arXiv:2303.00676v3 [math.AG] 7 Nov 2023

关于 $\mathbb{F}_e$ 上某些三维卷曲的 Ulrich 丛

MARIA LUCIA FANIA 和 FLAMINIO FLAMINI

Abstract. 我们研究了在适当的、X_e 上的希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_e$ 上的三维簇上存在 Ulrich 向量丛的问题，其中 $e \geqslant 0$ 任意。这些三维簇是 $\mathbb{F}_e$ 上非常 ample 向量丛的射影化的典范嵌入，且按照 Brosius 和 Aprodu–Brinzanescu 的定义，这些向量丛是 *uniform*；分别参见 [10] 和 [3] 。

我们明确描述了秩为 $r \geqslant 1$ 的向量丛模空间的不可约分支，这些向量丛相对于 X_e 上的典范极化是 Ulrich 丛，且其一般点是斜率稳定、不可分解的向量丛。此外，我们确定了这类分支的维数，并证明它们一般光滑。作为这些结果的直接推论，我们还计算了任意此类 X_e 的 *Ulrich complexity*，并给出一个有效证明，说明这些 X_e 最终都是 *geometrically Ulrich wild*。

最后，针对三维丛曲面所发展的工具 X_e 使我们能够推导出关于 $\mathbb{F}_e$上秩为 $r \geqslant 1$ 的向量丛的 Ulrich 性结果，其中 $e \geqslant 0$为任意情形，所考察的是自然关联的（非常 ample）极化。

Introduction

设 X 是一个维数为 $n \geqslant 1$ 的光滑不可约射影簇，且 H 是 X上的一个非常 ample 除子。若向量丛 $\mathcal{U}$ 定义在 X 上，并满足涉及由 H 诱导的极化的若干倍数的适当上同调条件，则称其关于 H 是 Ulrich 的（精确定义见下文定义 1.1；等价条件例如见 [5, 定理 2.3], ）。

Ulrich 向量丛最初出现于交换代数领域，见 B. Ulrich 于 1984 年发表的论文 [32]；这是因为这些丛具有适当的极值上同调性质。此后，随着论文[21] 的发表，Ulrich 丛受到代数几何领域的关注；该论文的作者在文中还利用 X上的 Ulrich 向量丛计算射影簇X 的 Chow 形式，前提是 X 支撑 Ulrich 丛。

近年来，关于 Ulrich 丛的研究成果颇丰（有关综述，读者可参阅例如 [16, 18]），主要探讨以下问题：

- 给定簇 X 上的任意极化 H，是否存在一个关于 H 为 Ulrich 的向量丛 $\mathcal{U}$？
- 甚至更一般地，给定一个簇 X，是否存在一个非常 ample 除子 H，它在 X 上诱导一个极化，以及一个在 X 上关于 H 为 Ulrich 的向量丛 $\mathcal{U}$？
- 给定极化簇 (X, H) 上的 Ulrich 丛，其可能的最小秩是多少（即 X 关于 H 的所谓 Ulrich 复杂度，记作 $uc_H(X)$，参见下文注 1.2-(i)）？
- 如果 (X, H) 上存在 Ulrich 丛，它们是否是稳定丛？若其模空间 $\mathcal{M}$ 非空，它们是光滑的，还是至少是约化的?
- 维数($\mathcal{M}$) 是多少?

尽管对于某些特定类别的代数簇（例如曲线、Segre 簇、Veronese 簇、Grassmann 簇、有理正规滚动曲面、超曲面，

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主分类号：14J30、14J26、14J60、14C05；次分类号：14N30。
Key words and phrases. Ulrich 丛、三维簇、挠曲曲面、模、变形。第一作者得到 PRIN 2017SSNZAW 项目资助。第二作者部分得到授予罗马第二大学数学系的 MIUR 卓越系项目 MatMod@TOV 资助。两位作者均为 INdAM-GNSAGA 成员。

某些类别的曲面和三维簇，综述参见例如 [5, 11, 16, 18] ），人们对这些问题已有所了解，但即使对于曲面，上述问题在完全一般的情形下仍未解决。

本文研究如下情形： X 是以希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_e$ 为底的三维卷曲，且 $e \geqslant 0$。更确切地说，我们关注三维卷曲 X_e ，它们是通过非常丰沛的典范线丛$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)}$(1)嵌入射影丛 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)$ 得到的，其中 $\mathcal{E}_e$ 是 $\mathbb{F}_e$ 上带有陈类 $c_1(\mathcal{E}_e)$ 的非常丰沛的秩二向量丛，这些陈类在数值上等价于$3C_e + b_e f$ 和 $c_2(\mathcal{E}_e) = k_e$； C_e 和 f 是 Num($\mathbb{F}_e$) 的生成元，而 b_e 和k_e 是满足某些自然数值条件的整数（参见下文假设 1.8 和注 1.9）。

在此设定下，可得到三维卷曲 $X_e \subset \mathbb{P}^{n_e}$，其中 $n_e = 4b_e - k_e - 6e + 4$；它们是非退化的，次数为 deg($X_e$) $= 6b_e - 9e - k_e$ （参见下文（2.2）），其超平面截面除子记为 ξ。本文旨在根据三维卷曲 (X_e, ξ) 所能支撑的 Ulrich 丛，研究上述三维卷曲的性质。

人们对此感兴趣的一个原因是，文献 [4, 2, 12] 考虑了几何挠曲曲面上 Ulrich 丛的存在性，而文献 [23] 研究了低次数光滑曲面上的三维丛曲面上秩一和秩二 Ulrich 丛的存在性；这类三维簇中包括满足 $e = 0$、1 的 $\mathbb{F}_e$ 上的丛曲面（其他极化情形的结果见 [27]）。因此，探究任意 $e \geqslant 0$ 下三维丛曲面（X_e， ξ）的情形是合理的。另一方面，文献 [8], [9], [24] 研究了三维丛曲面（X_e， ξ）的希尔伯特概形，因此，了解 Ulrich 丛在其中构造的不可约分支上的表现也就顺理成章。

我们的主要结果如下：

主定理 对任意整数 $e \geqslant 0$，考虑希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_e$，并令 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)$ 表示 $\mathbb{F}_e$ 上的线丛 $\alpha C_e + \beta f$，其中 C_e 和 f 是数值等价除子群 Num($\mathbb{F}_e$) 的生成元。

设 (X_e, ξ) 是如上所述、底空间为 $\mathbb{F}_e$ 的三维簇，其中 $\varphi : X_e \to \mathbb{F}_e$ 表示卷曲映射。则：

(a) 关于 ξ， X_e 不支撑任何 Ulrich 线丛，除非 $e = 0$。在后一种情形下， X_0 上唯一的 Ulrich 线丛如下：

(i) $L_1 := \xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2, -1)$ 和 $L_2 := \xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1, b_0 - 1)$；(ii) 对任意整数 $t \geqslant 1$， $M_1 := 2\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1, -t - 1)$ 和 $M_2 := \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2, 3t - 1)$，它们仅在 $b_0 = 2t, k_0 = 3t$ 时出现。

(b) 令 $e = 0$，并设 $r \geqslant 2$ 为任意整数。则 X_0 上秩为 r、关于 ξ 为 Ulrich 且第一陈类为..... 的向量丛 $\mathcal{U}_r$ 的模空间

$$c_1(\mathcal{U}_r) = \begin{cases} r\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3, b_0 - 3) + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}\left(\frac{r-3}{2}, \frac{(r-3)}{2}(b_0 - 2)\right), & \textit{if } r \textit{ is odd}, \\ r\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}(b_0 - 2)), & \textit{if } r \textit{ is even}. \end{cases}$$

非空，且包含一个维数为 $\mathcal{M}(r)$ 的一般光滑分支

$$\dim(\mathcal{M}(r)) = \begin{cases} \frac{(r^2-1)}{4}(6b_0 - 4), & \textit{if } r \textit{ is odd}, \\ \frac{r^2}{4}(6b_0 - 4) + 1, & \textit{if } r \textit{ is even}. \end{cases}$$

一般点 $[\mathcal{U}_r] \in \mathcal{M}(r)$ 对应于一个斜率稳定向量丛，其关于 ξ 的斜率由 $\mu(\mathcal{U}_r) = 8b_0 - k_0 - 3$ 给出。若进一步有 $r = 2$，则 $\mathcal{U}_2$ 也是特殊的（参见下文定义 1.3）。

(c) 当 $e > 0$ 时，令 $r \geqslant 2$ 为任意整数。则在 X_e 上相对于 ξ 为 Ulrich 的秩为 r 的向量丛 $\mathcal{U}_r$ 的模空间，且其第一陈类

$$c_1(\mathcal{U}_r) = \begin{cases} r\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e - 3) + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}\left(\frac{r-3}{2}, \frac{(r-3)}{2}(b_e - e - 2)\right), & \textit{if } r \textit{ is odd}, \\ r\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}(b_e - e - 2)\right), & \textit{if } r \textit{ is even}. \end{cases}$$

非空，并包含一个维数为 的一般光滑分支 $\mathcal{M}(r)$

$$\dim(\mathcal{M}(r)) = \begin{cases} \left(\frac{(r-3)^2}{4}+2\right)(6b_e-9e-4)+\frac{9}{2}(r-3)(2b_e-3e), & if\ r\ is\ odd, \\ \frac{r^2}{4}(6b_e-9e-4)+1, & if\ r\ is\ even. \end{cases}$$

一般点 $[\mathcal{U}_r] \in \mathcal{M}(r)$ 对应于一个斜率稳定向量丛，其关于 ξ 的斜率为 $\mu(\mathcal{U}_r) = 8b_e - k_e - 12e - 3$。此外，若 $r = 2$，则 $\mathcal{U}_2$ 也具有特殊性。

主定理的证明将由定理 2.1、3.1、3.4、4.9、4.14 和 4.19 的证明汇集而成。

我们想指出，我们的结果并未包含在 [27], 的结果之中，因为其中考虑的非常 ample 极化具有 $\xi+\varphi^*(A)$ 的形式，其中 A 是底曲面上的一个非常 ample 极化（参见 [27, 定理 B 、定理 5.1 、推论 5.17]）。

回顾一下，对于给定的极化簇 X，存在 Ulrich 野性的概念，这一概念是受 [20] 中类似定义的启发而提出的。更准确地说，对于射影簇 $X \subset \mathbb{P}^n$，Ulrich 野性的概念可以有两种定义：

- 代数意义上，也就是说，就簇 X 的齐次坐标环上适当模的函子性行为而言，更精确的细节请参阅 [22, 第 2 节。2]
- 几何意义上，即若它具有任意大维数 r 的族，其中的 Ulrich 向量丛两两不同构且不可分解，参见例如 [20, 引言]。

此外，若 X 在代数意义上是 Ulrich 野的，那么它在几何意义上也是 Ulrich 野的（参见 [22, 注 2.6–(iii)]）。

我们必须指出，本文研究的三维卷曲（X_e，ξ）在代数意义上是 Ulrich 野的（因此，根据上述内容，在几何意义上也同样是 Ulrich 野的），这一结论由[22]中的结果推出。事实上，当 $e = 0$ 时，主定理–(a)中的 Ulrich 线丛 L_1 和 L_2 满足 [22, 定理 A、推论 3.1] 的条件；此外，当 $e > 0$ 时，如定理 3.4 中所述，两个一般的秩 2 Ulrich 向量丛彼此不同构，并满足 [22, 定理 A、推论 3.1]中的相同条件。这些事实表明，对于任意 $e \geqslant 0$，X_e 都是（严格）代数意义上的 Ulrich 野，精确定义见 [22, 定义 2.5]

从这一角度来看，主定理不仅计算了我们所研究的 3 维丛曲面 (X_e, ξ) 的 Ulrich 复杂度，还对任意整数 $e \geqslant 0$ 给出了 (X_e, ξ) 几何上 Ulrich 野性的构造性证明，明确描述了维数和秩均可任意大的两两不同构、不可分解 Ulrich 向量丛族，并进一步说明实际可能出现的秩。事实上，有：

主推论 对任意 $e \geqslant 0$，主定理 (a)-(b)-(c) 中构造的模空间 $\mathcal{M}(r)$ 给出了定义在 (X_e, ξ) 上、维数和秩均可任意大的斜率稳定、两两不同构、不可分解 Ulrich 向量丛的显式族，从而有效证明了这类代数簇具有几何 Ulrich 野性。此外，

(a) 当 $e = 0$ 时，X_0 相对于 ξ 的 Ulrich 复杂度为 $^{uc}\xi(X_0) = 1$，且 X_0 支撑任意秩 $r \geqslant 1$、相对于 ξ 的 Ulrich 向量丛，在 r 上没有空缺；
(b) 对于 $e > 0$，X_e 关于 ξ 的 Ulrich 复杂度为 $^{uc}\xi(X_e) = 2$，且 X_e 支撑关于 ξ 的任意秩 $r \geqslant 2$ 的 Ulrich 向量丛，秩之间没有空缺（ $r = 1$ 除外）。

请注意，上述三维卷曲（X_e, ξ）是 $\mathbb{P}^{n_e}$ 中次数非最小的代数簇，因为它们是 $d_e \neq n_e - 2$（见（2.2））；此外，它们还是 [22, 定义 2.5] 中所述的（严格）Ulrich 野。特别地，这一观察意味着，对于任意 $e \geqslant 0$，上述三维卷曲（X_e, ξ）都能导出一类满足 [22, 猜想 1.] 的代数簇。

作为前述结果的推论，我们还推导出底曲面 $\mathbb{F}_e$ 上向量丛的 Ulrich 性结果，其中所依据的是自然关联的非常 ample 极化，见定理 5.1。其证明直接由主定理、主推论以及

下述自然的一一对应得出：在 X_e 上形如 $\xi\otimes\varphi^*(\mathcal{F})$、相对于 X_e 上的 ξ 为 Ulrich 的秩为 r 的向量丛，与在 $\mathbb{F}_e$ 上形如 $\mathcal{F}(c_1(\mathcal{E}_e))$、相对于 $c_1(\mathcal{E}_e)=3C_e+b_ef$ 为 Ulrich 的秩为 r 的向量丛之间存在一一对应（参见定理 1.7 及下文第 5 节）。

一个尚未解决的问题显然与上述主定理中关于 X_e 上秩为 r 的向量丛的模空间的不可约性有关。

本文由五个章节组成。第 1 节回顾射影簇上 Ulrich 向量丛的一些一般性质，这些内容将在下文中使用；同时也介绍了来自 [1, 9, 10] 的预备知识，以便恰当地定义三维卷曲（X_e、ξ），它们是本文的核心。第 2 节讨论卷曲（X_e、ξ）上的 Ulrich 线丛，参见定理 2.1；第 3 节则聚焦于秩为 2 的情形，使用适当定义的扩张（参见定理 3.1），以及从底空间得到的适当向量丛的拉回（参见定理 1.7 和定理 3.4）。第 4 节通过归纳过程、扩张、变形和模理论，讨论任意秩 $r\geqslant 1$ 的一般情形（参见定理 4.9 和 4.19）。最后，第 5 节讨论前述 Ulrich 性结果——定理 5.1，其中涉及底曲面 $\mathbb{F}_e$ 上秩为 r 的向量丛；这些向量丛经证明相对于 c_1（$\mathcal{E}_e$）是 Ulrich 的。该结果由上述主定理和主推论推出。

致谢。我们谨向 Juan Pons–Llopis 致谢，感谢他指出参考文献 [22]并与我们进行了有益的讨论；向 Antonio Rapagnetta 致谢，感谢他指出参考文献 [19], [31] ，并就下文的断言 3.3 给出了精准的解释和建议。我们也感谢 Daniele Faenzi 提出的一些意见。最后，我们衷心感谢匿名审稿人提交了热情洋溢的报告，报告中充满鼓励，并提出了改进本文表达的重要建议。

记号与术语。全文中我们均在复数域 $\mathbb{C}$ 上工作。所有概形均赋予扎里斯基拓扑。本文所说的簇是指整代数概形。若某性质对簇 V 中某个非空扎里斯基开子集的任意点都成立，则称该性质对 V的一般点成立。我们将交替使用“簇 V 上的秩为 r的向量丛”和“ V上的秩为 r 的局部自由层”这两个术语；特别是对于线丛（即可逆层）的情形 $r=1$，为简化记号且在不致混淆时，我们有时将线丛与卡蒂埃除子等同，并交替使用加法记号而非乘法记号和张量积。因此，若 L 和 M 是V上的线丛，则 L 的对偶记作 $L^\vee$、L^{-1} 或 $-L$；相应地，$M\otimes L^\vee$ 也记作 $M\otimes L^{-1}$ 或简记为 $M-L$。若 $\mathcal{P}$ 是几何对象 $\mathcal{E}$ 的某个平坦族的参数空间（这些对象定义在 V 上，例如向量丛、扩张等），或是按给定等价关系对几何对象进行参数化的模空间，则我们用 $[\mathcal{E}]$表示与几何对象 $\mathcal{E}$ 对应的参数点（或模点）（分别对应于与 $\mathcal{E}$的等价类相关联的模点）。对于本文未另行说明的术语，请参阅 [26]。

1. Preliminaries

我们首先回顾一些关于射影簇上 Ulrich 丛的一般定义 s.

定义 1.1. 设 $X\subset\mathbb{P}^N$ 是一个维数为 n 的光滑簇，并设 H 是 X的一个超平面截面。若向量丛 $\mathcal{U}$ 定义在 X 上，则称其相对于 H 是 Ulrich 丛，当且仅当

$$H^i(X,\mathcal{U}(-jH))=0\quad for\quad i=0,\cdots,n\quad and\quad 1\leqslant j\leqslant\dim X.$$

注 1.2. (i) 若 X 支撑相对于 H 的 Ulrich 丛，则记 $uc_H(X)$，称其为 X 相对于 H的 Ulrich 复杂度，即 X上相对于 H 的 Ulrich 向量丛可能秩中的最小值。

(ii) 若 $\mathcal{U}_1$ 是 X 上关于 H 的 Ulrich 向量丛，则 $\mathcal{U}_2:=\mathcal{U}_1^\vee(K_X+(n+1)H)$ 也是关于 H 的 Ulrich 向量丛。向量丛 $\mathcal{U}_2$ 称为 $\mathcal{U}_1$ 的 Ulrich 对偶。由此可知，若 X 上存在某个秩 r 的 Ulrich 丛，则它们必成对出现。

定义 1.3. 设 $X \subset \mathbb{P}^N$ 是一个维数为 n 、由 H 极化的光滑簇，其中 H 是 X 的一个超平面截面；设 $\mathcal{U}$ 是 X 上的秩2 Ulrich向量丛。若 $c_1(\mathcal{U}) = K_X + (n+1)H$.，则称 $\mathcal{U}$ 为特殊的。

注意，由于定义 1.3 中的 $\mathcal{U}$ 秩为 2，因此 $\mathcal{U}^\vee \cong \mathcal{U}(-c_1(\mathcal{U}))$ 是特殊的，当且仅当 $\mathcal{U}$ 同构于其 Ulrich 对偶丛。

现在我们回顾关于这些丛的（半）稳定性和斜率（半）稳定性的事实（参见 [11, 定义 2.7]）。设 $\mathcal{E}$ 是 X 上的向量丛；回忆一下，若对于每个非零相干子层 $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$，满足 $0 < \mathrm{rk}(\mathcal{F}) := \underline{\text{rank of}}\ \mathcal{F} < \mathrm{rk}(\mathcal{E})$，不等式 $\frac{P_{\mathcal{F}}}{\mathrm{rk}(\mathcal{F})} \leqslant \frac{P_{\mathcal{E}}}{\mathrm{rk}(\mathcal{E})}$ 成立，则称 $\mathcal{E}$ 为半稳定，其中 $P_{\mathcal{F}}$ 和 $P_{\mathcal{E}}$ 是这些层的希尔伯特多项式。此外，若上述严格不等式成立，则称 $\mathcal{E}$ 为稳定。

同样，回忆一下，向量丛 $\mathcal{E}$ 的斜率（相对于 $\mathcal{O}_X(H)$）定义为 $\mu(\mathcal{E}) := \frac{c_1(\mathcal{E})\cdot H^{n-1}}{\mathrm{rk}(\mathcal{E})}$；若对于每个满足 ~~$0 < \mathrm{rk}$~~$(\mathcal{F}) < \mathrm{rk}(\mathcal{E})$ 的非零相干子层 $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$，都有 $\mu(\mathcal{F}) \leqslant \mu(\mathcal{E})$，则称丛 $\mathcal{E}$ 为 μ-半稳定，或称斜率半稳定。若严格不等式成立，则称丛 $\mathcal{E}$ 为 μ-稳定，或称斜率稳定。

这两种（半）稳定性的定义之间的关系如下（例如参见 [11, § 2]）：

斜率稳定性 $\Rightarrow$ 稳定性 $\Rightarrow$半稳定性 $\Rightarrow$斜率半稳定性。

当所讨论的向量丛特别是 Ulrich 向量丛时，有如下更精确的结论：

定理 1.4.（参见 [11, 定理 2.9]）设 $X \subset \mathbb{P}^N$ 是一个维数为 n 的光滑簇，且令H 为 X的一个超平面截面。设 $\mathcal{U}$ 是 X 上的一个秩为r 的向量丛，它相对于H是 Ulrich 的。那么：

(a) $\mathcal{U}$ 是半稳定的，因此也是斜率 -
半稳定的；(b) 若 $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{U} \to \mathcal{G} \to 0$ 是相干层的一个正合列，其中 $\mathcal{G}$ 无挠，且$\mu(\mathcal{F}) = \mu(\mathcal{U})$，那么 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 都是 Ulrich 向量丛。
(c) 如果 $\mathcal{U}$ 是稳定的，那么它也是斜率稳定的。特别地，对于 Ulrich 丛，稳定性和斜率稳定这两个概念是一致的。

我们想指出，在向量丛族中，具有 Ulrich 性质是一个开条件。事实上，如果 $\mathcal{U}$ 是 Ulrich 丛 $\mathcal{F}$ 的一个变形，那么 $\mathcal{U}$ 也是 Ulrich 丛；这是因为根据半连续性，对于 $1 \leqslant j \leqslant \dim X$， $\mathcal{F}(-j)$ 的上同调消失蕴含 $\mathcal{U}(-j)$ 的上同调消失。

我们还想指出，由于 Ulrich 丛是半稳定的，因此任何具有给定秩和陈类的 Ulrich 丛族都是有界族，例如参见 A. Langer [30]。

特别地，如果有界族中的丛是单丛，那么 Casanellas 和 Hartshorne 已证明

命题 1.5.（见 [11, 命题 2.10] 在光滑射影簇 X 上，任何满足 $H^2(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}^\vee) = 0$且具有给定秩和陈类的单丛有界族 $\mathcal{E}$ 都有一个光滑模空间族。

简单向量丛的光滑模空间族的存在性，以及向量丛族中具有 Ulrich 性质是一个开条件这一事实，将帮助我们证明我们所研究的代数簇上存在稳定Ulrich丛。

下文中，我们将关注 n =维数$(X) = 3$；在这种情况下，全文将使用以下记号。

X 是一个三维、光滑、不可约射影簇（或简称三维簇）；$\chi(\mathcal{F}) = \sum_{i=0}^{3}(-1)^i h^i$， $\mathcal{F}$的欧拉示性数，其中 $\mathcal{F}$ 上的任意秩为 $r \geqslant 1$ 的向量丛记作 $\mathcal{F}$；K_X X. 的典范丛。当上下文清楚时，可以省略 X ，因此$K_X = K$；

$c_i = c_i(X)$， X的第 i^{th} 陈类；$d = \deg X = L^3$，由非常 ample 线丛 L 给出的嵌入中 X 的次数；$g = g(X)$，由 $2g-2 = (K+2L)L^2$ 定义的 (X, L) 的截面亏格；若 S 是光滑曲面，则 $\equiv$ 表示 S 上除子的数值等价。

对于未特别说明的术语和记号，我们基本遵循 [26]。

定义 1.6。若一对 (X, L) 中， X 是一个三维簇，且 L 是 X 上的丰沛线丛，则称其为以正规簇 Y 为底的丛曲面，若存在 Y 上的丰沛线丛 M 以及满射态射 $\varphi\colon X \to Y$，其纤维连通，并且 $K_X + (4 - \text{维数 } Y)L = \varphi^*(M)$。

特别地，若 Y是光滑曲面，且 (X, L) 是以 Y 为底的丛曲面，则（见 [7, 命题 14.1.3]） $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E})$, 其中 $\mathcal{E} = \varphi_*(L)$ 是 Y 上的向量丛，而 L 是 $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上的典范线丛。此外，若 $S \in |L|$ 是光滑除子，则（例如见 [7, 定理 11.1.2]） S 是 Y 在 $c_2(\mathcal{E})$ 个点处的膨胀；因此 $\chi(\mathcal{O}_Y) = \chi(\mathcal{O}_S)$ 且

$$d := L^3 = c_1^2(\mathcal{E}) - c_2(\mathcal{E}). \tag{1.1}$$

为方便读者，我们回顾一下， [23, 定理 2.4] 更确切地说，证明了以下结果。

定理 1.7. 设 (Y, H) 是一个极化曲面， H 非常 ample，且设 $\mathcal{E}$ 是 Y 上的秩二向量丛，使得 $\mathcal{E}$ 非常 ample 且由全局截面生成。设 $\mathcal{F}$ 是 Y 上的秩 $r \geqslant 1$ 向量丛。那么，在三维卷曲 $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\pi} Y$ 上，向量丛 $\mathcal{U} := \xi \otimes \pi^*\mathcal{F}$ 关于 ξ 是 Ulrich 向量丛，其中 ξ 表示 X 上的典范线丛，且 $(X, \xi) \cong (\mathbb{P}(\mathcal{E}), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1))$，当且仅当 $\mathcal{F}$ 满足

$$H^i(Y, \mathcal{F}) = 0 \quad and \quad H^i(Y, \mathcal{F}(-c_1(\mathcal{E}))) = 0,\ 0 \leqslant i \leqslant 2. \tag{1.2}$$

特别地，如果 $c_1(\mathcal{E})$ 在 Y 上非常 ample，那么 X 上的秩 r 向量丛 $\mathcal{U} = \xi \otimes \pi^*\mathcal{F}$ 关于 ξ 是 Ulrich 向量丛，当且仅当 Y 上的秩 r 向量丛 $\mathcal{F}(c_1(\mathcal{E}))$ 关于 $c_1(\mathcal{E})$ 是 Ulrich 向量丛。

在本文中，定义 1.6 中丛曲面 X 的底空间 Y 将取为希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_e := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e))$，其中 $e \geqslant 0$ 为整数。

令 $\pi_e\colon \mathbb{F}_e \to \mathbb{P}^1$ 为到底空间的自然投影。则 $\mathrm{Num}(\mathbb{F}_e) = \mathbb{Z}[C_e] \oplus \mathbb{Z}[f]$，其中：

- $f := \pi_e^*(p)$，对任意 $p \in \mathbb{P}^1$ 均成立，而
- C_e 表示以下二者之一：当 $e > 0$ 时，它是对应于 $\mathbb{P}\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)$ 上向量丛 [1] 态射的唯一截面；否则，当 $e = 0$ 时，它是不同于由 f 所诱导的另一条直纹的纤维。

特别地

$$C_e^2 = -e,\ f^2 = 0,\ C_e f = 1.$$

设 $\mathcal{E}_e$ 为 $\mathbb{F}_e$ 上的秩二向量丛，且 $c_i(\mathcal{E}_e)$ 为其 i^{th} 陈类。则 $c_1(\mathcal{E}_e) \equiv aC_e + bf$，其中 a、$b \in \mathbb{Z}$，且 $c_2(\mathcal{E}_e) \in \mathbb{Z}$。对于线丛 $\mathcal{L} \equiv \alpha C_e + \beta f$，我们还将使用记号 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)$。

从现在起，我们考虑以下内容：

假设 1.8。设 $e \geqslant 0$、 b_e、 k_e 为整数，满足

$$b_e - e < k_e < 2b_e - 4e, \tag{1.3}$$

并设 $\mathcal{E}_e$ 是 $\mathbb{F}_e$ 上的秩二向量丛，且

$$c_1(\mathcal{E}_e) \equiv 3C_e + b_e f \ \text{ and } \ c_2(\mathcal{E}_e) = k_e,$$

它属于正合列

$$0 \to A_e \to \mathcal{E}_e \to B_e \to 0, \tag{1.4}$$

其中 A_e 和 B_e 是 $\mathbb{F}_e$ 上的线丛，使得

$$A_e \equiv 2C_e + (2b_e - k_e - 2e)f \ \text{ and } \ B_e \equiv C_e + (k_e - b_e + 2e)f \tag{1.5}$$

