。假设 φ 是 M 上的一个正3形式，其相应的黎曼度量为 g。那么，任何以 g 同样作为相应度量的正3形式 $\tilde{\varphi}$ ，均可由以下表达式给出：

$$\tilde{\varphi} = \sigma_A(\varphi) = \left(a^2 - |\alpha|^2\right)\varphi - 2a\alpha \lrcorner (*\varphi) + 2\alpha \wedge (\alpha \lrcorner \varphi) \tag{5.5}$$

其中 $A = (a, \alpha)$ 是一对，其中 a 是 M 上的标量函数， α 是满足以下条件的向量场

$$a^2 + |\alpha|^2 = 1 \tag{5.6}$$

事实上， $A = (a, \alpha)$ 也可以解释为一个单位八元数截面，其中 a 是实部， α 是虚部。八元数丛与 G_2-结构之间的关系已在 [24]中得到详细阐述。特别地， M 上的单位八元数丛的截面对与同一度量相联系的 G_2-结构进行参数化。

定义 5.3 M 上的八元数丛 $\mathbb{O}M$ 是如下给出的秩8实向量丛：

$$\mathbb{O}M \cong \Lambda^0 \oplus TM \tag{5.7}$$

其中 $\Lambda^0 \cong M \times \mathbb{R}$ 是一个平凡线丛。在每个点 $p \in M$， $\mathbb{O}_p M \cong \mathbb{R} \oplus T_p M$.

定义（5.7）给出了 M 上八元数自然的实部与虚部分解。我们可以写作 $A = (\mathrm{Re}\ A, \mathrm{Im}\, A)$，或 $A = \begin{pmatrix} A \\ \mathrm{Re}\ A \end{pmatrix}$ Im。由于 $\mathbb{O}M$ 被定义为张量丛， M 上的黎曼度量 g 会在 $\mathbb{O}M$. 上诱导出一个度量。令 $A = (a, \alpha) \in \Gamma(\mathbb{O}M)$。那么，

$$|A|^2 = a^2 + |\alpha|_g^2 \tag{5.8}$$

度量使我们能够定义八元数的单位范数子丛 $U\mathbb{O}M$ ，并能够在 TM. 上定义向量叉积

定义 5.4 给定 M 上的 G_2-结构 φ ，我们定义关于 φ 的 M. 上的向量叉积。令 α 和 β 为两个向量场，则定义

$$\langle \alpha \times_\varphi \beta, \gamma \rangle = \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \tag{5.9}$$

对任意向量场 γ *[20, 31]*。

利用内积和叉积，我们现在可以在 $\mathbb{O}M$ 上定义八元数乘积。

定义 5.5 令 A、 $B \in \Gamma$（$\mathbb{O}M$）。设 A =（a， α）且 B =（b， β）。给定 M 上的向量叉积 (5.9)，我们定义关于 φ 的八元数乘积 $A \circ_\varphi B$ 如下：

$$A \circ_\varphi B = \begin{pmatrix} ab - \langle \alpha, \beta \rangle \\ a\beta + b\alpha + \alpha \times_\varphi \beta \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

如果使用哪个 G_2-结构来定义八元数乘积没有歧义，我们就简单地写作 AB 来表示它。特别地，$|AB| = |A|\,|B|$.

给定一个 G_2 结构 φ 及其相关联的度量 g，我们可以利用该度量定义 Levi-Civita 联络 ∇。随后， G_2 结构的内蕴挠率定义为 $\nabla\varphi$。按照[22, 32], ，我们可以写成

$$\nabla_a \varphi_{bcd} = -2T_a{}^e \psi_{ebcd} \tag{5.11}$$

其中 T_{ab} 是完全挠率张量。同样，我们也可以写成

$$\nabla_a \psi_{bcde} = 8 T_{a[b} \varphi_{cde]} \tag{5.12}$$

我们也可以对 (5.11) 求逆，得到 T 的显式表达式

$$T_a{}^m = -\frac{1}{48} \left(\nabla_a \varphi_{bcd}\right) \psi^{mbcd}. \tag{5.13}$$

