arXiv:2303.00674v1 [math.PR] 1 Mar 2023

一阶线性 Marcus 随机偏微分方程

Lena–Susanne Hartmann*和 Ilya Pavlyukevich†

2023年3月2日

摘要

本文求解一个由 Lévy 过程驱动、以典范（Marcus）形式理解的一阶线性随机偏微分方程（输运方程）。借助随机特征线法，可以得到该方程的解。其形式与确定性偏微分方程的解或 Kunita（1984，1997）研究的由布朗运动驱动的随机偏微分方程的解相同。

关键词： 规范（Marcus）随机微分方程；一阶线性偏微分方程；输运方程；随机特征线。

美国数学学会学科分类： 35F10, 35R60, 60G51, 60H05 60H15

1 引言

不可压缩流体中污染物的输运可以借助一阶线性偏微分方程（输运方程）来描述

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \nabla^T u(x,t) a(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{1}$$

其中，$u(x,\ t)$ 表示时刻 t、位置 $x \in \mathbb{R}^d$ 处污染物的浓度，而 $-a(x,\ t)$ 表示时刻 t、位置 x 处的流体瞬时速度，参见例如 Debnath [7] 和 Van der Perk [38]。

方程 (1) 可以借助特征线法求解。事实上，考虑所谓的特征常微分方程

$$\mathrm{d}\varphi_{0,t}(x) = -a(\varphi_{0,t}(x), t)\,\mathrm{d}t, \quad \varphi_{0,0}(x) = x, \quad t \geq 0. \tag{2}$$

在函数 a 满足通常的光滑性和有界性假设下，常微分方程 (2) 有唯一的全局解，并且 $t \mapsto \varphi_{0,\ t}(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的微分同胚流。于是很容易验证，输运方程 (1) 的唯一解由下式给出

$$u(x,t) = u_0(\varphi_{t,0}(x)), \tag{3}$$

其中 $x \mapsto \varphi_{t,\ 0}(x) = \varphi_{0\ t,}^{-1}(x)$ 是映射 $x \mapsto \varphi_{0,\ t}(x)$ 的逆映射，参见 Perthame [32 中的第6章]。

类似地，可以证明，更一般的方程包含“沉积物沉积”项 ub （若$b \leq 0$）和“汇／源”项 c

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= \nabla^T u(x,t) a(x,t) + u(x,t) b(x,t) + c(x,t), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{4}$$

其解为

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{\int_0^t b(\varphi_{t,s}(x),s)\,\mathrm{d}s} u_0(\varphi_{t,0}(x)) + \int_0^t \mathrm{e}^{\int_s^t b(\varphi_{t,r}(x),r)\,\mathrm{d}r} c(\varphi_{t,s}(x), s)\,\mathrm{d}s, \tag{5}$$

*耶拿弗里德里希·席勒大学数学研究所，恩斯特–阿贝广场2号，07743 耶拿，德国；lena.hartmann@uni-jena.de

†耶拿弗里德里希·席勒大学数学研究所，恩斯特–阿贝广场2号，07743 耶拿，德国；ilya.pavlyukevich@uni-jena.de

详情请参见第6节。

在湍流中，流体速度由纳维–斯托克斯方程的湍流解给出，而这种解很难分析。因此，可以考虑一种合理且重要的简化，即假设流体速度表示为平均速度场与空间相关噪声之和，参见 Man 和 Tsai [25], Wang 和 Zheng [39]。这将得到随机方程

$$\begin{aligned}\partial_t u(x,t) &= \nabla^T u(x,t) a(x,t) + \nabla^T u(x,t) A(x,t) \circ \dot{W}(t),\\ u(x,0) &= u_0(x).\end{aligned}$$

其中， W 是布朗运动， $\circ W$ 表示 Stratonovich 意义下的噪声项。引入 Stratonovich 形式的特征线随机微分方程

$$\mathrm{d}\varphi_{0,t}(x) = a(\varphi_{0,t}(x),t)\,\mathrm{d}t + A(\varphi_{0,t}(x),t) \circ \mathrm{d}W_t, \quad \varphi_{0,0}(x) = x,$$

我们得到解的相同表示式 (3)，其中 $t \mapsto \varphi_{t,0}(\cdot)$ 现在是随机微分同胚的逆流。一般理论可参见 Kunita [19, 21] 以及 Chow [6], Lototsky 和 Rozovsky [24],和 Flandoli [12, 13]。

本文的目标是证明，由 L´évy 噪声驱动的一阶方程同样可以通过随机特征线法求解，从而将 Kunita [19, 21] 的结果推广到由 L´évy 噪声驱动的方程情形。除数学意义之外，这项研究还受到污染物输运建模中相关问题的推动。考虑 Lé´vy 噪声可以纳入流动涨落的不对称性以及极端且剧烈的流动扰动等影响，参见例如 Kallianpur 和 Xiong [18], Birnir [3,第 1 节。7], Oh 和 Tsai [30], 以及 Tsai 和 Huang [37]。

关于由 Lévy 驱动的随机偏微分方程的一般理论，可参见 Peszat 和 Zabczyk [33], Mandrekar 和 R¨udiger [26] （演化方程方法），以及 Holden 等人 [17] （白噪声理论方法）。值得注意的是，为使公式 (3) 和 (5) 在由 Lévy 驱动的方程情形下成立，我们必须将随机项理解为典范（Marcus）形式。这种方法不同于上述方法，尤其不同于 Proske [34] 的方法；Proske [34] 在白噪声理论框架内求得了一个由多参数 Lévy 过程驱动的输运方程的解。

本文假设输运方程的所有系数都足够光滑。在连续情形下，关于具有不规则系数的（随机）输运方程分析已有大量文献，例如 DiPerna 和 Lions [8], Ambrosio [1], Flandoli [12, 13], Fedrizzi 和 Flandoli [10], Fedrizzi 等人 [11], Catuogno 和 Olivera [5], Olivera 和 Tudor [31], Mollinedo 和 Olivera [29]。据我们所知，具有不规则系数的 Lévy 驱动输运方程仍有待研究。

记号。 用 C^n 表示 n 次连续可微函数，用 C_b^n 表示有界的 n次连续可微函数，且其导数有界。对于映射 $F\colon \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^m$, DF 表示雅可比（梯度）矩阵，即，

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_d} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_d} \end{pmatrix},$$

特别地，对于 $F\colon \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, $DF = (\frac{\partial F}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_d}) = \nabla^T F$。指数函数记作$x \mapsto \mathrm{e}^x$ ，而按式（8）、（10）、（26）和（26）所定义的指数映射则用粗体符号$\mathbf{e}$表示。

致谢。 作者感谢德国科学基金会项目 PA 2123/4-1 的支持。作者感谢审稿人提出的宝贵意见。

2 背景与主要结果

在满足通常条件的滤波概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ 上，我们考虑一个 m 维布朗运动 W 和一个 m 维纯跳 Lévy 过程 Z,

$$Z_t = \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} z\tilde{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}s) + \int_0^t \int_{\|z\|>1} zN(\mathrm{d}z, \mathrm{d}s),$$

其中， N 是强度为 L´evy 测度 ν 的泊松随机测度， $\nu(\{0\}) = 0, \int_{\mathbb{R}^m}(|z|^2 \wedge 1)\,\nu(\mathrm{d}z) < \infty$ ~ ~，而 N 是补偿泊松随机测度， $N(\mathrm{d}z, \mathrm{d}t) = N(\mathrm{d}z, \mathrm{d}t) - \mathbb{I}(|z| \le 1)\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$。关于 L´evy 过程和 L´evy 驱动的随机微积分理论，可参阅 Sato [36], Kunita [22] 和 Applebaum [2] 等人的著作。

Let

$$\begin{aligned} a\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d, \qquad & b, c\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \\ A, \alpha\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times m}, \qquad & B, C, \beta, \sigma\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

是可测函数。对于 $u \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$，先考虑一阶算子

$$\begin{aligned} \mathcal{P}u(x) &= \nabla^T u(x)a(x) + u(x)b(x) + c(x), \\ \mathcal{R}u(x) &= \nabla^T u(x)A(x) + u(x)B(x) + C(x), \\ \mathcal{Q}u(x) &= \nabla^T u(x)\alpha(x) + u(x)\beta(x) + \sigma(x), \end{aligned}$$

以及写成紧凑微分形式的一阶线性方程

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(t,x) &= \mathcal{P}u(t,x)\,\mathrm{d}t + \mathcal{R}u(t,x) \circ \mathrm{d}W_t + \mathcal{Q}u(t,x) \diamond \mathrm{d}Z_t, \\ u(0,x) &= u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,\ t \in [0,T], \end{aligned} \tag{6}$$

并满足某个初始条件 $u_0\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$。更确切地说，该方程可理解为如下积分方程:

$$\begin{aligned} u(t,x) = u_0(x) &+ \int_0^t \Big[\nabla^T u(s,x)a(x) + u(s,x)b(x) + c(x)\Big]\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \Big[\nabla^T u_x(s,x)A(x) + u(s,x)B(x) + C(x)\Big] \circ \mathrm{d}W_s \\ &+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big(\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}u(s-,x) - u(s-,x)\Big)\tilde{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}s) \\ &+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big(\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}u(s-,x) - u(s-,x) - \mathcal{Q}u(s-,x)z\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_0^t \int_{\|z\|>1} \Big(\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}u(s-,x) - u(s-,x)\Big)\tilde{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}s), \end{aligned} \tag{7}$$

其中，对每个 $z \in \mathbb{R}^m$ ，映射

$$u(\cdot) \mapsto \mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}u(\cdot) \tag{8}$$

是借助 h th一阶线性时间自治偏微分方程的解来定义的

$$\begin{aligned} \partial_r g(r,x) &= \nabla^T g(r,x)\alpha(x)z + g(r,x)\beta(x)z + \sigma(x)z, \quad r \in [0,1], \\ g(0,x) &= u(x), \end{aligned} \tag{9}$$

and

$$\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}u(x) := g(1;x,z). \tag{10}$$

可 以显式写出方程（9）的解。我们将在第6节中完成这一点 .