由（1.4）可知，特别地，有 $c_1(\mathcal{E}_e) = A_e + B_e$ 和 $c_2(\mathcal{E}_e) = A_eB_e$。

注 1.9. 这里我们解释上述假设及其推论。首先，注意到 (1.3) 中的条件 $b_e - e < k_e$ 确保线丛 B_e 非常 ample（参见 [26,§ V, 命题 2.20]）且非特殊，即 $h^1(B_e) = 0$（参见 [24, 引理 3.2], , 其中计算对情形 $e = 0, 1$ 也成立）。类似地，(1.3) 中的条件 $k_e < 2b_e - 4e$ 意味着 A_e 也非常 ample（参见 [26, § V, 命题 2.20]）且非特殊（参见 [24, 引理 3.9], , 其中计算对情形 $e = 0, 1$ 也成立）。进一步注意，(1.3) 特别给出

$$b_e \geqslant 3e + 1;$$

另一方面，若 $b_e = 3e + 1$，则 (1.3) 将给出

$$2e + 1 < k_e < 2e + 2.$$

因此显然，为了有满足（1.3）的整数 b_e 和 k_e，假设1.8隐含地要求

$$b_e \geqslant 3e + 2, \tag{1.6}$$

这与 T. Fujita 的分类结果 [25,（1.3）引理]相符。

此外，由 [6, 命题2.6，4.2] 以及 A_e的非特殊性可知，任何满足正合列（1.4）的向量丛 $\mathcal{E}_e$ 在 $\mathbb{F}_e$上都是非常 ample 的；也就是说，典范线丛$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)}(1)$在 $\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)$上是非常 ample 的。这与 $\mathcal{E}_e$ 非常 ample 所需的数值条件相符，见 [1, 命题7.2]。

最后我们强调，存在正合列（1.4），其中 A_e、B_e 如（1.5）所示，是一个自然条件；事实上，若考虑非常 ample 的秩二向量丛 $\mathcal{E}_e$，且满足 $c_1(\mathcal{E}_e) \equiv 3C_e + b_ef$，则在任意纤维 f 上，$\mathcal{E}_e$的限制都必须同构于 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$，即 $\mathcal{E}_e$在 [10]和 [3],的意义下是一致的，因此 $\mathcal{E}_e$满足正合列（1.4），其中 A_e 和 B_e 如（1.5）所示（参见 [1, 命题7.2] 和 [10]）。

2. Ulrich line bundles on 3-fold scrolls over $\mathbb{F}_e$

本节中，我们考虑以 $\mathbb{F}_e$ 为底、满足 $e \geqslant 0$ 的三维卷曲，其位于满足假设 1.8 中条件的射影空间内。

因此，设 $\mathcal{E}_e$ 是 $\mathbb{F}_e$ 上的一个非常 ample 的秩二向量丛，使得

$$c_1(\mathcal{E}_e) \equiv 3C_e + b_ef, \ \ c_2(\mathcal{E}_e) = k_e,$$

其中 b_e 和 k_e 是如 (1.3) 中所示的整数。令 $(\mathbb{P}(\mathcal{E}_e), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)}(1))$ 为相应的、以 $\mathbb{F}_e$ 为底的三维簇丛曲面，并令 $\pi_e : \mathbb{F}_e \to \mathbb{P}^1$ 和 $\varphi : \mathbb{P}(\mathcal{E}_e) \to \mathbb{F}_e$ 为通常的投影。于是 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)}(1)$ 给出嵌入

$$\Phi_e := \Phi_{|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)}(1)|} : \mathbb{P}(\mathcal{E}_e) \hookrightarrow X_e \subset \mathbb{P}^{n_e}, \tag{2.1}$$

其中 $X_e = \Phi_e(\mathbb{P}(\mathcal{E}_e))$ 是光滑、非退化的，其次数为 d_e，截面亏格为 g_e，且

$$n_e = 4b_e - k_e - 6e + 4, \ \ d_e = 6b_e - 9e - k_e \ \text{ and } \ g_e = 2b_e - 3e - 2. \tag{2.2}$$

我们设 $(X_e, \xi) \cong (\mathbb{P}(\mathcal{E}_e), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)}(1))$。本节旨在探究 X_e 上是否确实存在关于 ξ 为 Ulrich 的线丛；若存在，则对其进行分类。

定理 2.1. 设 $e \geqslant 0$ 为一个整数，且 (X_e, ξ) 是如上所述的三维卷曲。则 X_e 不支撑任何关于 ξ 为 Ulrich 的线丛，除非 $e = 0$；在此情形下，以下是 X_0 上唯一的 Ulrich 线丛：

(i) $L_1 := \xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2, -1)$ 及其 Ulrich 对偶 $L_2 := \xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1, b_0 - 1)$，其中 $b_0 \geqslant 2$，见 (1.6)；(ii) 对于任意整数 $t \geqslant 1$，$M_1 := 2\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1, -t - 1)$ 及其 Ulrich 对偶$M_2 := \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2, 3t - 1)$，它们仅在 $b_0 = 2t, k_0 = 3t$ 时出现。

注 2.2. 我们想指出，对于任意整数 $t \geqslant 1$，如果在 $\mathbb{F}_0$ 上 $(b_0, k_0) = (2t, 3t)$，那么对于任意固定整数 $t \geqslant 1$，X_0 上恰好有四个不同的 Ulrich 线丛，即 L_1 及其 Ulrich 对偶 L_2、M_1 及其 Ulrich 对偶 M_2。对于不在上述范围内的 $b_0 \geqslant 2$ 的其他取值，我们只有两个 Ulrich 线丛，即 L_1 及其 Ulrich 对偶 L_2。此外，根据定理 1.7，我们注意到，X_0 上的 Ulrich 线丛 L_1 和 L_2 分别与线丛 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(5, b_0 - 1)$ 和 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2, 2b_0 - 1)$ 相关；相对于非常 ample 极化 $c_1(\mathcal{E}_0) = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3, b_0)$，它们分别是 $\mathbb{F}_0$ 上仅有的 Ulrich 线丛（参见 [12,例 2.3], [2, 命题 4.4]）。

证明。（定理 2.1 的证明）设 $\mathcal{L} = a\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)$ 是 X_e 上的 Ulrich 线丛。由 [23,推论 2.2] 可知，$a = 0$，1，2。

情形 I：若 $a = 1$，则根据定理 1.7，$\mathcal{L} = \xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)$ 关于 ξ 是 Ulrich 的，当且仅当

$$H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)) = H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta) - c_1(\mathcal{E}_e)) = 0 \quad \text{for } i = 0, 1, 2.$$

因此 $\chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)) = \chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta) - c_1(\mathcal{E}_e)) = 0$。由黎曼-罗赫定理，我们分别得到，

$$(\alpha + 1)(e\alpha - 2\beta - 2) = 0 \tag{2.3}$$

and

$$(\alpha - 2)(e\alpha - 2\beta + 2b_e - 3e - 2) = 0 \tag{2.4}$$

因此，要么 $\alpha = -1$，这与 (2.4) 一起给出 $\beta = b_e - 2e - 1$；要么 $\alpha = 2$，这与 (2.3) 一起给出 $\beta = e - 1$。我们需要检验，对于 $i \geqslant 0$，$H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)) = H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta) - c_1(\mathcal{E}_e)) = 0$，其中 $(\alpha, \beta) = (-1, b_e - 2e - 1)$ 或 $(\alpha, \beta) = (2, e - 1)$。

若 $e = 0$，则由 Künneth 公式可得这些消失性，因此在第一种情形下得到 $\mathcal{L} = L_2$，而在后一种情形下得到 $\mathcal{L} = L_1$，其中 L_1 和 L_2 与命题中的定义相同。

若 $e > 0$，则上同调群并非全为零，因此在这些情形下不存在满足 $a = 1$ 的 Ulrich 线丛。

情形 II：若 $a = 2$，则根据 [23, 推论 2.2]，($\mathcal{L} = 2\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}, \alpha, \beta)$ 关于 ξ 是 Ulrich 的充要条件是

$$H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)) = H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{E}_e(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta))) = 0 \quad \text{for } i = 0, 1, 2.$$

T因此 $\chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)) = \chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{E}_e(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta))) = 0$。由黎曼-罗赫定理可得 (2.3) an d

$$-e\alpha^2 + 2\alpha\beta + \alpha b_e - 4e\alpha + 2\alpha + 5\beta + 4b_e - 6e - k_e + 5 = 0, \tag{2.5}$$

分别。由 (2.3) 可得 $\alpha = -1$ 或 $\beta = \frac{\alpha e}{2} - 1$.

情形 II-a： $\alpha = -1$。将此值代入 (2.5)，得到 $\beta = -b_e + e + \frac{k_e}{3} - 1$，这迫使 $k_e = 3t$，其中某个 $t \in \mathbb{Z}$，因此 $\beta = -b_e + e + t - 1$。对于 $i = 0$、1、2，我们计算 $H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)) = H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, -b_e + e + t - 1))$ 和 $H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{E}_e(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, -b_e + e + t - 1)))$。

现在，对于 $i \geqslant 0$，有 $R^i\pi_{e*}(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, -b_e + e + t - 1)) = 0$，因此根据 Leray 同构，对于 $i = 0$、1、2，我们有 $H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, -b_e + e + t - 1)) \cong H^i(\mathbb{P}^1, 0) = 0$。

为计算 $H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{E}_e(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, -b_e + e + t - 1)))$，我们回顾一下，向量丛 $\mathcal{E}_e$ 位于正合列 (1.4) 中，其中 $A_e \in |\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(2, 2b_e - k_e - 2e)|$ 和 $B_e \in |\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, k_e - b_e + 2e)|$，并且在对 (1.4) 施加 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, -b_e + e + t - 1)$ 扭转后，我们得到

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - 2t - e - 1) \to \mathcal{E}_e(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, -b_e + e + t - 1)) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 4t - 2b_e + 3e - 1) \to 0. \tag{2.6}$$

Now

$$R^i\pi_{e*}\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - 2t - e - 1) = 0, \quad \text{for } i > 0, \text{ and}$$
$$\pi_{e*}\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - 2t - e - 1) \cong (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_e - 2t - e - 1),$$

因此，由 Leray 同构可得

$$\begin{aligned} H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - 2t - e - 1)) &\cong H^i(\mathbb{P}^1, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e))(b_e - 2t - e - 1)) \\ &= H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_e - 2t - e - 1)) \oplus H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_e - 2t - 2e - 1)) \end{aligned} \tag{2.7}$$

类似地

$$H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 4t-2b_e+3e-1)) \cong H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_e+3e-1)) \tag{2.8}$$

我们先考虑 $e=0$ 的情形，然后考虑 $e \geqslant 1$ 的情形。

若 $e=0$，则 (2.7) 和 (2.8) 变为

$$H^i(\mathbb{F}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1, b_0-2t-1)) = H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_0-2t-1)^{\oplus 2})$$

$$H^i(\mathbb{F}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(0, 4t-2b_0-1)) = H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_0-1))$$

若 $b_0-2t-1 \geqslant 0$，则

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_0-2t-1)^{\oplus 2}) &= 2(b_0-2t) \\ h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_0-2t-1)^{\oplus 2}) &= 0, \quad \text{by Serre's duality on } \mathbb{P}^1. \end{aligned}$$

注意，若 $b_0-2t-1 \geqslant 0$，则 $4t-2b_0-1 \leqslant -3$，因此 $h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_0-1)) = 0$，并且根据 Serre 对偶，$h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_0-1)) \cong h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2b_0-4t-1)) = 2b_0-4t$.

这些计算以及与 (2.6) 相关的上同调序列给出

$$\begin{aligned} h^i(\mathcal{E}_0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1, -b_0+t-1))) &= 2b_0-4t \geqslant 2 \,(\text{by assumption}), \text{ for } i=0,1, \\ h^2(\mathcal{E}_0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1, -b_0+t-1))) &= 0, \text{ trivially.} \end{aligned}$$

若 $b_0-2t-1<0$ 则

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_0-2t-1)^{\oplus 2}) &= 0 \\ h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_0-2t-1)^{\oplus 2}) &\cong 2h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2t-b_0-1)), \quad \text{by Serre's duality on } \mathbb{P}^1. \end{aligned}$$

Note that

$$h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2t-b_0-1)) = \begin{cases} 0 & \text{if } b_0 = 2t \\ 2t-b_0 & \text{if } 2t-b_0-1 \geqslant 0. \end{cases}$$

还注意到，$b_0-2t-1<0$ 蕴含 $4t-2b_0-1 \geqslant -2$，因此若 $4t-2b_0-1 \geqslant 0$，$h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_0-1)) = 4t-2b_0$ 且 $h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_0-1)) = 0$；若 $4t-2b_0-1=-1$，$h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_0-1)) = h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_0-1)) = 0$；若 $4t-2b_0-1=-2$，$h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_0-1)) = 0$ 且 $h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_0-1)) = 1$。这些事实连同 (2.6) 式表明

$$\begin{aligned} &h^i(\mathcal{E}_0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1, -b_0+t-1))) = 0, \text{ for } i=0,1,2, \quad \text{if } b_0 = 2t, \\ &h^0(\mathcal{E}_0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1, -b_0+t-1))) \neq 0, \text{ in the remaining two cases,} \end{aligned}$$

后一种情况成立，是因为否则由与 (2.6) 相关的上同调序列可推出 $h^1(\mathcal{E}_0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1, -b_0+t-1))) < 0$，这是不可能的。因此，我们只剩下 $b_0 = 2t$、$k_0 = 3t$ 这几种情况，其中 $t \geqslant 1$，这由 (1.3) 和 (1.6) 可知。因此在此情况下，我们得到 $\mathcal{L} = M_1$ 是 Ulrich 且其 Ulrich 对偶为 M_2。

若 $e \geqslant 1$ 为了计算 (2.7) 和 (2.8) 中的上同调群，我们首先考虑 $b_e-2t-2e-1 \geqslant 0.$ 的情形。注意到在此情况下还有 $b_e-2t-e-1 \geqslant 0$，因此在 (2.7) 中我们有

$$h^0(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e-2t-e-1)) = h^0(\mathbb{P}^1, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e))(b_e-2t-e-1))$$
$$= 2b_e-4t-3e, \quad h^1(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e-2t-e-1)) = h^1(\mathbb{P}^1, (\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e))(b_e-2t-e-1))$$
$$= 0.$$

至于 (2.8)，注意到根据假设有 $4t-2b_e+3e-1 \leqslant -3-e$，因此

$$\begin{aligned} H^0(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 4t-2b_e+3e-1)) &\cong H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_e+3e-1)) = 0 \quad \text{and} \\ h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4t-2b_e+3e-1))) &= h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2b_e-4t-3e-1))) = 2b_e-4t-3e. \end{aligned}$$

由与 (2.6) 相关联的上同调正合列可知

$$\begin{aligned} h^0(\mathcal{E}_e(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, -b_e+e+t-1))) &= h^1(\mathcal{E}_e(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, -b_e+e+t-1))) \\ &= 2b_e-4t-3e \geqslant 2+e, \end{aligned}$$

因为 $4t-2b_e+3e-1 \leqslant -3-e$。

如果 $b_e-2t-e-1\geqslant 0$和 $b_e-2t-2e-1<0$（情形 $b_e-2t-2e-1\geqslant 0$刚刚已经处理过），那么

$$\begin{aligned} h^0(\mathbb{F}_e,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1,b_e-2t-e-1)) &= h^0(\mathbb{P}^1,(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-e))(b_e-2t-e-1)) \\ &= b_e-2t-e\geqslant 1. \end{aligned}$$

Thus $h^0(\mathcal{E}_e(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1,-b_e+e+t-1))\geqslant h^0(\mathbb{F}_e,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1,b_e-2t-e-1))=b_e-2t-e\geqslant 1$.

情形 II-b：$\beta=\frac{\alpha e}{2}-1$. 将此值代入 (2.5)，得到

$$\alpha=\frac{-8b_e+12e+2k_e}{2b_e-3e} \tag{2.9}$$

这意味着

$$(\alpha+4)(2b_e-3e)=2k_e.$$

由 (1.3) 和 (1.6)，得到 $2b_e-3e\geqslant 3e+4\geqslant 2$和 $k_e>b_e-e\geqslant 2e+2$。因此 $\alpha+4>0$，即 $\alpha\geqslant -3$。注意，如果 $\alpha=-3$，则由 (2.9) 得到 $b_e=\frac{3}{2}e+k_e=\frac{1}{2}e+e+k_e>\frac{1}{2}e+b_e$，根据 (1.3)，这产生矛盾。因此 $\alpha\geqslant -2$，从而由 (2.9) 可得 $k_e\geqslant 2b_e-3e$，这与 (1.3) 中的条件 $k_e<2b_e-4e$ 矛盾。

证明完成，因为情形 $a=0$ 是情形 $a=2$的 Ulrich 对偶。 □

3. Rank-2 Ulrich vector bundles on 3-fold scrolls over $\mathbb{F}_e$

与上一节一样，我们考虑满足假设 1.8 中条件的三维卷曲 (X_e,ξ)，其中 $e\geqslant 0$。我们的目标是证明此类三维卷曲上存在一些秩 2 Ulrich 向量丛的模空间，并研究其基本性质。为统一记号，下文中 F 始终表示自然卷曲映射$\varphi:X_e\cong\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)\to\mathbb{F}_e$的纤维。

3.1. $\mathbb{F}_0$上的三维卷曲上的秩 2 Ulrich 向量丛。

由定理 2.1 可知，X_0 上存在 Ulrich 线丛。利用这些线丛，我们将构造由它们的非平凡扩张得到的秩二 Ulrich 向量丛。

情形 L：设 L_1 和 L_2 是 X_0 上的线丛，如定理 2.1-(i) 所述。注意，

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^1(L_2,L_1) &\cong H^1(X_0,L_1-L_2)=H^1(X_0,\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3,-b_0))\cong H^1(\mathbb{F}_0,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3,-b_0)) \\ &\cong H^1(\mathbb{P}^1,S^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})(-b_0))\cong H^1(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 4}(-b_0))\cong H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 4}(b_0-2)). \end{aligned}$$

因此 $\dim\operatorname{Ext}^1(L_2,L_1)=4b_0-4\geqslant 4$，由于 $b_0\geqslant 2$（见 (1.6)），所以存在非平凡扩张 $\mathcal{F}_1$

$$0\to L_1\to\mathcal{F}_1\to L_2\to 0 \tag{3.1}$$

L_2 被 L_1扩张。同理，

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^1(L_1,L_2) &\cong H^1(X_0,L_2-L_1)=H^1(X_0,\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3,b_0))\cong H^1(\mathbb{F}_0,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3,b_0)) \\ &\cong H^1(\mathbb{F}_0,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,-2-b_0))\cong H^1(\mathbb{P}^1,(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})(-2-b_0)) \\ &\cong H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}(b_0)). \end{aligned}$$

因此 $\dim\operatorname{Ext}^1(L_1,L_2)=2b_0+2\geqslant 6$，故存在非平凡扩张 $\mathcal{F}_1'$

$$0\to L_2\to\mathcal{F}_1'\to L_1\to 0 \tag{3.2}$$

L_1 被 L_2扩张。注意，向量丛 $\mathcal{F}_1$和 $\mathcal{F}_1'$都是秩二向量丛，且相对于 ξ 是 Ulrich 向量丛，并且

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{F}_1)=c_1(\mathcal{F}_1')=2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,b_0-2)\ \text{ and} \\ c_2(\mathcal{F}_1)=c_2(\mathcal{F}_1')=\xi\cdot\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(4,2b_0-2)+(2b_0-k_0-1)F. \end{aligned}$$

此外，由于 L_1 和 L_2 是不互相同构且具有相同斜率的线丛

$$\mu(L_1)=\mu(L_2)=8b_0-k_0-3$$

关于 ξ，根据 [11, 引理 4.2]，$\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_1'$ 是简单向量丛，尤其是不可分解的。

扩张族 (3.1) 的维数为 $4b_0-4$，而 (3.2) 中的扩张族维数为 $2b_0+2$；除非 $b_0=3$，否则它们是不同的正整数。

Case M：设 M_1 和 M_2 是 X_0 上如定理 2.1-(ii) 中所述的线丛。与上文一样，我们计算 es

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1(M_2,M_1) &\cong H^1(X_0,M_1-M_2)=H^1(X_0,2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3,-4t))\\ &\cong H^1(\mathbb{F}_0,S^2(\mathcal{E}_0)(-3,-4t)),\end{aligned}$$

因此，我们需要计算 $H^1(\mathbb{F}_0,S^2(\mathcal{E}_0)(-3,-4t))$，其中 $S^2(\mathcal{E}_0)$ 表示 $\mathcal{E}_0$ 的二次对称幂。向量丛 $\mathcal{E}_0$ 属于正合列 (1.4)，其中 A_0 和 B_0 如 (1.5) 中所述，且 $b_0=2t$ 和 $k_0=3t$, $t\geqslant 1$。根据 [26, 5.16.(c)，第 127]，页，存在 $S^2(\mathcal{E}_0)$ 的一个有限滤过，

$$S^2(\mathcal{E}_0)=F^0\supseteq F^1\supseteq F^2\supseteq F^3=0$$

带有商

$$F^p/F^{p+1}\cong S^p(A_0)\otimes S^{2-p}(B_0),$$

对每个 $0\leqslant p\leqslant 2$。因此

$$F^0/F^1\cong S^0(A_e)\otimes S^2(B_0)=2B_0$$

$$F^1/F^2\cong S^1(A_0)\otimes S^1(B_0)=A_0+B_0$$

$$F^2/F^3\cong S^2(A_0)\otimes S^0(B_0)=2A_0,\ \text{that is } F^2=2A_0,$$

由于 $F^3=0$。于是，我们得到以下正合列

$$0\to F^1\to S^2(\mathcal{E}_0)\to 2B_0\to 0 \tag{3.3}$$

$$0\to F^2\to F^1\to A_0+B_0\to 0 \tag{3.4}$$

$$F^2=2A_0 \tag{3.5}$$

将 (3.3)、(3.4) 用 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3,-4t)$ 扭转，并利用 (3.5)，得到

$$0\to F^1(-3,-4t)\to S^2(\mathcal{E}_0)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3,-4t)\to\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1,-2t)\to 0 \tag{3.6}$$

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,-2t)\to F^1\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3,-4t)\to\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(0,-2t)\to 0 \tag{3.7}$$

首先关注 (3.7)；有 $h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,-2t))=h^i(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2t)^{\oplus 2})$，因此，基于维数考虑，任意 $i\geqslant 2$ 都有 $h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,-2t))=0$。由于 $t\geqslant 1$, $h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,-2t))=0$ 以及 $h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,-2t))=4t-2$。类似地

$$h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(0,-2t))=h^i(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2t))$$

因此，对任意 $i\geqslant 2$，有 $h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(0,-2t))=0$，$h^0(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(0,-2t))=0$ 且 $h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(0,-2t))=2t-1$，于是 (3.7) 给出

$$h^1(F^1(-3,-4t))=6t-3,\quad h^i(F^1(-3,-4t))=0,\ \text{for } i=0,2.$$

代入 (3.6) 可得，对于任意 $i\geqslant 0$，$h^i(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1,-2t))=0$。结合 (3.8) 和 (3.6)，得到

$$\begin{aligned}h^1(2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3,-4t)) &= h^1(\mathbb{F}_0,S^2(\mathcal{E}_0(-3,-4t))=6t-3=3b_0-3,\\ h^i(2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3,-4t)) &= h^i(\mathbb{F}_0,S^2(\mathcal{E}_0)(-3,-4t))=0,\quad \text{for } i=0,2,3.\end{aligned} \tag{3.8}$$

因此，$\dim(\mathrm{Ext}^1(M_2,M_1))=3b_0-3\geqslant 3$，因为 $b_0\geqslant 2$（见 (1.6)）。于是存在非平凡扩张 $\mathcal{F}_2$

$$0\to M_1\to\mathcal{F}_2\to M_2\to 0 \tag{3.9}$$

由 M_2 经 M_1得到。同理，

$$\begin{aligned}\operatorname{Ext}^1(M_1,M_2) &\cong H^1(\mathbb{P}(\mathcal{E}_0),M_2-M_1)=H^1(-2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3,4t))\\ &\cong H^2(\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-2,-b_0-2))\cong H^2(\mathbb{F}_0,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-2,-b_0-2))\\ &\cong H^0(\mathbb{F}_0,\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(0,b_0))\cong H^0(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_0)).\end{aligned}$$

因此，维数$(\operatorname{Ext}^1(M_1,M_2))=b_0+1\geqslant 3$，所以存在非平凡扩张 $\mathcal{F}_2'$

$$0\to M_2\to\mathcal{F}_2'\to M_1\to 0 \tag{3.10}$$

由 M_1 通过 M_2得到。注意，向量丛 $\mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_2'$ 都是 Ulrich 秩二向量丛，且

$$c_1(\mathcal{F}_2)=c_1(\mathcal{F}_2')=2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,2t-2)\ \text{ and }\ c_2(\mathcal{F}_2)=c_2(\mathcal{F}_2')=\xi\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(4,6t-2)-(5t+1)$$

此外，由于 M_1 和 M_2 是斜率相同且不同构的线丛（相对于 ξ）

$$\mu(M_1)=\mu(M_2)=13t-3,$$

因此，根据 [11, 引理 4.2]， $\mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_2'$ 是简单向量丛，特别是不可分解的。扩张 (3.1) 族的维数为 $3b_0-3$，而 (3.2) 中的扩张族维数为b_0+1；除非 $b_0=2$，这两个维数是不同的正整数。

L-M 情形：如果我们考虑使用类型为 L_i和 M_j的两个线丛进行扩张，其中 i,j =1,2，可以容易地看出，其中一些扩张是平凡扩张，具体如下：

$\operatorname{Ext}^1(M_1,L_1)\cong H^1(X_0,L_1-M_1)=H^1(X_0,-\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3,t))\cong H^1(\mathbb{F}_0,0)=0$, $\operatorname{Ext}^1(L_1,M_2)\cong H^1(X_0,M_2-L_1)=H^1(X_0,-\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(0,3t))\cong H^1(\mathbb{F}_0,0)=0$, $\operatorname{Ext}^1(M_1,L_2)\cong H^1(X_0,L_2-M_1)=H^1(X_0,-\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(0,3t))\cong H\cong H^1(\mathbb{F}_0,0)=0$, $\operatorname{Ext}^1(L_2,M_2)\cong H^1(X_0,M_2-L_2)=H^1(X_0,-\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3,3t-b_0)\cong H^1(\mathbb{F}_0,0)=0.$

On t相反，在其余可能情形中，我们得到非平凡扩张，而且恰好 y:

$$\operatorname{Ext}^1(L_1,M_1)\cong H^1(X_0,M_1-L_1)=H^1(X_0,\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3,-t))\cong H^1(\mathbb{F}_0,\mathcal{E}_0(-3,-t));$$

经过简单计算可得，$\dim(\operatorname{Ext}^1(L_1,M_1))=1$，因此存在非平凡扩张 $\mathcal{F}_3$使得 $c_1(\mathcal{F}_3)=3\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,-t-2)$ 且 $c_2(\mathcal{F}_3)=\xi\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}9,3t-3)-(8t+1)F$。

$\operatorname{Ext}^1(M_2,L_1)\cong H^1(X_0,L_1-M_2)=H^1(X_0,\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(0,-3t))\sim H^1(\mathbb{F}_0,\mathcal{E}_0(0,-t))$; 在这种情况下，维数 $\operatorname{Ext}^1(M_2,L_1)=5b_0-5\geqslant 5$，因此存在非平凡扩张 $\mathcal{F}_4$（因为 $b_0\geqslant 2$，由 (1.6) 可知），使得 $c_1(\mathcal{F}_4)=\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(4,3t-2)$ 且 $c_2(\mathcal{F}_4)=\xi\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2,3t-1)+(6t-4)F$。

$\operatorname{Ext}^1(L_2,M_1)\cong H^1(X_0,M_1-L_2)=H^1(X_0,\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(0,-3t))\cong H^1(\mathbb{F}_0,\mathcal{E}_0(0,-t))$，因此，维数 $\operatorname{Ext}^1(L_2,M_1)=5b_0-5\geqslant 5$，从而存在非平凡扩张 $\mathcal{F}_5$，满足 $c_1(\mathcal{F}_5)=3\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-2,t-2)$ 且 $c_2(\mathcal{F}_5)=\xi\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3,7t-3)+(2-7t)F$。

$\operatorname{Ext}^1(M_2,L_2)\cong H^1(X_0,L_2-M_2)=H^1(X_0,\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3,-t))\cong H^1(\mathbb{F}_0,\mathcal{E}_0(-3,-t))\cong\mathbb{C}$；因此存在非平凡扩张 $\mathcal{F}_6$ with $c_1(\mathcal{F}_6)=\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,5t-2)$ 和 $c_2(\mathcal{F}_6)=\xi\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2,3t-1)+(t-1)F$。