这个二阶张量完全确定了 $\nabla\varphi$ [22]。

注 5.6 此处定义的挠率张量 T 实际上对应于 $-T$ 中的 *[24]*、$-\frac{1}{2}T$ 中的 *[22]* 以及 $\frac{1}{2}T$ 中的 *[32]*。尽管这在转换各种结果时需要格外小心，但这样做最终会更方便。

给定一个单位范数旋量截面 $\xi \in \Gamma(\mathcal{S})$，$G_2$-结构 3-形式 φ_ξ 定义如下：

$$\varphi_\xi(\alpha, \beta, \gamma) = -\langle \xi, \alpha \cdot (\beta \cdot (\gamma \cdot \xi)) \rangle_S, \tag{5.14}$$

其中，$\cdot$ 表示克利福德乘法，α、β、γ 是任意向量场，$\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ 是旋量丛上的内积。列维-奇维塔联络提升到旋量丛 $\mathcal{S}$ 上，从而得到旋量协变导数 ∇^S. 。然后，φ_ξ 的挠率 $T^{(\xi)}$ 由 [1, 给出。定义 4.2 和引理 4.3]

$$\nabla^S_X \xi = T^{(\xi)}_X \cdot \xi, \tag{5.15}$$

注意，在 [1], 中，挠率自同态记作 S.

与定义 4.2 比较，并注意到单位旋量丛 $U\mathcal{S}$ 对应于环丛 $\mathcal{Q}$，我们看到，G_2-结构 φ_ξ 的挠率 $T^{(\xi)}$ 恰好对应于截面 ξ 相对于列维-奇维塔联络 ∇. 的挠率 $T^{(\xi,\ \nabla)}$。类似地，给定一个单位八元数截面 $A \in \Gamma(U\mathbb{O}M)$，$A \cdot \xi$ 仍然是一个定义了 G_2-结构 $\varphi_{A\cdot\xi}$. 的单位旋量。将 A 和 ξ 分别视为 $U\mathbb{O}'$ 和 $U\mathbb{O}$ 中的八元数，这正是八元数乘法 $A\xi$，且 $\varphi_{A\cdot\xi} = \varphi_{A\xi} = \sigma_A(\varphi_\xi)$。因此，所有等距的 G_2-结构都由某个单位八元数截面 A. 所对应的 $\hat{}\varphi_{A\xi}$ 给出。曲率分量 F 对应于黎曼曲率张量的一个特定分量。这些关系在 [24]中进行了详细探讨。因此，我们可以针对 G_2-结构重新表述定理 4.13。

定理 5.7 设 M 是一个闭七维流形，带有一个光滑的 G_2-结构 φ，其相对于列维-奇维塔联络 ∇. 的挠率为 T。此外，设 k 是一个正整数，p 是一个正实数，且 $kp > 7$.。那么，存在常数 $\delta \in (0, 1]$ 和 $K \in (0, \infty)$，使得如果 T 满足

$$\|T\|_{W^{k,p}} < \delta,$$

那么存在一个光滑截面 $V \in \Gamma(U\mathbb{O}M)$，使得

$$\operatorname{div} T^{(V)} = 0$$

and

$$\left\|T^{(V)}\right\|_{W^{k,p}} < K \|T\|_{W^{k,p}} \left(1 + \|T\|^k_{W^{k,p}}\right). \tag{5.16}$$

注 5.8 如果我们选择 $p = 2$ 来使用希尔伯特空间，那么对于光滑截面 V，我们需要$k \geq 4$，因此对 T 的条件是其在 W^{4}范数, 2-范数中足够小。

A 附录

引理 A.1 令 k、 k'、n 为正整数，且 $kp > n$，对于一个正实数 p，并令A_1、...、 $A_{k'}$为紧致 n 维黎曼流形 M上的实值函数。此外，假设 m_1、...、 $m_{k'}$为非负整数，且 q_1、...、 $q_{k'}$为正整数，使得 $\sum_{j=1}^{k''} q_j m_j \leq k$，则

$$\left\| \prod_{j=1}^{k'} A_j^{m_j} \right\|_{L^p} \lesssim \prod_{j=1}^{k'} \|A_j\|_{W^{k-q_j,p}}^{m_j} . \tag{A.1}$$