项 $\circ\mathrm{d}W$ 表示关于布朗运动的 Stratonovich积分。

定义2.1。 随机场 u: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ 是方程（6）的一个解，当且仅当 u 是一个 c`adl`ag C^2-半鞅, 并且（7）几乎处处成立。

本文旨在借助特征线法求解（6）。主要结果如下。假设这些函数满足以下条件。

$\mathbf{H}_{\text{coeff}}$

$$\begin{aligned} a \in C_b^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \quad \text{and} \quad b, c \in C_b^3(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \\ A, \alpha \in C_b^4(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times m}) \quad \text{and} \quad B, C, \beta, \sigma \in C_b^4(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^m). \end{aligned} \tag{11}$$

考虑一个 $(d+2)$ 维 Marcus 随机微分方程系统（特征方程）

$$\begin{aligned} \varphi_{0,t}(x) = x - \int_0^t a(\varphi_{0,r}(x))\,\mathrm{d}r - \int_0^t A(\varphi_{0,r}(x)) \circ \mathrm{d}W_r \\ - \int_0^t \alpha(\varphi_{0,r}(x)) \diamond \mathrm{d}Z_r, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \xi_{0,t}(x,\xi_0) = \xi_0 - \int_0^t \xi_{0,r}(x,\xi_0) b(\varphi_{0,r}(x))\,\mathrm{d}r - \int_0^t \xi_{0,r}(x,\xi_0) B(\varphi_{0,r}(x)) \circ \mathrm{d}W_r \\ - \int_0^t \xi_{0,r}(x,\xi_0)\beta(\varphi_{0,r}(x)) \diamond \mathrm{d}Z_r, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{0,t}(x,\xi_0,\zeta_0) = \zeta_0 - \int_0^t \xi_{0,r}(x,\xi_0) c(\varphi_{0,r}(x))\,\mathrm{d}r - \int_0^t \xi_{0,r}(x,\xi_0) C(\varphi_{0,r}(x)) \circ \mathrm{d}W_r \\ - \int_0^t \xi_{0,r}(x,\xi_0)\sigma(\varphi_{0,r}(x)) \diamond \mathrm{d}Z_r. \end{aligned} \tag{14}$$

在假设 $\mathbf{H}_{\text{coeff}}$ 下，随机微分方程 (12)、(13)、(14) 存在唯一的强解。此外，相应的解流是 $\mathbb{R}^{d+2}$ 上的一个 C^2-微分同胚流，参见 Applebaum [2, 定理 6.10.5 和 6.10.10]。

令 $(\varphi_{t,0},\xi_{t,0},\zeta_{t,0})$ 为 $(\varphi_{0,t},\xi_{0,t},\zeta_{0,t})$ 的逆流。

定理 2.1。设假设 $\mathbf{H}_{\text{coeff}}$ 成立，且 $u_0 \in C_b^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$。那么函数

$$u(t,x) := \xi_{t,0}(x,1)u_0(\varphi_{t,0}(x)) + \zeta_{t,0}(x,1,0) \tag{15}$$

是 (6) 的唯一解。

公式 (15) 背后的直觉相当清晰。在确定性情形下，$A = \alpha = 0$, $B = C = \beta = \sigma = 0$，公式 (15) 正是公式 (5)，且广为人知。在高斯噪声的连续情形下，$\alpha = 0$, $B = \beta = 0$，公式 (15) 由 Kunita 推导，见 [19, 21]。连续情形下方程 (6) 的一个重要特征是，随机积分必须在 Stratonovich 意义下理解。对此可以用以下考虑作非正式解释。众所周知，Stratonovich随机积分可以按路径逐点地用 Stieltjes积分逼近，其中积分对象是对布朗运动的有界变差随机连续函数逼近，例如折线（即所谓的 Wong–Zakai逼近）。每一个这样的逼近都可以按路径逐点地视为一个确定性一阶偏微分方程，其解具有公式 (15)（或 (5)）的形式，因此极限也应具有相同的形式。在跳跃噪声的情形下，Marcus（典范）随机微分方程起到了 Stratonovich随机微分方程的作用。这些方程也可以看作连续 Wong–Zakai逼近的极限，并且满足常规微积分中的牛顿–莱布尼茨变量替换公式。因此，直观上显然，方程 (6) 应当被视为 Marcus 方程。

例 2.2（输运方程）。考虑输运方程

$$\begin{aligned} u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t \nabla^T u(r,x) a(x)\,\mathrm{d}r + \int_0^t \nabla^T u(r,x) A(x) \circ \mathrm{d}W_r \\ + \int_0^t \nabla^T u(r,x)\alpha(x) \diamond \mathrm{d}Z_r. \end{aligned} \tag{16}$$

在此情况下，特征方程是一个 d 维 Marcus随机微分方程

$$\varphi_{0,t}(x) = x - \int_0^t a(\varphi_{0,r}(x))\,\mathrm{d}r - \int_0^t A(\varphi_{0,r}(x)) \circ \mathrm{d}W_r - \int_0^t \alpha(\varphi_{0,r}(x)) \diamond \mathrm{d}Z_r.$$

那么解的形式为

$$u(t,x) = u_0(\varphi_{t,0}(x)).$$

例2.3（一维显式解）。在维数为 $m = d = 1$ 的情况下，若 $a(x) = A(x) = \alpha(x)$，则借助 Marcus 随机微分方程的 Itˆo 公式，可以显式求解方程 (16)。事实上，设 Z 是一个一般的一维 L´evy 过程（不一定是纯跳过程），并考虑方程

$$u(t,x) = u_0(x) + \int_0^t \nabla u(r,x)\alpha(x) \diamond \mathrm{d}Z_r. \tag{17}$$

假设 $\alpha(x) > 0$，并记

$$H(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}y}{\alpha(y)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

则特征方程

$$\varphi_{0,t}(x) = x - \int_0^t \alpha(\varphi_{0,r}(x)) \diamond \mathrm{d}Z_r$$

有解

$$\varphi_{0,t}(x) = H^{-1}(H(x) - Z_t)$$

而逆流$\varphi_{t,\,0}$ 通过直接计算可得

$$\varphi_{t,0}(x) = H^{-1}(H(x) + Z_t).$$

我们来证明

$$u(t,x) := u_0(H^{-1}(H(x) + Z_t)) \tag{18}$$

满足（17）。事实上，$u(0,\ x) = u_0(x)$，并且

$$\nabla u(t,x) = \nabla u_0(\varphi_{t,0}(x))\nabla\varphi_{t,0}(x) = \nabla u_0(\varphi_{t,0}(x))\frac{\alpha(H(x)+Z_t)}{\alpha(x)}.$$

另一方面, Marcus随机微分方程的 Itˆo 公式（例如，参见 Kurtz等人 [23] 中的第 4 节）给出

$$\begin{aligned} u(t,x) = u_0(H^{-1}(H(x)+Z_t)) &= u_0(x) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial Z} u_0(H^{-1}(H(x)+Z_r)) \diamond \mathrm{d}Z_r \\ &= u_0(x) + \int_0^t \nabla u_0(\varphi_{0,r}(x))\alpha(H(x)+Z_r) \diamond \mathrm{d}Z_r \\ &= u_0(x) + \int_0^t \nabla u(r,x)\alpha(x) \diamond \mathrm{d}Z_r. \end{aligned}$$

例2.4。在本例中，我们将公式（18）应用于一阶方程

$$\partial_t u(t,x) = \nabla u(t,x)\sqrt{x^2+1} \diamond \mathrm{d}Z_t, \quad u(0,x) = u_0(x). \tag{19}$$

注意，尽管 $\alpha(x) = \sqrt{x^2+1}$ 无界，公式（15）仍然成立。事实上，在这种情况下，

$$H(x) = \operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad \text{and}$$
$$H^{-1}(x) = \sinh(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

因此，（19）有显式解

$$u(t,x) = u_0\Big(\sinh(\operatorname{arcsinh}(x) + Z_t)\Big), \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

图 1 展示了对称 α-稳定 L´évy 过程 Z 及其解 u 的样本路径。

本文结构如下。由于 Marcus 积分将 Stratonovich 积分推广到了跳跃情形，我们将考察 Kunita 在连续情形下的论证，并将其推广到 L´évy 噪声情形。一个核心辅助结果是 Marcus 随机微分方程的广义 Itˆo 公式（Itˆo–Wentzell 公式）。

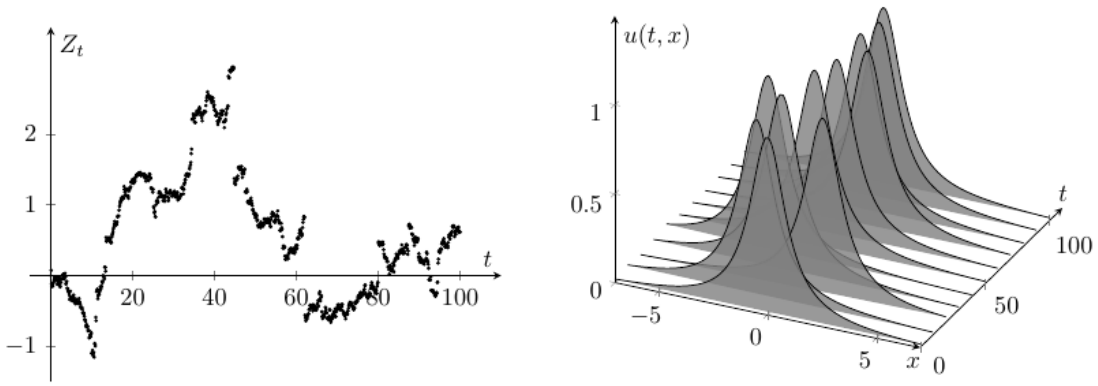

图1：对称 α-稳定 Lévy 过程 Z 的一条样本路径，其中 $\mathbf{E}e^{i\lambda Z_1} = e^{-0.1|\lambda|^\alpha}$ 取 $\alpha = 1.75$（左）；方程 (19) 的解 $u(t,x)$，其初始条件为 $u_0(x) = 1/(1+x^2)$，在 $t = 0, 10, 20, \ldots, 100$ 时的取值（右）。

3 典范（Marcus）随机微分方程

为了证明主定理，我们需要回顾半鞅框架下典范随机微分方程的若干事实。典范随机微分方程由 Marcus 在 [27]中引入。Marcus [28], 、Fujiwara[14], 和 Kurtz 等人 [23] 研究了半鞅框架下的典范随机微分方程; Fujiwara 和 Kunita [15, 16] 以及 Kunita [22] 则研究了带空间参数的半鞅情形。

设 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$ 是一个满足通常条件的滤波概率空间，并设 W 和 N 分别为相互独立的 m 维布朗运动和定义在 $\mathbb{R}^m\backslash\{0\}$ 上、补偿子为 $\nu(dz)dt$ 的泊松随机测度，该补偿子如上一节所定义。

对于 $d \geq 1$，令

$$
\begin{aligned}
f(x,r,\omega)&\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^d,\\
F(x,r,\omega)&\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}^{d\times m},\\
\varphi(x,r,z,\omega)&\colon \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \times \Omega \to \mathbb{R}^d
\end{aligned}
$$

分别为参数为 x 和 (x,z) 的可预测过程。下文中，我们常常省略对 $\omega \in \Omega$ 的依赖。

我们作出以下假设。存在常数 $\delta \in (0,1]$、$L > 0$、$K > 0$，使得$\mathbf{H}f$:

$$
\begin{aligned}
&f(\cdot,r) \in C^{2+\delta}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d),\\
&\sup_x \frac{|f(x,r)|}{1+|x|} \leq K,\\
&\|\partial^\alpha f^i(\cdot,r)\| \leq K, \quad 1 \leq i \leq d, \quad |\alpha| = 1,2,\\
&\|\partial^\alpha f^i(x,r) - \partial^\alpha f^i(y,r)\| \leq L\|x-y\|^\delta, \quad 1 \leq i \leq d, \quad |\alpha| = 2.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

