arXiv:2303.00688v1 [math.AP] 1 Mar 2023

环面上的基尔霍夫方程的有效混沌

Pietro Baldi、Filippo Giuliani、Marcel Guardia、Emanuele Haus

摘要

我们研究任意维数环面上的基尔霍夫方程，并构造出一些解，使其 Sobolev 范数在某些较长的时间尺度上呈现混沌式振荡。混沌性体现在范数各次振荡之间的时间间隔上，而这些间隔可以按照任意预先指定的方式选取。这一现象称为有效混沌（它发生在较长但有限的时间尺度上），其成因是有效系统存在符号动力学。由于一阶共振动力学已被证明基本稳定，我们需要进行二阶分析，以找到一个呈现混沌动力学的有效模型。更准确地说，经过若干约化后，该模型的表现类似于两个弱耦合摆。

目录

1 引言和主要结果 **2**

1.1 主要结果.3 1.2 证明的主要思路.5

2 基尔霍夫方程的有效动力学 7

2.1 拟线性部分正规形.7 2.2 有效系统.9 2.3 截断有效系统.11

3 含两个三元组的截断有效系统 **12**

3.1 解的有意义性条件.13 3.2 第一积分与线性坐标变换.13 3.3 哈密顿结构.15 3.4 通过缩放归一化系数.16 3.5 作为扰动参数的大傅里叶频率.17

4 两个弱耦合摆的混沌 18

4.1 部分双曲周期轨道.19 4.2 不变流形的横截相交.23 4.3 符号动力学.25

5 回到截断有效系统 26

5.1 超作用量的正性.26 5.2 正规形球中的初始数据.28 5.3 相容初始数据的构造.29 5.4 两个振幅参数的衔接.31

6 近似论证
34 6.1 Sobolev 范数的演化.39 6.2 回到基尔霍夫方程的解.40

1 引言与主要结果

我们考虑基尔霍夫方程

$$\partial_{tt}u - \Delta u\Big(1 + \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla u|^2\, dx\Big) = 0 \tag{1.1}$$

定义在环面 $\mathbb{T}^d$, $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上，维数为任意 $d \geq 1$ （周期边界条件），其中未知函数 $u = u(t,x)$, $x \in \mathbb{T}^d$ 是实值函数。

方程 (1.1) 最早由 Kirchhoff [26] 于1876年提出，用于描述弦和薄板的非线性横向振荡（$d = 1,2$）。它是一个具有三次、非局部非线性项和哈密顿结构的拟线性波动方程。鉴于其物理意义，方程 (1.1) 多年来得到了广泛研究；然而，对它的研究仍具挑战性，因为一些基本问题仍未解决。

尽管早已知道（Dickey [12], Arosio-Panizzi [1]），对于初始数据 $(u(0)\ \partial_t u(0))$ 属于索伯列夫空间 $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^d,\mathbb{R})\ \times H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^d,\mathbb{R})$ 的 (1.1) 的柯西问题局部适定，但具有任意给定索伯列夫正则性的初始数据所对应的解是否时间全局存在，仍是一个悬而未决的问题。特别是，甚至尚不清楚小振幅的 C^∞ （或偶函数 Gevrey）初始数据是否会产生时间全局的解。至于解析类初始数据，自 Bernstein [6] 于1940年的工作以来，整体适定性已为人所知。

此外，在低于正则性阈值 $H^{\frac{3}{2}} \times H^{\frac{1}{2}}$ 的情况下，局部适定性和不适定性都尚未得到确立。最近，Ghisi 和 Gobbino [13] 在这一方向上取得了一项有趣的部分结果。

更一般的问题涉及解的存在寿命及其随时间演化的行为，至少是在平衡态 $u = 0$ 附近。首先，根据线性理论，对于大小为 ε、属于 $H^{\frac{3}{2}} \times H^{\frac{1}{2}}$ 的初始数据，可以保证解至少存在 ε^{-2} 量级的时间。由于 (1.1) 是一个拟线性方程，因此能否得到更好的估计并非显而易见。例如，在 Klainerman 和 Majda [27] 的著名例子中，所有非平凡的空间周期解，只要其大小为 ε，便会在 ε^{-2} 量级的时间内爆破。另一方面，在论文 [3], [4], [5], 中，作者运用正规形理论的技巧，证明基尔霍夫方程的情况更为有利。具体而言，在 [3], 中，通过实施一步拟线性正规形变换，证明了所有小振幅解的存在寿命至少为 ε^{-4} 量级。这是因为第一步正规形变换中唯一无法消去的共振三次项不会对能量估计产生贡献。在 [4] 中，作者计算了第二步拟线性正规形，并证明存在无法消去的五次共振项，且这些项会对 Sobolev 范数的时间演化产生非平凡贡献。