证明。令 $k'' = \sum_{j=1}^{k''} q_j m_j \leq k$. 然后设 $p_j = \frac{pk''}{q_j m_j}$ 对于所有满足 $m_j > 0$ 的 j，从而 $\frac{1}{p_j} = \frac{q_j m_j}{pk''}$，因此 $\sum_{j=1}^{k'} \frac{1}{p_j} = \frac{1}{p}$. 于是，根据 H¨lder 不等式，我们有

$$\left\| \prod_{j=1}^{k'} A_j^{m_j} \right\|_{L^p} \lesssim \prod_{j=1}^{k'} \|A_j\|_{L^{m_j p_j}}^{m_j} .$$

现在注意到，利用 p_j 的定义， $\frac{q_j}{k''} = \frac{p}{p_j m_j} \leq 1$，从而

$$\begin{aligned} \frac{k-q_j}{n} &= \frac{k}{n}\left(1-\frac{q_j}{k}\right) \\ &\geq \frac{k}{n}\left(1-\frac{q_j}{k''}\right) \\ &= \frac{k}{n}\left(1-\frac{p}{p_j m_j}\right). \end{aligned}$$

由于根据假设， $\frac{k}{n} > \frac{1}{p}$，我们得到

$$\frac{k-q_j}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{p_j m_j}.$$

利用索伯列夫嵌入定理的一个版本，这表明确实有，

$$\|A_j\|_{L^{m_j p_j}} \lesssim \|A_j\|_{W^{k-q_j,p}} ,$$

从而（A.1）得证。

■

定理 A.2（巴拿赫空间定量隐函数定理[17, 定理 F.1]）设$k \geq 1$为一个整数或 ∞，且设 X、Y、Z为实巴拿赫空间。假设 $U \subset X$和 $V \subset Y$分别是点 $x_0 \in X$和 $y_0 \in Y$的开邻域，并且 $f\colon\ U \times V \longrightarrow Z$ 是一个 C^k映射，满足 $f(x_0, y_0) = 0$，且 f在(x_0, y_0)处关于第二个变量的偏导数，$\partial_2 f|_{(x_0,y_0)} \in funcHom(Y, Z)$是巴拿赫空间同构。定义

$$N = \left\| \left(\partial_2 f|_{(x_0,y_0)} \right)^{-1} \right\|_{\mathrm{Hom}(Z,Y)} .$$

令 $\zeta \in (0, 1]$ 足够小，使得开球 $B_\zeta(x_0) \subset U$ 以及 $B_\zeta(y_0) \subset V$，并假设

$$\begin{aligned} \sup_{(x,y)\in B_\zeta(x_0)\times B_\zeta(y_0)} \left\| \partial_2 f|_{(x,y)} - \partial_2 f|_{(x_0,y_0)} \right\|_{\mathrm{Hom}(Y,Z)} &\leq \frac{1}{2N} \\ \beta &= \sup_{(x,y)\in B_\zeta(x_0)\times B_\zeta(y_0)} \left\| \partial_1 f|_{(x,y)} \right\|_{\mathrm{Hom}(X,Z)} < \infty. \end{aligned}$$

则存在一个常数 $\delta \in \left(0, \min\left\{\zeta\right.\right.$、以及唯一的 C^k 映射 $g\colon B_\delta(x_0) \longrightarrow B_\zeta(y_0)$，使得 $y_0 = g(x_0)$，并且

$$\begin{aligned} f(g(x), x) &= 0,\ \forall x \in B_\delta(x_0) \\ Dg|_x &= -\left(\partial_2 f|_{(x,g(x))}\right)^{-1} \partial_1 f|_{(x,g(x))} \in \operatorname{Hom}(X, Y),\ \forall x \in B_\delta(x_0) \\ \|g(x_1) - g(x_2)\|_Y &\leq 2\beta N \|x_1 - x_2\|_{X,}\ \forall x_1, x_2 \in B_\delta(x_0). \end{aligned}$$