$\mathbf{H}_F$:

$$
\begin{aligned}
&F(\cdot,r) \in C^{3+\delta}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d\times m}),\\
&\sup_x \frac{|F_j^i(x,r)|}{1+|x|} \leq K, \quad 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq m,\\
&\|\partial^\alpha F_j^i(\cdot,r)\| \leq K, \quad 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq m, \quad |\alpha| = 1,2,\\
&\|\partial^\alpha F_j^i(\cdot,r) F_l^k(\cdot,r)\| \leq K, \quad 1 \leq i,k \leq d,\ 1 \leq j,l \leq m, \quad |\alpha| = 2,3,\\
&\|\partial^\alpha F_j^i(x,r) - \partial^\alpha F_j^i(y,r)\| \leq L\|x-y\|^\delta, \quad 1 \leq i \leq d,\ 1 \leq j \leq m, \quad |\alpha| = 3.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

$\mathbf{H}\varphi$：存在非负函数 $K_0(z)$、 $K_1(z)$ 和 $L_1(z)$ 以及 $L_2(z)$，使得

$$\int_{\|z\|\le 1}\Big(K_0(z)^2+K_1(z)^2+L_1(z)+L_2(z)^2\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)<\infty \tag{22}$$

and

$$\begin{aligned}
&\varphi(\cdot,r,z)\in C^{2+\delta}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}^{d\times m}),\\
&\sup_x\frac{|\varphi_j^i(\cdot,r,z)|}{1+|x|}\le K_0(z),\quad 1\le i\le d,\ 1\le j\le m,\\
&\|\partial^\alpha\varphi_j^i(\cdot,r,z)\|\le K_1(z),\quad 1\le i,j\le d,\quad 1\le|\alpha|\le 2,\\
&|\partial^\alpha\varphi_j^i(x,r,z)\varphi_l^k(x,r,z)-\partial^\alpha\varphi_j^i(y,r,z)\varphi_l^k(y,r,z)|\le L_1(z)\|x-y\|,\\
&\qquad\qquad 1\le i,k\le d,\ 1\le j,l\le m,\quad |\alpha|=1,\\
&|\partial^\alpha\varphi_j^i(x,r,z)-\partial^\alpha\varphi_j^i(y,r,z)|\le L_2(z)\|x-y\|^\delta,\\
&\qquad\qquad 1\le i\le d,\ 1\le j\le m,\quad |\alpha|=2.
\end{aligned}$$

考虑一个半鞅 Φ，其参数为 x，定义如下

$$\begin{aligned}
\Phi(x,t)=&\int_0^t f(x,r)\,\mathrm{d}r+\int_0^t F(x,r)\,\mathrm{d}W_r\\
&+\int_0^t\int_{\|z\|\le 1}\varphi(x,r,z)\,\tilde N(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r)+\int_0^t\int_{\|z\|>1}\varphi(x,r,z)\,N(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r).
\end{aligned}\tag{23}$$

我们希望为 以下生成元为 $\Phi(\cdot,\cdot)$ 的 Marcus随机微分方程赋予意义，我们将其形式化地写作 a s

$$X_t(x)=x+\int_0^t\Phi(X_r(x),\diamond\,\mathrm{d}r).\tag{24}$$

这种写法具有以下含义：

对于每个 $r\ge 0$、 $x\in\mathbb{R}^d$、 $z\in\mathbb{R}^m$ 和 $\omega\in\Omega$，考虑函数$h=h(u)=h(u;x,r,z)$ 的一个常微分方程（Marcus 常微分方程）

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}h(u)=\varphi(h(u),r,z),\quad u\in[0,1],\\ h(0)=x.\end{cases}\tag{25}$$

在假设 $\mathbf{H}\varphi$ 下，存在一个关于 $u\in\mathbb{R}$ 的全局解 h，记作

$$\mathbf{e}^{u\varphi(\cdot;r,z)}(x):=h(u;x,r,z),\quad u\in\mathbb{R}.\tag{26}$$

尤其是，我们定义指数映射

$$\mathbf{e}^{\varphi(\cdot;r,z)}(x):=h(1;x,r,z).\tag{27}$$

对于几乎所有的 r、 ω 和 z，映射 $x\mapsto\mathbf{e}^{\varphi(\cdot;r,z)}(x)$ 是一个 C^2-微分同胚。

考虑以下函数，它们根据假设 $\mathbf{H}f$、$\mathbf{H}_F$ 和$\mathbf{H}\varphi$均有良好定义 ：

$$\begin{aligned}
\hat f(x,r)&=f(x,r)+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^d DF_j(x,r)F_j(x,r)\\
&\quad+\int_{\|z\|\le 1}\Big(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(x)-x-\varphi(x,r,z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z),\\
\hat F(x,r)&=F(x,r),\\
\hat\varphi(x,r,z)&=\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(x)-x.
\end{aligned}$$

考虑一个参数为.....的 Itˆo 半鞅

$$\hat{\Phi}(x,t) = \int_0^t \hat{f}(x,r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t \hat{F}(x,r)\,\mathrm{d}W_r + \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \hat{\varphi}(x,r,z)\,\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r) + \int_0^t \int_{\|z\|>1} \hat{\varphi}(x,r,z)\,N(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r).$$

对于适应的 c`adl`ag 过程 $\eta = (\eta_t)^{t\in[0,T]}$，我们定义

$$\int_0^t \hat{\Phi}(\eta_{r-},\mathrm{d}r) = \int_0^t \hat{f}(\eta_{r-},r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t \hat{F}(\eta_{r-},r)\,\mathrm{d}W_r + \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \hat{\varphi}(\eta_{r-},r,z)\,\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r) + \int_0^t \int_{\|z\|>1} \hat{\varphi}(\eta_{r-},r,z)\,N(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r)$$

并考虑 Itˆo 随机微分方程

$$X_t(x) = x + \int_0^t \hat{\Phi}(X_{r-}(x),\,\mathrm{d}r). \tag{28}$$

那么，对于任意 x，方程 (28) 存在唯一的强解 X，参见 Kunita [22, 定理 3.1，第 3.1] 节。存在 X 的一个修正，使得对每个 $x\in\mathbb{R}^d$，映射 $t\mapsto X_t(x)$ 都是 c`adl`ag 的；并且对每个 $t\in[0,T]$，映射 $x\mapsto X_t(x)$ 都是 C^2-微分同胚，参见 Kunita [22, 第 3.5] 节和 [20, 第 4] 节。

函数 给定 s f、F 和 φ，我们将规范（Marcus）随机微分方程 (24) 理解为 Itˆo 随机微分方程 (28)。

4 典范随机微分方程的广义伊藤公式

证明公式（15）需要用到所谓的典范随机微分方程解的广义伊藤公式。我们先回顾典范Marcus随机微分方程的常规公式；从形式上看，它类似于微积分中熟知的牛顿－莱布尼茨公式。

定理4.1（典范随机微分方程解的伊藤公式）。设 X 是随机微分方程 (24) 的解，且 $\Theta\in C^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$。则

$$\Theta(X_t) = \Theta(x) + \int_0^t \nabla^T\Theta\,\Phi(X_r,\diamond\,\mathrm{d}r), \tag{29}$$

其中，(29) 右侧的典范积分等于

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \nabla^T\Theta(X_{r-})f(X_{r-},r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t \nabla^T\Theta(X_{r-})F(X_{r-},r)\circ\mathrm{d}W_r\\
&\quad+\int_0^t\int_{\|z\|\le1}\Big(\Theta(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}))-\Theta(X_{r-})\Big)\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r)\\
&\quad+\int_0^t\int_{\|z\|\le1}\Big(\Theta(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}))-\Theta(X_{r-})-\varphi(X_{r-},r,z)\Big)\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\\
&\quad+\int_0^t\int_{\|z\|>1}\Big(\Theta(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}))-\Theta(X_{r-})\Big)N(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r).
\end{aligned}$$

注4.2。注意，过程 $\Theta(X)$具有以下跳跃

$$\begin{aligned}
\Theta(X_r)-\Theta(X_{r-}) &= \Theta(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}))-\Theta(X_{r-})\\
&= \int_0^1 \nabla^T\Theta(\mathbf{e}^{u\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}))\varphi(\mathbf{e}^{u\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}),r,z)\,\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

这就证明了形式写法（29）的合理性。

现在我们证明由同一个布朗运动和泊松随机测度驱动的一对典范随机微分方程的广义伊藤公式。

定理 4.3（典范随机微分方程的广义 Itˆo 公式）。考虑生成元分别为 Φ 和 Ψ 的典范随机微分方程的解，其中函数 f、F、φ 和 g、G、ψ 分别满足第*3*节的假设，

$$X_t(x) = x + \int_0^t \Phi(X_r(x), \diamond\,\mathrm{d}r), \tag{30}$$

$$Y_t = y + \int_0^t \Psi(Y_r, \diamond\,\mathrm{d}r). \tag{31}$$

则以下公式成立

$$X_t(Y_t) = y + \int_0^t \Phi(X_r(Y_r), \diamond\,\mathrm{d}r) + \int_0^t DX\Psi(Y_r, \diamond\,\mathrm{d}r), \tag{32}$$

其中，后面的积分理解为

$$\begin{aligned}
\int_0^t \Phi(X_r(Y_r), \diamond\,\mathrm{d}r) &= \int_0^t f(X_{r-}(Y_{r-}), r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t F(X_{r-}(Y_{r-}), r)\,\mathrm{d}W_r \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \int_0^t DF_j(X_{r-}(Y_{r-}), r)F_j(X_{r-}(Y_{r-}), r)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big(\mathrm{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(Y_{r-})) - X_{r-}(Y_{r-})\Big)\tilde{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}r) \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big(\mathrm{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(Y_{r-})) - X_{r-}(Y_{r-}) - \varphi(X_{r-}(Y_{r-}), r, z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|>1} \Big(\mathrm{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(Y_{r-})) - X_{r-}(Y_{r-})\Big)N(\mathrm{d}z, \mathrm{d}r)
\end{aligned} \tag{33}$$

and

$$\begin{aligned}
\int_0^t DX\Psi(Y_r, \diamond\,\mathrm{d}r) &= \int_0^t DX_{r-}(Y_{r-})g(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r \\
&+ \sum_{j=1}^m \frac{1}{2}\int_0^t DX_{r-}(Y_{r-})DG_j(Y_{r-}, r)G_j(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^m \int_0^t (D(DX_{r-})_j)_k(Y_{r-})G_j(Y_{r-}, r)G_k(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{j=1}^m \int_0^t DX_{r-}(Y_{r-})DF_j(X_{r-}(Y_{r-}), r)G_j(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t DX_{r-}(Y_{r-})G(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}W_r \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big[\mathrm{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}\Big(X_{r-}\Big(\mathrm{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})\Big) - \mathrm{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(Y_{r-}))\Big]\,\tilde{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}r) \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big[\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}\Big(X_{r-}\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})\Big)\Big) - \mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(Y_{r-})) \\
&\qquad\qquad - DX_{r-}(Y_{r-})\psi(Y_{r-}, r, z)\Big]\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|>1} \Big[\mathrm{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}\Big(X_{r-}\Big(\mathrm{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})\Big) - \mathrm{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(Y_{r-}))\Big]\,N(\mathrm{d}z, \mathrm{d}r).
\end{aligned} \tag{34}$$