先前的计算表明，存在属于不同模空间的 Ulrich秩2向量丛，因为它们的陈类不同。

如引言中所述，本文旨在对上述任意 $e\geqslant 0$ 的三维丛曲面 (X_e,ξ) 的 Ulrich 野性给出有效证明，明确展示具有无穷多个秩的不可分解Ulrich向量丛的模空间的不可约分支，并给出主定理和主推论中的全部细节，即 X_e 的 Ulrich 复杂性、模分支的一般光滑性与维数，等等。

基于这些原因，在下文中我们将只关注类型 (3.1) 的扩张。特别地，我们将在此证明以下定理。

定理 3.1. 设 $(X_0,\xi) \cong (\mathbb{P}(\mathcal{E}_0),\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_0)}(1))$ 是一个以 $\mathbb{F}_0$ 为底的三维簇丛曲面，其中 $\mathcal{E}_0$ 如假设 1.8 所述。设 $\varphi: X_0 \to \mathbb{F}_0$ 为卷曲映射， F 为 φ-纤维。那么，在 X_0 上关于 ξ 为 Ulrich 丛且陈类为

$$c_1(\mathcal{U}) = 2\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1, b_0 - 2) \text{ and } c_2(\mathcal{U}) = \xi \cdot \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(4, 2b_0 - 2) + (2b_0 - k_0 - 1)F, \tag{3.11}$$

的秩 2 向量丛的模空间非空，且包含一个维数为 $\mathcal{M}$ 的一般光滑分支

$$\dim(\mathcal{M}) = 6b_0 - 3,$$

其一般点 $[\mathcal{U}]$ 对应于一个特殊的斜率稳定向量丛，其斜率为

$$\mu(\mathcal{U}) = 8b_0 - k_0 - 3, \tag{3.12}$$

关于 ξ，且其中 $b_0 \geqslant 2$ 由 (1.6) 给出。

证明. 我们考虑情形 L 中的非平凡扩张 (3.1)；回顾一下，$\dim \mathrm{Ext}^1(L_2, L_1) = 4b_0 - 4 \geqslant 4$，因为其为 $b_0 \geqslant 2$，此外，由 (3.1) 中的一般扩张得到的一般向量丛 $\mathcal{F}_1$ 关于 ξ 为 Ulrich 丛。

此外，由于在 § 3.1-情形 L 中计算得 $\mu(L_1) = \mu(L_2) = 8b_0 - k_0 - 3$，可得$\mu(\mathcal{F}_1) = 8b_0 - k_0 - 3$；并且，由于 L_1 和 L_2 是斜率稳定、斜率相同且互不同构的线丛，根据 [11, 引理 4.2]， $\mathcal{F}_1$ 是单纯的，即 $h^0(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee) = 1$，因此它是不可分解的。

现在我们要证明 $h^2(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee) = 0 = h^3(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee)$，并且 $\chi(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee) = -6b_0 + 3$。将 (3.1) 张量化 $\mathcal{F}_1^\vee$，得到

$$0 \to L_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee \to \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee \to L_2 \otimes \mathcal{F}_1^\vee \to 0. \tag{3.13}$$

对偶化 (3.1) 得到以下正合列

$$0 \to L_2^\vee \to \mathcal{F}_1^\vee \to L_1^\vee \to 0 \tag{3.14}$$

分别将 (3.14) 与 L_1 和 L_2 张量化，得到

$$0 \to L_2^\vee \otimes L_1 (= \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3, -b_0)) \to L_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee \to \mathcal{O}_{X_0} \to 0 \tag{3.15}$$

$$0 \to \mathcal{O}_{X_0} \to L_2 \otimes \mathcal{F}_1^\vee \to L_2 \otimes L_1^\vee (= \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3, b_0)) \to 0 \tag{3.16}$$

由于 $\mathcal{F}_1$ 是单纯的，因此 $h^0(X, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee) = 1$。剩余的上同调 $H^i(X, \mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee)$ 可以很容易地由与（3.15）和（3.16）相关的上同调序列计算得到。显然，当 $i \geqslant 1$ 且 $h^0(\mathcal{O}_{X_0}) = 1$ 时，$h^i(\mathcal{O}_{X_0}) = 0$。还需计算 $H^i(\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3, -b_0))$ 和 $H^i(\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3, b_0))$。

$$\begin{aligned} H^i(X_0, \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3, -b_0)) &\cong H^i(\mathbb{F}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3, -b_0)) \cong H^i(\mathbb{P}^1, S^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})(-b_0)) \\ H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}^{\oplus 4}(-b_0)) &= \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0, 2, 3 \\ 4b_0 - 4 & \text{if } i = 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.17}$$

类似地

$$\begin{aligned} H^i(X, \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3, b_0)) &\cong H^i(\mathbb{F}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-3, b_0)) \cong H^{2-i}((\mathbb{F}_0, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1, -2 - b_0)) \\ H^{2-i}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2}(-2 - b_0)) &= \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0, 2, 3 \\ 2b_0 + 2 & \text{if } i = 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{3.18}$$

因此可得 $h^2(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee) = 0 = h^3(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee)$。由（3.13）可知

$$\chi(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee) = \chi(L_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee) + \chi(L_2 \otimes \mathcal{F}_1^\vee) = -6b_0 + 4.$$

由于 $\mathcal{F}_1$ 是单纯的，且 $h^2(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee) = 0$，根据 [11, 命题 2.10]，存在一个包含点 $[\mathcal{F}_1]$的光滑模空间族。此外，由于 $\mathcal{F}_1$ 是 Ulrich 丛，其陈类为

$$c_1(\mathcal{F}_1) = 2\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1, b_0 - 2) \text{ and } c_2(\mathcal{F}_1) = \xi \cdot \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(4, 2b_0 - 2) + (2b_0 - k_0 - 1)F,$$

如 §3.1–情形 L 中的计算所示，$[\mathcal{F}_1]$ 所属的光滑模空间族的一般点 $[\mathcal{U}]$ 对应于一个具有与上述相同陈类的 Ulrich 秩二向量丛，即如 (3.11) 所示；这是因为 Ulrich 性是一个开条件（由半连续性可知），而陈类在不可约族中是不变量。

我们要证明，$\mathcal{U}$关于 ξ 也是斜率稳定的。根据定理 1.4–(b)（另见 $[5,$ 第 3 节，(3.2)$]$），如果 $\mathcal{U}$ 不是稳定丛，它就可表示为 X_0 上 Ulrich 线丛的扩张。在这种情况下，根据定理 2.1 给出的 Ulrich 线丛分类，以及 § 3.1 的情形 M 或 L-M 情形中计算出的所有可能扩张，出于陈类方面的原因，我们可知，$\mathcal{U}$ 若作为 Ulrich 线丛的扩张出现，唯一的可能性应为扩张 (3.1) 或 (3.2)。在这两种情况下，相应扩张族的（射影化）维数分别为 $4b_0-5$ 或 $2b_0+1$。另一方面，根据光滑模空间族上的半连续性，可得

$$h^j(\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}^\vee)=h^j(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_1^\vee)=0,\ 2\leqslant j\leqslant 3,\ \text{and } h^0(\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}^\vee)=h^0(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_1^\vee)=1,$$

thus

$$h^1(\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}^\vee)=1-\chi(\mathcal{U}\otimes\mathcal{U}^\vee)=1-\chi(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_1^\vee)=h^1(\mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_1^\vee)=6b_0-3,$$

如上所计算。换言之，一般点为 $[\mathcal{U}]$ 的光滑模空间族维数为 $6b_0-3$，对于任意 $b_0\geqslant 2$，都大于 $4b_0-5$ 和 $2b_0+1$。这表明 $[\mathcal{U}]$ 一般对应于一个稳定丛，因而也是斜率稳定丛（参见上文定理 1.4-(c)）。

由 $\mathcal{U}$ 的斜率稳定性可知，具有 (3.11) 中陈类的秩二 Ulrich 丛的模空间非空，且包含一个维数为 $6b_0-3$ 的一般光滑分支 $\mathcal{M}$；其一般点 $[\mathcal{U}]\in\mathcal{M}$ 也斜率稳定，并且相对于 ξ 的斜率为 $\mu(\mathcal{U})=\frac{c_1(\mathcal{U})\cdot\xi^2}{2}=8b_0-k_0-3$，因为 $c_1(\mathcal{U})=c_1(\mathcal{F}_1)$。

最后，注意到

$$\begin{aligned}K_{X_0}+4\xi &= -2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-2,-2)+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3,b_0)+4\xi=2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,b_0-2)\\ &= c_1(\mathcal{F}_1)=c_1(\mathcal{U}).\end{aligned}$$

这一点结合 $\mathcal{U}$ 的秩为二这一事实，得到

$$\mathcal{U}^\vee\cong\mathcal{U}(-c_1(\mathcal{U}))=\mathcal{U}(-K_{X_0}-4\xi),$$

也就是说，$\mathcal{U}^\vee(K_{X_0}+4\xi)\cong\mathcal{U}$ 换言之，$\mathcal{U}$ 同构于其 Ulrich 对偶丛，即 $\mathcal{U}$是特殊的，正如所述。□

特别地，若令 $b_0=3$，则由定理 3.1 得到

$$c_1(\mathcal{U})=2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,1),\ \dim(\mathcal{M})=15\text{ and }\mu(\mathcal{U})=21-k_0,$$

这与 $[23,$ 命题 5.7$]$ 中针对 $k_0=7$、8、9、10 得到的结果相同。

注 3.2。除了定理 3.1 之前陈述的理由外，以下其他动机也解释了为何先前的结果聚焦于由扩张（或其变形）得到的秩二 Ulrich 丛，如 (3.1) 所示。

(i) 首先，定理 2.1 表明，Ulrich 线丛 M_1 和 M_2 是偶发的，即它们仅在某个整数 $t\geqslant 1$ 满足 $(b_0,k_0)=(2t,3t)$ 时存在；因此，情形 M 和 L-M 情形中的扩张也具有 § 3.1 所述的同样偶发性。此外，这类扩张产生不同模空间的不可约分支，因为在任何情形下，其陈类都与 (3.11) 中的陈类不同。
(ii) 关于情形 L 中的扩张 (3.1) 和 (3.2)，我们有以下结论：

断言 3.3. 由 (3.1) 中的非平凡扩张 $\mathcal{F}_1$得到的丛的变形，以及由 (3.2) 中的非平凡扩张 $\mathcal{F}_1'$得到的丛的变形，会产生与定理 3.1 中相同的模分支$\mathcal{M}$ 。

为了证明该断言，我们受益于 A. Rapagnetta 提供的有益讨论和参考建议，并对此向他表示感谢。

一般来说，回顾一下，在光滑射影簇 X 上，给定秩和陈类的半稳定丛的模空间 $\mathcal{M}$，是将适当的 Quot 概形 $\mathcal{Q}$ 的开子概形 $\mathcal{R}$ 对群 $G = \mathrm{PGL}(k, \mathbb{C})$ 的作用取几何不变量理论商构造而成，其中 $k >> 0$ 是适当的整数（例如参见 [28, 第 4 节.3]）。这里我们着重讨论秩二情形。

若记 $\pi: \mathcal{R} \to \mathcal{M}$ 为商映射，且 $\rho \in \mathcal{R}$ 是一个闭点，则 $\pi(\rho) \in \mathcal{M}$ 是闭点，当且仅当 G-轨道 $G \cdot \rho$（沿用 [19] 中 G 的左作用记号）在 $\mathcal{R}$ 中是闭的；这又当且仅当 X 上对应的商丛 $\mathcal{F}_\rho$ 是多稳定的，即它要么是稳定的（此时 $Aut(\mathcal{F}_\rho) \cong \mathbb{C}^*$），要么是（严格）多稳定的，形式为 $\mathcal{F}_\rho = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$，也就是说 $\mathcal{F}_\rho$ 可分解，且两个线丛 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 不同构但具有相同的希尔伯特多项式（此时 $Aut(\mathcal{F}_\rho) \cong \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$），或者是（严格）多稳定的，形式为 $\mathcal{F}_\rho = \mathcal{L}^{\oplus 2}$（此时 $Aut(\mathcal{F}_\rho) \cong \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$）。

若 $\mathcal{F}_\rho$ 是半稳定但非多稳定的（例如，像 (3.1) 中的任意非平凡扩张），则 $\mathcal{F}_\rho$ 是两个希尔伯特多项式相同的线丛 $\mathcal{L}_1$ 和 $\mathcal{L}_2$ 的非平凡扩张，而 $\mathcal{F}_\rho$ 的 Jordan-H¨older 分次对象为 $gr^{JH}(\mathcal{F}_\rho) = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2$，因此它是（严格）多稳定的；相应的点 $\pi(\rho) \in \mathcal{M}$ 由类 $[\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2]$ 表示。也就是说，$\mathcal{M}$ 中的闭点与半稳定丛的 S-等价类一一对应（参见 [28, 定义 1.5.3 和引理 4.1.2]）。

若 $\rho \in \mathcal{R}$ 是一个点，其对应的向量丛 $\mathcal{F}_\rho$ 在 X 上是多稳定的，即轨道 $G \cdot \rho$ 在 $\mathcal{R}$ 中是闭的，并且 $\mathcal{R}$ 在 $\rho \in \mathcal{R}$ 附近局部（在解析拓扑中）不可约，那么 $\mathcal{M}$ 在 $\pi(\rho) \in \mathcal{M}$ 附近也局部（在解析拓扑中）不可约。事实上，由于 G 是一个连通群，G 的作用保持 $\mathcal{R}$ 的不可约分支；此外，根据 GIT 作用，若点 $\rho' \in \mathcal{R}$ 属于 $\mathcal{R}$ 中点 $\rho'' \in \mathcal{R}$ 的 G-轨道 $G \cdot \rho''$ 的闭包 $\overline{G \cdot \rho''}$，则 $G \cdot \rho' \subseteq \overline{G \cdot \rho''}$。

断言 3.3 的证明。沿用上述预备知识，取 $X = X_0$，并将 $\rho_{1,\,2} \in \mathcal{R}$ 记作 § 3.1-情形 L 中与向量丛 $L_1 \oplus L_2$ 对应的点；它与分别作为 (3.1) 和 (3.2) 中非平凡扩张出现的向量丛 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_1'$ 具有相同的 Jordan-H¨older 分次对象。由于 $\rho_{1,\,2}$ 对应于 X_0上的一个（严格）多稳定向量丛，因此 $G \cdot \rho_{1,\,2}$ 是一个闭的 G-轨道，我们可以应用上述相同的推理。因此，如果我们证明$\rho_{1,\,2}$ 是 $\mathcal{R}$的一个光滑点，那么 $\mathcal{R}$ 在 $\rho_{1,\,2}$附近（在解析拓扑下）局部不可约，因此 $\mathcal{M}$ 在点 $\pi(\rho_{1,\,2})$ 附近也如此。这意味着，由 (3.1) 中扩张 $\mathcal{F}_1$ 的（变形）产生的模分支，与由 (3.2) 中扩张 $\mathcal{F}_1'$ 的（变形）产生的是同一个分支。

因此，我们需要证明 $\mathcal{R}$ 在点 $\rho_{1,\,2}$ 处是光滑的。为此，首先注意到，显然存在一个不可约分支，记为 $R_{1,\,2}$，它属于 $\mathcal{R}$，并且经过点 $\rho_{1,\,2}$，其维数为 $\dim(G) + h^1(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee)$，其中 $\mathcal{F}_1$ 是式（ 3.1 ）中的一个非平凡扩张。事实上，如定理 3.1 的证明所示，$\mathcal{F}_1$ 具有一个维数为 $h^1(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee)$ 的不可约光滑模族，该模族产生一个不可约参数空间 $\mathcal{P} \subset \mathcal{R}$，参数化所有与该不可约光滑模族中的向量丛同构的商。因此，该参数空间的维数为 $\dim(\mathcal{P}) = \dim(G) + h^1(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee)$，且其在 $\mathcal{R}$ 中的闭包 $\overline{\mathcal{P}}$ 包含点 $\rho_{1,\,2}$；于是 $\rho_{1,\,2} \in \overline{\mathcal{P}} \subseteq R_{1,\,2}$，从而有

$$\dim(R_{1,2}) \geqslant \dim(\overline{\mathcal{P}}) = \dim(G) + h^1(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee). \tag{3.19}$$

由于 $\rho_{1,\,2} \in \mathcal{R}$ 对应于一个（严格）多稳定向量丛，根据上文，其 G-轨道 $G \cdot \rho_{1,\,2}$在 $\mathcal{R}$ 中是闭的；因此由 Luna 的 ´étale 切片定理（例如参见 [28, 定理 4.2.12]），存在一个经过 $\rho_{1,\,2}$ 的局部闭子概形 $S \subset \mathcal{R}$，它是 $G_{\rho_{1,\,2}}$-不变的，其中 $G_{\rho_{1,\,2}}$表示 G 中点 $\rho_{1,\,2}$的稳定子群，并且乘法映射 $G \times S \to \mathcal{R}$诱导出一个 G-等变的 ´étale 态射 $\psi : G \times_{G_{\rho_{1,\,2}}} S \to \mathcal{R}$，其中

$$G \times_{G_{\rho_{1,2}}} S := (G \times S)//G_{\rho_{1,2}}$$

如 [19, 第 1.1] 节所述。由于 $G = \mathbf{PGL}(k, \mathbb{C})$，因此有

$$G_{\rho_{1,2}} \cong \frac{Aut_{\mathcal{R}}(\rho_{1,2})}{\mathbb{C}^*} \cong \frac{Aut(L_1 \oplus L_2)}{\mathbb{C}^*} = \frac{H^0((L_1 \oplus L_2) \otimes (L_1 \oplus L_2)^\vee)}{\mathbb{C}^*} \cong \frac{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*}{\mathbb{C}^*} \cong \mathbb{C}^*,$$

由于 $h^0(L_1 - L_2) = h^0(L_2 - L_1) = 0$，这由（3.15）、（3.16）、（3.17）、（3.18）可得。因此，我们有一个切空间的同构

$$T_{\rho_{1,2}}(\mathcal{R}) \cong T_{(Id_G, \rho_{1,2})}(G \times_{G_{\rho_{1,2}}} S),$$

后者的维数为

$$\dim\Big(T_{(Id_G, \rho_{1,2})}(G \times_{G_{\rho_{1,2}}} S)\Big) = \dim\big(T_{\rho_{1,2}}(S)\big) + \dim(G) - \dim(\mathbb{C}^*)$$

这由 [19, 命题 4.9-(6)] 以及以下事实可得：维数 $(T_{Id_G}(G))$ = 维数(G)，且维数 $\big(T_{Id_G}(G_{\rho_{1,2}})\big)$ = 维数$(\mathbb{C}^*)$。特别地，

$$\dim\big(T_{\rho_{1,2}}(\mathcal{R})\big) = \dim(\big(T_{\rho_{1,2}}(S)\big) + \dim(G) - 1. \tag{3.20}$$

另一方面，由 [31, 命题 1.2 的证明3], 可知

$$\dim\big(T_{\rho_{1,2}}(S)\big) = \mathrm{Ext}^1(L_1 \oplus L_2, L_1 \oplus L_2) = H^1((L_1 \oplus L_2) \otimes (L_1 \oplus L_2)^\vee). \tag{3.21}$$

利用（3.15）、（3.16）以及（3.17）、（3.18）中的上同调计算，并根据事实 $L_1 - L_1 = L_2 - L_2 = \mathcal{O}_{X_0}$，由（3.21）可得维数$\big(T_{\rho_{1,2}}(S)\big) = 6b_0 - 2$；因此，由（3.20）可得维数$\big(T_{\rho_{1,2}}(\mathcal{R})\big) = 6b_0 - 3 +$维数$(G)$。另一方面，由定理 3.1 的证明可知，$h^1(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee) = 6b_0 - 3$，其中 $\mathcal{F}_1$ 是如（3.1）中的一个非平凡扩张。因此，由上述结论可得维数$\big(T_{\rho_{1,2}}(\mathcal{R})\big) = h^1(\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_1^\vee)$ +维数(G)，结合（3.19）可推出

$$\dim(R_{1,2}) = \dim\big(T_{\rho_{1,2}}(\mathcal{R})\big),$$

即 $\mathcal{R}$ 在 $\rho_{1,2}$ 处光滑，因此 $R_{1,2}$ 是经过 $\rho_{1,2}$的 $\mathcal{R}$ 的唯一不可约分支，从而完成了该断言的证明。□

3.2. 关于 $\mathbb{F}_e$, $e > 0$ 上三维卷曲的秩 2 Ulrich 向量丛。本节将重点讨论 $e > 0$ 的情形。

定理 3.4. 设 $(X_e, \xi) \cong (\mathbb{P}(\mathcal{E}_e), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)}(1))$ 是一个定义在 $\mathbb{F}_e$ 上的三维卷曲，其中 $e > 0$，且 $\mathcal{E}_e$ 如假设 1.8 所述。设 $\varphi\colon X_e \to \mathbb{F}_e$ 为卷曲映射，F 为 φ-纤维。那么，X_e 上关于 ξ 为 Ulrich 的秩二向量丛 $\mathcal{U}$ 的模空间，其陈类为

$$c_1(\mathcal{U}) = 2\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e - 2) \text{ and } c_2(\mathcal{U}) = \xi\varphi^*\mathcal{O}_{F_e}(4, 2b_e - e - 2) + (2b_e - 3e - k_e - 1)F, \tag{3.22}$$

非空，且包含一个维数为 $\mathcal{M}$ 的一般光滑分支

$$\dim(\mathcal{M}) = 6b_e - 9e - 3,$$

其一般点 $[\mathcal{U}]$ 对应于一个特殊的斜率稳定向量丛，其斜率为 ξ

$$\mu(\mathcal{U}) = 8b_e - k_e - 12e - 3. \tag{3.23}$$

证明。由 [4, 定理 3.4], 可知，存在定义在 $\mathbb{F}_e$ 上的秩二向量丛 $\mathcal{H}_1$，它们关于 $c_1(\mathcal{E}_e) = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e)$ 是 Ulrich 丛，由以下扩张给出

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e - 1) \to \mathcal{H}_1 \to I_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(4, 2b_e - 1 - e) \to 0, \tag{3.24}$$

其中 Z 是 $\mathbb{F}_e$ 中长度为 $\ell(Z) = 2b_e - 3e$ 的一般零维子概形。这样的向量丛$\mathcal{H}_1$ 是稳定的，参见 [4, 注 3.7],，因此是单纯的，即 $h^0(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1^\vee) = 1$，且不可分解。

令 $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1(-c_1(\mathcal{E}_e))$，它是一个稳定向量丛的扭转，因此稳定，所以它也是单纯的，即 $h^0(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee) = 1$。根据定理 1.7，向量丛 $\mathcal{V} := \xi \otimes \varphi^*(\mathcal{H})$ 是 X_e 上的秩二向量丛，并且相对于 ξ 是 Ulrich 向量丛。

由 (3.24) 可知 $c_1(\mathcal{H}) = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e - 2)$ 且 $c_2(\mathcal{H}) = 2b_e - 3e - 1$。简单的陈类计算可得

$$c_1(\mathcal{V}) = 2\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e - 2) \text{ and } \quad c_2(\mathcal{V}) = \xi\varphi^*\mathcal{O}_{F_e}(4, 2b_e - e - 2) + (2b_e - 3e - k_e - 1)F.$$

此外，根据定理 1.4–(b)（另见 [5, 第 3 节，(3.2)]），这样的向量丛 $\mathcal{V}$ 是稳定的，因此根据定理 1.4-(c) 也斜率稳定，因为由定理 2.1 可知，在 (X_e, ξ) 上不存在 Ulrich 线丛。

下一步是计算 $i = 0$ 的上同调群 $H^i(X_e, \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^\vee)$，其中 $i = 0$ 为 1、2、3。由于 $H^i(X_e, \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^\vee) = H^i(X_e, \varphi^*(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee)) \cong H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee)$，我们将重点计算 $H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee)$，$i = 0$ 为 1、2、3。

首先，$h^3(\mathbb{F}_e, \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee) = 0$，因为 $\mathbb{F}_e$ 是一个曲面，而 $h^0(\mathbb{F}_e, \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee) = 1$，因为 $\mathcal{H}$ 是单纯的。对于其他上同调群，我们将 (3.24) 与 $-c_1(\mathcal{E}_e) = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-3, -b_e)$ 进行张量化，得到

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, -1) \to \mathcal{H} \to I_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - 1 - e) \to 0. \tag{3.25}$$

由于 $\mathcal{H}$ 的秩为 2 且 $c_1(\mathcal{H}) = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - 2 - e)$，我们有 $\mathcal{H}^\vee \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, -b_e + 2 + e)$，因此将 (3.25) 与 $\mathcal{H}^\vee$ 进行张量化后得到

$$0 \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, 1 + e - b_e) \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee \to I_Z \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1) \to 0. \tag{3.26}$$

为了计算 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, 1 + e - b_e)$ 的上同调群，我们将使用由 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, 1 + e - b_e)$ 扭转后的短正合列 (3.25)，得到

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, e - b_e) \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, 1 + e - b_e) \to I_Z \to 0. \tag{3.27}$$

由此我们很容易看出 $H^0(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, 1 + e - b_e)) = 0 = H^2(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, 1 + e - b_e))$ 且 $h^1(\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, 1 + e - b_e)) = 2b_e - 3e - 1$。

接下来我们要计算 $I_Z \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1)$ 的上同调群。我们将正合列

$$0 \to I_Z \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e} \to \mathcal{O}_Z \to 0$$

分别与 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1)$ 和 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e)$ 张量，得到

$$0 \to I_Z \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1) \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1) \to (\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1))_{|Z} \to 0 \tag{3.28}$$

$$0 \to I_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e) \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e) \to \mathcal{O}_Z \to 0. \tag{3.29}$$

将 (3.25) 与 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1)$ 张量，得到

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1) \to I_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e) \to 0. \tag{3.30}$$

现在使用短正合序列 (3.28)、(3.29) 和 (3.30) 所对应的上同调序列。注意

$$h^0(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e)) \cong h^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_e - e) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_e - 2e)) = 2b_e - 3e + 2,$$

and

$$h^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e)) \cong h^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_e - e) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b_e - 2e)) = 0 \quad \text{for } i = 1, 2$$

因为假设 1.8 强制要求 $b_e \geqslant 3e + 2$。注意，$\dim(|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e)|) = 2b_e - 3e + 1$，所以 $h^0(I_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e)) = 2$，其为长度 $\ell(Z)$ 的 Z 一般元 $= 2b_e - 3e$。因此，由 (3.29) 可知，对于 $i = 1, 2$，$h^i(I_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e)) = 0$。现在利用 (3.30) 可知，对于 $i = 1, 2$，$h^0(\mathbb{F}_e, \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1)) = 3$ 且 $h^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1)) = 0$。于是 $h^2(I_Z \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1)) = 0$，结合 (3.26) 所对应的上同调序列，得到 $h^2(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee) = 0$。

因此，由 (3.28) 可知，由于 $h^0(\mathbb{F}_e, (\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1))_{|Z}) = 2(2b_2 - 3e)$ 且 $h^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1)_{|Z}) = 0$ for $i = 1, 2$，故可得 $\chi(I_Z \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1)) = \chi(\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1)) - \chi(\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1)_{|Z}) = 3 - 4b_e + 6e$. 由与 (3.26) 相关的上同调正合列可知，$\chi(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee) = \chi(I_Z \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(0, 1)) + \chi(\mathcal{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-1, 1 + e - b_e)) = 3 - 4b_e + 6e - 2b_2 + 3e + 1 = 4 - 6b_e + 9e$，因此 $h^1(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee) = 1 - \chi(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee) = 6b_e - 9e - 3$。

如前所述，$H^i(X_e, \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^\vee) \cong H^i(\mathbb{F}_e, \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^\vee)$，$i = 0$，1，2，3，因此上述计算给出了所有上同调群 $H^i(X_e, \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}^\vee)$，$i = 0$，1，2，3 的维数。

根据 [11, 命题 2。10], 由于 $h^2(\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}^\vee)=0$ 且 $\mathcal{V}$ 是单纯的，因此可知 $\mathcal{V}$ 具有一个光滑模空间族，从而产生模空间 $\mathcal{M}$ 的一个分支，该模空间参数化具有陈类的秩二 Ulrich 向量丛

$$c_1(\mathcal{V})=2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1,b_e-2-e)\text{ and }c_2(\mathcal{V})=\xi\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(4,b_e-2-e)+(2b_e-3e-k_e-1)F.$$

此外，由于 $\mathcal{V}$ 是斜率稳定的，它对应于该分支的一个光滑点 $[\mathcal{V}]\ \mathcal{M}$，满足 $\dim(\mathcal{M})=h^1(\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}^\vee)=6b_e-9e-3$，如前所述。

由于 Ulrich 性、斜率稳定性和单性都是开条件，而且在 $\mathcal{M}$中变化的向量丛的陈类保持不变，因此 $\mathcal{V}$ 满足的所有性质对一般成员 $[\mathcal{U}]\in\mathcal{M}$也成立；特别是， $\mathcal{M}$ 也是一般光滑的。