致谢 A.3 本研究得到美国国家科学基金会项目资助，项目编号为 DMS-1811754。

参考文献

[1] I. Agricola、S. G. Chiossi、T. Friedrich 和 J. H¨oll。SU(3) 与 G_2 流形的旋量描述。《几何与物理杂志》，98:535–555，2015，1411.5663。[2]J. Baez。八元数。《美国数学会公报》（新系列），39:145–205，2002。doi:10.1090/S0273-0979-01-00934-X。[3] L. Bagaglini。与背景度量相容的 G_2-结构的能量泛函。《几何分析杂志》，2019。doi:10.1007/s12220-019-00264-6。[4] L. Bagaglini、M. Fern´andez 和 A. Fino。7维海森堡群上的拉普拉斯余流。2017，1704.00295。[5] L. Bagaglini 和 A. Fino。几乎阿贝尔李群上的拉普拉斯余流。2017，1711.03751。[6] R. L. Bryant。具有特殊整体性的度量。《数学年刊》（第2辑），126(3):525–576，1987。doi:10.2307/1971360。[7] R. L. Bryant。关于 G_2-结构的一些评论。载于《2005年戈科瓦几何-拓扑会议论文集》，第75–109页。戈科瓦几何/拓扑会议（GGT），G¨okova，2006，math/0305124。[8] R. L. Bryant 和 F. Xu。闭 G_2-结构的拉普拉斯流：短时行为。2011，1101.2004。[9] G. Chen。G_2 结构流的 Shi 型估计与有限时奇点。《季刊数学》，2018，1703.08526。doi:10.1093/qmath/hax060/4785911。[10] S. K. Donaldson。规范理论：数学应用。载于《数学物理百科全书》，第468–481页。Academic Press/Elsevier Science，牛津，2006。[11] S. K. Donaldson 和 P. B. Kronheimer。四维流形的几何。牛津数学专著。The Clarendon Press，牛津大学出版社，纽约，1990。牛津科学出版物。[12] S. Dwivedi、P. Gianniotis 和 S. Karigiannis。等距 G_2 结构的梯度流。《几何分析杂志》，2019，1904.10068。doi:10.1007/s12220-019-00327-8。[13] D. Fadel、E. Loubeau、A. J. Moreno 和 H. N. S. Earp。几何结构流。2022。doi:10.48550/ARXIV.2211.05197。

[14] P. M. N. Feehan。临界指数 Sobolev 范数与联络商空间的切片定理。《太平洋数学杂志》，200(1):71–118，2001年。doi:10.2140/pjm.2001.200.71。[15] P. M. N. Feehan。杨-米尔斯联络的能量间隙，II：任意闭黎曼流形。《数学进展》，312:547–587，2017年。doi:10.1016/j.aim.2017.03.023。[16] P. M. N. Feehan。平坦联络附近杨-米尔斯能量函数的莫尔斯理论，2019年。doi:10.48550/ARXIV.1906.03954。[17]P. M. N. Feehan 和 M. Maridakis。耦合杨-米尔斯能量泛函的 Łojasiewicz-Simon 梯度不等式。《美国数学会回忆录》，267(1302):xiii +138，2020年。doi:10.1090/memo/1302。[18] M. Fern´andez 和 A. Gray。结构群为 G_2 的黎曼流形。《纯粹与应用数学年刊》（第4辑），132:19–45，1982年。[19] T. Friedrich、I. Kath、A. Moroianu 和 U. Semmelmann。关于近似平行 G_2-结构。《几何与物理杂志》，23(3-4):259–286，1997年。[20] A. Gray。流形上的向量叉积。《美国数学会会刊》，141:465–504，1969年。[21] S. Grigorian。G_2结构的修正拉普拉斯余流的短时行为。《数学进展》，248:378–415，2013年，1209.4347。doi:10.1016/j.aim.2013.08.013。[22] S. Grigorian。带挠率的 G_2-结构的变形。《亚洲数学杂志》，20(1):123–155，2016年，1108.2465。doi:10.4310/AJM.2016.v20.n1.a6。[23] S. Grigorian。具有对称性的流形上的 G_2-结构的修正拉普拉斯余流。《微分几何及其应用》，46:39–78，2016年，1504.05506。[24] S. Grigorian。 G_2-结构与八元数丛。《数学进展》，308:142–207，2017年，1510.04226。doi:10.1016/j.aim.2016.12.003。[25] S. Grigorian。等距 G_2-结构热流的估计与单调性。《变分法与偏微分方程》，58(5):第175号文章，37页，2019年。doi:10.1007/s00526-019-1630-0。[26] S. Grigorian。光滑环与环丛。《数学进展》，393:第108078号文章，115页，2021年，2008.08120。doi:10.1016/j.aim.2021.108078。[27] S. Grigorian。 G_2-结构的等距流。载于 P. Cerejeiras、M. Reissig、I. Sabadini 和 J. Toft 编，《分析、应用与计算的当前趋势》，第545–553页，查姆，2022年。施普林格国际出版。doi:10/jwnk。[28] N. J. Hitchin。六维中三形式的几何。《微分几何杂志》，55(3):547–576，2000年，math/0010054。URL http://projecteuclid.org/euclid.jdg/1090341263。[29] K. H. Hofmann 和 K. Strambach。拓扑环与解析环。载于《拟群与环：理论与应用》，Sigma纯数学丛书第8卷，第205–262页。Heldermann，柏林，1990年。[30] D. D. Joyce。具有特殊整体性的紧流形。牛津数学专著。牛津大学出版社，2000年。