该定理将在第7节中证明。我们还需要以下公式，其证明方法类似，参见第8节。

定理 4.4. 设 Φ 是由 (23) 给出的一维半鞅，带有一个 d 维参数x ，并设 Y 是 d 维典范随机微分方程 (31)的解。那么

$$\Phi(Y_t,t)=\int_0^t \Phi(Y_{r-},\mathrm{d}r)+\int_0^t \nabla^T\Phi(Y_r,\diamond\,\mathrm{d}r), \tag{35}$$

其中

$$\begin{aligned}\int_0^t \Phi(Y_{r-},\mathrm{d}r)&=\int_0^t f(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}r+\int_0^t F(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}W_r\\&+\int_0^t\int_{\|z\|\le 1}\varphi(Y_{r-},r,z)\,\tilde N(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r)+\int_0^t\int_{\|z\|>1}\varphi(Y_{r-},r,z)\,N(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r)\end{aligned} \tag{36}$$

and

$$\begin{aligned}\int_0^t \nabla^T\Phi(Y_r,\diamond\,\mathrm{d}r)&=\int_0^t \nabla^T\Phi(Y_{r-},r)g(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}r\\&+\int_0^t \nabla^T\Phi(Y_{r-},r)G(Y_{r-},r)\circ\mathrm{d}W_r\\&+\int_0^t\int_{|z|\le 1}\int_0^1\Big(\nabla^T\Phi(\mathrm{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}),r-)+\nabla^T\varphi(\mathrm{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}),r,z))\Big)\times\\&\qquad\times\psi(\mathrm{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}),r,z)\,\mathrm{d}u\,\tilde N(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r)\\&+\int_0^t\int_{|z|\le 1}\Big[\int_0^1\Big(\nabla^T\Phi(\mathrm{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}),r-)+\nabla^T\varphi(\mathrm{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}),r,z))\Big)\times\\&\qquad\times\psi(\mathrm{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}),r,z)\,\mathrm{d}u-\nabla^T\Phi(Y_{r-},r-)\psi(Y_{r-},r,z)\Big]\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\\&+\int_0^t\int_{|z|>1}\int_0^1\Big(\nabla^T\Phi(\mathrm{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}),r-)+\nabla^T\varphi(\mathrm{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}),r,z))\Big)\times\\&\qquad\times\psi(\mathrm{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}),r,z)\,\mathrm{d}u\,N(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r).\end{aligned} \tag{37}$$

5 典范随机微分方程逆流的方程 Es

根据 Kunita [20, 22] ，我们知道解 $x\mapsto X_t(x)$（ $t\ge 0$）将 $\mathbb{R}^d$ 微分同胚地映射到其自身，并且存在一个修正，使得 $X_{s,\,t}:=X_t\circ X_s^{-1}$定义了微分同胚随机流。用 $DX_t(x)$表示其梯度（Jacobi）矩阵，该矩阵满足所谓的变分随机微分方程，并且是一个（右）随机指数。令 $(DX_t(x))^{-1}$ 为其矩阵逆。

考虑逆流 $X_{t,\,0}:=X_{0\,t,}^{-1}$ ， $t\ge 0$。我们证明逆流满足以下公式。

定理 5.1. 逆流 $t\mapsto X_{t,\,0},\ \ t\ge 0$ 满足典范随机微分方程

$$X_{t,0}(x)=x-\int_0^t\Big(DX_{0,r}(X_{r,0}(x))\Big)^{-1}\Phi(x,\diamond\,\mathrm{d}r) \tag{38}$$

其含义如下:

$$
\begin{aligned}
X_{t,0}(x) = x &- \int_0^t \Big(DX_{0,r-}(X_{r-,0}(x))\Big)^{-1} f(x,r)\,\mathrm{d}r \\
&- \int_0^t \Big(DX_{0,r-}(X_{r-,0}(x))\Big)^{-1} F(x,r)\circ \mathrm{d}W_r \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(X_{r-,0}(x)) - X_{r-,0}(x)\Big)\,\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r) \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(X_{r-,0}(x)) - X_{r-,0}(x) \\
&\qquad\qquad - (DX_{0,r-}(X_{r-,0}(x)))^{-1}\varphi(x,r,z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|>1} \Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(X_{r-,0}(x)) - X_{r-,0}(x)\Big)\,N(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r).
\end{aligned}
\tag{39}
$$

其中 $\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}$ 是借助常微分方程的解 $w = w(u;\,y) = w(u;\,y,r,z)$ 定义的指数映射

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} w(u;y) &= -\Big(D\mathbf{e}^{u\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(\cdot))\Big)^{-1}\varphi(\mathbf{e}^{u\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(\cdot)),r,z)\circ w(u;y), \\
w(0;y) &= y, \quad u\in[0,1],
\end{cases}
\tag{40}
$$

即 $\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(y) := \mathbf{e}^{\psi(r,z)}(y) := w(1;y)$。

证明。为简洁起见，我们假设 $\nu(\|z\|>1) = 0$ 并记 $X_{0,t} = X_t$ 和 $DX_{0,t} = DX_{t_0}$。回顾一下，$DX_t(x)$ 是一个右随机指数，详见 Protter 的第 V.9 节 [35]以及 Fujiwara 和 Kunita 的第 4 节[15] 。它定义良好且可逆。

定义 t 以下漂移、扩散和跳跃系数 nts:

$$
\begin{aligned}
g(y,r) &= -\Big(DX_{r-}(y)\Big)^{-1} f(X_{r-}(y),r), \\
G(y,r) &= -\Big(DX_{r-}(y)\Big)^{-1} F(X_{r-}(y),r), \\
\psi(y,r,z,u) &= -\Big(D\mathbf{e}^{u\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(y))\Big)^{-1}\varphi(\mathbf{e}^{u\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(y)),r,z).
\end{aligned}
$$

特别是,

$$
\psi(y,r,z,0) = -\Big(DX_{r-}(y)\Big)^{-1}\varphi(X_{r-}(y),r,z).
$$

函数 g、G 和 ψ 均为可预测的，借助局部化，我们可以假设它们满足第3节的假设。于是，方程 (40) 存在唯一的全局解。

考虑辅助随机微分方程

$$
\begin{aligned}
Y_t = x &+ \int_0^t g(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t G(Y_{r-},r)\circ \mathrm{d}W_r \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big(\mathbf{e}^{\psi(r,z)}(Y_{r-}) - Y_{r-}\Big)\,\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r) \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big(\mathbf{e}^{\psi(r,z)}(Y_{r-}) - Y_{r-} - \Big(DX_{r-}(Y_{r-})\Big)^{-1}\varphi(X_{r-}(Y_{r-}),r,z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r,
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbf{e}^{\psi(r,z)}$ 在 (40) 中定义。

我们证明，对每个 $T>0$ 以及任意局部化解，都有 $X_t(Y_t) \equiv x$ 在 $[0,T]$上。我们再次考虑一维情形。应用广义 Itˆo 公式，可证明所有积分项都消失。事实上，对于漂移项，我们得到

$$
\begin{aligned}
&f(X_{r-}(Y_{r-}),r,z) + DX_{r-}Y_{r-}g(Y_{r-},r,z) \\
&\qquad = f(X_{r-}(Y_{r-}),r,z) - DX_{r-}Y_{r-}\Big(DX_{r-}(Y_{r-})\Big)^{-1} f(X_{r-}(Y_{r-}),r) \equiv 0.
\end{aligned}
$$

关于 W的其他 Lebesgue 积分和 Itˆo 随机积分也以类似方式消失。为处理跳跃项，我们考虑函数 $h(u;x):=\mathbf{e}^{u\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(x))$，其中映射 $(u,x)\mapsto\mathbf{e}^{u\varphi}(x)$ 已在 (25)、(26)、(27) 中定义，因此 $h(0;x):=X_{r-}(x)$ 且 $h(1;\,x):=X_r(x)$。然后考虑到 (40)，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}h(u;w(u;y))&=\frac{\partial}{\partial u}h(u;w(u;y))+\frac{\partial}{\partial x}h(u;w(u;y))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}w(u;y)\\&=\varphi(h(u;w(u;y));r,z)\\&\quad-\frac{\partial}{\partial x}h(u;w(u;y))\Big(\frac{\partial}{\partial x}h(u;w(u;y))\Big)^{-1}\cdot\varphi(h(u;w(u;y));r,z)\\&\equiv 0.\end{aligned}\tag{41}$$

换句话说，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{e}^{\varphi(r,z)}(X_{r-}(\mathbf{e}^{\psi(r,z)}(Y_{r-}))-X_{r-}(Y_{r-})&=\Big(h(1;w(1;y))-h(0;w(0,y))\Big)\Big|_{y=Y_{r-}}\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}h(u;w(u;y))\,\mathrm{d}u\Big|_{y=Y_{r-}}\\&\equiv 0.\end{aligned}$$

此外，将广义 Itˆo 公式中的补偿项合并起来，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(Y_{r-}))-X_{r-}(Y_{r-})-\varphi(X_{r-}(Y_{r-}),r,z)\\&+\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}\Big(X_{r-}\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})\Big)\Big)-\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(Y_{r-}))\\&-DX_{r-}(Y_{r-})\psi(Y_{r-},r,z)\equiv 0.\end{aligned}$$

因此，对每个局部化解 Y，都有 $Y_t(y)=X_t^{-1}(y)$。由于 X 在 $[0,T]$ 上存在，在局部化序列中取极限可得，Y 是逆流，并满足随机微分方程 (39)。 □

定理 5.2（关于第一变量的逆流的 Itˆo 公式）。令 $\Theta\in C^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$。那么逆流 $t\mapsto X_{t,0}$ 满足典范随机微分方程

$$\begin{aligned}\Theta(X_{t,0}(x))&=\Theta(x)-\int_0^t\nabla^T\Theta(X_{r,0}(x))DX_{r,0}(x)\Phi(x,\diamond\,\mathrm{d}r)\\&=\Theta(x)-\int_0^t\nabla^T\Big(\Theta\circ X_{r,0}(x)\Big)\Phi(x,\diamond\,\mathrm{d}r),\end{aligned}\tag{42}$$

其含义如下：

$$\begin{aligned}\Theta(X_{t,0}(x))&=\Theta(x)-\int_0^t\nabla^T\Theta(X_{r-,0}(x))DX_{r-,0}(x)f(x,r)\,\mathrm{d}r\\&\quad-\int_0^t\nabla^T\Theta(X_{r-,0}(x))DX_{r-,0}(x)F(x,r)\circ\mathrm{d}W_r\\&\quad+\int_0^t\int_{\|z\|\le1}\Big(\Theta(\mathbf{e}^{-\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-,0}(x)))-\Theta(X_{r-,s}(x))\Big)\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r)\\&\quad+\int_0^t\int_{\|z\|\le1}\Big(\Theta(\mathbf{e}^{-\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-,0}(x)))-\Theta(X_{r-,0}(x))\\&\qquad\qquad+\nabla^T\Theta(X_{r-,0}(x))DX_{r-,0}(x)\varphi(x,r,z)\Big)\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\\&\quad+\int_0^t\int_{\|z\|>1}\Big(\Theta(\mathbf{e}^{-\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-,0}(x)))-\Theta(X_{r-,0}(x))\Big)N(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r).\end{aligned}\tag{43}$$