进一步注意到 $K_{X_e}+4\xi=-2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-2,-2-e)+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3,b_e)+4\xi=2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1,b_e-e-2)=c_1(\mathcal{V})$，因此 $\mathcal{U}$ 是一个特殊 Ulrich 丛。最后， $\mathcal{U}$ 相对于 ξ 的斜率为

$$\mu(\mathcal{U})=\frac{c_1(\mathcal{U})\cdot\xi^2}{2}=\frac{(2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1,b_e-e-2))\cdot\xi^2}{2}=8b_e-k_e-12e-3.$$

□

注 3.5. (i) 根据定理 1.7，并结合 $c_1(\mathcal{E}_e)=3C_e+b_ef$ 在 $\mathbb{F}_e$ 上是非常 ample（参见 (1.6)）这一事实，向量丛 $\mathcal{H}_1$ 是 $\mathbb{F}_e$ 上关于 $c_1(\mathcal{E}_e)$ 的 Ulrich 秩二向量丛；它按照定理 3.4 的证明构造出秩二向量丛 $\mathcal{V}=\xi\otimes\varphi^*(\mathcal{H}_1(-c_1(\mathcal{E}_e)))$，该向量丛是 X_e上关于 ξ 的 Ulrich 向量丛。

(ii) 在 [23, 定理 5.8、5.9] 中，证明了关于 ξ 的稳定秩二 Ulrich 向量丛存在于 X_0 和 X_1 上，且次数较低。在 [27, 推论 5.17] 中，证明了 $\mathbb{P}(\mathcal{E})\to\mathbb{F}_e$ 上存在秩二 Ulrich 向量丛，其关于不同的非常 ample 极化 $D=\pi^*(A)+\xi$，并且满足 $rk(\mathcal{E})A+c_1(\mathcal{E})$ 也非常 ample， $rk(\mathcal{E})\geqslant 2$ 以及 $\pi:\ \mathbb{P}(\mathcal{E})\to\mathbb{F}_e$ 是自然投影。但文中并未讨论它们的模空间。

(iii) 若令 $e=1$、 $b_e=5$ 和 $k_1=10$，11，则得到次数为 11 或 10 的三维卷曲 X_1，因为 $\deg(X_1)=21-k_1$。将定理 3.4 应用于这类三维簇，可得

$$c_1(\mathcal{U})=2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_1}(1,2),\ \dim(\mathcal{M})=18\text{ and }\mu(\mathcal{U})=40-k_1-12-3=25-k_1.$$

这些丛曲面已在 [23, 定理 5.9] 中讨论过，其中仅证明了其上存在秩二 Ulrich 丛，但未涉及它们的模空间。

4. Higher rank Ulrich vector bundles on 3-fold scrolls over $\mathbb{F}_e$

本节将构造定义在 X_e 上的高秩斜率稳定 Ulrich 向量丛，其中 $e\geqslant 0$。此外，我们还将计算由所构造的向量丛所对应的模分支的维数，从而彻底证明引言中陈述的主定理和主推论。

为此，我们将使用定理 2.1、3.1、3.4，以及归纳方法和变形论证。

4.1. 关于 $\mathbb{F}_0$ 上三维卷曲的高秩 Ulrich 向量丛。我们首先着重讨论情形 $e=0$。由定理 2.1 可知，在假设 1.8 下，只有在情形$e=0$ 中，(X_0,ξ) 上的 Ulrich 线丛才确实存在。我们将重点讨论线丛

$$L_1=\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2,-1)\text{ and its Ulrich dual }L_2=\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1,b_0-1),\tag{4.1}$$

如定理 2.1-(i) 中所述，这些线丛关于 ξ 在 X_0 上是 Ulrich 的。

回顾 § 3.1-情形 L 中的计算，以及由 (1.6) 可知 $b_0\geqslant 2$，我们得到：

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ext}^1(L_2,L_1))&=h^1(L_1-L_2)=4(b_0-1)\geqslant 4,\text{ whereas}\\ \dim(\mathrm{Ext}^1(L_1,L_2))&=h^1(L_2-L_1)=2(b_0+1)\geqslant 6.\end{aligned}\tag{4.2}$$

在定理 3.1 中，我们使用此类扩张构造秩 2 Ulrich 向量丛；要在 X_0 上构造更高秩的 Ulrich 丛，我们采用如下迭代策略。

令 $\mathcal{G}_1 := L_1$；由 (4.2) 可知，一般的 $[\mathcal{G}_2] \in \mathrm{Ext}^1(L_2, \mathcal{G}_1) = \mathrm{Ext}^1(L_2, L_1)$ 对应于一个非分裂扩张

$$0 \to \mathcal{G}_1 = L_1 \to \mathcal{G}_2 \to L_2 \to 0, \tag{4.3}$$

其中 $\mathcal{G}_2$ 是 X_0 上一个秩为 2 的 Ulrich 单纯向量丛，且满足

$$c_1(\mathcal{G}_2) = 2\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(1, b_0 - 2)$$

（参见 (3.1)，其中 $\mathcal{G}_2 := \mathcal{F}_1$，并参见定理 3.1 的证明）。如果下一步我们考虑进一步的扩张 $\mathrm{Ext}^1(L_2, \mathcal{G}_2)$，很容易看出，这样的扩张空间的维数比 $\mathrm{Ext}^1(L_2, \mathcal{G}_1)$ 的维数少一。因此，如此继续下去，经过有限步后，对于某个正整数 r_0，任意 $r \geqslant r_0$，$\mathrm{Ext}^1(L_2, \mathcal{G}_r)$ 中将只剩下分裂丛。

为避免这种情况，我们仿照 [13, § 4]，的做法，通过取扩张

$$0 \to \mathcal{G}_2 \to \mathcal{G}_3 \to L_1 \to 0, \ \ 0 \to \mathcal{G}_3 \to \mathcal{G}_4 \to L_2 \to 0, \ \ldots,$$

依此类推，也就是说，定义

$$\epsilon_r := \begin{cases} 1, & \text{if } r \text{ is odd}, \\ 2, & \text{if } r \text{ is even}, \end{cases} \tag{4.4}$$

我们依次取扩张 $[\mathcal{G}_r] \in \mathrm{Ext}^1(L_{\epsilon_r}, \mathcal{G}_{r-1})$，对所有 $r \geqslant 2$ 均如此：

$$0 \to \mathcal{G}_{r-1} \to \mathcal{G}_r \to L_{\epsilon_r} \to 0. \tag{4.5}$$

稍后我们将在下文的推论 4.2 中证明，这类扩张总可以取为非平凡的。无论如何，所有按照（4.5）递归定义的向量丛 $\mathcal{G}_r$的秩均为 r，并且相对于 ξ是 Ulrich 丛，因为相对于 ξ 的 Ulrich 丛的扩张仍然是相对于 ξ 的 Ulrich 丛。$\mathcal{G}_r$ 的第一陈类为

$$c_1(\mathcal{G}_r) := \begin{cases} r\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3, b_0 - 3) + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}\left(\frac{r-3}{2}, \frac{(r-3)}{2}(b_0 - 2)\right), & \text{if } r \text{ is odd}, \\ r\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}(b_0 - 2)\right), & \text{if } r \text{ is even}. \end{cases} \tag{4.6}$$

因此，对于任意 $r \geqslant 1$，其相对于 ξ 的斜率为

$$\mu(\mathcal{G}_r) = 8b_0 - k_0 - 3, \tag{4.7}$$

如 § 3.1-情形 L 和（3.12）所示。此外，根据定理 1.4-(a)，任意这样的 $\mathcal{G}_r$ 都是严格半稳定且斜率半稳定的，因为它是相同斜率$\mu(\mathcal{G}_{r-1}) = \mu(L_{\epsilon_r}) = 8b_0 - k_0 - 3$的 Ulrich 丛的扩张。

引理 4.1. 设 L 表示（4.1）中的两个线丛 L_1 和 L_2 中的任意一个。那么，对于所有整数 $r \geqslant 1$，有

(i) $h^2(\mathcal{G}_r \otimes L^\vee) = h^3(\mathcal{G}_r \otimes L^\vee) = 0$，(ii) $h^2(\mathcal{G}_r^\vee \otimes L) = h^3(\mathcal{G}_r^\vee \otimes L) = 0$，(iii) $h^1(\mathcal{G}_r \otimes L_{\epsilon_{r+1}}^\vee) \geqslant \min\{4b_0 - 4,\ 2b_0 + 2\} \geqslant 4$。

证明。对于 $r = 1$，我们有 $\mathcal{G}_1 = L_1$；因此，若$L = L_1$，则 $\mathcal{G}_1 \otimes L^\vee$ 和 $\mathcal{G}_1^\vee \otimes L$ 分别等于 $\mathcal{O}_{X_0}$；若 $L = L_2$，则它们分别等于 $L_1 - L_2$ 和 $L_2 - L_1$。因此，根据 § 3.1-情形 L 中的计算，(i) 和 (ii) 成立。至于 (iii)，由 (4.4) 可得 $L_{\epsilon_2} = L_2$，于是$h^1(\mathcal{G}_1 \otimes L_2^\vee) = h^1(L_1 - L_2) = 4b_0 - 4$，与 § 3.1-情形 L 中的情形一样；后者始终大于或等于 $\min\{4b_0 - 4,\ 2b_0 + 2\} \geqslant 4$，因为根据 (1.6)，$b_0 \geqslant 2$。

因此，我们将假设 $r \geqslant 2$ 并进行归纳法。关于 (i)，由于它对$r = 1$成立，假设它对 $r - 1$ 成立，那么将 (4.5) 张量化为 $L^\vee$ 后，我们得到

$$h^j(\mathcal{G}_r \otimes L^\vee) = 0, \ \ j = 2, 3,$$

因为对于 $j = 2$，3，$h^j(\mathcal{G}_{r-1} \otimes L^\vee) = 0$，这由归纳假设可知；而对于 $j = 2$，3，$h^j(L_{\epsilon_r} \otimes L^\vee) = 0$，因为 $L_{\epsilon_r} \otimes L^\vee$ 要么是 $\mathcal{O}_{X_0}$，要么是 $L_2 - L_1$，要么是 $L_1 - L_2$。

类似地，将（4.5）的对偶通过 L 张量化，即可证明（ii）。

为证明（iii），将（4.5）通过 $L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee}$ 张量化，并利用（i）可知 $h^2(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee})=0$。因此，我们得到满射

$$H^1(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee})\twoheadrightarrow H^1(L_{\epsilon_r}\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee}),$$

这意味着 $h^1(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee})\geqslant h^1(L_{\epsilon_r}\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee})$。根据 r 的奇偶性，我们有 $L_{\epsilon_r}\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee}$ 等于 L_1-L_2 或 L_2-L_1。根据 § 3.1-情形 L 中的计算，$h^1(L_1-L_2)=4b_0-4$ 而 $h^1(L_2-L_1)=2b_0+2$。注意

$$\min\{4b_0-4,\ 2b_0+2\}:=\begin{cases}4b_0-4=4, & \text{if } b_0=2,\\ 4b_0-4=2b_0+2=8, & \text{if } b_0=3,\\ 2b_0+2\geqslant 10, & \text{if } b_0\geqslant 4.\end{cases}$$

因此得出结论。 □

推论 4.2. 对任意整数 $r\geqslant 1$，在 X_0 上存在秩为 r 的向量丛 $\mathcal{G}_r$，它们关于 ξ 是 Ulrich 丛，第一陈类为 $c_1(\mathcal{G}_r)$，如（4.6）所示，斜率为 $\mu(\mathcal{G}_r)=8b_0-k_0-3$（关于 ξ），并且当 $r\geqslant 2$ 时，它们可表示为（4.5）中的非平凡扩张。

证明。对于 $r=1$，我们有 $\mathcal{G}_1=L_1$，根据定理 2.1 以及 §3.1 情形 L 中的计算，该结论成立。

对于任意 $r\geqslant 2$，注意到

$$\mathrm{Ext}^1(L_{\epsilon_r},\mathcal{G}_{r-1})\cong H^1(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^{\vee}).$$

因此，由引理 4.1-(iii)可知，存在如（4.5）所示的非平凡扩张；这些扩张相对于 ξ 是 Ulrich 丛，其陈类 $c_1(\mathcal{G}_r)$ 恰如（4.6）所示。

由归纳法，$\mu(\mathcal{G}_{r-1})=\mu(L_{\epsilon_r})=8b_0-k_0-3$；于是 $\mathcal{G}_r$ 相对于 ξ 具有相同斜率 . □

由推论 4.2，在每一步我们总能选取（4.5）形式的非平凡扩张，以下均如此。

引理 4.3。设 $r\geqslant 1$ 为一个整数。那么我们有

(i) $h^1(\mathcal{G}_{r+1}\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee})=h^1(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee})-1$,

(ii) $h^1(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee})=\begin{cases}\frac{(r+1)}{2}h^1(L_1-L_2)-\frac{(r-1)}{2}=2(r+1)(b_0-1)-\frac{(r-1)}{2}, & \textit{if } r \textit{ is odd},\\ \frac{r}{2}h^1(L_2-L_1)-\frac{(r-2)}{2}=r(b_0+1)-\frac{(r-2)}{2}, & \textit{if } r \textit{ is even}.\end{cases}$

(iii) $h^2(\mathcal{G}_r\otimes\mathcal{G}_r^{\vee})=h^3(\mathcal{G}_r\otimes\mathcal{G}_r^{\vee})=0$,

(iv) $\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee})=\begin{cases}\frac{(r+1)}{2}(1-h^1(L_1-L_2))-1=\frac{(r+1)}{2}(5-4b_0)-1, & \textit{if } r \textit{ is odd},\\ \frac{r}{2}(1-h^1(L_2-L_1))=\frac{r}{2}(-1-2b_0), & \textit{if } r \textit{ is even}.\end{cases}$

(v) $\chi(L_{\epsilon_r}\otimes\mathcal{G}_r^{\vee})=\begin{cases}\frac{(r-1)}{2}(1-h^1(L_1-L_2))+1=\frac{(r-1)}{2}(5-4b_0)+1, & \textit{if } r \textit{ is odd},\\ \frac{r}{2}(1-h^1(L_2-L_1))=\frac{r}{2}(-1-2b_0), & \textit{if } r \textit{ is even}.\end{cases}$

(vi) $\chi(\mathcal{G}_r\otimes\mathcal{G}_r^{\vee})=\begin{cases}\frac{(r^2-1)}{4}(2-h^1(L_1-L_2)-h^1(L_2-L_1))+1=\frac{(r^2-1)}{4}(4-6b_0)+1, & \textit{if } r \textit{ is odd},\\ \frac{r^2}{4}(2-h^1(L_1-L_2)-h^1(L_2-L_1))=\frac{r^2}{4}(4-6b_0), & \textit{if } r \textit{ is even}.\end{cases}$

证明。（i）考虑正合列（4.5），其中将 r 替换为 $r+1$。由 $\mathrm{Ext}^1(L_{\epsilon_{r+1}},\mathcal{G}_r)\cong H^1(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee})$ 以及定义 $\mathcal{G}_{r+1}$ 的正合列是通过取 $\mathrm{Ext}^1(L_{\epsilon_{r+1}},\mathcal{G}_r)$ 中的非零向量 $[\mathcal{G}_{r+1}]$ 构造而成这一事实，可知余边界映射

$$H^0(\mathcal{O}_{X_0})\xrightarrow{\partial}H^1(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee})$$

正合列的

$$0\to\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee}\to\mathcal{G}_{r+1}\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee}\to\mathcal{O}_{X_0}\to 0, \tag{4.8}$$

非零，因此它是单射。于是，由（4.8）的上同调可得（i）。

(ii) 我们对 r 使用归纳法。对于 $r=1$，公式的右边给出 $4(b_0-1)$，这恰好是 $h^1(\mathcal{G}_1\otimes L_2^{\vee})=h^1(L_1-L_2)$，与 § 3.1-情形 L 中相同。

当 $r=2$ 时，公式的右边为 $2(b_0+1)$，即 $h^1(\mathcal{G}_2\otimes L_1^\vee)=h^1(L_2-L_1)=2b_0+2$；这可由 § 3.1-情形 L 中的计算以及正合列推出

$$0\to\mathcal{O}_{X_0}\to\mathcal{G}_2\otimes L_1^\vee\to L_2-L_1\to 0,$$

由 (4.5) 得到，并与 $L_1^\vee$ 张量积，再利用以下事实：对于 $j=1,\ h^j(\mathcal{O}_{X_0})=0,\ 2$。现在假设该公式对某个整数 $r\geqslant 2$ 及其之前的值均成立；我们需要证明它对 $r+1$ 也成立。考虑正合列 (4.5)，将其中的 r 替换为 $r+1$，并将其与 $L_{\epsilon_{r+2}}^\vee$ 张量积。由此得到

$$0\to\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee\to\mathcal{G}_{r+1}\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee\to L_{\epsilon_{r+1}}\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee\to 0 \tag{4.9}$$

若 r 为偶数，则 $L_{\epsilon_{r+2}}=L_2$，而 $L_{\epsilon_{r+1}}=L_1$。因此，$h^0(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee)=h^0(L_1-L_2)=0$，且 $h^1(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee)=h^1(L_1-L_2)=4b_0-4$。另一方面，根据引理 4.1-(i)，$h^2(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee)=0$。因此，由 (4.9) 可得：

$$h^1(\mathcal{G}_{r+1}\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee)=(4b_0-4)+h^1(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee)=(4b_0-4)+h^1(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_r}^\vee),$$

因为 r 和 $r+2$ 具有相同的奇偶性。利用 (i)，我们有 $h^1(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=h^1(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)-1$ 因此，根据归纳假设，当 $r-1$ 为奇数时，我们有 $h^1(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=\frac{r}{2}(4b_0-4)-(r-2)_2$。综上，我们有

$$h^1(\mathcal{G}_{r+1}\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee)=(4b_0-4)+\frac{r}{2}(4b_0-4)-\frac{(r-2)}{2}-1,$$

容易看出，当用 $r+1$ 替换 r 时，该式等于 (ii) 中的右边表达式。

如果 r 为奇数，则 $r+2$ 也为奇数，而 $r+1$ 为偶数。在这种情况下，$L_{\epsilon_{r+2}}=L_1, L_{\epsilon_{r+1}}=L_2$，因此 $h^1(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee)=h^1(L_2-L_1)=2b_0+2$，然后采用与前一种情况相同的步骤。

(iii) 我们再次对 r 使用归纳法。对于 $r=1$，公式 (iii) 表明 $h^j(L_1-L_1)=h^j(\mathcal{O}_{X_0})=0$，其中 $j=2, 3$，这显然成立。

现在假设 (iii) 对某个整数 $r\geqslant 1$ 及其之前的情形均成立；我们必须证明它对 $r+1$ 也成立。考虑正合列（4.5），其中将 r 替换为 $r+1$，并将其与 $\mathcal{G}_{r+1}^\vee$ 作张量积。由此可得，对于 $j=2, 3$，

$$h^j(\mathcal{G}_{r+1}\otimes\mathcal{G}_{r+1}^\vee)\leqslant h^j(\mathcal{G}_r\otimes\mathcal{G}_{r+1}^\vee)+h^j(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_{r+1}^\vee)=h^j(\mathcal{G}_r\otimes\mathcal{G}_{r+1}^\vee), \tag{4.10}$$

后一个等式由 $h^j(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_{r+1}^\vee)=0, j=2, 3$ 得出，与引理 4.1-(ii) 中相同 .

考虑（4.5）的对偶正合列，其中将 r 替换为 $r+1$，并将其与 $\mathcal{G}_r$ 作张量积。因此，由引理 4.1-(i) 可得，对于 $j=2, 3$，有

$$h^j(\mathcal{G}_r\otimes\mathcal{G}_{r+1}^\vee)\leqslant h^j(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^\vee)+h^j(\mathcal{G}_r\otimes\mathcal{G}_r^\vee)=h^j(\mathcal{G}_r\otimes\mathcal{G}_r^\vee). \tag{4.11}$$

现在，由（4.10）–（4.11）和归纳假设可得 $h^j(\mathcal{G}_{r+1}\otimes\mathcal{G}_{r+1}^\vee)=0$，其中 $j=2,\ 3$，正如所需。

(iv) 对于 $r=1$，(iv) 表示为 $\chi(L_1-L_2)=-h^1(L_1-L_2)=4-4b_0$，这成立，因为对于 $j=0,\ 2,\ 3$，有 $h^j(L_1-L_2)=0$。

对于 $r=2$，(iv) 表示为 $\chi(\mathcal{G}_2\otimes L_1^\vee)=1-h^1(L_2-L_1)=-1-2b_0$，这成立，因为若取正合列（4.5），其中 $r=2$，再与 $L_1^\vee$ 张量积，则

$$\chi(\mathcal{G}_2\otimes L_1^\vee)=\chi(\mathcal{O}_{X_0})+\chi(L_2-L_1)=1-h^1(L_2-L_1)=1-(2b_0+2),$$

因为对于 $j=0,\ 2,\ 3$，有 $h^j(L_2-L_1)=0$。

现在假设该公式对某个整数 $r\geqslant 2$ 成立，我们需要证明它对 $r+1$ 也成立。由 (4.9) 可得

$$\chi(\mathcal{G}_{r+1}\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee)=\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee)+\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^\vee).$$

如果 r 是偶数，那么 $r+2$ 也是偶数，而 $r+1$ 是奇数。因此，

$$\chi(\mathcal{G}_{r+1}\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^{\vee})=\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_2^{\vee})+\chi(L_1-L_2)=\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_2^{\vee})-h^1(L_1-L_2). \tag{4.12}$$

然后，将 r 替换为 $r-1$，代入（4.8），得到

$$\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_2^{\vee})=\chi(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_2^{\vee})+\chi(\mathcal{O}_{X_0})=\chi(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_2^{\vee})+1. \tag{4.13}$$

将（4.13）代入（4.12），并利用 $r-1$ 为奇数时的归纳假设，得到

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{G}_{r+1}\otimes L_2^{\vee}) &= \chi(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_2^{\vee})+1-h^1(L_1-L_2)\\ &= \frac{(r)}{2}(1-h^1(L_1-L_2))-h^1(L_1-L_2)\\ &= \frac{(r+2)}{2}(1-h^1(L_2-L_1))-1,\end{aligned}$$

由此证明该公式对 $r+1$ 为奇数的情况也成立。

可以用类似的方法处理 r 为奇数的情况。在此情形下，$L_{\epsilon_{r+1}}=L_2$，而 $L_{\epsilon_{r+2}}=L_1$。因此，根据上述计算，

$$\chi(\mathcal{G}_{r+1}\otimes L_1^{\vee})=\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_1^{\vee})+\chi(L_2-L_1)=\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_1^{\vee})-h^1(L_2-L_1).$$

与前一种情况一样，$\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_1^{\vee})=1+\chi(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_1^{\vee})$，因此，应用 $r-1$ 为偶数时的归纳假设，得到 $\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_1^{\vee})=1+\frac{r}{2}(1-h^1(L_2-L_1))$。将这些量相加，得到

$$\chi(\mathcal{G}_{r+1}\otimes L_{\epsilon_{r+2}}^{\vee})=\chi(\mathcal{G}_{r+1}\otimes L_1^{\vee})=\frac{r+1}{2}(1-h^1(L_2-L_1)),$$

因此，公式（iv）对 $r+1$ 偶数时也成立。

（v）对于 $r=1$，（v）写作 $\chi(L_1-L_1)=\chi(\mathcal{O}_{X_0})=1$，这是正确的。对于 $r=2$，（v）写作$\chi(L_2\otimes\mathcal{G}_2^{\vee})=1-h^1(L_2-L_1)$，这同样是正确的，因为它由正合列（4.5）的对偶张量化 L_2得到。

现在假设该公式对某个整数 $r\geqslant 2$ 之前均成立，而我们需要证明它对 $r+1$成立。对（4.5）进行对偶化，将 r 替换为 $r+1$，并将其张量化 $L_{\epsilon_{r+1}}$，我们得到

$$\begin{aligned}\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_{r+1}^{\vee}) &= \chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^{\vee})+\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_r^{\vee})\\ &= \chi(\mathcal{O}_{X_n})+\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_r^{\vee})=1+\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_r^{\vee}).\end{aligned} \tag{4.14}$$

将 r 替换为 $r-1$后的正合列（4.5）的对偶，与 $L_{\epsilon_{r+1}}$ 进行张量化，得到

$$\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_r^{\vee})=\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes L_{\epsilon_r}^{\vee})+\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_{r-1}^{\vee}). \tag{4.15}$$

将（4.15）代入（4.14），并利用 $r+1$ 和 $r-1$ 具有相同奇偶性的事实，我们得到

$$\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_{r+1}^{\vee})=1+\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes L_{\epsilon_r}^{\vee})+\chi(L_{\epsilon_{r-1}}\otimes\mathcal{G}_{r-1}^{\vee}).$$

如果 r 是偶数，那么 $\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes L_{\epsilon_r}^{\vee})=\chi(L_1-L_2)=-h^1(L_1-L_2)$；而根据 $r-1$ 为奇数时的归纳假设，$\chi(L_{\epsilon_{r-1}}\otimes\mathcal{G}_{r-1}^{\vee})=1+\frac{(r-2)}{2}(1-h^1(L_1-L_2))$。因此

$$\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_{r+1}^{\vee})=1-h^1(L_1-L_2)+1+\frac{(r-2)}{2}(1-h^1(L_1-L_2)),$$

格 格等于$1+\frac{r}{2}(1-h^1(L_1-L_2))$，这证明公式在 $r+1$ 为奇数时也成立 .