[31] S. Karigiannis. 流形上 G_2 和 $Spin(7)$结构的变形。《加拿大数学杂志》, 57:1012, 2005, math/0301218. doi:10.4153/CJM-2005-039-x。[32] S. Karigiannis. G_2结构的流，I。《季刊数学》, 60(4):487–522, 2009, math/0702077. doi:10.1093/qmath/han020。[33]S. Karigiannis 、 B. McKay 和 M.-P. Tsui. 具有对称性的某些 G_2结构的拉普拉斯余流孤子解。《微分几何及其应用》, 30(4):318–333, 2012, 1108.2192. doi:10.1016/j.difgeo.2012.05.003。[34] H. Kiechle. K环理论, 《数学讲义》第1778卷。施普林格出版社，柏林，2002年。doi:10.1007/b83276。[35] M. Kikkawa. 李三元代数的Killing–Ricci形式。《太平洋数学杂志》, 96(1):153–161, 1981年。URL http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102734953。[36] E. N. Kuzmin. 马尔采夫代数与解析穆芳环之间的联系。《代数与逻辑》, 10:3–22, 1971年。.[37] O. Loos. 关于马尔采夫代数与李三元系统之间的关系。《太平洋数学杂志》, 18:553–562, 1966年。URL http://projecteuclid.org/euclid.pjm/1102994136。[38]J. D. Lotay 和 Y. Wei. 闭 G_2 结构的拉普拉斯流：Shi型估计、唯一性与紧性。《几何与泛函分析》, 27(1):165–233, 2017年, 1504.07367. doi:10.1007/s00039-017-0395-x。[39] J. D. Lotay 和 Y. Wei. 闭 G_2 结构的拉普拉斯流：实解析性。《分析与几何通讯》, 2018年, 1601.04258. 即将出版。[40] J. D. Lotay 和 Y. Wei. 拉普拉斯流中无挠 G_2 结构的稳定性。《微分几何杂志》, 2018年, 1504.07771. 即将出版。[41] E. Loubeau 和 H. N. S´a Earp. 几何结构的调和流。2019年, 1907.06072。[42] A. I. Malcev. 解析环。《数学文集（新系列）》, 36(78):569–576, 1955年。[43]P. T. Nagy 和 K. Strambach. 群论和李理论中的环, 《德格鲁伊特数学专题论著》第35卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，2002年。doi:10.1515/9783110900583。[44] L. V. Sabinin. 光滑拟群与环，《数学及其应用》第492卷。克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，1999年。doi:10.1007/978-94-011-4491-9。[45] R. W. Sharpe. 微分几何，《数学研究生教材》第166卷。施普林格出版社，纽约，1997年。[46] J. D. H. Smith. 拟群及其表示导论。《高等数学研究》。Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2007年。[47] K. K. Uhlenbeck. 具有 L^p 曲率界的联络。《数学物理通讯》, 83(1):31–42, 1982年。URL http://projecteuclid.org/euclid.cmp/1103920743。[48] K. Wehrheim. Uhlenbeck紧性。《欧洲数学学会数学讲座丛书》。欧洲数学学会（EMS），Z¨urich，2004年。doi:10.4171/004。

[49] S.-T. 亚 u. 关于紧致Kähler流形上的Ricci曲率和复Monge–
安培` 方程。I.《纯粹与应用数学通讯》，31:339–411，1978。doi:10.1002/cpa.3160310304。