证明。 证明按照 Kunita [21] 中定理 4.4.5 的证明思路进行。为简洁起见，我们将正向流记为 $X_t:=X_{0,\,t}$，将逆流记为 $Y_t:=X_{t,\,0}$，$t\in[0,T]$。我们已经证明，逆流 Y 满足随机微分方程 (38)。

首先注意到，由于 $X_t(Y_t(x)) \equiv x$，梯度矩阵 $DX_t(x)$ 和 $DY_t(x)$ 满足关系式

$$DX_t(Y_t(x)) \cdot DY_t(x) = \mathrm{Id}$$

或者等价地，

$$\Big(DX_t(Y_t(x))\Big)^{-1} = DY_t(x).$$

其次，考虑到（41），我们得到

$$h(u; w(u; x)) \equiv x, \quad u \in [0, 1],$$

因此

$$Dh(u; w(u; x))Dw(u; x) = \mathrm{Id} \tag{44}$$

或者等价地，

$$\Big(Dh(u; w(u; x))\Big)^{-1} = Dw(u; x), \quad u \in [0, 1].$$

因此，方程（40）对于 w 可写为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} w(u; x) & = -Dw(u; x)\varphi(x, r, z), \quad u \in [0, 1], \\ w(0; x) & = x. \end{cases}$$

这是一阶输运方程，其解为$\mathbf{e}^{-u\varphi(\cdot,r,z)}(x)$，因此

$$\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(\cdot) = \mathbf{e}^{-\varphi(\cdot,r,z)}(\cdot). \tag{45}$$

Hen将 Itˆo 公式应用于方程 (39)，并考虑 (44) 和 (45)，得到 s

$$\begin{aligned} \Theta(Y_t(x)) = x &- \int_0^t \nabla^T \Theta(Y_{r-}(x)) DY_{r-}(x) f(x, r)\, \mathrm{d}r \\ &- \int_0^t \nabla^T \Theta(Y_{r-}(x)) DY_{r-}(x) F(x, r) \circ \mathrm{d}W_r \\ &+ \int_0^t \int_{\|z\| \le 1} \Big(\Theta(\mathbf{e}^{-\varphi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})) - \Theta(Y_{r-})\Big) \tilde{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}r) \\ &+ \int_0^t \int_{\|z\| \le 1} \Big(\Theta(\mathbf{e}^{-\varphi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})) - \Theta(Y_{r-}) \\ &\qquad + \nabla^T \Theta(Y_{r-}(x)) DY_{r-}(x) \varphi(x, r, z)\Big) \nu(\mathrm{d}z)\, \mathrm{d}r, \end{aligned}$$

或者等价地

$$\begin{aligned} \Theta(Y_t(x)) = x &- \int_0^t \nabla^T \Big(\Theta \circ Y_{r-}(x)\Big) f(x, r)\, \mathrm{d}r \\ &- \int_0^t \nabla^T \Big(\Theta \circ Y_{r-}(x)\Big) F(x, r) \circ \mathrm{d}W_r \\ &+ \int_0^t \int_{\|z\| \le 1} \Big(\Theta(\mathbf{e}^{-\varphi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})) - \Theta(Y_{r-})\Big) \tilde{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}r) \\ &+ \int_0^t \int_{\|z\| \le 1} \Big(\Theta(\mathbf{e}^{-\varphi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})) - \Theta(Y_{r-}) \\ &\qquad + \nabla^T \Big(\Theta \circ Y_{r-}(x)\Big) \varphi(x, r, z)\Big) \nu(\mathrm{d}z)\, \mathrm{d}r, \end{aligned}$$

后一个公式可以形式化地写成典范形式（42）。 □

6 定理 2.1 的证明

令 W 为 m维布朗运动，令 Z 为 m维补偿纯跳L´évy过程。为简单起见，假设 $\nu(\|z\|>0)=0$。考虑线性方程（6）。为求解该方程，我们考虑一个（$d+2$）维特征系统Marcus随机微分方程（12）、（13）、（14）。注意，φ 是一个 d维过程，而 ξ和 ζ是一维的。记 $X:=(\varphi^1,\ldots\ldots,\varphi^d,\xi,\zeta)=(X^1,\ldots\ldots,X^d,X^{d+1},X^{d+2})\in\mathbb{R}^{d+2}$（列向量），并考虑函数

$$
\begin{aligned}
f(X)&=-\begin{pmatrix} a^1(X^1,\ldots,X^d)\\ \vdots\\ a^d(X^1,\ldots,X^d)\\ X^{d+1}b(X^1,\ldots,X^d)\\ X^{d+1}c(X^1,\ldots,X^d)\end{pmatrix},\\
F(X)&=-\begin{pmatrix} A_1^1(X^1,\ldots,X^d) & \cdots & A_1^m(X^1,\ldots,X^d)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_d^1(X^1,\ldots,X^d) & \cdots & A_d^m(X^1,\ldots,X^d)\\ X^{d+1}B_1(X^1,\ldots,X^d) & \cdots & X^{d+1}B_m(X^1,\ldots,X^d)\\ X^{d+1}C_1(X^1,\ldots,X^d) & \cdots & X^{d+1}C_m(X^1,\ldots,X^d)\end{pmatrix},\\
\Sigma(X)&=-\begin{pmatrix} \alpha_1^1(X^1,\ldots,X^d) & \cdots & \alpha_1^m(X^1,\ldots,X^d)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_d^1(X^1,\ldots,X^d) & \cdots & \alpha_d^m(X^1,\ldots,X^d)\\ X^{d+1}\beta_1(X^1,\ldots,X^d) & \cdots & X^{d+1}\beta_m(X^1,\ldots,X^d)\\ X^{d+1}\sigma_1(X^1,\ldots,X^d) & \cdots & X^{d+1}\sigma_m(X^1,\ldots,X^d)\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

I用矩阵形式，系统 (12)、(13)、(14) 可写成 (24 型的典范方程)

$$X_{0,t}=X_0+\int_0^t\Phi(X_{0,r},\diamond\,\mathrm{d}r)$$

其中 $\varphi(X,r,z)=\Sigma(X)z$（此处允许记号滥用）。存在唯一的解 $X=(X_{0,t}(x,\xi_0,\zeta_0))_{t\geq0}$，它是 $\mathbb{R}^{d+2}$ 上的一个 C^2-流。记 $Y_t=X_{t,0}=X_0^{-1},_t=(\varphi_t^1,0,\ldots,\varphi_t^d,0,\xi_t,0,\zeta_t,0)$ 为其逆流。

考虑一个函数

$$\Theta(x,\xi_0,\zeta_0)=\xi_0u_0(x)+\zeta_0$$

并定义一个过程

$$
\begin{aligned}
u(t;x,\xi_0,\zeta_0)&=\Theta(Y_t(x,\xi_0,\zeta_0))\\
&=\xi_{t,0}(x,\xi_0)u_0(\varphi_{t,0}(x))+\zeta_{t,0}(x,\xi_0,\zeta_0),\quad x\in\mathbb{R}^d,\ \xi_0,\zeta_0\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

于是由定理 5.2 可得

$$
\begin{aligned}
u(t,x,\xi_0,\zeta_0) = \Theta(Y_t) &= \Theta(x,\xi_0,\zeta_0) - \int_0^t \nabla^T \Big(\Theta \circ Y_r(x,\xi_0,\zeta_0)\Big)\Phi(x,\xi_0,\zeta_0,\diamond \,\mathrm{d}r) \\
&= u_0(0,x,\xi_0,\zeta_0) + \int_0^t \nabla_x^T u(r-,x,\xi_0,\zeta_0)a(x)\,\mathrm{d}r \\
&+ \xi_0 \int_0^t \partial_{\xi_0} u(r-,x,\xi_0,\zeta_0)b(x)\,\mathrm{d}r + \xi_0 \int_0^t \partial_{\zeta_0} u(r-,x,\xi_0,\zeta_0)c(x)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \nabla_x^T u(r-,x,\xi_0,\zeta_0)A(x)\circ \mathrm{d}W_r + \xi_0 \int_0^t \partial_{\xi_0} u(r-,x,\xi_0,\zeta_0)B(x)\circ \mathrm{d}W_r \\
&+ \xi_0 \int_0^t \partial_{\zeta_0} u(r-,x,\xi_0,\zeta_0)C(x)\circ \mathrm{d}W_r \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big(\Theta(\mathrm{e}^{-\Sigma(\cdot)z}(Y_{r-}(x,\xi_0,\zeta_0))) - u(r-,x,\xi_0,\zeta_0)\Big)\,\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r) \\
&+ \int_0^t \int_{\|z\|\le 1} \Big(\Theta(\mathrm{e}^{-\Sigma(\cdot)z}(Y_{r-}(x,\xi_0,\zeta_0))) - u(r-,x,\xi_0,\zeta_0) \\
&\qquad + \nabla_x^T u(r-,x,\xi_0,\zeta_0)\alpha(x)z + \xi_0 \partial_{\xi_0} u(r-,x,\xi_0,\zeta_0)\beta(x)z \\
&\qquad + \xi_0 \partial_{\zeta_0} u(r-,x,\xi_0,\zeta_0)\sigma(x)z\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

我们来研究导数 $\partial_{\xi_0} u$ 和 $\partial_{\zeta_0} u$。首先注意到，过程 ξ 可显式表示为指数函数

$$
\begin{aligned}
&\xi_{0,t}(x,\xi_0) \\
&\quad = \xi_0 \exp\Big(-\int_0^t b(\varphi_{0,r}(x))\,\mathrm{d}r - \int_0^t B(\varphi_{0,r}(x))\circ \mathrm{d}W_r - \int_0^t \beta(\varphi_{0,r}(x))\diamond \mathrm{d}Z_r\Big).
\end{aligned}
$$

导数等于

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\xi_0}\xi_{0,t}(x,\xi_0) \\
&\quad = \exp\Big(-\int_0^t b(\varphi_{0,r}(x))\,\mathrm{d}r - \int_0^t B(\varphi_{0,r}(x))\circ \mathrm{d}W_r - \int_0^t \beta(\varphi_{0,r}(x))\diamond \mathrm{d}Z_r\Big)
\end{aligned}
$$

并且它满足带有初始值 $(x,\ \xi_0) = (x,\ 1)$ 的 (13)。根据反函数的导数公式，我们得到

$$
\begin{aligned}
\partial_{\xi_0}\xi_{t,0}(x,\xi_0) &= \Big(\partial_{\xi_0}\xi_{0,t}(\varphi_{t,0}(x),\xi_{t,0}(x,\xi_0))\Big)^{-1} \\
&= \Big(\xi_{0,t}(\varphi_{t,0}(x),1)\Big)^{-1} = \xi_{t,0}(x,1).
\end{aligned} \tag{47}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
&\partial_{\xi_0}\zeta_{t,0}(x,\xi_0,\zeta_0) = \zeta_{t,0}(x,1,0), \\
&\partial_{\zeta_0}\zeta_{t,0}(x,\xi_0,\zeta_0) = 1.
\end{aligned} \tag{48}
$$