如果 r 是奇数，证明策略类似；此时有 $\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes L_{\epsilon_r}^{\vee})=\chi(L_2-L_1)=-h^1(L_2-L_1)$，并且根据 $r-1$ 为偶数时的归纳假设，$\chi(L_{\epsilon_{r-1}}\otimes\mathcal{G}_{r-1}^{\vee})=\frac{(r-1)}{2}(1-h^1(L_2-L_1))$，因此可以得出结论。

（vi）我们首先检验给定的 $r=1$公式。我们有 $\chi(\mathcal{G}_1\otimes\mathcal{G}_1^{\vee})=\chi(L_1-L_1)=\chi(\mathcal{O}_{X_0})=1$，这与给定的 $r=1$公式一致。由（4.5），结合 $r=2$，再张量乘以$\mathcal{G}_2^{\vee}$，可得

$$\chi(\mathcal{G}_2\otimes\mathcal{G}_2^{\vee})=\chi(L_1\otimes\mathcal{G}_2^{\vee})+\chi(L_2\otimes\mathcal{G}_2^{\vee})\overset{(v)}{=}\chi(L_1\otimes\mathcal{G}_2^{\vee})+1-h^1(L_2-L_1). \tag{4.16}$$

由（4.5）的对偶，结合 $r=2$，再张量乘以 L_1，可得

$$\chi(L_1\otimes \mathcal{G}_2^\vee)=\chi(L_1-L_1)+\chi(L_1-L_2)=\chi(\mathcal{O}_{X_0})-h^1(L_1-L_2)=1-h^1(L_1-L_2). \tag{4.17}$$

结合（4.16）和（4.17），得到

$$\chi(\mathcal{G}_2\otimes \mathcal{G}_2^\vee)=2-h^1(L_1-L_2)-h^1(L_2-L_1),$$

这再次与给定的 $r=2$ 公式相符。

现在假设给定的公式对某个整数 $r\geqslant 2$ 及其之前的情形均成立；我们需要证明它对 $r+1$ 也成立。由（4.5）中以 $r+1$ 替换 r 后再与 $\mathcal{G}_{r+1}^\vee$ 张量积所得的式子，以及将（4.5）对偶后以 $r+1$ 替换 r、再与 $\mathcal{G}_r$ 张量积所得的式子，我们得到

$$\chi(\mathcal{G}_{r+1}\otimes \mathcal{G}_{r+1}^\vee) \;=\; \chi(\mathcal{G}_r\otimes \mathcal{G}_r^\vee)+\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^\vee)+\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes \mathcal{G}_{r+1}^\vee).$$

若 r 为偶数，则 $r+1$ 为奇数，且 $L_{\epsilon_{r+1}}=L_1$。由（v）并注意到 $(r+1)$ 为奇数，得到 $\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_{r+1}^\vee)=1+\frac{r}{2}(1-h^1(L_1-L_2))$；而由（iv）并注意到 r 为偶数，得到 $\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^\vee)=\frac{r}{2}(1-h^1(L_2-L_1))$。最后，由归纳假设并注意到 r 为偶数，得到 $\chi(\mathcal{G}_r\otimes\mathcal{G}_r^\vee)=\frac{r^2}{4}(2-h^1(L_1-L_2)-h^1(L_2-L_1))$。将这三个量相加，得到

$$\chi(\mathcal{G}_{r+1}\otimes \mathcal{G}_{r+1}^\vee)=1+\frac{(r+1)^2-1}{4}(2-h^1(L_1-L_2)-h^1(L_2-L_1)),$$

证明该公式对 $r+1$ 奇数成立。

若 r 为奇数，则 $\chi(L_{\epsilon_{r+1}}\otimes\mathcal{G}_{r+1}^\vee)=\frac{r+1}{2}(1-h^1(L_2-L_1))$，这是由（v）且 $(r+1)$ 为偶数可得的；而 $\chi(\mathcal{G}_r\otimes L_{\epsilon_{r+1}}^\vee)=\frac{(r+1)-2}{4}(1-h^1(L_1-L_2))-1$，正如 (iv) 在 r 为奇数时所预示的。最后，令归纳假设中的 r 为奇数，我们有 $\chi(\mathcal{G}_r\otimes\mathcal{G}_r^\vee)=1+\frac{(r^2-1)}{4}(2-h^1(L_1-L_2)-h^1(L_2-L_1))$。将这三个量相加，得到

$$\chi(\mathcal{G}_{r+1}\otimes \mathcal{G}_{r+1}^\vee)=\frac{(r+1)^2}{4}(2-h^1(L_1-L_2)-h^1(L_2-L_1)),$$

从而完成证明。 □

注意（4.5）中前一迭代构造的第一步所产生的一些基本性质。令 $\mathcal{G}_1=L_1$ 为斜率 $\mu=8b_0-k_0-3$ 的 Ulrich 线丛；通过考虑非平凡扩张（4.3），$\mathcal{G}_2$ 被证明是一个单丛，这可由 [11, 引理 4.2] 以及以下事实得出：$\mathcal{G}_1=L_1$ 和 $L_{\epsilon_2}=L_2$ 是斜率稳定、斜率均为 $\mu=8b_0-k_0-3$ 且互不同构的线丛。此外，根据构造，$\mathcal{G}_2$ 是 Ulrich 丛、严格半稳定，且斜率为 $\mu=8b_0-k_0-3$；另一方面，在定理 3.1 的证明中，我们证明了 $\mathcal{G}_2$ 可变形为一个光滑不可约模族中的斜率稳定 Ulrich 丛 $\mathcal{U}_2:=\mathcal{U}$，其斜率和陈类与 $\mathcal{G}_2$ 相同；这给出了 Ulrich 丛模空间中一般光滑分支 $\mathcal{M}(2):=\mathcal{M}$ 的一般点 $[\mathcal{U}_2]$，该模空间已在定理 3.1 中描述。

这样，通过归纳法，我们可以假设，对于给定的整数 $r\geqslant 3$，已经构造出 Ulrich 秩为 $(r-1)$、陈类为 $c_1=c_1(\mathcal{G}_{r-1})$、斜率为 $\mu=8b_0-k_0-3$ 的向量丛的模空间的一个一般光滑不可约分支 $\mathcal{M}(r-1)$，其一般点$[\mathcal{U}_{r-1}]\in\mathcal{M}(r-1)$是斜率稳定的。

现在考虑扩张

$$0\to \mathcal{U}_{r-1}\to \mathcal{F}_r\to L_{\epsilon_r}\to 0, \tag{4.18}$$

其中 $[\mathcal{U}_{r-1}]\in\mathcal{M}(r-1)$ 是一般的，且 L_{ϵ_r} 根据 r 的奇偶性按（4.4）、（4.5）定义。注意，

$$\mathrm{Ext}^1(L_{\epsilon_r},\mathcal{U}_{r-1})\cong H^1(\mathcal{U}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee).$$

引理 4.4。在上述设定下，有

$$h^1(\mathcal{U}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)\geqslant \min\{4b_0-5,\ 2b_0+1\}\geqslant 3.$$

特别地，$\mathrm{Ext}^1(L_{\epsilon_r},\mathcal{U}_{r-1})$包含如（4.18）中的非平凡扩张。

证明。根据归纳假设， $\mathcal{U}_{r-1}$ 在光滑模空间族中专化为 $\mathcal{G}_{r-1}$ ，因此由半连续性和引理 4.1-(i)，可得

$$h^j(\mathcal{U}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=h^j(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=0,\ j=2,3. \tag{4.19}$$

出于同样的原因

$$\chi(\mathcal{U}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=\chi(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee), \tag{4.20}$$

其中后者如引理 4.3-(iv) 所述。

因此，(4.20) 中的等式结合 (4.19) 可写为

$$h^0(\mathcal{U}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)-h^1(\mathcal{U}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=h^0(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)-h^1(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee),$$

即

$$h^1(\mathcal{U}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=h^1(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)-\left(h^0(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)-h^0(\mathcal{U}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)\right), \tag{4.21}$$

其中 $h^1(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)\geqslant\min\{4b_0-4,\ 2b_0+2\}\geqslant 4$，这是由将引理 4.1-(iii) 中的 r 替换为 $r-1$ 得到的。我们断言，以下等式

$$h^0(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=\begin{cases}0 & \text{if} \quad r \text{ even}\\ 1 & \text{if} \quad r \text{ odd}\end{cases} \tag{4.22}$$

成立。

暂且假设（4.22）已经证明；由于 $\mathcal{U}_{r-1}$ 是斜率稳定的，与 L_{ϵ_r} 具有相同斜率，且 $\mathcal{U}_{r-1}$ 与 L_{ϵ_r} 不同构，因此 $h^0(\mathcal{U}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=0$，因为任意非零同态 $L_{\epsilon_r}\to\mathcal{U}_{r-1}$ 都应是同构。于是，利用（4.21），对于任意 $r\geqslant 2$，可得

$$h^1(\mathcal{U}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)\geqslant h^1(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)-1$$

结合引理 4.1-(iii)，即证明了该命题。

因此，现在只剩下证明（4.22）。为证明它，我们将对 r 使用归纳法。

若 $r=2$，则 $\mathcal{G}_1=L_1$、$L_{\epsilon_2}=L_2$，从而 $h^0(\mathcal{G}_1\otimes L_2^\vee)=h^0(L_1-L_2)=0$，这由（3.15）和（3.17）可知。若 $r=3$，则 $\mathcal{G}_{r-1}=\mathcal{G}_2$ 如（4.3）所示，而 $L_{\epsilon_3}=L_1$，如（4.4）所示。因此，将（4.3）张量化 $L_1^\vee$，可得

$$0\to\mathcal{O}_{X_0}\to\mathcal{G}_2\otimes L_1^\vee\to L_2-L_1\to 0;$$

since $h^0(L_2-L_1)=0$，由（3.16）和（3.18），则 $h^0(\mathcal{G}_2\otimes L_1^\vee)=h^0(\mathcal{O}_{X_0})=1$。

因此，假设对于某个整数 $r-2\geqslant 2$，（4.22）成立，并取 $\mathcal{G}_{r-1}$ 一个如（4.5）所示的非平凡扩张，其中以 $r-1$ 替换 r，即

$$0\to\mathcal{G}_{r-2}\to\mathcal{G}_{r-1}\to L_{\epsilon_{r-1}}\to 0. \tag{4.23}$$

若 r 为偶数，则 $r-2$ 为偶数且 $r-1$ 为奇数，特别是 $L_{\epsilon_{r-1}}=L_1$ 和 $L_{\epsilon_r}=L_2$。因此，将（4.23）与 $L_{\epsilon_r}^\vee=L_2^\vee$ 张量化，得到

$$0\to\mathcal{G}_{r-2}\otimes L_2^\vee\to\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_2^\vee\to L_1-L_2\to 0.$$

由于 $h^0(L_1-L_2)=0$，于是

$$h^0(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=h^0(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_2^\vee)=h^0(\mathcal{G}_{r-2}\otimes L_2^\vee).$$

另一方面，根据（4.5），以 $r-2$ 替换 r，即

$$0\to\mathcal{G}_{r-3}\to\mathcal{G}_{r-2}\to L_{\epsilon_{r-2}}\to 0, \tag{4.24}$$

我们有 $L_{\epsilon_{r-2}}=L_2$，因为 $r-2$ 是偶数，正如 r 一样。因此，将（4.24）与 $L_{\epsilon_r}^\vee$ 张量化，并考虑到 r 是偶数，可得

$$0\to\mathcal{G}_{r-3}\otimes L_2^\vee\to\mathcal{G}_{r-2}\otimes L_2^\vee\to\mathcal{O}_{X_0}\to 0.$$

注意到 $\mathcal{G}_{r-3}\otimes L_2^\vee=\mathcal{G}_{r-3}\otimes L_{\epsilon_{r-2}}^\vee$因此，由于 $r-3$是奇数，$h^0(\mathcal{G}_{r-3}\otimes L_2^\vee)=0$可由归纳法和（4.22）得到。另一方面，余边界映射

$$H^0(\mathcal{O}_{X_0})\cong\mathbb{C}\xrightarrow{\partial}H^1(\mathcal{G}_{r-3}\otimes L_2^\vee)=H^1(\mathcal{G}_{r-3}\otimes L_{\epsilon_{r-2}}^\vee)\cong\mathrm{Ext}^1(L_{\epsilon_{r-2}},\mathcal{G}_{r-3})$$

非零，因为根据迭代构造， $\mathcal{G}_{r-2}$ 被取为一个非平凡扩张；因此∂是单射，这意味着 $h^0(\mathcal{G}_{r-2}\otimes L_2^\vee)=0$，于是 $h^0(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=0$，证毕。

现在假设 r 为奇数，于是 $L_{\epsilon_r}=L_1$ ，而 $L_{\epsilon_{r-1}}=L_2$。将（4.23）张量化为 $L_1^\vee$，得到

$$0\to\mathcal{G}_{r-2}\otimes L_1^\vee\to\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_1^\vee\to L_2-L_1\to 0.$$

由于 $h^0(L_2-L_1)=0$，因此

$$h^0(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=h^0(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_1^\vee)=h^0(\mathcal{G}_{r-2}\otimes L_1^\vee).$$

由于 r 为奇数，因此 $r-2$ 也为奇数，从而得到

$$0\to\mathcal{G}_{r-3}\otimes L_1^\vee\to\mathcal{G}_{r-2}\otimes L_1^\vee\to\mathcal{O}_{X_0}\to 0.$$

注意到 $h^0(\mathcal{G}_{r-3}\otimes L_1^\vee)=h^0(\mathcal{G}_{r-3}\otimes L_{\epsilon_{r-2}}^\vee)=1$，这是由将（4.22）中的 r替换为$r-2$得到的，而由于 r 是奇数，所以$r-2$也是奇数。另一方面， $\mathcal{G}_{r-2}$ 源自一个非平凡扩张这一事实意味着，如前所述，余边界映射

$$H^0(\mathcal{O}_{X_0})\cong\mathbb{C}\xrightarrow{\partial}H^1(\mathcal{G}_{r-3}\otimes L_1^\vee)=H^1(\mathcal{G}_{r-3}\otimes L_{\epsilon_{r-2}}^\vee)\cong\mathrm{Ext}^1(L_{\epsilon_{r-2}},\mathcal{G}_{r-3})$$

再次是单射。这给出 $h^0(\mathcal{G}_{r-2}\otimes L_1^\vee L_{\epsilon_r}^\vee)=1$，从而推出 $h^0(\mathcal{G}_{r-1}\otimes L_{\epsilon_r}^\vee)=1$。引理的证明至此完成。□

引理 4.4 保证存在由 (4.18) 导出的非平凡扩张。由于$[\mathcal{U}_{r-1}]\in\mathcal{M}(r-1)$一般情形下是斜率稳定的，且 $\mathcal{U}_{r-1}$ 与 L_{ϵ_r} 不同构（若 $r>2$，$\mathbf{rk}(\mathcal{U}_{r-1})>1=\mathbf{rk}(L_{\epsilon_r})$；否则，若 $r=2$，$\mathcal{U}_1=L_1$ 与 $L_{\epsilon_2}=L_2$ 不同构），此外 $\mathcal{U}_{r-1}$ 与 L_{ϵ_r} 具有相同斜率 $\mu=8b_0-k_0-3$，于是由 [11, 引理 4.2], 可知，(4.18) 中的一般向量丛 $\mathcal{F}_r$ 是单纯的，秩为 r，且相对于 ξ 是 Ulrich 向量丛，并且具有 (4.6) 中的 $c_1(\mathcal{F}_r)=c_1(\mathcal{U}_{r-1})+L_{\epsilon_r}$。

此外，随着 $\mathcal{U}_{r-1}$ 在光滑模空间族中专化为 $\mathcal{G}_{r-1}$， $\mathcal{F}_r$ 专化为 $\mathcal{G}_r$，因此由半连续性可知， $h^2(\mathcal{F}_r\otimes\mathcal{F}_r^\vee)=0$ 如同 $h^2(\mathcal{G}_r\otimes\mathcal{G}_r^\vee)=0$（参见引理 4.3-(iii)）。因此，由 [11, 命题 10.2]可知， $\mathcal{F}_r$ 属于一个光滑模空间族，我们将其记为 $\mathcal{M}(r)$。

对于 $r\geqslant 2$，概形 $\mathcal{M}(r)$ 包含一个子概形，记作 $\mathcal{M}(r)^{\mathrm{ext}}$，它参数化了满足 (4.18) 中非平凡扩张形式的丛 $\mathcal{F}_r$ 。

引理 4.5. 设 $r\geqslant 2$ 为一个整数，且 $[\mathcal{U}_r]\in\mathcal{M}(r)$ 为一般点。那么 $\mathcal{U}_r$是一个秩为 r的向量丛，相对于 ξ是 Ulrich 向量丛，其关于 ξ 的斜率为$\mu:=8b_0-k_0-3$，第一陈类为

$$c_1(\mathcal{U}_r):=\begin{cases}r\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3,b_0-3)+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}\left(\frac{r-3}{2},\frac{(r-3)}{2}(b_0-2)\right), & \textit{if } r \textit{ is odd},\\ r\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}(b_0-2)\right), & \textit{if } r \textit{ is even}.\end{cases}$$

此外， $\mathcal{U}_r$ 是单纯的，特别是不可分解的，并且

(i) $\chi(\mathcal{U}_r\otimes\mathcal{U}_r^\vee)=\begin{cases}\frac{(r^2-1)}{4}(2-h^1(L_1-L_2)-h^1(L_2-L_1))+1=\frac{(r^2-1)}{4}(4-6b_0)+1, & \textit{if } r \textit{ is odd},\\ \frac{r^2}{4}(2-h^1(L_1-L_2)-h^1(L_2-L_1))=\frac{r^2}{4}(4-6b_0), & \textit{if } r \textit{ is even}.\end{cases}$

(ii) $h^j(\mathcal{U}_r\otimes\mathcal{U}_r^\vee)=0$, *for* $j=2,3$.

证明. 由于 $\mathcal{F}_r$ 的秩为 r ，且关于 ξ是 Ulrich 向量丛，因此一般成员$[\mathcal{U}_r]\in\mathcal{M}(r)$也满足同样的性质，因为 Ulrich 性在不可约族中是开性质，如 $\mathcal{M}(r)$ 所示。出于相同的原因， $c_1(\mathcal{U}_r)=c_1(\mathcal{F}_r)=c_1(\mathcal{G}_r)$，如 (4.6) 中那样，并且 $\mu(\mathcal{U}_r)=\mu(\mathcal{F}_r)=\mu(\mathcal{U}_{r-1})$。

由于如上所述， $\mathcal{F}_r$ 是单纯的，由半连续性可知 $h^0(\mathcal{U}_r\otimes\mathcal{U}_r^\vee)=1$，即 $\mathcal{U}_r$ 是单纯的，特别地，它是不可分解的。

性质 (ii) 可通过将 $\mathcal{F}_r$ 特化为上文构造的向量丛 $\mathcal{G}_r$ ，并分别利用半连续性以及引理 4.3-(iii) 和 (ii) 得出。性质 (i) 由引理 4.3-(vi) 得出，因为给定的 χ 仅取决于两个因子的陈类以及 X_0，而这些在不可约族 $\mathcal{M}(r)$中保持不变。□

我们希望证明，一般成员 $[\mathcal{U}_r]\in\mathcal{M}(r)$ 也对应于一个斜率稳定向量丛 $\mathcal{U}_r$。为此，我们首先需要以下辅助结果。

引理 4.6。设 $r \geqslant 2$ 为一个整数，并假设 $[\mathcal{F}_r] \in \mathcal{M}(r)^{\mathrm{ext}}$ 位于一个如 (4.18) 所示的非分裂正合列中，其中 $[\mathcal{U}_{r-1}] \in \mathcal{M}(r-1)$ 关于 ξ 是斜率稳定的。则若 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{F}_r$的一个破坏稳定性的子层，则 $\mathcal{D}^\vee \cong \mathcal{U}_{r-1}^\vee$ 且 $(\mathcal{F}_r/\mathcal{D})^\vee \cong L_{\epsilon_r}^\vee$；进一步地，若 $\mathcal{F}_r/\mathcal{D}$ 是无挠的，则 $\mathcal{D} \cong \mathcal{U}_{r-1}$ 且 $\mathcal{F}_r/\mathcal{D} \cong L_{\epsilon_r}$。

证明。推理与 [13, 引理 4.5], 类似；为方便读者，我们在此加以说明。假设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{F}_r$的一个破坏稳定性的子层，即 $0 < \mathbf{rk}(\mathcal{D}) < \mathbf{rk}(\mathcal{F}_r) = r$ 且 $\mu(\mathcal{D}) \geqslant \mu = \mu(\mathcal{F}_r)$。定义这些层

$$\mathcal{Q} := \mathrm{Im}\{\mathcal{D} \subset \mathcal{U}_r \to L_{\epsilon_r}\} \text{ and } \mathcal{K} := \mathrm{Ker}\{\mathcal{D} \to \mathcal{Q}\}$$

于是，(4.18) 可写成如下具有正合行与列的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{K} & \to & \mathcal{D} & \to & \mathcal{Q} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{U}_{r-1} & \to & \mathcal{F}_r & \to & L_{\epsilon_r} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{K}' & \to & \mathcal{F}_r/\mathcal{D} & \to & \mathcal{Q}' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

定义层 $\mathcal{K}'$ 和 $\mathcal{Q}'$。我们有 $\mathbf{rk}(\mathcal{Q}) \geq 1$。

假设 $\mathbf{rk}(\mathcal{Q}) = 0$。则 $\mathcal{Q} = 0$，由此$\mathcal{K} \cong \mathcal{D}$ 和$\mathcal{Q}' \cong L_{\epsilon_r}$。由于 $\mu(\mathcal{K}) = \mu(\mathcal{D}) \geqslant \mu = \mu(\mathcal{U}_{r-1})$, 且 $\mathcal{U}_{r-1}$ 是斜率稳定的，我们必有 $\mathbf{rk}(\mathcal{K}) = \mathbf{rk}(\mathcal{U}_{r-1}) = r-1$。由此可得 $\mathbf{rk}(\mathcal{K}') = 0$。由于

$$c_1(\mathcal{K}) = c_1(\mathcal{U}_{r-1}) - c_1(\mathcal{K}') = c_1(\mathcal{U}_{r-1}) - D',$$

其中 D' 是支撑于 $\mathcal{K}'$的支撑的余维一部分上的有效因子，我们有

$$\mu \leqslant \mu(\mathcal{K}) = \frac{(c_1(\mathcal{U}_{r-1}) - D') \cdot \xi^2}{r-1} = \frac{c_1(\mathcal{U}_{r-1}) \cdot \xi^2}{r-1} - \frac{D' \cdot \xi^2}{r-1} = \mu - \frac{D' \cdot \xi^2}{r-1}.$$

因此 $D' = 0$，这意味着 $\mathcal{K}'$ 支撑于余维至少为二的部分上。于是，对 $i \leqslant 1$而言，层 $\mathfrak{e}xt^i(\mathcal{K}', \mathcal{O}_{X_0})$为零，由此可得

$$\mathcal{D}^\vee \cong \mathcal{K}^\vee \cong \mathcal{U}_{r-1}^\vee \text{ and } (\mathcal{F}_r/\mathcal{D})^\vee \cong \mathcal{Q}'^\vee \cong L_{\epsilon_r}^\vee,$$

如所求。若进一步假设 $\mathcal{F}_r/\mathcal{D}$ 是无挠的，则必有 $\mathcal{K}' = 0$，从而 $\mathcal{D} \cong \mathcal{U}_{r-1}$和$\mathcal{F}_r/\mathcal{D} \cong L_{\epsilon_r}$。

接下来我们证明 $\mathbf{rk}(\mathcal{Q}) = 1$ 不可能成立。事实上，若 $\mathbf{rk}(\mathcal{Q}) = 1$，则 $\mathbf{rk}(\mathcal{K}) = \mathbf{rk}(\mathcal{D}) - 1 \leqslant r-2 < r-1 = \mathbf{rk}(\mathcal{U}_{r-1})$，且 $\mathbf{rk}(\mathcal{Q}') = 0$；特别地，$\mathcal{Q}'$ 是一个挠层。由于

$$c_1(\mathcal{K}) = c_1(\mathcal{D}) - c_1(\mathcal{Q}) = c_1(\mathcal{D}) - c_1(L_{\epsilon_r}) + c_1(\mathcal{Q}') = c_1(\mathcal{D}) - c_1(L_{\epsilon_r}) + D,$$

其中 D 要么是支撑于 $\mathcal{Q}'$ 的支撑的余维一部分上的有效因子，要么在 $\mathbf{codim}(\mathrm{Supp}(\mathcal{Q}')) \geqslant 2$ 时为 $D = 0$。那么，我们有

$$\begin{aligned}
\mu(\mathcal{K}) &= \frac{\Big(c_1(\mathcal{D}) - c_1(L_{\epsilon_r}) + D\Big) \cdot \xi^2}{\mathrm{rk}(\mathcal{K})} \geqslant \frac{\Big(c_1(\mathcal{D}) - c_1(L_{\epsilon_r})\Big) \cdot \xi^2}{\mathrm{rk}(\mathcal{K})} \\
&= \frac{\mu(\mathcal{D})\mathrm{rk}(\mathcal{D}) - c_1(L_{\epsilon_r}) \cdot \xi^2}{\mathrm{rk}(\mathcal{K})} = \frac{\mu(\mathcal{D})\mathrm{rk}(\mathcal{D}) - \mu}{\mathrm{rk}(\mathcal{D}) - 1} \geq \frac{\mu \mathrm{rk}(\mathcal{D}) - \mu}{\mathrm{rk}(\mathcal{D}) - 1} = \mu
\end{aligned}$$

这与 $\mathcal{U}_{r-1}$的斜率稳定性相矛盾。 □

引理 4.7。设 $r \geqslant 2$ 为整数。假设一般成员 $[\mathcal{U}_{r-1}] \in \mathcal{M}(r-1)$对应于斜率稳定向量丛 $\mathcal{U}_{r-1}$。那么概形 $\mathcal{M}(r)$一般光滑，其维数为

$$\dim(\mathcal{M}(r)) = \begin{cases} \frac{(r^2-1)}{4}(6b_0-4), & if\ r\ is\ odd, \\ \frac{r^2}{4}(6b_0-4)+1, & if\ r\ is\ even. \end{cases}$$

此外，$\mathcal{M}(r)$ 适当包含局部闭子概形$\mathcal{M}(r)^{\mathrm{ext}}$，即 $\dim(\mathcal{M}(r)^{\mathrm{ext}}) < \dim(\mathcal{M}(r))$。

证明。考虑一般成员 $[\mathcal{U}_r] \in \mathcal{M}(r)$；那么由引理 4.5 可知，它满足 $h^0(\mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee) = 1$ and$h^j(\mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee) = 0$ for $j = 2, 3$。

由 $h^2(\mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee) = 0$ 这一事实可知，$\mathcal{M}(r)$ 是维数为 $\dim(\mathcal{M}(r)) = h^1(\mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee)$ 的一般光滑概形（例如参见 [11, 命题 2.10]）。另一方面，由于 $h^3(\mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee) = 0$and $h^0(\mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee) = 1$，我们有 $h^1(\mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee) = -\chi(\mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee) + 1$。因此，关于 $\dim(\mathcal{M}(r))$ 的公式可直接由引理 4.5-(i) 得出。

同样，根据假设，$\mathcal{U}_{r-1}$ of $\mathcal{M}(r-1)$的一般成员也斜率稳定，满足 $h^0(\mathcal{U}_{r-1} \otimes \mathcal{U}_{r-1}^\vee) = 1$。因此，利用引理 4.5-(ii)，按照上述相同的推理可得

$$\dim(\mathcal{M}(r-1)) = h^1(\mathcal{U}_{r-1} \otimes \mathcal{U}_{r-1}^\vee) = -\chi(\mathcal{U}_{r-1} \otimes \mathcal{U}_{r-1}^\vee) + 1, \tag{4.25}$$

其中 $\chi(\mathcal{U}_{r-1} \otimes \mathcal{U}_{r-1}^\vee)$与引理 4.5-(i) 中相同（将 r 替换为 $r-1$）。此外，由 $\mathcal{U}_{r-1}$ 到 $\mathcal{G}_{r-1}$ 的特化以及半连续性可知，

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(L_{\epsilon_r}, \mathcal{U}_{r-1})) = h^1(\mathcal{U}_{r-1} \otimes L_{\epsilon_r}^\vee) \leqslant h^1(\mathcal{G}_{r-1} \otimes L_{\epsilon_r}^\vee), \tag{4.26}$$

其中后者与引理 4.3-(ii) 中相同（将 r 替换为 $r-1$）。因此，根据 $\mathcal{M}(r)^{\mathrm{ext}}$ 的定义以及 (4.25)-(4.26)，可得

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{M}(r)^{\mathrm{ext}}) &\leqslant \dim(\mathcal{M}(r-1)) + \dim(\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(L_{\epsilon_r}, \mathcal{U}_{r-1})) \\ &= -\chi(\mathcal{U}_{r-1} \otimes \mathcal{U}_{r-1}^\vee) + 1 + h^1(\mathcal{U}_{r-1} \otimes L_{\epsilon_r}^\vee) - 1 \\ &\leqslant -\chi(\mathcal{U}_{r-1} \otimes \mathcal{U}_{r-1}^\vee) + h^1(\mathcal{G}_{r-1} \otimes L_{\epsilon_r}^\vee). \end{aligned}$$

另一方面，根据上述讨论，

$$\dim(\mathcal{M}(r)) = -\chi(\mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee) + 1.$$

因此，要证明 $\dim(\mathcal{M}(r)^{\mathrm{ext}}) < \dim(\mathcal{M}(r))$，只需证明对于任意整数$r \geqslant 2$，以下不等式成立

$$-\chi(\mathcal{U}_{r-1} \otimes \mathcal{U}_{r-1}^\vee) + h^1(\mathcal{G}_{r-1} \otimes L_{\epsilon_r}^\vee) < -\chi(\mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee) + 1$$

成立。注意，前一个不等式也可写为

$$-\chi(\mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee) + 1 + \chi(\mathcal{U}_{r-1} \otimes \mathcal{U}_{r-1}^\vee) - h^1(\mathcal{G}_{r-1} \otimes L_{\epsilon_r}^\vee) > 0, \tag{4.27}$$

容易看出，对于任意 $r \geqslant 2$，该式均成立。

事实上，利用引理 4.5-(i) 和 4.3-(ii)：若 r 为偶数，则 (4.27) 的左边为$rb_0 + 2 + \frac{(r-2)}{2}$，显然为~~正~~，因为 $r, b_0 \geqslant 2$；若 r 为奇数，则 $r \geqslant 3$，且 (4.27) 的左边为 $(r-1)(2b_0-3) + \frac{(r-3)}{2}$，在假设 $r \geqslant 3, b_0 \geqslant 2$ 下显然为~~正~~。□

现在我们可以证明 $\mathcal{M}(r)$ 的一般成员是斜率稳定的。

命题 4.8. 设 $r \geqslant 1$ 为一个整数。一般成员 $[\mathcal{U}_r] \in \mathcal{M}(r)$ 对应于一个斜率稳定向量丛。

证明。我们对 r 使用归纳法；对于 $r = 1$，结论显然成立，此时 $\mathcal{U}_1 = L_1$,$\mathcal{M}(1) = \{L_1\}$ 是一个单元素集，且 $\mathcal{M}(1)^{\mathrm{ext}} = \emptyset$。

因此假设 $r \geqslant 2$，且 $\mathcal{M}(r)$ 的一般成员并非斜率稳定，而 $\mathcal{M}(r-1)$ 的一般成员是斜率稳定的。那么，仿照 [13, 命题 4.7], ，我们可以找到一个定义在单位圆盘 Δ 上的向量丛 $\{\mathcal{U}_r^{(t)}\}$ 的单参数族，使得当 $t \neq 0$ 时，$\mathcal{U}_r^{(t)}$ 是 $\mathcal{M}(r)$ 的一般成员，而 $\mathcal{U}_r^{(0)}$ 属于 $\mathcal{M}(r)^{\mathrm{ext}}$，并且我们有一个不稳定化序列

$$0 \to \mathcal{D}^{(t)} \to \mathcal{U}_r^{(t)} \to \mathcal{Q}^{(t)} \to 0 \tag{4.28}$$

对于 $t \neq 0$，我们可以假设其是饱和的，也就是说，$\mathcal{Q}^{(t)}$ 无挠，因此 $\mathcal{D}^{(t)}$ 和 $\mathcal{Q}^{(t)}$ 是（Ulrich）向量丛（见 [11, 定理 2.9] 或 [5, (3.2)]）。

$\mathbb{P}(\mathcal{Q}^{(t)}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{U}_r^{(t)})$ 的极限定义了 $\mathbb{P}(\mathcal{U}_r^{(0)})$ 的一个子簇，其维数与 $\mathbb{P}(\mathcal{Q}^{(t)})$ 相同，因此得到一个秩为 $\mathrm{rk}(\mathcal{Q}^{(t)})$ 的相干层 $\mathcal{Q}^{(0)}$，并有一个满射 $\mathcal{U}_r^{(0)} \to \mathcal{Q}^{(0)}$。记其核为 $\mathcal{D}^{(0)}$，则 $\mathrm{rk}(\mathcal{D}^{(0)}) = \mathrm{rk}(\mathcal{D}^{(t)})$，且 $c_1(\mathcal{D}^{(0)}) = c_1(\mathcal{D}^{(t)})$。于是，(4.28) 特化为 $t = 0$ 的一个不稳定化序列。由引理 4.6 可知，$\mathcal{D}^{(0)^\vee}$（分别地，$\mathcal{Q}^{(0)^\vee}$）是 $\mathcal{M}(r-1)$ 中某个成员的对偶（分别地，是 L_{ϵ_r} 的对偶）。由此可得，$\mathcal{D}^{(t)^\vee}$（分别地，$\mathcal{Q}^{(t)^\vee}$）是 $\mathfrak{U}(r-1)$ 中某个成员的对偶的变形（分别地，是 $L_{\epsilon_r}^\vee$ 的变形）；因此，$\mathcal{D}^{(t)}$ 是 $\mathcal{M}(r-1)$ 中某个成员的变形，因为二者都是局部自由的；基于同样的理由，$\mathcal{Q}^{(t)} \cong L_{\epsilon_r}$ 也是如此。

换言之，$\mathcal{M}(r)$的一般成员是L_{ϵ_r}与 $\mathcal{M}(r-1)$的一个成员之间的扩张。因此，$\mathcal{M}(r) = \mathcal{M}(r)^{\mathrm{ext}}$，这与引理 4.7矛盾。□

综合前述结果，得到以下

定理4.9. 设 $(X_0, \xi) \cong (\mathbb{P}(\mathcal{E}_0), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_0)}(1))$ 是一个以 $\mathbb{F}_0$ 为底的三维卷曲，且 $\mathcal{E}_0$ 如假设 1.8 所述。设 $\varphi : X_0 \to \mathbb{F}_0$ 为卷曲映射，F 为 φ-纤维。设 $r \geqslant 2$ 为任意整数。那么，在 X_0 上相对于 ξ 为 Ulrich 且第一陈类为下述形式的秩为 r 的向量丛 $\mathcal{U}_r$ 的模空间

$$c_1(\mathcal{U}_r) = \begin{cases} r\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3, b_0 - 3) + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}\left(\frac{r-3}{2}, \frac{(r-3)}{2}(b_0 - 2)\right), & \text{if } r \text{ is odd}, \\ r\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}(b_0 - 2)\right), & \text{if } r \text{ is even}. \end{cases}$$

非空，并且包含一个维数为 $\mathcal{M}(r)$ 的一般光滑分支

$$\dim(\mathcal{M}(r)) = \begin{cases} \frac{(r^2-1)}{4}(6b_0 - 4), & \text{if } r \text{ is odd}, \\ \frac{r^2}{4}(6b_0 - 4) + 1, & \text{if } r \text{ is even}, \end{cases}$$

由 (1.6) 得到 $b_0 \geqslant 2$。此外，一般点 $[\mathcal{U}_r] \in \mathcal{M}(r)$ 对应于一个斜率稳定向量丛，其相对于 ξ 的斜率为 $\mu(\mathcal{U}_r) = 8b_0 - k_0 - 3$。

证明。由定理 3.1、(4.6)、(4.7) 以及引理 4.5、4.7 和命题 4.8 可直接得出。这里略微滥用记号，用同一个符号 $\mathcal{M}(r)$ 表示光滑模空间族，该族产生相应模空间中一般光滑的不可约分支。□

4.2. 关于 $\mathbb{F}_e$，$e > 0$ 上三维卷曲的高秩 Ulrich 向量丛。这里我们聚焦于 $e > 0$ 的情形。我们将采用的策略与 § 4.1 中略有不同。更确切地说，与之前一样，我们将通过归纳法定义 (X_e, ξ) 上向量丛的不可约族，其一般成员将是斜率稳定 Ulrich 丛，并通过归纳法由低秩 Ulrich 丛的扩张变形得到。与 $e = 0$ 的情形相比，主要区别在于，当 $e > 0$ 时，(X_e, ξ) 上不存在关于 ξ 的 Ulrich 线丛，这可由定理 2.1 得出（参见主定理 (a)）。

因此，对于偶数秩情形，我们将如定理 3.4 所示，使用秩 2 Ulrich 向量丛作为归纳过程的起点。随后，通过扩张、递归过程、变形和模理论，我们能够在 (X_e, ξ) 上构造偶数秩 $r = 2h$ 的斜率稳定 Ulrich 向量丛，其中 $h \geqslant 2$ 可取任意值，并研究它们的模分支。

对于奇数秩，我们将改用 [2] 中关于 $\mathbb{F}_e$ 上秩 3 向量丛的一些结果；这些结果表明，对于任意 $e > 0$，它们都是关于 $c_1(\mathcal{E}_e) = 3C_e + b_e f = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e)$ 的 Ulrich 向量丛，接着

我们将应用定理 1.7，在 (X_e,ξ) 上构造秩 3 向量丛 $e>0$，它们是关于 ξ 的 Ulrich 向量丛（参见定理 4.14）。然后，这些秩 3 向量丛与定理 3.4 中的 $[\mathcal{U}_2]\in\mathcal{M}$ 一般情形相结合，将使我们能够对 X_e 应用归纳过程，也适用于任意 $h\geqslant 1$ 的奇数秩 $r=2h+1$。为避免混淆，我们将分别讨论任意 $h\geqslant 1$ 的偶数秩 $r=2h$ 和奇数秩 $r=2h+1$。

偶数秩：在秩为偶数的情形下，令 $r=2h$，其中 $h\geqslant 1$ 为整数。我们首先定义不可约概形 $\mathcal{M}(2)$，将其取为定理 3.4 中的分支 $\mathcal{M}$。回顾 $\mathcal{M}(2)=\mathcal{M}$是一般光滑的，其维数为 $\dim(\mathcal{M}(2))=6b_e-9e-3$，且一般成员$[\mathcal{U}_2]\in\mathcal{M}(2)$ 是 X_e 上的一个秩 2 向量丛，它是 Ulrich 且关于 ξ斜率稳定，斜率为$\mu(\mathcal{U}_2)=8b_e-k_e-12e-3$，其第一陈类为 $c_1(\mathcal{U}_2)=2\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1,b_e-e-2)$。

假设通过归纳法，我们已经构造了一个不可约概形 $\mathcal{M}(2h-2)$，其中 $h\geqslant 2$；类似于 [15]，我们定义 $\mathcal{M}(2h)$ 为 $X_e(\xi)$ 上 Ulrich 丛的模空间中包含丛 $\mathcal{F}_{2h}$ 的分支（事先可能为空），这些丛是如下形式的非平凡扩张

$$0\to\mathcal{U}_2'\to\mathcal{F}_{2h}\to\mathcal{U}_{2h-2}\to 0, \tag{4.29}$$

满足 $[\mathcal{U}_2']\in\mathcal{M}(2)$、$[\mathcal{U}_{2h-2}]\in\mathcal{M}(2h-2)$，且当 $h=2$ 时 $\mathcal{U}_2'\ncong\mathcal{U}_{2h-2}$。与 § 4.1 中的情形 $e=0$ 类似，我们令 $\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}$ 表示 $\mathcal{M}(2h)$ 中由形如 (4.29) 的非平凡扩张构成的向量丛的轨迹。

在接下来的结果中，我们将证明形如 (4.29) 的非平凡扩张总是存在，且 $\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}\neq\emptyset$，因此特别地，对任意 $h\geqslant 2$，都有 $\mathcal{M}(2h)\neq\emptyset$。在下文的陈述与证明中，我们将采用以下记号：$\mathcal{U}_2'$ 表示 $\mathcal{M}(2)$ 的一般成员，$\mathcal{U}_{2h-2}$表示 $\mathcal{M}(2h-2)$ 的一般成员，且当 $h=2$ 时 $\mathcal{U}_2'\ncong\mathcal{U}_{2h-2}$。我们用 $\mathcal{F}_{2h}$ 表示 $\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}$ 的一般成员；在估计上同调群时，我们将利用这样一个事实：$\mathcal{U}_{2h}$ 在一个不可约平坦族中专化为 $\mathcal{F}_{2h}$。

所有按 (4.29) 递归定义的向量丛 $\mathcal{F}_{2h}$, $h\geqslant 2$ 的秩均为 $2h$，且关于 ξ 是 Ulrich 丛，因为关于 ξ 为 Ulrich 丛的向量丛的扩张仍关于 ξ 为 Ulrich 丛。它们的第一陈类为

$$c_1(\mathcal{F}_{2h}):=2h\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(h,h(b_e-e-2))=h\,c_1(\mathcal{U}_2), \tag{4.30}$$

其中 $h=\frac{r}{2}$ 关于 ξ 的斜率为

$$\mu(\mathcal{F}_{2h})=8b_e-k_e-12e-3. \tag{4.31}$$

由定理 1.4-(a)，任何这样的向量丛 $\mathcal{F}_{2h}$ 都是严格半稳定且斜率半稳定的，因为它们是相同斜率的 Ulrich 丛的扩张。

L引理 4.10. 设 $h\geqslant 1$ 为一个整数，并假设对所有 $1\leqslant k\leqslant h$，$\mathcal{M}(2k)\neq\emptyset$。 n

(i) $h^j(\mathcal{U}_{2h}\otimes{\mathcal{U}_2'}^\vee)=h^j(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h}^\vee)=0$ *for* $j=2,3$,
(ii) $\chi(\mathcal{U}_{2h}\otimes{\mathcal{U}_2'}^\vee)=\chi(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h}^\vee)=h(4+9e-6b_e)$,
(iii) $h^j(\mathcal{U}_{2h}\otimes\mathcal{U}_{2h}^\vee)=0$ *for* $j=2,3$,
(iv) $\chi(\mathcal{U}_{2h}\otimes\mathcal{U}_{2h}^\vee)=h^2(4+9e-6b_e)$.

证明. 对于 $h=1$，(iii) 和 (iv) 可由定理 3.4 的证明得出。至于 (i)，当 $\mathcal{U}_2'=\mathcal{U}_2$ 时，消失性成立，这再次由定理 3.4 的证明可知；因此，根据半连续性，对于一般点对 $([\mathcal{U}_2'],[\mathcal{U}_2])\in\mathcal{M}(2)\times\mathcal{M}(2)$，消失性也成立。类似地，(ii) 可由定理 3.4 的证明得出，因为当 $\mathcal{U}_2$ 和 $\mathcal{U}_2'$ 在 $\mathcal{M}(2)$ 中变化时，给定的 χ 保持不变。

现在我们对任意整数 $h\geqslant 2$ 用归纳法证明这些结论。因此，假设对于所有小于 h 的正整数 k，这些结论均成立。

(i) 设 $j\in\{2,3\}$。由特化及 (4.29)，我们得到

$$h^j(\mathcal{U}_{2h}\otimes{\mathcal{U}_2'}^\vee)\leqslant h^j(\mathcal{F}_{2h}\otimes{\mathcal{U}_2'}^\vee)\leqslant h^j(\mathcal{U}_2'\otimes{\mathcal{U}_2'}^\vee)+h^j(\mathcal{U}_{2h-2}\otimes{\mathcal{U}_2'}^\vee),$$

而后者根据归纳法为 0。同理，由特化以及（4.29）的对偶可得

$$h^j(\mathcal{U}_2'\otimes{\mathcal{U}_{2h}}^\vee)\leqslant h^j(\mathcal{U}_2'\otimes{\mathcal{F}_{2h}}^\vee)\leqslant h^j(\mathcal{U}_2'\otimes{\mathcal{U}_2'}^\vee)+h^j(\mathcal{U}_2'\otimes{\mathcal{U}_{2h-2}}^\vee),$$

这些同样根据归纳法为 0。

(ii) 通过特化、(4.29) 和归纳法，我们得到

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{U}_{2h}\otimes\mathcal{U}_2'^{\vee}) &= \chi(\mathcal{F}_{2h}\otimes\mathcal{U}_2'^{\vee})=\chi(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_2'^{\vee})+\chi(\mathcal{U}_{2h-2}\otimes\mathcal{U}_2'^{\vee})\\ &= (4+9e-6b_e)+(h-1)(4+9e-6b_e)=h(4+9e-6b_e).\end{aligned}$$

同样，通过特化、(4.29) 的对偶和归纳法，$\chi(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h}{}^{\vee})$ 也成立。(iii) 令 $j=2$，3；通过特化，利用 (4.29) 及其对偶，我们得到

$$\begin{aligned}h^j(\mathcal{U}_{2h}\otimes\mathcal{U}_{2h}^{\vee}) &\leqslant h^j(\mathcal{F}_{2h}\otimes\mathcal{F}_{2h}^{\vee})\leqslant h^j(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{F}_{2h}^{\vee})+h^j(\mathcal{U}_{2h-2}\otimes\mathcal{F}_{2h}^{\vee})\\ &\leqslant h^j(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_2'^{\vee})+h^j(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee})+h^j(\mathcal{U}_{2h-2}\otimes\mathcal{U}_2'^{\vee})+h^j(\mathcal{U}_{2h-2}\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee}),\end{aligned}$$

根据归纳法，这些都等于 0。

(iv) 通过特化，利用 (4.29) 及其对偶，我们得到

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{U}_{2h}\otimes\mathcal{U}_{2h}^{\vee}) &= \chi(\mathcal{F}_{2h}\otimes\mathcal{F}_{2h}^{\vee})=\chi(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{F}_{2h}^{\vee})+\chi(\mathcal{U}_{2h-2}\otimes\mathcal{F}_{2h}^{\vee})\\ &= \chi(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_2'^{\vee})+\chi(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee})+\chi(\mathcal{U}_{2h-2}\otimes\mathcal{U}_2'^{\vee})+\chi(\mathcal{U}_{2h-2}\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee}).\end{aligned}$$

根据归纳法，这等于 $(4+9e-6b_e)+2(h-1)(4+9e-6b_e)+(h-1)^2(4+9e-6b_e)=h^2(4+9e-6b_e)$。□

命题 4.11。对所有整数 $h\geqslant 1$，概形 $\mathcal{M}(2h)$ 非空，且其一般成员 $[\mathcal{U}_{2h}]\in\mathcal{M}(2h)$ 对应于一个秩为 $2h$ 的向量丛 $\mathcal{U}_{2h}$，该向量丛关于 ξ 是 Ulrich，并且满足

$$c_1(\mathcal{U}_{2h})=2h\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(h,h(b_e-e-2))\text{ and }h^j(\mathcal{U}_{2h}\otimes\mathcal{U}_{2h}^{\vee})=0,\ j=2,3.$$

证明。我们对 h 作归纳法证明此结论，$h=1$ 的情形由 $\mathcal{M}(2)$ 的选取保证。因此，设 $h\geqslant 2$；对于一般的 $[\mathcal{U}_{2h-2}]\in\mathcal{M}(2h-2)$ 和 $[\mathcal{U}_2']\in\mathcal{M}(2)$，有

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}_{2h-2},\mathcal{U}_2'))=h^1(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee}).$$

由引理 4.10-(i)，对于 $j=2,3$，我们有 $h^j(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee})=0$。因此

$$\chi(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee})=h^0(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee})-h^1(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee})$$

因此，由特化以及 χ 在不可约族中的不变性，我们有

$$\begin{aligned}\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}_{2h-2},\mathcal{U}_2')) &= h^1(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee})\\ &= -\chi(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee})+h^0(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee})\\ &\geqslant -\chi(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee})=-\chi(\mathcal{U}_2'\otimes\mathcal{F}_{2h-2}^{\vee})=\\ &= (h-1)(6b_e-9e-4)>0\end{aligned}\tag{4.32}$$

后一个等式由引理 4.10-(ii)（其中以 $h-1$ 替换 h）得出，而最后一个严格不等式由 $h\geqslant 2$ 得出。因此，根据其定义，$\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}$ 非空，从而 $\mathcal{M}(2h)$ 也非空。

$\mathcal{M}(2h)$ 的成员秩为 $2h$，第一陈类为 $2h\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(h,h(b_e-e-2))$，如 (4.30) 所示，因为 $c_1(\mathcal{U}_{2h})=c_1(\mathcal{F}_{2h})$ 在 $\mathcal{M}(2h)$ 中为常数。显然，Ulrich 丛的扩张仍是 Ulrich 丛，因此 $\mathcal{U}_{2h}$ $\mathcal{M}(2h)$ 的一般成员是一个 Ulrich 丛。根据引理 4.10-(iii)，它还满足 $h^j(\mathcal{U}_{2h}\otimes\mathcal{U}_{2h}^{\vee})=0$，其中 $j=2$ 为 3。□

我们需要证明，$\mathcal{M}(2h)$ 的一般成员对应一个斜率稳定向量丛，$\mathcal{M}(2h)$ 一般光滑，并且需要计算其一般点处的维数 $[\mathcal{U}_{2h}]$。我们将再次通过对 h 使用归纳法来证明所有这些事实。与情形 $e=0$ 类似，我们需要以下辅助结果。

引理 4.12. 设 $\mathcal{F}_{2h}$ 对应于 $\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}$ 的一般成员，并且处于类似于 (4.29) 的扩张中。此外，假设 $\mathcal{U}_2'$ 和 $\mathcal{U}_{2h-2}$ 均为斜率稳定。设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{F}_{2h}$ 的破坏稳定性的子层。那么 $\mathcal{D}^{\vee}\cong\mathcal{U}_2'^{\vee}$ 和 $(\mathcal{F}_{2h}/\mathcal{D})^{\vee}\cong\mathcal{U}_{2h-2}^{\vee}$。

证明。其证明与引理 4.6 的证明几乎完全相同，读者可参阅该处。□

命题 4.13. 对所有整数 $h \geqslant 1$，概形 $\mathcal{M}(2h)$ 均非空，且一般光滑，维数为

$$\dim(\mathcal{M}(2h)) = h^2(6b_e - 9e - 4) + 1.$$

其一般成员对应于一个斜率稳定丛 $\mathcal{U}_{2h}$，其关于 ξ 的斜率为 $\mu(\mathcal{U}_{2h}) = 8b_e - k_e - 12e - 3$。此外，$\mathcal{M}(2h)$ 真包含局部闭子概形 $\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}$，即 $\dim(\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}) < \dim(\mathcal{M}(2h))$。

证明。我们对 h 进行归纳证明；当 $h = 1$ 时，由定理 3.4 中的 $\mathcal{M}(2)$ 可知命题成立。

因此设 $h \geqslant 2$，并假设我们已经对所有正整数 $k \leqslant h-1$ 证明了该引理；我们将对 h 证明它。

$\mathcal{M}(2)$ 和 $\mathcal{M}(2h-2)$ 的成员的斜率均等于 $8b_e - k_e - 12e - 3$，如 (4.31) 所示。因此，根据 [11, 引理 4.2], ，一般成员 $[\mathcal{F}_{2h}] \in \mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}$ 对应于一个单丛。于是，由半连续性可知，一般成员 $[\mathcal{U}_{2h}] \in \mathcal{M}(2h)$ 也对应于一个单丛，并且根据引理 4.10-(iii)，还满足 $h^j(\mathcal{U}_{2h} \otimes \mathcal{U}_{2h}^\vee) = 0,\ j = 2, 3$。

因此，$\mathcal{M}(2h)$ 在 $[\mathcal{U}_{2h}]$ 处光滑（例如参见 [11, 命题 2.10]），且

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{M}(2h)) &= h^1(\mathcal{U}_{2h} \otimes \mathcal{U}_{2h}^\vee) = -\chi(\mathcal{U}_{2h} \otimes \mathcal{U}_{2h}^\vee) + h^0(\mathcal{U}_{2h} \otimes \mathcal{U}_{2h}^\vee) \\ &= h^2(6b_e - 9e - 4) + 1, \end{aligned} \tag{4.33}$$

利用以下事实：$h^0(\mathcal{U}_{2h} \otimes \mathcal{U}_{2h}^\vee) = 1$ 是单纯的，因为 $\mathcal{U}_{2h}$ 是单纯的；并且根据引理 4.10-(iv)，$\chi(\mathcal{U}_{2h} \otimes \mathcal{U}_{2h}^\vee) = h^2(4 + 9e - 6b_e)$。由此可证，$\mathcal{M}(2h)$ 一般光滑，且具有上述维数。

最后，我们证明 $\mathcal{U}_{2h}$ 一般成员是斜率稳定的，并且 $\dim(\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}) < \dim(\mathcal{M}(2h))$。如果 $\mathcal{U}_{2h}$ 一般成员不斜率稳定，那么如命题 4.8 的证明所示，我们可以找到一个以圆盘 Δ 为底空间的向量丛单参数族 $\{\mathcal{U}_{2h}^{(t)}\}$，使得对于 $t \neq 0$，$\mathcal{U}_{2h}^{(t)}$ 是 $\mathcal{M}(2h)$ 的一般成员，而 $\mathcal{U}_{2h}^{(0)}$ 属于 $\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}$，并且存在一个不稳定化序列

$$0 \to \mathcal{D}^{(t)} \to \mathcal{U}_{2h}^{(t)} \to \mathcal{G}^{(t)} \to 0 \tag{4.34}$$

对于 $t \neq 0$，我们可以假定其饱和，也就是说，$\mathcal{G}^{(t)}$ 无挠，因此 $\mathcal{D}^{(t)}$ 和 $\mathcal{G}^{(t)}$ 是（Ulrich）向量丛（参见 [11, 定理 2.9] 或 [5, （3.2）]）。$\mathbb{P}(\mathcal{G}^{(t)}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{U}_{2h}^{(t)})$ 的极限定义了 $\mathbb{P}(\mathcal{U}_{2h}^{(0)})$ 的一个子簇，其维数与 $\mathbb{P}(\mathcal{G}^{(t)})$ 相同，因此得到一个秩为 $\mathbf{rk}(\mathcal{G}^{(t)})$ 的相干层 $\mathcal{G}^{(0)}$，并有一个满射 $\mathcal{U}_{2h}^{(0)} \twoheadrightarrow \mathcal{G}^{(0)}$。记其核为 $\mathcal{D}^{(0)}$，则 $\mathbf{rk}(\mathcal{D}^{(0)}) = \mathbf{rk}(\mathcal{D}^{(t)})$，且 $c_1(\mathcal{D}^{(0)}) = c_1(\mathcal{D}^{(t)})$。因此，（4.34）特化为 $t = 0$ 的一个不稳定化序列。

引理 4.12 得出，$\mathcal{D}^{(0)\vee}$（分别地，$\mathcal{G}^{(0)\vee}$）是 $\mathcal{M}(2)$（分别地，$\mathcal{M}(2h)$）中某个成员的对偶。由此可知，$\mathcal{D}^{(t)\vee}$（分别地，$\mathcal{G}^{(t)\vee}$）是 $\mathcal{M}(2)$（分别地，$\mathcal{M}(2h)$）中某个成员的对偶的变形；因此，$\mathcal{D}^{(t)}$（分别地，$\mathcal{G}^{(t)}$）是 $\mathcal{M}(2)$（分别地，$\mathcal{M}(2h)$）中某个成员的变形，因为二者都是局部自由的。由此可知，对于 $t \neq 0$，有 $[\mathcal{U}_{2h}^{(t)}] \in \mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}$。因此，

$$\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}} = \mathcal{M}(2h). \tag{4.35}$$

另一方面，我们有

$$\dim(\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}) \leqslant \dim(\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}_{2h-2}, \mathcal{U}_2'))) + \dim(\mathcal{M}(2h-2)) + \dim(\mathcal{M}(2)), \tag{4.36}$$

对于一般的 $[\mathcal{U}_{2h-2}] \in \mathcal{M}(2h-2)$ 和 $[\mathcal{U}_2'] \in \mathcal{M}(2)$。由于 $\mathcal{U}_{2h-2}$ 和 $\mathcal{U}_2'$ 由归纳法可知是相同斜率的斜率稳定对象，因此有 $h^0(\mathcal{U}_2' \otimes \mathcal{U}_{2h-2}^\vee) = 0$。由此，引理 4.10-(i)、(ii) 和 (iii) 得出

$$h^1(\mathcal{U}_2' \otimes \mathcal{U}_{2h-2}^\vee) = -\chi(\mathcal{U}_2' \otimes \mathcal{U}_{2h-2}^\vee) = (h-1)(6b_e - 9e - 4).$$

因此，由 (4.36) 和 (4.33) 可得

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}) &\leqslant (h-1)(6b_e - 9e - 4) - 1 + \left[(h-1)^2(6b_e - 9e - 4) + 1\right] + (6b_e - 9e - 3) \\ &= (h^2 - h + 1)(6b_e - 9e - 4) + 1 < h^2(6b_e - 9e - 4) + 1 = \dim(\mathcal{M}(2h)), \end{aligned}$$

这很容易由以下事实推出： $h \geqslant 2$。前一个不等式表明 $\dim(\mathcal{M}(2h)^{\mathrm{ext}}) < \dim(\mathcal{M}(2h))$，如所述；特别地，(4.35) 矛盾，因此也迫使 $\mathcal{U}_{2h}$ general 为斜率稳定。□

奇数秩：对于奇数秩，令 $r = 2h+1$，其中 $h \geqslant 1$ 为整数。第一步由以下结果给出。

定理 4.14. 设 $(X_e, \xi) \cong (\mathbb{P}(\mathcal{E}_e), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)}(1))$ 是一个以 $\mathbb{F}_e$ 为底的三维卷曲，满足 $e > 0$，且 $\mathcal{E}_e$ 如假设 1.8 所述。设 $\varphi\colon X_e \to \mathbb{F}_e$ 为卷曲映射， F 为 φ-纤维。那么， X_e 上关于 ξ 为 Ulrich 的秩 3 向量丛的模空间，其第一陈类

$$c_1 = 3\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e - 3) \tag{4.37}$$

非空，且包含一个维数为 $\mathcal{M}(3)$ 的一般光滑分支

$$\dim(\mathcal{M}(3)) = 2(6b_e - 9e - 4),$$

其一般点 $[\mathcal{U}_3]$ 对应于一个斜率稳定向量丛 $\mathcal{U}_3$，其关于 ξ 的斜率为

$$\mu(\mathcal{U}_3) = 8b_e - k_e - 12e - 3. \tag{4.38}$$

回顾主定理-(c) 中 $r = 3$ 的第一陈类表达式，由于在此情况下 $\frac{r-3}{2} = 0$，它与 (4.37) 中的表达式一致。

定理 4.14 的证明。与定理 3.4 的证明类似，我们考虑一个定义在 $\mathbb{F}_e$ 上的秩 3 向量丛 $\mathcal{A}_3$，它关于 $c_1(\mathcal{E}_e) = 3C_e + b_e f = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e)$ 是 Ulrich 向量丛，其中 $e > 0$ 任意。

根据 [2, 命题 5.3、定理 6.2]，这样的向量丛显然存在；事实上，沿用其中的记号，令 $r = 3$, $D \in |\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)|$ 为 $\mathbb{F}_e$ 上任意除子，极化为 $c_1(\mathcal{E}_e) = 3C_e + b_e f = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e)$（在 [2] 中，该极化记作 h），由此可知，满足下列条件的任意一对 $(3, D)$

$$T = 24e + \frac{b_e}{3}(\alpha + 3) \in \mathbb{Z} \text{ and } 6 + \frac{9e}{b_e} \leqslant \alpha \leqslant 15 - \frac{9e}{b_e}$$

并且满足

$$D(3C_e + b_e f) = \frac{3}{2}\big(2(3C_e + b_e f)^2 + (3C_e + b_e f)K_{\mathbb{F}_e}\big),$$

都是关于极化 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e)$ 的 $\mathbb{F}_e$ 上的可容许 Ulrich 对（参见定义 5.1、命题 5.3]）。