因此，考虑到 (47) 和 (48)，我们可以写成

$$
\begin{aligned}
\partial_{\xi_0} u(r,x,\xi_0,\zeta_0) &= \partial_{\xi_0}\Big(\Theta(\varphi_{t,0}(x),\xi_{t,0}(x,\xi_0),\zeta_{t,0}(x,\xi_0,\zeta_0))\Big) \\
&= u_0(\varphi_{t,0}(x))\partial_{\xi_0}\xi_{t,0}(x,\xi_0) + \partial_{\xi_0}\zeta_{t,0}(x,\xi_0,\zeta_0) \\
&= u_0(\varphi_{t,0}(x))\xi_{t,0}(x,1) + \zeta_{t,0}(x,1,0) = u(r,x,1,0)
\end{aligned}
$$

and

$$
\begin{aligned}
\partial_{\zeta_0} u(r,x,\xi_0,\zeta_0) &= \partial_{\zeta_0}\Big(\Theta(\varphi_{t,0}(x),\xi_{t,0}(x,\xi_0),\zeta_{t,0}(x,\xi_0,\zeta_0))\Big) \\
&= \partial_{\zeta_0}\zeta_{t,0}(x,\xi_0,\zeta_0) = 1.
\end{aligned}
$$

考察 (46) 中矩阵函数 Σ 的结构，可得映射 $\mathbf{e}^{\Sigma(\cdot)z}$: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+2}$ 具有以下形式:

$$\mathbf{e}^{\Sigma(\cdot)z}\begin{pmatrix} x \\ \xi_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{-\alpha(\cdot)z}(x) \\ \xi_0 \exp\Big(-\int_0^1 \beta(\mathbf{e}^{-r\alpha(\cdot)z}(x))z\,\mathrm{d}r\Big) \\ \zeta_0 - \xi_0\int_0^1 \exp\Big(-\int_0^s \beta(\mathbf{e}^{-r\alpha(\cdot)z}(x))z\,\mathrm{d}r\Big)\sigma(\mathbf{e}^{-r\alpha(\cdot)z}(x))\,\mathrm{d}s \end{pmatrix}.$$

回顾（45），即

$$\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}(\Theta(\cdot)) = \Theta(\mathbf{e}^{-\Sigma(\cdot)z}(\cdot)),$$

我们得到等式

$$\begin{aligned} u(t,x,1,0) &= u_0(x) + \int_0^t \nabla^T u(r-,x,1,0)a(x)\,\mathrm{d}r + \int_0^t u(r-,x,1,0)b(x)\,\mathrm{d}r + c(x)t \\ &+ \int_0^t \nabla^T u(r-,x,1,0)A(x)\circ\mathrm{d}W_r + \int_0^t u(r-,x,1,0)B(x)\circ\mathrm{d}W_r + C(x)W_t \\ &+ \int_0^t\int_{\|z\|\le 1}\Big(\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}(u(r-,x,1,0)) - u(r-,x,1,0)\Big)\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r) \\ &+ \int_0^t\int_{\|z\|\le 1}\Big(\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}(u(r-,x,1,0)) - u(r-,x,1,0) - \mathcal{Q}u(r-,x,1,0)z\Big)\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

这意味着 $u(t,\ x) = u(t,\ x,\ 1,\ 0)$ 是（7）的解。

为证明唯一性，我们先假设 $b(x) = 0$, $B(x) = 0$, $\beta(x) = 0$, 且 $c(x) = 0$, $C(x) = 0$,$\sigma(x) = 0$。在这种情况下，由特征定义的解具有如下形式

$$u(t,x) = u_0(\varphi_{t,0}(x)). \tag{49}$$

令 v 为另一个具有如下形式的半鞅解

$$v(t,x) = u_0(x) + \int_0^t f(x,r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t F(x,r)\,\mathrm{d}W_r + \int_0^t\int_{\|z\|\le 1}\varphi(x,r,z)\,\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r)$$

其中存在一些 $f,\ F$ 和 φ。于是，定理 4.4 得出

$$\begin{aligned} v(t,\varphi_{0,t}(x)) &= u_0(x) + \int_0^t f(\varphi_{0,r-}(x),r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t F(\varphi_{0,r-}(x),r)\,\mathrm{d}W_r \\ &+ \int_0^t\int_{\|z\|\le 1}\varphi(\varphi_{0,r-}(x),r,z)\,\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r) \\ &- \int_0^t \partial_x v(r-,\varphi_{0,r-}(x))a(\varphi_{0,r-}(x))\,\mathrm{d}r - \int_0^t \partial_x v(r-,\varphi_{0,r-}(x))A(\varphi_{0,r-}(x))\circ\mathrm{d}W_r \\ &+ \int_0^t\int_{\|z\|\le 1}\Big(v(r-,\mathbf{e}^{-\alpha}(\varphi_{0,r-})) + \varphi(\mathbf{e}^{-\alpha}(\varphi_{0,r-})),r,z) \\ &\qquad - v(r-,\varphi_{0,r-}) - \varphi(r-,\varphi_{0,r-},r,z)\Big)\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r) \\ &+ \int_0^t\int_{\|z\|\le 1}\Big(v(r-,\mathbf{e}^{-\alpha}(\varphi_{0,r-})) + \varphi(\mathbf{e}^{-\alpha}(\varphi_{0,r-})),r,z) \\ &\qquad + \partial_x v(r-,\varphi_{0,r-})\alpha(\varphi_{0,r-})\Big)\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r, \\ &- \int_0^t\int_{\|z\|\le 1}\Big(v(r-,\varphi_{0,r-}) + \varphi(r-,\varphi_{0,r-},r,z)\Big)\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

其中我们知道 φ 由下式给出

$$\varphi(x,r,z)=\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}(v(r-,x))-v(r-,x).$$

让我们更仔细地考察跳跃项。一方面，我们知道

$$v(r,\mathbf{e}^{\alpha(\cdot)z}(\varphi_{0,r-}(x)))=\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}v(r,\varphi_{0,r-}(x)).$$

另一方面，将跳跃大小 z 的符号反转，等价于对 $\mathbf{e}^{\alpha(\cdot)z}$的 Marcus 常微分方程中的虚时间进行反转。因此，我们得到

$$\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}(v(r,\mathbf{e}^{-\alpha(\cdot)z}(\varphi_{0,r-}(x))))=v(r,\varphi_{0,r-}(x)).$$

我们还看到

$$\partial_x v(r-,\varphi_{0,r-}(x))\alpha(\varphi_{0,r-}(x))=\mathcal{Q}v(r-,\varphi_{0,r-}(x)),$$

从而得到

$$\begin{aligned}
&v(t,\varphi_{0,t}(x))=u_0(x)+\int_0^t\partial_t v(r-,\varphi_{0,r-}(x))\diamond\mathrm{d}\varphi_{0,r}(x)\\
&-\int_0^t\partial_x v(r-,\varphi_{0,r-}(x))a(\varphi_{0,r-}(x))\,\mathrm{d}r-\int_0^t\partial_x v(r-,\varphi_{0,r-}(x))A(\varphi_{0,r-}(x))\circ\mathrm{d}W_r\\
&-\int_0^t\int_{\|z\|\le1}\Big(\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}(v(r-,\varphi_{0,r-}(x))-v(r-,\varphi_{0,r-}(x))\Big)\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r)\\
&-\int_0^t\int_{\|z\|\le1}\Big(\mathbf{e}^{\mathcal{Q}z}(v(r-,\varphi_{0,r-}(x)))-v(r-,\varphi_{0,r-}(x))-\mathcal{Q}v(r-,\varphi_{0,r-}(x))z\Big)\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\\
&=u_0(x)
\end{aligned}$$

因此 $v(t,x)$ 与所给出的解 u 一致 b y (49)。

存在线性项 b、B 和 β 时，由特征线解给出的过程 $u(t,\varphi_{t,0}(x))$ 具有如下形式

$$\begin{aligned}
&u(t,\varphi_{t,0}(x))=u_0(\varphi_{t,0}(x))\times\\
&\quad\times\exp\Big(\int_0^t b(\varphi_{0,r}(x))\,\mathrm{d}r+\int_0^t B(\varphi_{0,r}(x))\circ\mathrm{d}W_r+\int_0^t\beta(\varphi_{0,r}(x))\diamond\mathrm{d}Z_r\Big).
\end{aligned}$$

而差值 $d(t,x):=v(t,\varphi_{0,t}(x))-u(t,\varphi_{t,0}(x))$ 满足线性方程

$$\begin{aligned}
d(t,x)=\int_0^t d(r-,x)b(\varphi_{r-}(x))\,\mathrm{d}r+\int_0^t d(r-,x)B(\varphi_{r-}(x))\circ\mathrm{d}W_r\\
+\int_0^t d(r-,x)\beta(\varphi_{r-}(x))\diamond\mathrm{d}Z_r,
\end{aligned}$$

a因此 $d\equiv0$。非齐次方程的差值也满足相同的关系 s.

7 定理 4.3 的证明

为简化记号，我们假设 X 和 Y，以及 W 和 Z 都是一维过程，即 $d=m=1$。我们还假设 $\nu([-1,1]^c)=0$。加入大跳是直接的。

我们将 X 和 Y 的随机微分方程写成 Itˆo 形式：

$$
\begin{aligned}
X_t(x) &= x + \int_0^t f(X_{r-}(x), r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t F(X_{r-}(x), r)\,\mathrm{d}W_r \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^t F'(X_{r-}(x), r)F(X_{r-}(x), r)\,\mathrm{d}r \\
&\quad + \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(x)) - X_{r-}(x)\Big)\,\tilde{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}r) \\
&\quad + \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(x)) - X_{r-}(x) - \varphi(X_{r-}(x), r, z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r \\
Y_t &= y + \int_0^t g(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t G(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}W_r + \frac{1}{2}\int_0^t G'(Y_{r-}, r)G(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r \\
&\quad + \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}) - Y_{r-}\Big)\,\tilde{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}r) \\
&\quad + \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}) - Y_{r-} - \psi(Y_{r-}, r, z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

首先，我们对半鞅 $X(x)$ 和 Y 进行局部化。假设半鞅 Φ 和 Ψ 满足第3节中的假设，从而 X 和 Y 定义良好且足够光滑。由于假设 Y 的跳跃有界，对于任意初值 y，我们可以对 Y 进行局部化，使停时过程属于某个球。类似地，我们可以对 X 停时，使其及其直至2阶的所有导数对于上述球中所有值 x 都一致有界。因此，从现在起，我们将处理停时半鞅，并且还假设所有系数 f、F、φ、g、G、ψ 及其导数都具有紧支撑。

为证明广义伊藤公式，我们采用 Carmona 和 Nualart [4], 定理III.3.3 中的方法。

考虑一列磨光子 $h_n \in C_c^\infty(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$，其定义为 $h_n(x) = nh(nx)$，其中 $h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d,\ \mathbb{R})$ 支撑于单位球 $|x| \le 1$，$h(x) \ge 0$，并且满足 $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x = 1$。关于磨光子的平滑性质，参见例如 Evans [9, 附录C.4]。

于是，对每个 $x \in \mathbb{R}$，将经典的 Itˆo 公式应用于半鞅 Y，得到

$$
\begin{aligned}
h_n(Y_t - x) &= h_n(y - x) + \int_0^t h_n'(Y_{r-} - x)g(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t h_n'(Y_{r-} - x)G(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}W_r \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t h_n'(Y_{r-} - x)G'(Y_{r-}, r)G(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t h_n''(Y_{r-} - x)G^2(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \int_{|z|\le 1} h_n'(Y_{r-} - x)\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}) - Y_{r-} - \psi(Y_{r-}, r, z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big[h_n\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}) - x\Big) - h_n(Y_{r-} - x)\Big]\,\tilde{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}r) \\
&+ \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big[h_n\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}) - x\Big) - h_n(Y_{r-} - x) \\
&\qquad\qquad - h_n'(Y_{r-} - x)\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}) - Y_{r-}\Big)\Big]\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}
\tag{50}
$$

接下来，我们将 Itˆo 乘积公式应用于 $X(x)h(Y-x)$，得到

$$
\begin{aligned}
&X_t(x)h_n(Y_t-x) = xh_n(y-x)\\
&\qquad I_1 = \Big\{ + \int_0^t h_n(Y_{r-}-x) f(X_{r-}(x),r)\,\mathrm{d}r\\
&\qquad I_2 = \Big\{ + \frac{1}{2}\int_0^t h_n(Y_{r-}-x) F'(X_{r-}(x),r)F(X_{r-}(x),r)\,\mathrm{d}r\\
&\qquad I_3 = \Big\{ + \int_0^t \int_{|z|\le 1} h_n(Y_{r-}-x)\Big(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(x)) - X_{r-}(x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -\varphi(X_{r-}(x),r,z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\\
&\qquad I_4 = \Big\{ + \int_0^t h_n(Y_{r-}-x) F(X_{r-}(x),r)\,\mathrm{d}W_r\\
&J_1 = \Big\{ + \int_0^t X_{r-}(x) h_n'(Y_r-x) g(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}r\\
&J_2 = \Big\{ + \frac{1}{2}\int_0^t X_{r-}(x) h_n'(Y_r-x) G'(Y_{r-},r)G(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}r\\
&J_3 = \Big\{ + \frac{1}{2}\int_0^t X_{r-}(x) h_n''(Y_r-x) G^2(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}r\\
&J_4 = \Big\{ + \int_0^t \int_{|z|\le 1} X_{r-}(x)\Big[h_n\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}) - x\Big) - h_n(Y_{r-}-x)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -h_n'(Y_{r-}-x)\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}) - Y_{r-}\Big)\Big]\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\\
&J_5 = \Big\{ + \int_0^t \int_{|z|\le 1} X_{r-}(x) h_n'(Y_{r-}-x)\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -Y_{r-} - \psi(Y_{r-},r,z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r \qquad (51)\\
&J_6 = \Big\{ + \int_0^t X_{r-}(x) h_n'(Y_r-x) G(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}W_r\\
&J_7 = \Big\{ + \frac{1}{2}\int_0^t F(X_{r-}(x),r) h_n'(Y_r-x) G(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}r\\
&J_8 = \Big\{ + \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big[\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(x)) - X_{r-}(x)\Big]\times\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times\Big[h_n\big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}) - x\big) - h_n(Y_{r-}-x)\Big]\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\\
&K_1 = \Big\{ + \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big[\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(x)) h_n\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}) - x\Big)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad -X_{r-}(x)h_n(Y_{r-}-x)\Big]\,\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r).
\end{aligned}
$$

我们将项 K_1 进一步分解为以下各项之和

$$
\begin{aligned}
&\qquad I_5 = \Big\{ \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(x)) - X_{r-}(x)\Big) h_n(Y_{r-}-x)\,\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r)\\
&\qquad J_9 = \Big\{ + \int_0^t \int_{|z|\le 1} \mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(x))\times\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times\Big[h_n\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}) - x\Big) - h_n(Y_{r-}-x)\Big]\,\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r).
\end{aligned}
$$

由于函数 φ 和 ψ 满足可积性假设，且指数映射具有相应性质，所有（随机）积分均存在。

广义 Itˆo 公式的证明将通过对等式 (51) 关于 x 积分，并在 $n\to\infty$ 时取极限来完成。

我们区分关于 $\mathrm{d}r$ 的勒贝格积分、关于 $\mathrm{d}W$ 的 Itˆo 积分、关于补偿后的˜泊松随机测度 N 的积分，以及包含导数 h_n' 和 h_n'' 的项。

我们先处理来自积分 $\int_0^t h_n(Y_{r-}-x)\,\mathrm{d}X_r$ 的各项，它们将给出式（32）中的第一个积分。

初始点和终点。根据磨光子的性质以及 $x \mapsto X_t(x)$ 的连续性，可得

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} X_t(x)h_n(Y_t-x)\,\mathrm{d}x = X_t(Y_t) \quad \text{and} \quad \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} x \quad h_n(y-x)\,\mathrm{d}x = y.$$

各项 I_1 和 I_2。我们先处理来自漂移部分和 Stratonovich 积分中相对于 W 的噪声诱导漂移的勒贝格积分。对于每个 $\omega\in\Omega$,

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{\mathbb{R}} |h_n(Y_{r-}-x)f(X_{r-}(x),r)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r &\le \|f\|\int_0^t\int_{\mathbb{R}} h_n(Y_{r-}-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\\ &= T\cdot\|f\| < \infty\end{aligned}$$

由富比尼定理可得

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_0^t h_n(Y_{r-}-x)f(X_{r-}(x),r)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x &= \int_0^t\int_{\mathbb{R}^d} h_n(Y_{r-}-x)f(X_{r-}(x),r)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r\\ &= \int_0^t\int_{\|x\|\le 1/n} h_n(x)f(X_{r-}(Y_{r-}-x),r)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

对于每个 $r\in[0,T]$，函数 $y\mapsto f(X_{r-}(y)\ r)$ 连续；对于任意 $K>0$，根据 Evans 附录 C 中的定理 6(iii) [9,4]

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|y|\le K}\Big|\int_{|x|\le 1/n} h_n(x)f(X_{r-}(y-x),r)\,\mathrm{d}x - f(X_{r-}(y),r)\Big| = 0.$$

由于对于 $r\in[0,T]$

$$\Big|\int_{|x|\le 1/n} h_n(x)f(X_{r-}(Y_{r-}-x),r)\,\mathrm{d}x\Big| \le \|f\|$$

勒贝格定理表明

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}} h_n(Y_{r-}-x)f(X_{r-}(x),r)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}r \to \int_0^t f(X_{r-}(Y_{r-}),r)\,\mathrm{d}r.$$

同理，我们得到项 I_2 的收敛。

项 I_3。考虑函数

$$H^{I_3}(x,r) = \int_{|z|\le 1}\Big(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(x) - x - \varphi(x,r,z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z).$$

由于

$$|\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(x) - x - \varphi(x,r,z)| \le K_0(z)L_0(z)\mathrm{e}^{K_0(z)}(1+|x|)$$

我们得到 $x\mapsto H^{I_3}(x,\ r)$ 定义良好且连续。回想一下，假设 X 和 Y 有界，则前一步的论证适用，且

$$\begin{aligned}&\int_0^t h_n(Y_{r-}-x)\int_{|z|\le 1}\Big(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(x)) - X_{r-}(x) - \varphi(X_{r-}(x),r,z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\\ &\quad\to\int_0^t\int_{|z|\le 1}\Big(\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(Y_{r-})) - X_{r-}(Y_{r-}) - \varphi(X_{r-}(Y_{r-}),r,z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

项 I_4。 关于随机积分的富比尼定理，参见 Protter [35, 定理6。64], 对每个 $|y| \le K$

$$\int_{\mathbb{R}} \int_0^t h_n(y-x) F(X_{r-}(x), r) \, \mathrm{d}W_r \, \mathrm{d}x = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h_n(y-x) F(X_{r-}(x), r) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}W_r.$$

根据磨光子的性质，参见 Evans [9, 附录C.4，定理 6],，对每个 $r \in [0,T]$ 和 $|y| \le K$

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} h_n(y-x) F(X_{r-}(x), r) \, \mathrm{d}x - F(X_{r-}(y), r) \Big| \le 2\|F\|$$

并根据 Itô 等距性和勒贝格定理

$$\begin{aligned} &\mathbf{E} \Big| \int_0^t \int_{\mathbb{R}} h_n(Y_{r-} - x) F(X_{r-}(x), r) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}W_r - \int_0^t F(X_{r-}(Y_{r-}), r) \, \mathrm{d}W_r \Big|^2 \\ &\quad = \int_0^t \mathbf{E} \Big| \int_{\mathbb{R}} h_n(Y_{r-} - x) F(X_{r-}(x), r) \, \mathrm{d}x - F(X_{r-}(Y_{r-}), r) \Big|^2 \mathrm{d}r \to 0. \end{aligned}$$

项 I_5。 跳跃项 I_5 的估计类似，借助关于补偿泊松随机测度的随机积分的 Itô 等距性即可。

各项 J_1、 J_2 **和** J_7。 考虑勒贝格积分 J_1。对每个 ω，应用富比尼定理，进行分部积分，利用 X 是一个 C^1-微分同胚，并应用勒贝格定理:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \int_0^t X_{r-}(x) h_n'(Y_{r-} - x) g(Y_{r-}, r) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}x \\ &\qquad = \int_0^t \Big[\int_{\mathbb{R}} X_{r-}(x) h_n'(Y_{r-} - x) \, \mathrm{d}x \Big] g(Y_{r-}, r) \mathrm{d}r \\ &\qquad = \int_0^t \Big[\int_{\mathbb{R}} X_{r-}'(x) h_n(Y_{r-} - x) \, \mathrm{d}x \Big] g(Y_{r-}, r) \, \mathrm{d}r \\ &\qquad \to \int_0^t X_{r-}'(Y_{r-}) g(Y_{r-}, r) \, \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

项 J_2 和 J_7 的处理类似。

项 J_3。 类似地，利用 X 是一个 C^2-微分同胚，并进行两次分部积分，可得

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} \int_0^t X_{r-}(x) h_n''(Y_{r-} - x) G^2(Y_{r-}, r) \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}x \\ &\qquad = \int_0^t \Big[\int_{\mathbb{R}} X_{r-}(x) h_n''(Y_{r-} - x) \, \mathrm{d}x \Big] G^2(Y_{r-}, r) \, \mathrm{d}r \\ &\qquad = \int_0^t \Big[\int_{\mathbb{R}} X_{r-}''(x) h_n(Y_{r-} - x) \, \mathrm{d}x \Big] G^2(Y_{r-}, r) \, \mathrm{d}r \\ &\qquad \to \int_0^t X_{r-}''(Y_{r-}) G^2(Y_{r-}, r) \, \mathrm{d}r. \end{aligned}$$