由于根据 (1.6) 可得 $b_e \geqslant 3e + 2$，因此有 $7 \leqslant \alpha \leqslant 14$。所以，若我们取例如 $\alpha = 12$ 和 $\beta = 4b_e - 3$，便可轻易验证前述关系成立。因此，$(3, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(12, 4b_e - 3)) = (3,\ 12C_e + (4b_e - 3)f)$ 是一个可容许 Ulrich 对，故 $\mathbb{F}_e$ 显然支撑秩 3 向量丛，例如 $\mathcal{A}_3$，它们相对于 $c_1(\mathcal{E}_e) = 3C_e + b_e f$ 是 Ulrich 丛，并满足$c_1(\mathcal{A}_3) = 12C_e + (4b_e - 3)f = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(12, 4b_e - 3)$，且可表示为适当的单射向量丛映射的余核（见 [2, 定理 4.1、(4.1) 及定理 6.2]）。此外，它们还满足$Ext^2(\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_3) = h^2(\mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{A}_3^\vee) = 0$（参见 [2, 引理 6.3]）。根据 [2, 命题 6.4],，任何此类向量丛$\mathcal{A}_3$ 都是斜率稳定的，因此是单纯的，即 $h^0(\mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{A}_3^\vee) = 1$。这些向量丛属于模空间 $\mathcal{M}^U_{c_1(\mathcal{E}_e)}(3, c_1, c_2)$，该模空间由具有给定陈类 c_1, c_2 且相对于 $c_1(\mathcal{E}_e)$ 为 Ulrich 丛的秩 3 向量丛构成，并且它是光滑、不可约的，维数为

$$\dim(\mathcal{M}^U_{c_1(\mathcal{E}_e)}(3, c_1, c_2)) = h^1(\mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{A}_3^\vee) = 1 - \chi(\mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{A}_3^\vee) = 2(6b_e - 9e - 4)$$

（参见 [2, 命题 6.4]）。$\mathcal{M}^U_{c_1(\mathcal{E}_e)}(3, c_1, c_2)$ 中的所有点均对应斜率稳定 Ulrich 丛，因为在 $\mathbb{F}_e$ 上，根据 [4,定理 2.1]，不存在关于 $c_1(\mathcal{E}_e) = 3C_e + b_e f = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e)$ 的 Ulrich 线丛（参见定理 1.4-(b) 或 [5, 第 3 节 , (3.2)]）。

Usin根据定理 1.7，我们因此首先考虑 $\mathbb{F}_e$ 上的丛 $\mathcal{H}_3 := \mathcal{A}_3(-c_1(\mathcal{E}_e))$，其 re 秩为 3，第一陈类为

$$c_1(\mathcal{H}_3) = c_1(\mathcal{A}_3) - 3c_1(\mathcal{E}_e) = 3C_e + (b_e - 3)f = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e - 3),$$

然后，在 X_e 上，我们取

$$\mathcal{V}_3 = \xi \otimes \varphi^*(\mathcal{H}_3), \tag{4.39}$$

它们是在 X_e 上关于 ξ 的秩 3 向量丛，并且是 Ulrich 丛；这由定理 1.7 可知，其第一陈类 $c_1 := c_1(\mathcal{V}_3)$ 如公式 (4.37) 所示。根据主定理–(a)，当 $e > 0$ 时，不存在关于 ξ 的 Ulrich 线丛；因此，再由定理 1.4-(b) 或第 3 节中的 (3.2) 可知，$\mathcal{V}_3$ 关于 ξ 也斜率稳定，其斜率如公式 (4.38) 所示；特别地，它也单纯。此外，由 Leray 同构、投影公式以及扭转的独立性可得

$$h^j(X_e, \mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_3^\vee) = h^j(\mathbb{F}_e, \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}_3^\vee) = h^j(\mathbb{F}_e, \mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{A}_3^\vee),\ 0 \leqslant j \leqslant 3, \tag{4.40}$$

这意味着，丛 $\mathcal{V}_3$ 充满了模空间中 $\mathcal{M}(3)$ 的一个光滑模空间分支，该模空间参数化 X_e 上关于 ξ 为 Ulrich 的秩 3 向量丛；这些向量丛关于 ξ 的第一陈类和斜率分别如 (4.37)、(4.38) 所示，其维数为

$$\dim(\mathcal{M}(3)) = \dim(\mathcal{M}^U_{c_1(\mathcal{E}_e)}(3, c_1, c_2)) = 2(6b_e - 9e - 4)$$

如 [2, 命题 6.4] 所示。 □

结合定理 4.14 中的 $\mathcal{M}(3)$，还考虑不可约概形 $\mathcal{M}(2)$，将其视为定理 3.4 中的分支 $\mathcal{M}$。回顾一下，$\mathcal{M}(2)$ 一般光滑，其维数为 $\dim(\mathcal{M}(2)) = 6b_e - 9e - 3$，且一般成员 $[\mathcal{U}_2] \in \mathcal{M}(2)$ 对应于 X_e 上的一个秩 2 向量丛，该向量丛关于 ξ 为 Ulrich 且斜率稳定，斜率为 $\mu(\mathcal{U}_2) = 8b_e - k_e - 12e - 3$，其第一陈类为 $c_1(\mathcal{U}_2) = 2\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1, b_e - e - 2)$。

如同偶秩情形所做的，若假设通过归纳法，对于某个整数 $h \geqslant 2$，我们已构造出一个不可约概形 $\mathcal{M}(2h-1)$，它是模空间的一个一般光滑模分支；该模空间参数化 X_e 上秩为 $r = 2h - 1$、相对于 ξ 为 Ulrich、第一陈类如主定理–(c) 所述，且一般点$[\mathcal{U}_{2h-1}] \in \mathcal{M}(2h-1)$ 斜率稳定、斜率为 $\mu(\mathcal{U}_{2h-1}) = 8b_e - k_e - 12e - 3$（相对于 ξ）的向量丛。因此，我们可以通过归纳法定义 $\mathcal{M}(2h+1)$ 为 (X_e, ξ) 上 Ulrich 丛模空间中（先验上可能为空的）包含如下向量丛 $\mathcal{F}_{2h+1}$ 的分支：这些向量丛是如下形式的非平凡扩张

$$0 \to \mathcal{U}_2 \to \mathcal{F}_{2h+1} \to \mathcal{U}_{2h-1} \to 0, \tag{4.41}$$

其中 $[\mathcal{U}_2] \in \mathcal{M}(2)$、$[\mathcal{U}_{2h-1}] \in \mathcal{M}(2h-1)$ 为一般情形，并令 $\mathcal{M}(2h+1)^{\mathrm{ext}}$ 表示$\mathcal{M}(2h+1)$中由 (4.41) 形式的非平凡扩张得到的向量丛的轨迹。

在接下来的结果中，我们将证明 (4.41) 中的非平凡扩张总是存在（参见命题 4.16 的证明），且 $\mathcal{M}(2h+1)^{\mathrm{ext}} \neq \emptyset$，因此对任意 $h \geqslant 2$，都有 $\mathcal{M}(2h+1) \neq \emptyset$。

所有按 (4.41) 递归定义的向量丛 $\mathcal{F}_{2h+1}$, $h \geqslant 2$ 的秩均为 $2h+1$，且相对于 ξ 是 Ulrich 向量丛，因为相对于 ξ 为 Ulrich 的向量丛的扩张仍然相对于 ξ 为 Ulrich。它们的第一陈类为

$$c_1(\mathcal{F}_{2h+1}) = c_1(\mathcal{U}_2) + c_1(\mathcal{U}_{2h-1}) = c_1(\mathcal{U}_3) + (h-1)c_1(\mathcal{U}_2),$$

i.e.

$$c_1(\mathcal{F}_{2h+1}) := (2h+1)\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e - 3) + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(h-1, (h-1)(b_e - e - 2)), \tag{4.42}$$

其中 $h = \frac{r-1}{2}$，其相对于 ξ 的斜率为

$$\mu(\mathcal{F}_{2h+1}) = 8b_e - k_e - 12e - 3. \tag{4.43}$$

由定理 1.4-(a) 可知，任何这样的向量丛 $\mathcal{F}_{2h+1}$ 都是严格半稳定且斜率半稳定的，因为它是相对于 ξ 具有相同斜率的 Ulrich 丛的扩张。

引理 4.15. 设 $h \geqslant 1$ 为一个整数，并假设对所有 $1 \leqslant k \leqslant h$，$\mathcal{M}(2k+1) \neq \emptyset$。那么

(i) $h^j(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee) = h^j(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_{2h+1}^\vee) = 0$ *for* $j = 2, 3$,

(ii) $\chi(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee) = (h-1)(4 + 9e - 6b_e) + (15e - 10b_e + 3)$ *whereas* $\chi(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_{2h+1}^\vee) = (h-1)(4 + 9e - 6b_e) + (12e - 8b_e - 3)$,

(iii) $h^j(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_{2h+1}^\vee) = 0$ *for* $j = 2, 3$,

(iv) $\chi(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_{2h+1}^\vee) = 1 + 9(h-1)(3e - 2b_e) + ((h-1)^2 + 2)(4 + 9e - 6b_e)$.

证明. 我们对 h 使用归纳法来证明。先考虑 $h=1$，即 $r=3$。在这种情况下，(iii) 和 (iv) 由定理 4.14 得出。事实上，取 $\mathcal{V}_3=\xi\otimes\varphi^*(\mathcal{H}_3)$，于是根据 (4.40) 和半连续性，有

$$h^j(X_e,\mathcal{U}_3\otimes\mathcal{U}_3^\vee)=h^j(X_e,\mathcal{V}_3\otimes\mathcal{V}_3^\vee)=h^j(\mathbb{F}_e,\mathcal{A}_3\otimes\mathcal{A}_3^\vee)=0,\ 2\leqslant j\leqslant 3,$$

这就证明了 $h=1$ 的 (iii)；此外，根据稳定性和半连续性，有 $h^0(X_e,\mathcal{U}_3\otimes\mathcal{U}_3^\vee)=h^0(X_e,\mathcal{V}_3\otimes\mathcal{V}_3^\vee)=1$，因此由上述消失性可得

$$\chi(X_e,\mathcal{U}_3\otimes\mathcal{U}_3^\vee)=1-h^1(X_e,\mathcal{U}_3\otimes\mathcal{U}_3^\vee)=1-\dim(\mathcal{M}(3))=1-2(6b_e-9e-4)=1+2(4+9e-6b_e),$$

这也证明了 $h=1$ 的 (iv)。

至于 (i)，根据半连续性，有

$$h^j(X_e,\mathcal{U}_3\otimes\mathcal{U}_2^\vee)\leqslant h^j(X_e,\mathcal{V}_3\otimes\mathcal{V}_2^\vee)\ \text{ and }\ h^j(X_e,\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_3^\vee)\leqslant h^j(X_e,\mathcal{V}_2\otimes\mathcal{V}_3^\vee),$$

对于任意 $0\leqslant j\leqslant 3$，其中 $\mathcal{V}_2=\mathcal{V}$ 与定理 3.4 的证明中相同，即 $\mathcal{V}_2=\xi\otimes\varphi^*(\mathcal{H})$，其中 $c_1(\mathcal{H})=C_e+(b_e-e-2)f=\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1,b_e-e-2)$。由 Leray 同构、投影公式和扭曲不变性可知，对于任意 $0\leqslant j\leqslant 3$，有

$$h^j(X_e,\mathcal{V}_3\otimes\mathcal{V}_2^\vee)=h^j(\mathbb{F}_e,\mathcal{H}_3\otimes\mathcal{H}^\vee)=h^j(\mathbb{F}_e,\mathcal{A}_3\otimes\mathcal{H}_1^\vee)$$

and

$$h^j(X_e,\mathcal{V}_2\otimes\mathcal{V}_3^\vee)=h^j(\mathbb{F}_e,\mathcal{H}\otimes\mathcal{H}_3^\vee)=h^j(\mathbb{F}_e,\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{A}_3^\vee),$$

其中，$\mathcal{A}_3=\mathcal{H}_3(c_1(\mathcal{E}_e))$ 是 $\mathbb{F}_e$ 上的秩 3 向量丛，如定理 4.14 的证明中所述；而 $\mathcal{H}_1=\mathcal{H}(c_1(\mathcal{E}_e))$ 是 $\mathbb{F}_e$ 上的秩 2 向量丛，如 (3.24) 中所述；二者均相对于 $c_1(\mathcal{E}_e)=\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3,b_e)$ 为 Ulrich。因此，由维数原因，$h^3(\mathbb{F}_e,\mathcal{A}_3\otimes\mathcal{H}_1^\vee)=h^3(\mathbb{F}_e,\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{A}_3^\vee)=0$，从而推出 $h^3(X_e,\mathcal{U}_3\otimes\mathcal{U}_2^\vee)=h^3(X_e,\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_3^\vee)=0$，如所要求。

为证明 $h^2(\mathbb{F}_e,\mathcal{A}_3\otimes\mathcal{H}_1^\vee)=0$，回顾 [2, 命题 6.4]，$\mathcal{A}_3$ 是以下形式的一般单射向量丛映射的余核

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(2,b_e-e-1)^{\oplus\gamma}\to\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(2,b_e-e)^{\oplus\delta}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3,b_e-1)^{\oplus\tau}\to\mathcal{A}_3\to 0,\tag{4.44}$$

对于如 [2, Thm. 4.1]，所述的适当正整数 γ、δ、τ，在我们的情形下可以看出 $\gamma=b_e-3e+3$、$\delta=b-3e$、$\tau=6$。将 (4.44) 张量化 $\mathcal{H}_1^\vee$，可得

$$h^2(\mathbb{F}_e,\mathcal{A}_3\otimes\mathcal{H}_1^\vee)\leqslant\delta\,h^2(\mathbb{F}_e,\mathcal{H}_1^\vee\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(2,b_e-e))+\tau\,h^2(\mathbb{F}_e,\mathcal{H}_1^\vee\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3,b_e-1)),$$

因此，要证明 $h^2(\mathbb{F}_e,\mathcal{A}_3\otimes\mathcal{H}_1^\vee)=0$，只需证明

$$h^2(\mathbb{F}_e,\mathcal{H}_1^\vee\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(2,b_e-e))=h^2(\mathbb{F}_e,\mathcal{H}_1^\vee\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3,b_e-1))=0.\tag{4.45}$$

考虑到 $\mathcal{H}_1$ 的秩为 2，即 $\mathcal{H}_1^\vee\cong\mathcal{H}_1(-c_1(\mathcal{H}_1))$，其中 $c_1(\mathcal{H}_1)=C_e+(b_e-e-2)f=\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1,b_e-e-2)$，由 (3.24) 可得 $\mathcal{H}_1(-c_1(\mathcal{H}_1))$ 可嵌入

$$0\to\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(2,e+1)\to\mathcal{H}_1(-c_1(\mathcal{H}_1))\to I_Z\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3,b_e+1)\to 0,\tag{4.46}$$

其中 $Z\subset\mathbb{F}_e$ 是 $\mathbb{F}_e$ 中长度为 $\ell(Z)=2b_e-3e$ 的一般零维子概形。因此，由 (4.46)，要证明 (4.45)，只需证明

$$h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(4,b_e+1))=h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(5,b_e+e))=h^2(I_Z\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(5,2b_e-e+1))=h^2(I_Z\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(6,2b_e))=0,$$

这些结论显然可由 $\mathbb{F}_e$ 上的 Serre 对偶或对正合列$0\to I_Z\to\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}\to\mathcal{O}_Z\to 0$的应用直接得到。这表明 $h^2(\mathbb{F}_e,\mathcal{A}_3\otimes\mathcal{H}_1^\vee)=0$。

要证明 $h^2(\mathbb{F}_e,\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{A}_3^\vee)=0$，则考虑 (4.44) 的对偶正合列，即

$$0\to\mathcal{A}_3^\vee\to\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-2,-b_e+e)^{\oplus\delta}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-3,-b_e+1)^{\oplus\tau}\to\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-2,-b_e+e+1)^{\oplus\gamma}\to 0,$$

并将其与 $\mathcal{H}_1$作张量积，得到

$$\begin{aligned}h^2(\mathbb{F}_e,\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{A}_3^\vee)\leqslant\ &\delta\,h^2(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-2,-b_e+e))+\tau\,h^2(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-3,-b_e+1))+\\&\gamma\,h^1(\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(-2,-b_e+e+1)).\end{aligned}$$

由（3.24），只需证明

$$h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1,e-1)) = h^2(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}) = h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1,e)) = 0,$$

and

$$h^2(I_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(2,b_e-1)) = h^2(I_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1,b_e-e)) = h^1(I_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(2,b_e)) = 0.$$

h^2 的消失性可由与上文相同的推理轻易得到；由 Leray 同构和投影公式可得 $h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(1,e)) = h^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(e) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$。最后，考虑到 Z 是 $\mathbb{F}_e$ 上由 $= 2b_e - 3e$ 个一般点构成的长度为 $\ell(Z)$ 的零维子概形，那么 Z 在线性系 $|\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(2,b_e)|$ 上施加独立条件，该线性系在 $\mathbb{F}_e$ 上的维数为 $3b_e - 3e + 2 > \ell(Z) = 2b_e - 3e$，因为 $b_e \geqslant 3e+2$ 由 (1.6) 得出；这意味着 $h^1(I_Z \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(2,b_e)) = h^1(\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(2,b_e))$，而后者通过标准计算为零。这说明 $h^2(\mathbb{F}_e, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{A}_3^\vee) = 0$，从而完成了关于 $h = 1$ 的 (i) 的证明。

最后，为了证明 $h = 1$ 的 (ii)，由 χ 在不可约族中的不变性以及上述结果可得

$$\chi(X_e, \mathcal{U}_3 \otimes \mathcal{U}_2^\vee) = \chi(X_e, \mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_2^\vee) = \chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{H}_3 \otimes \mathcal{H}^\vee) = \chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{H}_1^\vee)$$

and

$$\chi(X_e, \mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_3^\vee) = \chi(X_e, \mathcal{V}_3 \otimes \mathcal{V}_2^\vee) = \chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_3^\vee) = \chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{A}_3^\vee).$$

由于 $\mathcal{A}_3$ 和 $\mathcal{H}_1$ 都是关于 $c_1(\mathcal{E}_e) = 3C_e + b_e f = \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3,b_e)$ 的 Ulrich 丛，且其定义在 $\mathbb{F}_e$ 上，考虑光滑射影模型 $(S, \mathcal{O}_S(1)) \cong (\mathbb{F}_e, \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3,b_e))$。它是在适当射影空间中的一个次数为 d 的曲面：$= \deg(S) = (c_1(\mathcal{E}_e))^2 = 6b_e - 9e$。因此，由 [11, 命题 2.12]，可得

$$\chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{H}_1^\vee) = 3c_1(\mathcal{H}_1) \cdot K_S - c_1(\mathcal{A}_3) \cdot c_1(\mathcal{H}_1) + 6(2d-2)$$

and

$$\chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{A}_3^\vee) = 2c_1(\mathcal{A}_3) \cdot K_S - c_1(\mathcal{A}_3) \cdot c_1(\mathcal{H}_1) + 6(2d-2),$$

其中 $p_a(S) = 1$ 且 $K_S = -2C_e - (e+2)f$。利用 $c_1(\mathcal{H}_1) = 7C_e + (3b_e - e - 2)f$ 和 $c_1(\mathcal{A}_3) = 12C_e + (4b_e - 3)f$，可得

$$c_1(\mathcal{A}_3) \cdot c_1(\mathcal{H}_1) = 64b_e - 96e - 45,\ c_1(\mathcal{A}_3) \cdot K_S = 12e - 8b_e - 18,$$

$$c_1(\mathcal{H}_1) \cdot K_S = 9e - 6b_e - 10,\ 6(2d-2) = 12(d-1) = 72b_e - 108e - 12;$$

将这些计算代入前面的公式，得到

$$\chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{A}_3 \otimes \mathcal{H}_1^\vee) = 15e - 10b_e + 3 \text{ and } \chi(\mathbb{F}_e, \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{A}_3^\vee) = 12e - 8b_e - 3,$$

由此完成了对 $h = 1$ 的 (ii) 的证明。

We n现在用归纳法证明，所有结论对任意整数 $h \geqslant 2$ 也都成立。假设 e 因此 它们对所有满足 $1 \leqslant k \leqslant h-1$ 的正整数 k 都成立。

(i) 令 $j \in \{2,3\}$。由特化以及 (4.41) 与 $\mathcal{U}_2{}^\vee$ 张量积，得到

$$h^j(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee) \leqslant h^j(\mathcal{F}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee) \leqslant h^j(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee) + h^j(\mathcal{U}_{2h-1} \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee),$$

后者由归纳法可知为 0。类似地，通过特化并将 (4.41) 的对偶与 $\mathcal{U}_2$ 张量化，我们得到

$$h^j(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_{2h+1}^\vee) \leqslant h^j(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{F}_{2h+1}^\vee) \leqslant h^j(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee) + h^j(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_{2h-1}^\vee),$$

由归纳法可知它们再次为 0。

(ii) 通过特化，将 (4.41) 与 $\mathcal{U}_2{}^\vee$ 张量化，并运用归纳法，我们得到

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee) &= \chi(\mathcal{F}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee) = \chi(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee) + \chi(\mathcal{U}_{2h-1} \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee) \\ &= (4 + 9e - 6b_e) + (h-2)(4 + 9e - 6b_e) + (15e - 10b_e + 3).\end{aligned}$$

同样，通过特化、(4.41) 的对偶以及归纳法，我们得到

$$\begin{aligned}\chi(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_{2h+1}^\vee) &= \chi(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{F}_{2h+1}^\vee) = \chi(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_2{}^\vee) + \chi(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_{2h-1}^\vee) \\ &= (4 + 9e - 6b_e) + (h-2)(4 + 9e - 6b_e) + (12e - 8b_e - 3).\end{aligned}$$

(iii) 令 $j=2,\ 3$；通过特化，利用 (4.41) 及其对偶，我们得到

$$\begin{aligned} h^j(\mathcal{U}_{2h+1}\otimes\mathcal{U}_{2h+1}^\vee) &\leqslant h^j(\mathcal{F}_{2h+1}\otimes\mathcal{F}_{2h+1}^\vee)\leqslant \\ &\leqslant h^j(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{F}_{2h+1}^\vee)+h^j(\mathcal{U}_{2h-1}\otimes\mathcal{F}_{2h+1}^\vee) \\ &\leqslant h^j(\mathcal{U}_2\otimes{\mathcal{U}_2}^\vee)+h^j(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee)+ \\ &\quad +h^j(\mathcal{U}_{2h-1}\otimes{\mathcal{U}_2}^\vee)+h^j(\mathcal{U}_{2h-1}\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee), \end{aligned}$$

根据归纳法，它们都等于 0。

(iv) 由特化、(4.41) 及其对偶，我们有

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{U}_{2h+1}\otimes\mathcal{U}_{2h+1}^\vee) &= \chi(\mathcal{F}_{2h+1}\otimes\mathcal{F}_{2h+1}^\vee)=\chi(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{F}_{2h+1}^\vee)+\chi(\mathcal{U}_{2h-1}\otimes\mathcal{F}_{2h+1}^\vee) \\ &= \chi(\mathcal{U}_2\otimes{\mathcal{U}_2}^\vee)+\chi(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee)+\chi(\mathcal{U}_{2h-1}\otimes{\mathcal{U}_2}^\vee)+\chi(\mathcal{U}_{2h-1}\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee). \end{aligned}$$

根据归纳法，这等于

$$\begin{aligned} &(4+9e-6b_e)+(h-2)(4+9e-6b_e)+(h-2)(4+9e-6b_e)+(27e-18b_e)+1+ \\ &\qquad +9(h-2)(3e-2b_e)+((h-2)^2+2)(4+9e-6b_e)= \\ &=1+9(h-1)(3e-2b_e)+(4+9e-6b_e)(1+h-2+h-2+(h-2)^2+2)= \\ &\qquad =1+9(h-1)(3e-2b_e)+((h-1)^2+2)(4+9e-6b_e). \end{aligned}$$

□

命题 4.16. 对所有整数 $h\geqslant 1$，概形 $\mathcal{M}(2h+1)$ 非空，且其一般成员 $[\mathcal{U}_{2h+1}]\in\mathcal{M}(2h+1)$ 对应于一个秩为-$2h+1$ 的向量丛 $\mathcal{U}_{2h+1}$，该向量丛相对于 ξ 是 Ulrich 的，并且满足

$$c_1(\mathcal{U}_{2h+1})=(2h+1)\xi+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3,b_e-3))+\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(h-1,(h-1)(b_e-e-2))$$

以及 $h^j(\mathcal{U}_{2h+1}\otimes\mathcal{U}_{2h+1}^\vee)=0,\ j=2,3$。

证明。我们对 h 作归纳法证明，$h=1$ 的情形由按定理 4.14 所述选择 $\mathcal{M}(3)$ 即可满足。因此，设 $h\geqslant 2$；对于一般的 $[\mathcal{U}_{2h-1}]\in\mathcal{M}(2h-1)$ 和 $[\mathcal{U}_2]\in\mathcal{M}(2)$，有

$$\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}_{2h-1},\mathcal{U}_2))=h^1(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee).$$

由引理 4.15-(i)，对于 $j=2,\ 3$，我们有 $h^j(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee)=0$。因此

$$\chi(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee)=h^0(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee)-h^1(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee)$$

因此，由于特化以及 χ 在不可约族中的不变性，我们有

$$\begin{aligned} \dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}_{2h-1},\mathcal{U}_2)) &= h^1(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee) \\ &= -\chi(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee)+h^0(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee) \\ &\geqslant -\chi(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{U}_{2h-1}^\vee)=-\chi(\mathcal{U}_2\otimes\mathcal{F}_{2h-1}^\vee) \\ &= (h-2)(6b_e-9e-4)+(8b_e-12e+3)>0, \end{aligned} \tag{4.47}$$

后一个等式由引理 4.15-(ii) 得出（其中以 $h-1$ 替换 h），而最后一个严格不等式则由 (1.6) 根据 $h\geqslant 2$ 和 $b_e\geqslant 3e+2$ 得出。

上述计算证明 $\dim(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}_{2h-1},\mathcal{U}_2))>0$，即存在如 (4.41) 所示的非平凡扩张，并且概形 $\mathcal{M}(2h+1)^{\mathrm{ext}}$，从而 $\mathcal{M}(2h+1)$ 也非空。

$\mathcal{M}(2h+1)$ 的成员具有秩 $2h+1$，其第一陈类如 (4.42) 所示，因为 $c_1(\mathcal{U}_{2h+1})=c_1(\mathcal{F}_{2h+1})$ 在 $\mathcal{M}(2h+1)$ 中为常数。显然，Ulrich 丛的扩张仍然是 Ulrich 丛，因此一般成员 $[\mathcal{U}_{2h+1}]\in\mathcal{M}(2h+1)$ 对应于关于 ξ 的 Ulrich 丛。根据引理 4.15-(iii)，它还满足 $h^j(\mathcal{U}_{2h+1}\otimes\mathcal{U}_{2h+1}^\vee)=0$，对于 $j=2,\ 3$。□

我们需要证明，$\mathcal{M}(2h+1)$的一般成员对应一个关于 ξ斜率稳定的向量丛；$\mathcal{M}(2h+1)$一般光滑；并计算其一般点 $[\mathcal{U}_{2h+1}]$处的维数。我们仍将通过对h进行归纳法来证明所有这些结论。与前面的情形类似，我们需要以下辅助结果。

引理 4.17. 设 $\mathcal{F}_{2h+1}$ 对应于 $\mathcal{M}(2h+1)^{\text{ext}}$的一般成员，且该成员位于类似于 (4.41) 的扩张中。此外，假设 $\mathcal{U}_2$ 和 $\mathcal{U}_{2h-1}$ 均斜率稳定。设 $\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{F}_{2h+1}$的一个破坏稳定性的子层。那么$\mathcal{D}^\vee \cong {\mathcal{U}_2}^\vee$ 且 $(\mathcal{F}_{2h+1}/\mathcal{D})^\vee \cong \mathcal{U}_{2h-1}^\vee$。

证明。证明与引理 4.12 的证明完全相同，读者可参见该处。 □

命题 4.18. 对于所有整数 $h \geqslant 1$，概形 $\mathcal{M}(2h+1)$ 非空，且一般光滑，维数为

$$\dim(\mathcal{M}(2h+1)) = ((h-1)^2+2)(6b_e-9e-4)+9(h-1)(2b_e-3e).$$

Its 一般成员对应于一个斜率稳定丛 $\mathcal{U}_{2h+1}$，其关于 ξ 的斜率为

$$\mu(\mathcal{U}_{2h+1}) = 8b_e - k_e - 12e - 3.$$

此外，$\mathcal{M}(2h+1)$ 真包含局部闭子概形 $\mathcal{M}(2h+1)^{\text{ext}}$，即 $\dim(\mathcal{M}(2h+1)^{\text{ext}}) < \dim(\mathcal{M}(2h+1))$。