术语 $J_4 + J_5 + J_8$。 首先我们注意到，由于假设，项 J_4、 J_5 和 J_8 的和是良定义的。因此，和式 $J_4 + J_5 + J_8$ 可简化为

$$\begin{aligned} J_4 + J_5 + J_8 = \int_0^t \int_{|z| \le 1} \Big[&\mathbf{e}^{\varphi(\cdot, r, z)}(X_{r-}(x)) \Big(h_n\big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot, r, z)}(Y_{r-}) - x\big) - h_n(Y_{r-} - x) \Big) \\ &- X_{r-}(x) \Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot, r, z)}(Y_{r-}) - Y_{r-} \Big) h_n'(Y_{r-} - x) \Big] \, \nu(\mathrm{d}z) \, \mathrm{d}r \end{aligned}$$

根据富比尼定理、分部积分以及控制收敛定理，我们得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}(J_4+J_5+J_8)\,\mathrm{d}x\\
&\quad=\int_0^t\int_{|z|\le 1}\Big[\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}\Big(X_{r-}\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})\Big)\Big)-\mathbf{e}^{\varphi(\cdot,r,z)}(X_{r-}(Y_{r-}))\\
&\qquad\qquad-X'_{r-}(Y_{r-})\psi(Y_{r-},r,z)\Big]\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r.
\end{aligned}$$

项 J_6。 项 J_6 通过分部积分处理，方法与项 I_4类似。**项** J_9。 项 J_9 的处理方式与项 I_5类似。

8 定理 4.4 的证明

该定理的证明类似。经过局部化，并对 Y 应用磨光子 h_n 后，我们再次得到公式 (50)。 $\Phi(x,\ t)h_n(Y_t-x)$ 的乘积公式为

$$\begin{aligned}
&\Phi(x,t)h_n(Y_t-x)=\Phi(x,0)h_n(y-x)+\int_0^t h_n(Y_{r-}-x)f(X_{r-}(x),r)\,\mathrm{d}r\\
&+\int_0^t h_n(Y_{r-}-x)F(X_{r-}(x),r)\,\mathrm{d}W_r+\int_0^t\Phi(x,r-)h'_n(Y_{r-}-x)g(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}r\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\Phi(x,r-)h'_n(Y_{r-}-x)G'(Y_{r-},r)G(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}r\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t\Phi(x,r-)h''_n(Y_{r-}-x)G^2(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}r\\
&+\int_0^t\int_{|z|\le 1}\Phi(x,r-)\Big[h_n\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})-x\Big)-h_n(Y_{r-}-x)\\
&\qquad\qquad-h'_n(Y_{r-}-x)\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})-Y_{r-}\Big)\Big]\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\\
&+\int_0^t\int_{|z|\le 1}\Phi(x,r-)h'_n(Y_{r-}-x)\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})-Y_{r-}-\psi(Y_{r-},r,z)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\\
&+\int_0^t\Phi(x,r-)h'_n(Y_r-x)G(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}W_r\\
&+\frac{1}{2}\int_0^t F(X_{r-}(x),r)h'_n(Y_r-x)G(Y_{r-},r)\,\mathrm{d}r\\
&+\int_0^t\int_{|z|\le 1}\varphi(x,r,z)\Big(h_n\big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})-x\big)-h_n(Y_{r-}-x)\Big)\,\nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r\\
&+\int_0^t\int_{|z|\le 1}\Big[\Big(\Phi(x,r-)+\varphi(x,r,z)\Big)h_n\Big(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-})-x\Big)\\
&\qquad\qquad-\Phi(x,r-)h_n(Y_{r-}-x)\Big]\,\tilde{N}(\mathrm{d}z,\mathrm{d}r).
\end{aligned}\tag{52}$$

对 x 积分并取极限，得到公式 $n \to \infty$

$$
\begin{aligned}
\Phi(Y_t, t) = \Phi(y, 0) &+ \int_0^t f(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r + \int_0^t F(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}W_r \\
&+ \int_0^t \nabla^T \Phi(Y_{r-}, r-) g(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r + \frac{1}{2}\int_0^t \nabla^T \Phi(Y_{r-}, r-) G^2(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^t \nabla^T \nabla \Phi(Y_{r-}, r-) G'(Y_{r-}, r) G(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big(\Phi(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}), r-)) - \Phi(Y_{r-}, r-) \\
&\qquad\qquad - \nabla^T \Phi(Y_{r-}, r-) \psi(Y_{r-}, r, z) \Big)\, \nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \nabla^T \Phi(Y_{r-}, r-) G(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}W_r + \frac{1}{2}\int_0^t \nabla^T F(Y_{r-}, r) G(Y_{r-}, r)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big(\varphi(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}), r, z) - \varphi(Y_{r-}, r, z) \Big)\, \nu(\mathrm{d}z)\,\mathrm{d}r \\
&+ \int_0^t \int_{|z|\le 1} \Big[\Phi(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}), r-) + \varphi(\mathbf{e}^{\psi(\cdot,r,z)}(Y_{r-}), r, z) - \Phi(Y_{r-}, r-) \Big]\, \tilde{N}(\mathrm{d}z, \mathrm{d}r).
\end{aligned}
$$

可将其转化为式（35）、（36）和（37）。

参考文献

[1] L. Ambrosio. 非光滑向量场的输运方程与柯西问题。载于变分法与非线性偏微分方程，收录于数学讲义第1927卷，第1–41页。施普林格，柏林，2008年。[2] D. Applebaum. *Lévy*过程与随机微积分，剑桥高等数学研究第116卷。剑桥大学出版社，剑桥，第二版，2009年。[3] B. Birnir. *Kolmogorov–Obukhov*湍流理论：湍流的数学理论。Springer数学简报。施普林格，纽约，2013年。[4] R. A. Carmona 和 D. Nualart. 非线性随机积分器、方程与流，收录于随机学专著第6卷。Gordon and Breach 科学出版社，纽约，1990年。[5] P. Catuogno 和 C. Olivera. L^p-随机输运方程的解。随机算子与随机方程，21(2):125–134，2013年。[6] P.-L. Chow. 随机偏微分方程。应用数学进展。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，第二版，2015年。[7] L. Debnath. 面向科学家与工程师的非线性偏微分方程。Birkh¨äuser，波士顿，第二版，2005年。[8] R. J. DiPerna 和 P.-L. Lions. 常微分方程、输运理论与Sobolev空间。数学创刊，98(3):511–547，1989年。[9] L. C. Evans. 偏微分方程，收录于数学研究生教程第19卷。美国数学学会，2002年。[10] E. Fedrizzi 和 F. Flandoli. 噪声阻止线性输运方程中的奇异性。泛函分析杂志，264(6):1329–1354，2013年。[11] E. Fedrizzi、W. Neves 和 C. Olivera. 关于一类向量场的随机输运方程。比萨高等师范学校年刊。科学分部，18(2):397–419，2018年。

[12] F. Flandoli. PDE中噪声与输运机制的相互作用。米兰数学杂志，79(2):543–560，2011年。[13] F. Flandoli. PDE的随机扰动与流体动力学模型。 ´圣弗洛尔概率论暑期学校 ´第 ´四 ´十届，2010年，收录于数学讲义第2015卷。施普林格，柏林，2011年。[14] T. Fujiwara. 流形上的跳跃型随机微分方程与L´évy流。京都大学数学杂志，31:99–119，1991年。[15] T. Fujiwara 和 H. Kunita. 基于带空间参数的半鞅的典范随机微分方程。第一部分：微分同胚随机流。九州数学杂志，53(2):265–300，1999年。[16] T. Fujiwara 和 H. Kunita. 基于带空间参数的半鞅的典范随机微分方程。第二部分：逆流与反向随机微分方程。九州数学杂志，53(2):301–331，1999年。[17] H. Holden、B. Øksendal、J. Ubøe 和 T. Zhang. 随机偏微分方程：建模的白噪声泛函方法。Universitext。施普林格，第二版，2010年。[18] G. Kallianpur 和 J. Xiong. 环境污染的随机模型。应用概率进展，26(2):377–403，1994年。[19] H. Kunita. 一阶随机偏微分方程。载于 K. Itˆo编，《随机分析：谷口随机分析国际研讨会论文集》，片田与京都，1982年，收录于北荷兰数学丛书第32卷，第249–269页。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1984年。[20] H. Kunita. 带跳跃的随机微分方程与微分同胚随机流。载于《Itˆo随机微积分与概率论》，第197–211页。施普林格，东京，1996年。[21] H. Kunita. 随机流与随机微分方程，第24卷。剑桥大学出版社，1997年。[22] H. Kunita. 基于L´évy过程的随机微分方程与微分同胚随机流。载于M. M. Rao编，《实分析与随机分析：新视角》，数学趋势，第305–373页。Birkh¨äuser，波士顿，2004年。[23] T. G. Kurtz、 ´E. Pardoux 和 P. Protter. 一般半鞅驱动的Stratonovich随机微分方程。亨利·庞加莱研究所年刊，B辑，31(2):351–357，1995年。[24] S. V. Lototsky 和 B. L. Rozovsky. 随机偏微分方程。Universitext。施普林格，查姆，2017年。[25] C. Man 和 C. W. Tsai. 用于地表水流中悬浮泥沙输运的基于随机偏微分方程的模型。工程力学杂志，133(4):422–430，2007年。[26] V. Mandrekar 和 B. R¨üdiger. 巴拿赫空间中的随机积分：理论与应用。第73卷，2015年。[27] S. I. Marcus. 点过程驱动的随机微分方程的建模与分析。IEEE信息论汇刊，24(2):164–172，1978年。[28] S. I. Marcus. 半鞅驱动的随机微分方程的建模与近似。随机过程，4(3):223–245，1981年。[29] D. A. C. Mollinedo 和 C. Olivera. 无界漂移随机输运方程的适定性。巴西数学会通报，新系列，48(4):663–677，2017年。[30] J. Oh 和 C. W. Tsai. 用于明渠水流中泥沙输运的随机跳跃扩散粒子追踪模型（SJD-PTM）。《水资源研究》，46(10):W10508，2010年。

[31] C. Olivera 和 C. A. Tudor。分数噪声驱动的随机输运方程解的密度。《数学分析与应用杂志》，431(1):57–72，2015。[32] B. Perthame。《生物学中的输运方程》。数学前沿。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2007。[33] S. Peszat 和 J. Zabczyk。具有 *L´évy* 噪声的随机偏微分方程：演化方程方法，第 113 卷，《数学及其应用百科全书》系列。剑桥大学出版社，剑桥，2007。[34] F. Proske。L´évy 白噪声驱动的随机输运方程。《数学科学通讯》，2(4):627–641，2004。[35] P. E. Protter。《随机积分与微分方程》，数学应用丛书第 21 卷。施普林格，柏林，第 2 版，2004。[36] K. Sato。*L´évy* 过程与无限可分分布，第 68 卷，《剑桥高等数学研究》系列。剑桥大学出版社，剑桥，1999。[37] C. W. Tsai 和 S.-H. Huang。湍流喷射与扫掠事件影响下的悬浮泥沙输运建模。《水资源研究》，55(7):5379–5393，2019。[38] M. Van der Perk。《土壤与水污染：从分子尺度到流域尺度》。泰勒-弗朗西斯出版集团，伦敦，2007。[39] P. P. Wang 和 C. Zheng。随机源条件下的污染物输运模型。《地下水》，43(3):423–433，2005。