证明。我们对 h 用归纳法证明此结论。$h=1$ 的情形由 $\mathcal{M}(3)$ 满足，正如定理 4.14 中所述；在这种情形下，$\mathcal{M}(3)^{\text{ext}} = \emptyset$。

因此令 $h \geqslant 2$，并假设我们已证明该命题对所有正整数 $k \leqslant h-1$ 都成立；现在证明它对 h 成立。

$\mathcal{M}(2)$ 和 $\mathcal{M}(2h-1)$ 中各成员的斜率都等于 $8b_e - k_e - 12e - 3$，如 (4.43) 所示。因此，根据 [11, 引理 4.2], ，一般成员 $[\mathcal{F}_{2h+1}] \in \mathcal{M}(2h+1)^{\text{ext}}$ （由命题 4.16 可知其非空）对应一个单丛。因此，根据半连续性，一般成员 $[\mathcal{U}_{2h+1}] \in \mathcal{M}(2h+1)$ 也对应一个单丛，并且还满足 $h^j(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_{2h+1}^\vee) = 0$, $j = 2, 3$，这由引理 4.15-(iii) 得出。

因此，$\mathcal{M}(2h+1)$ 在 $[\mathcal{U}_{2h+1}]$ 处是光滑的（例如参见 [11, 命题 2.10]），其中

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{M}(2h+1)) &= h^1(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_{2h+1}^\vee) \\ &= -\chi(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_{2h+1}^\vee) + h^0(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_{2h+1}^\vee) \\ &= ((h-1)^2+2)(6b_e-9e-4)+9(h-1)(2b_e-3e), \end{aligned} \tag{4.48}$$

利用以下事实：$h^0(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_{2h}^\vee) = 1$作为 $\mathcal{U}_{2h+1}$ 是单纯的，以及引理 4.15-(iv) 中对 $\chi(\mathcal{U}_{2h+1} \otimes \mathcal{U}_{2h+1}^\vee)$ 的计算。这证明了 $\mathcal{M}(2h+1)$ 一般光滑，且维数如所述。

最后，我们证明 $\mathcal{U}_{2h+1}$ general 是斜率稳定的，并且 $\dim(\mathcal{M}(2h+1)^{\text{ext}}) < \dim(\mathcal{M}(2h+1))$。若 $\mathcal{U}_{2h+1}$ general 不斜率稳定，则可找到一个以圆盘 Δ 为底空间的向量丛单参数族 $\{\mathcal{U}_{2h+1}^{(t)}\}$，使得对于 $t \neq 0$，$\mathcal{U}_{2h+1}^{(t)}$ 是 $\mathcal{M}(2h+1)$ 的一般成员，且 $\mathcal{U}_{2h+1}^{(0)}$ 属于 $\mathcal{M}(2h+1)^{\text{ext}}$，并且存在一个不稳定化序列

$$0 \to \mathcal{D}^{(t)} \to \mathcal{U}_{2h+1}^{(t)} \to \mathcal{G}^{(t)} \to 0 \tag{4.49}$$

对于 $t \neq 0$，我们可以假设其是饱和的，也就是说，$\mathcal{G}^{(t)}$ 是无挠的，因此 $\mathcal{D}^{(t)}$ 和 $\mathcal{G}^{(t)}$ 都是（Ulrich）向量丛（见 [11, 定理 2.9] 或 [5, (3.2)]）。$\mathbb{P}(\mathcal{G}^{(t)}) \subset \mathbb{P}(\mathcal{U}_{2h+1}^{(t)})$的极限定义了 $\mathbb{P}(\mathcal{U}_{2h+1}^{(0)})$的一个子簇，其维数与 $\mathbb{P}(\mathcal{G}^{(t)})$相同，因此得到一个秩为 $\mathbf{rk}(\mathcal{G}^{(t)})$ 的相干层 $\mathcal{G}^{(0)}$，并有一个满射 $\mathcal{U}_{2h+1}^{(0)} \twoheadrightarrow \mathcal{G}^{(0)}$。记 $\mathcal{D}^{(0)}$ 为其核，则 $\mathbf{rk}(\mathcal{D}^{(0)}) = \mathbf{rk}(\mathcal{D}^{(t)})$ 且 $c_1(\mathcal{D}^{(0)}) = c_1(\mathcal{D}^{(t)})$。因此，(4.49) 特化为 $t=0$的不稳定化序列。

引理 4.17 得出，$\mathcal{D}^{(0)\vee}$（分别地，$\mathcal{G}^{(0)\vee}$）是 $\mathcal{M}(3)$ 中某个成员的对偶（分别地，是 $\mathcal{M}(2h+1)$ 中某个成员的对偶）。由此可知，$\mathcal{D}^{(t)\vee}$（分别地，$\mathcal{G}^{(t)\vee}$）是 $\mathcal{M}(2)$ 中某个成员的对偶的变形（分别地，是 $\mathcal{M}(2h+1)$ 中某个成员的对偶的变形），进而 $\mathcal{D}^{(t)}$（分别地，$\mathcal{G}^{(t)}$）是 $\mathcal{M}(2)$ 中某个成员的变形（分别地，是 $\mathcal{M}(2h+1)$ 中某个成员的变形），因为二者都是局部自由的。由此，$[\mathcal{U}_{2h+1}^{(t)}] \in \mathcal{M}(2h+1)^{\text{ext}}$ 对于$t \neq 0$。因此，

$$\mathcal{M}(2h+1)^{\text{ext}} = \mathcal{M}(2h+1). \tag{4.50}$$

另一方面，我们有

$$\dim(\mathcal{M}(2h+1)^{\mathrm{ext}}) \leqslant \dim(\mathbb{P}(\mathrm{Ext}^1(\mathcal{U}_{2h-1},\mathcal{U}_2))) + \dim(\mathcal{M}(2h-1)) + \dim(\mathcal{M}(2)), \tag{4.51}$$

对一般的 $[\mathcal{U}_{2h-1}] \in \mathcal{M}(2h-1)$ 和 $[\mathcal{U}_2] \in \mathcal{M}(2)$。由于 $\mathcal{U}_2$ 是斜率稳定的，并且由归纳法可知 $\mathcal{U}_{2h-1}$ 也是斜率稳定的，且二者斜率相同，因此有 $h^0(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_{2h-1}^\vee) = 0$。于是，(4.47) 给出

$$h^1(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_{2h-1}^\vee) = -\chi(\mathcal{U}_2 \otimes \mathcal{U}_{2h-1}^\vee) = (h-2)(6b_e - 9e - 4) + (8b_e - 12e + 3).$$

因此，由 (4.51)，并利用 (4.48) 以及根据定理 3.4，$\dim(\mathcal{M}(2)) = (6b_e - 9e - 3)$ 这一事实，可得

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{M}(2h+1)^{\mathrm{ext}}) &\leqslant (h-2)(6b_e - 9e - 4) + (8b_e - 12e + 3) - 1 + \\ &\quad + ((h-2)^2 + 2)(6b_e - 9e - 4) + 9(h-2)(2b_e - 3e) + (6b_e - 9e - 3) \\ &< ((h-1)^2 + 2)(6b_e - 9e - 4) + 9(h-1)(2b_e - 3e) = \dim(\mathcal{M}(2h+1)),\end{aligned}$$

因为 $h \geqslant 2$。前一个不等式表明，$\dim(\mathcal{M}(2h+1)^{\mathrm{ext}}) < \dim(\mathcal{M}(2h+1))$，如所述；特别地，(4.50) 矛盾，因此也迫使一般的 $\mathcal{U}_{2h+1}$ 斜率稳定。□

分别汇集前述关于偶数秩和奇数秩的结果，可得：

定理 4.19. 设 $(X_e, \xi) \cong (\mathbb{P}(\mathcal{E}_e), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_e)}(1))$ 是一个以 $\mathbb{F}_e$ 为底的三维卷曲，且 $e > 0$ 和 $\mathcal{E}_e$如假设 1.8 所述。设 $\varphi : X_e \to \mathbb{F}_e$ 为卷曲映射， F 为 φ- 纤维。设 $r \geqslant 2$ 为任意整数。

那么，在 X_e 上相对于 ξ 为 Ulrich 且第一陈类为下式的秩-r 向量丛 $\mathcal{U}_r$ 的模空间

$$c_1(\mathcal{U}_r) = \begin{cases} r\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3, b_e - 3) + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}\left(\frac{r-3}{2}, \frac{(r-3)}{2}(b_e - e - 2\right), & \textit{if } r \textit{ is odd}, \\ r\xi + \varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}\left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}(b_e - e - 2)\right), & \textit{if } r \textit{ is even}. \end{cases}$$

非空，并包含一个一般光滑分支 $\mathcal{M}(r)$，其维数为

$$\dim(\mathcal{M}(r)) = \begin{cases} \left(\frac{(r-3)^2}{4} + 2\right)(6b_e - 9e - 4) + \frac{9}{2}(r-3)(2b_e - 3e), & \textit{if } r \textit{ is odd}, \\ \frac{r^2}{4}(6b_e - 9e - 4) + 1, & \textit{if } r \textit{ is even}. \end{cases}$$

一般成员 $[\mathcal{U}_r] \in \mathcal{M}(r)$ 对应于一个斜率稳定向量丛，其相对于 ξ 的斜率为 $\mu(\mathcal{U}_r) = 8b_e - k_e - 12e - 3$。

证明. 偶数情形的结论直接由定理 3.4、(4.30)、(4.31) 以及命题 4.11、4.13 得出。奇数情形的结论则由定理 4.14、(4.42)、(4.43) 以及命题 4.16、4.18 得出 □

5. Final remarks on Ulrichness over $\mathbb{F}_e$, $e \geqslant 0$

作为主定理、主推论、定理 1.7 以及 [23, 命题 6.2]，中一一对应的直接推论，对于任意 $r \geqslant 1$ 和任意 $e \geqslant 0$，关于 Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_e$ 上秩为 r 的向量丛的模空间，有如下结果：这些向量丛相对于非常丰沛线丛 $c_1(\mathcal{E}_e) = 3C_e + b_e f$ 为 Ulrich，其中 $b_e \geqslant 3e + 2$ 如 (1.6) 中所示（ $r = 1$、2、3 的情形已由 [4, 12, 2] 知晓）。

定理 5.1. 对于任意整数 $e \geqslant 0$，考虑 Hirzebruch 曲面 $\mathbb{F}_e$，记 $\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(\alpha, \beta)$ 为 $\mathbb{F}_e$ 上的线丛 $\alpha C_e + \beta f$，其中 C_e 和 f 是 $\mathrm{Num}(\mathbb{F}_e)$ 的生成元。

考虑非常 ample 极化 $c_1(\mathcal{E}_e) = 3C_e + b_e f$，其中 $b_e \geqslant 3e + 2$。则 :

(a) $\mathbb{F}_e$ 相对于 $c_1(\mathcal{E}_e)$ 不支撑任何 Ulrich 线丛，除非 $e = 0$。在后一种情况下， $\mathbb{F}_0$ 上相对于 $c_1(\mathcal{E}_e)$ 为 Ulrich 的唯一线丛为

$$\mathcal{L}_1 := \mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(5, b_0 - 1) \text{ and } \mathcal{L}_2 := \mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2, 2b_0 - 1).$$

(b) 设 $e=0$，并令 $r\geqslant 2$ 为任意整数。那么， $\mathbb{F}_0$ 上的秩-r 向量丛 $\mathcal{H}_r$ 的模空间满足：这些向量丛相对于 $c_1(\mathcal{E}_0)$ 为 Ulrich，且其第一陈类为

$$c_1(\mathcal{H}_r)=\begin{cases}\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3(r+1),(r+1)b_0-3)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}\left(\frac{r-3}{2},\frac{(r-3)}{2}(b_0-2)\right), & \text{if } r \text{ is odd},\\ \mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(3r,rb_0)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}(b_0-2)\right), & \text{if } r \text{ is even}.\end{cases}$$

非空，且包含一个维数为 $\mathcal{M}_{\mathbb{F}_0}(r)$ 的一般光滑分支

$$\dim(\mathcal{M}_{\mathbb{F}_0}(r))=\begin{cases}\frac{(r^2-1)}{4}(6b_0-4), & \text{if } r \text{ is odd},\\ \frac{r^2}{4}(6b_0-4)+1, & \text{if } r \text{ is even}.\end{cases}$$

一般点 $[\mathcal{H}_r]\in\mathcal{M}_{\mathbb{F}_0}(r)$ 对应一个斜率稳定向量丛。

(c) 当 $e>0$ 时，令 $r\geqslant 2$ 为任意整数。那么，秩为 r、定义在 X_e 上、关于 $c_1(\mathcal{E}_e)$ 为 Ulrich 丛且第一陈类为 $\mathcal{H}_r$ 的向量丛的模空间

$$c_1(\mathcal{H}_r)=\begin{cases}\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3(r+1),(r+1)b_e-3)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}\left(\frac{r-3}{2},\frac{(r-3)}{2}(b_e-e-2)\right), & \text{if } r \text{ is odd},\\ \mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}(3r,rb_e)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_e}\left(\frac{r}{2},\frac{r}{2}(b_e-e-2)\right), & \text{if } r \text{ is even}.\end{cases}$$

非空，且包含一个维数为 $\mathcal{M}_{\mathbb{F}_e}(r)$ 的一般光滑分支

$$\dim(\mathcal{M}_{\mathbb{F}_e}(r))=\begin{cases}\left(\frac{(r-3)^2}{4}+2\right)(6b_e-9e-4)+\frac{9}{2}(r-3)(2b_e-3e), & \text{if } r \text{ is odd},\\ \frac{r^2}{4}(6b_e-9e-4)+1, & \text{if } r \text{ is even}.\end{cases}$$

一般点 $[\mathcal{H}_r]\in\mathcal{M}_{\mathbb{F}_e}(r)$ 对应一个斜率稳定向量丛。

证明。（a）当 $e>0$ 时， $\mathbb{F}_e$ 不支撑关于 $c_1(\mathcal{E}_e)=3C_e+b_ef$ 为 Ulrich 的线丛这一事实已在 [4, 定理 2.1] 中证明；不过，这一事实也可直接由主定理–（a）和定理 1.7 推出。

对于 $e=0$，注意到主定理–（a）中的线丛 L_1 和 L_2 关于 ξ 上的 X_0 为 Ulrich，通过推前以及定理 1.7，它们产生了关于 $c_1(\mathcal{E}_0)=3C_0+b_0f$ 上的 Ulrich 线丛。事实上

$$L_1\otimes\xi^\vee=\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2,-1)\text{ and }L_2\otimes\xi^\vee=\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1,b_0-1),$$

thus

$$\varphi_*(L_1\otimes\xi^\vee)=\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2,-1)\text{ and }\varphi_*(L_2\otimes\xi^\vee)=\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(-1,b_0-1),$$

从而得到

$$\mathcal{L}_1:=\varphi_*(L_1\otimes\xi^\vee)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(c_1(\mathcal{E}_0))=\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(5,b_0-1)$$
$$\mathcal{L}_2:=\varphi_*(L_2\otimes\xi^\vee)\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(c_1(\mathcal{E}_0))=\mathcal{O}_{\mathbb{F}_0}(2,2b_0-1)$$

根据 [12, 例 2.3] 和 [2, 命题 4.4]，它们是关于 $c_1(\mathcal{E}_e)=3C_0+b_0f$ 的 $\mathbb{F}_0$ 上唯一的 Ulrich 线丛。

(b) 对于情形 $e=0$ 中任意秩 $r\geqslant 2$，注意到，当定理主定理–(b) 中的向量丛 $\mathcal{U}_r$ 限制到 φ 的一般纤维 F 上时， X_0： $X_0\to\mathbb{F}_0$ 满足 $\mathcal{U}_r|_F\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus r}$。证明这一点可用归纳法。由 (3.1)，$L_1|_F\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\cong L_2|_F$，因此 $\mathcal{F}_1|_F\in\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))=H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})=0$，故 $\mathcal{F}_1|_F\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2}$，这就是最平衡分裂。由于定理 3.1 中的 $\mathcal{U}_2=\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{F}_1$ 的一个变形，因此 $\mathcal{U}_2|_F\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus 2}$。归纳假设，对某个 $r\geqslant 3$，有 $\mathcal{U}_{r-1}|_F\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus r-1}$，对一般的 $[\mathcal{U}_{r-1}]\in\mathcal{M}(r-1)$ 成立。于是由 (4.18)，有

$$0\to\mathcal{U}_{r-1}|_F=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus r-1}\to\mathcal{F}_r|_F\to L_{\epsilon_r}|_F=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\to 0$$

并且，再一次，由于 $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)\ \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus r-1})=0$ 那么 $\mathcal{F}_r|_F\cong\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus r}$。

因此，利用 [23, 定理 6.1], 中的图表

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xhookrightarrow{i} & X_0 \\ & \searrow^{\varphi'} & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ & & \mathbb{F}_0 \end{array}$$

˜其中 φ' : $S \to \mathbb{F}_0$ 是在 $\mathbb{F}_0$ 上的 $c_2(\mathcal{E}_0)$ 个点处的爆破，且 $\sum E_i$ 是φ'-例外除子，可知 $\varphi_*(\mathcal{U}_r \otimes i_*(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\sum E_i)))$ 是 $\mathbb{F}_0$上的一个秩为 r 的向量丛，并且相对于 $c_1(\mathcal{E}_0) = 3C_0 + b_0 f$而言是 Ulrich 丛。更准确地说， [23, 命题 6.2] 给出了 $\mathbb{F}_0$上秩为 r 的 Ulrich 丛模空间的一个分支，这些丛相对于 $c_1(\mathcal{E}_0) = 3C_0 + b_0 f$而言是 Ulrich 丛，其第一陈类为

$$c_1(\varphi_*(\mathcal{U}_r \otimes i_*(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\sum E_i)))).$$

另一方面，若设 $\mathcal{H}_r := \varphi_*(\mathcal{U}_r \otimes i_*(\mathcal{O}_{\tilde{S}}(\sum E_i)))$，则 [23, 命题 6.2] 中的一一对应表明 $\mathcal{U}_r \cong \xi \otimes \varphi^*(\mathcal{H}_r(-c_1(\mathcal{E}_0)))$。由主定理 (b) 可知 $c_1(\mathcal{U}_r \otimes \xi^\vee)$，并且由于 $c_1(\mathcal{U}_r \otimes \xi^\vee) = c_1(\mathcal{H}_r(-c_1(\mathcal{E}_0))) = c_1(\mathcal{H}_r) - rc_1(\mathcal{E}_0)$，可得 $c_1(\mathcal{H}_r)$ 如所述；对 $(r, c_1(\mathcal{H}_r))$ 而言，它们是相对于 $3C_0 + b_0 f$ 的 Ulrich 可容许对，其含义见 [2, 定义 5.1]。

因此，由 [23, 命题 6.2] 中的一一对应以及主定理 (b)，我们得到相对于 $3C_0 + b_0 f$、定义在 $\mathbb{F}_0$上的任意秩 $r \geqslant 2$、第一陈类和维数如所述的 Ulrich 丛模空间 $\mathcal{M}_{\mathbb{F}_0}(r)$ 的存在性。此外，由于 $\mathcal{U}_r \cong \xi \otimes \varphi^*(\mathcal{H}_r(-c_1(\mathcal{E}_0)))$，于是

$$\begin{aligned} h^j(X_0, \mathcal{U}_r \otimes \mathcal{U}_r^\vee) &= h^j(X_0, \varphi^*(\mathcal{H}_r(-c_1(\mathcal{E}_0))) \otimes \varphi^*(\mathcal{H}_r(-c_1(\mathcal{E}_0)))^\vee) \\ &= h^j(X_0, \varphi^*(\mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_r^\vee)) = h^j(\mathbb{F}_0, \mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_r^\vee), \end{aligned}$$

即 $h^2(\mathbb{F}_0, \mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_r^\vee) = 0$和 $h^0(\mathbb{F}_0, \mathcal{H}_r \otimes \mathcal{H}_r^\vee) = 1$，也就是说，分支 $\mathcal{M}_{\mathbb{F}_0}(r)$ 也是一般光滑的，其一般点 $[\mathcal{H}_r] \in \mathcal{M}_{\mathbb{F}_0}(r)$ 对应一个单丛。

显然， $\mathcal{H}_r$ 关于 $3C_0 + b_0 f$也是斜率稳定的：否则，根据 [23, 命题 6.2], 所给出的一一对应， $\mathcal{H}_r$中一般的某个 $1 \leqslant k \leqslant r-1$的秩为 k 的 Ulrich 不稳定子丛 $\mathcal{D}_k$ ，会导出一个秩为 k的向量丛 $\xi \otimes \varphi^*(\mathcal{D}_k(-c_1(\mathcal{E}_0))$，它根据定理 1.7 关于 ξ在 X_0 上是 Ulrich 的，并且会成为 X_0上 $\mathcal{M}(r)$ 中一般的 $\mathcal{U}_r$ 上的不稳定子丛，这与主定理–(b)矛盾。

当 $r = 2$、3 时，前面的论证与 [2, 命题 6.4], （针对极化 $3C_0 + b_0 f$）一致，且如 c_1 所述。

(c) 对于 $e > 0$ 的情形，采用与 (b) 类似的论证，利用主定理–(c)、定理 1.7 以及 [23, 命题 6.2] 中的一一对应即可得到。□

由定理 5.1 可知，数对 $(\mathbb{F}_e, 3C_e + b_e f)$ 是 Ulrich 野的，这与 [12, 引理 5.2] 一致。

我们想强调，当 $r = 2$、3 时，不能像主定理–(b) 或 (c) 那样，根据 [23,命题 6.2] 中的对应关系以及由 [17, 定理 4.7] 给出的关于 $\mathbb{F}_e$、 $e \geqslant 0$ 的不可约性结果（另见 [2, 命题 6.1、6.4]），推导出向量丛 $\mathcal{U}_r$ 的模空间不可约。事实上，原则上可能存在其他不可约分支，与我们的分支不同 $\mathcal{M}(r)$、 $r = 2$、3；在这些分支上，一般的 Ulrich 丛在一般的 φ–纤维上并不分裂为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)^{\oplus r}$。

References

[1] A. Alzati, G. M. Besana，挠曲曲面上秩二向量丛的非常丰沛性判别法。*Canad. J. Math.*，62 (6): 1201–1227, 2010。[2] V. Antonelli，希策布鲁赫曲面上Ulrich 丛的刻画。 *Revista Matemàtica Complutense*，34 43 74, 2021 10 1007 13163 019 00346 : – . doi.org/ . /s ₇- -

[3] M. Aprodu, V. Brinzanescu，挠曲曲面上向量丛的模空间。 *Nagoya Math. J.*，154: 111–122, 1999。[4] M. Aprodu, L. Costa 和 R. M. Mir´o-Roig，挠曲曲面上的Ulrich 丛。 *J. Pure Appl. Algebra*，222，第 1 期 (2018): 131–138。

[5] A. Beauville，Ulrich 丛导论。 *European Journal of Mathematics* (2018) 4:26–36。[6] M. Beltrametti, S. Di Rocco, A. J.Sommese，关于向量丛射流的生成。 *Rev. Mat. Complut.*，12 1 1999 27 45，第 ( ) 期：– 。[7] M. Beltrametti, A. J. Sommese，《复射影簇的伴随理论》，第

16 *Expo-* 卷。De Gruyter，。[8]

sitions in Mathematics 1995

G. M. Besana, M. L. Fania，特殊三维簇的希尔伯特概形维数。 *Comm. Algebra*，33 3811 3829, 2005 : – 。[9] G. M. Besana, M. L. Fania, F. Flamini，希策布鲁赫曲面 $\mathbb{F}_1$ 上某些三维卷曲的希尔伯特概形。 *Journal Math. Soc. Japan*，65 (4): 1243-1272, 2013。doi: 10.2969/jmsj/06541243。[10] J. E. Brosius，挠曲曲面上的秩 2 向量丛。I。 *Math. Ann.*，265: 155–168, 1983。[11] M. Casanellas, R. Hartshorne, F. Geiss 和 F.-O. Schreyer，稳定Ulrich丛。

Internat.Internat. J. , ，第 ( ) 期：。[12] G.

Math. 23 8 2012 1250083, 50

Casnati，具有 pg = q = 0 的非特殊曲面上的特殊 Ulrich 丛。 *Int. J. Math.*，28 (2017) 第 8 期，1750061，18 页。[13] C. Ciliberto, F. Flamini, A.L. Knutsen，一般平面爆破上的Ulrich 丛。 *Annali di*

Matematica 2023 10 1007 10231 023 01303 4 , ( ): https://doi.org/ . /

s - - - 。[14] C. Ciliberto, F. Flamini, A.L. Knutsen，Del Pezzo三维簇上的Ulrich 丛。

Arxiv 2205.13193 , ( ): - 。[15] C.

[math.AG] 16 June 2022 2022 1 22

Ciliberto, F. Flamini, A.L. Knutsen，素Fano三维簇上的椭圆曲线、ACM丛和Ulrich 丛。

Arxiv 2206.09986 [math.AG] 20 June 2022, (2022): 1-27。[16] E. Coskun，Ulrich 丛综述，载于 *"Analytic and Algebraic Geometry"*，A. Aryasomayajula, I. Biswas, A. S. Morye, A.J. Parameswaran 编，Springer，2017，第 86–106 页。[17] L. Costa, R. M. Mir

´ *Nagoya* o–Roig，有理曲面上向

Math. J. 165 43 69 2002

量丛模空间的有理性。， – ( ) [18] L. Costa, R. M. Mir´o–Roig, J. Pons–Llopis，从交换代数到代数几何的Ulrich 丛，

Studies in Math. 77 (2021)，De Gruyter。[19] J.M. Dr´ezet，Luna切片定理及其应用，载于 *Algebraic group actions and quotients*，39-89，Hin- dawi Publ. Corp.，开罗，2004。[20] Y. Drozd, G. M. Greuel，温和与野性射影曲线及向量丛分类。

J. Algebra ( )，– 。[21] D.

246 2001 1 54

Eisenbud, F.-O. Schreyer, J. Weyman，通过外Syzygy得到的结式和 Chow形式。

J. Amer. Math. , ( ) ( )，– 。[22] D.

Soc. 16 3 2003 537 579

Faenzi, J. Pons–Llopis，射影算术 Cohen- Macaulay 代数簇的 Cohen–Macaulay表示型。

Epijournal de Géometrie Algébrique 5 2021 8, 1 37 , 第 ( ) 卷，第 期，第 – 页。M. L.

[23]

Fania, M. Lelli-Chiesa, J. Pons Llopis，三维滚曲面上的Ulrich 丛。 *International*

Mathematics Research Notices 2021, 17, 13478 13507 , 第 卷，第 期，第 – 页。

预先在线发表，11 月 18, 2019 10 1093 288 。doi.org/ . /imrn/rnz M. L. Fania, F. Flamini,

[24]

$\mathbb{F}_e$ 16 4 413 436, 上某些三维卷曲的希尔

2016 110 1515 2016 0016

伯特概形。 *Adv. Geom.*，( ): – 。doi: . /advgeom- - 。[25] T. Fujita，小 c_1-截面亏格的丰向量丛。 *J. Math. Kyoto Univ.* 29 (1989)，1–16。[26] R. Hartshorne，《代数几何》。 *Number 52 in GTM*。Springer Verlag，纽约 - 海德堡 - 柏林，1977。[27] A. Hochenegger，关于射影丛上的Ulrich 丛。 *Beitr. Algebra Geom.*，63 (2022)，第 3 期，573–587 doi.org/10.1007/s13366-021-00586-z [28] D. Huybrechts, M. Lehn，层的模空间几何。第二版，*Cambridge Mathematical Library* 2010 。Cambridge

University Press，剑桥，。[29] P. Ionescu，小不变量嵌入射影簇，III。载于 1988 年拉奎拉代数几何，

Lecture Notes in Math. 1417 138 154, 1990 , - Springer-Verlag，。

[30] A. Langer，关于半稳定层的有界性。 *Documenta Math.* 27，1–26 (2022) [31] K.G. O'Grady，K3曲面上层的解消奇点模空间。 *J. Reine Angew. Math.*，512 (1999)，49–117。[32] B. Ulrich，Gorenstein环和具有大量生成元的模， *Math. Z.* 188 (1984)，23–32。

Maria Lucia Fania, Dipartimento di Ingegneria e Scienze dell'Informazione e Matematica, Università degli Studi di L'Aquila 67100 L'Aquila Italy ,

Via Vetoio Loc. Coppito, ,*Email address*: marialucia.fania@univaq.it

Flaminio Flamini, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Roma Tor Vergata, Viale della Ricerca Scientifica, 1 - 00133 Roma, Italy*Email address*: flamini@mat.uniroma2.it