这是描述基尔霍夫方程有趣长时间动力学的一个起点。即使对于较小且具有紧傅里叶支撑的初始数据，基尔霍夫方程的解在长时间尺度上的定性行为也鲜为人知；这类初始数据服从有限维系统。

广义而言，对于小数据的动力学，我们可以寻找两种不同类型的机制：

- 稳定区域：这是指傅里叶模态的长期行为类似于线性化方程的动力学的情形，即这些模态的能量在很长时间内几乎保持不变。我们提到， [5] 对于一组适当的非共振初始数据，可以得到方程（1.1）的稳定运动；在这组初始数据下，五次共振项的影响在数量级为 ε^{-6}的更长时间尺度上仍然很小。我们还提到， [2]和 [11], 证明了受迫版本（1.1）中不变环面的存在性。

- 不稳定区域：在这种情况下，非线性项会导致一种全新的动力学，其与线性动力学大相径庭。尤其值得关注的是，理解非线性效应如何在不同模态之间产生能量交换。

关于不稳定区域，文献中一些引人注目的结果涉及非线性薛定谔方程中的“能量级联”，其中能量从低模态传递到高模态（或反向传递），这与弱湍流理论有着密切联系。这种现象可以通过 Sobolev 范数任意大的增长来衡量，Bourgain 将其视为哈密顿偏微分方程中最重要的问题之一，参见 [8], 以及 [10, 19,20, 21, 22]。

在不稳定区域，其他有趣的动力学行为也建立在傅里叶模态之间能量交换的机制之上。这类交换可以是递归的（即在时间上呈周期性或拟周期性），也可以是混沌的。递归的能量交换例如可在 [15, 16, 17, 23, 24] 中得到。在我们所知的文献中，唯一一篇构造出偏微分方程中混沌能量交换的论文是 [14]。在 [14] 中，作者研究了三次波动方程和梁方程，并证明存在这样一类解：其傅里叶支撑本质上集中于有限个共振模态，这些模态以混沌的方式相互交换能量。混沌性体现在：可以在一系列预先指定的时间实现模态之间的能量交换（交换时间的随机性），或者在属于预先指定的共振组的模态之间实现能量交换（活跃模态和非活跃模态的随机性）。

在 [14] 和本文中，混沌解的存在都归因于方程正规形在一定阶数上的混沌动力学。更准确地说，归一化系统保持一个有限维子空间不变；随后，混沌行为源于 Smale 马蹄的存在，而它又产生了符号动力学。归一化系统的轨道在时间上全局定义，混沌行为也会持续无限长时间。然而，这并不意味着完整偏微分方程存在持续无限长时间的混沌解。通过证明完整偏微分方程的某些解与归一化系统的混沌轨道十分接近，可以得到完整偏微分方程中的混沌行为，而这种近似只在较长但有限的时间区间内成立。我们将这种行为称为有效混沌性，意指系统的动力学在相当长的时间尺度上表现得像混沌动力学（类比于长时间尺度上的稳定性，这种稳定性在哈密顿动力学中常称为有效稳定性）。

1.1 主要结果

我们用 $\mathbb{N}_0$ 表示 $\{0, 1, 2, \dots\}$ 非负整数的集合。下一个定理表明，基尔霍夫方程存在具有类似混沌特征、小振幅且在 Sobolev 范数中发生振荡的解，这是本文的主要结果。

定理 1.1. 存在普适的正定常数 $M, \tau, \varepsilon_*, C, r_0, b, K, K_0$，具有如下性质。设 $d \geq 1$。对于满足以下条件的每个整数序列 $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_0} = (m_0, m_1, m_2, \dots)$

$m_j \geq M$ 对于所有 $j \in \mathbb{N}_0$，存在一个序列

$$0 = s_0 < \bar{s}_0 < s_1 < \bar{s}_1 < s_2 \leq \bar{s}_2 < \dots, \quad s_{j+1} = s_j + \tau(m_j + \theta_j), \quad 0 \leq \theta_j < 1,$$

使得对每个 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_*]$，都存在基尔霍夫方程 (1.1) 的一个解 $u(t,x)$，它在$\mathbb{T}^d$上时间全局存在，且具有有限的傅里叶支撑，其范数

$$\mathcal{N}(t) := \left(\|u(t)\|^2_{H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^d)} + \|\partial_t u(t)\|^2_{H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^d)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

满足

$$\mathcal{N}(t) \leq C\varepsilon \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

并且它围绕中心值 $A_\varepsilon := \varepsilon + \varepsilon^2 r_0$ 振荡，其振荡可用振幅 $B_\varepsilon := \varepsilon^2 r_0$ 和误差 $\delta_\varepsilon := \frac{1}{10} B_\varepsilon$ 描述如下:

$$-\delta_\varepsilon \leq \mathcal{N}(t) - A_\varepsilon \leq B_\varepsilon + \delta_\varepsilon \quad \forall t \in I_j = [t_j, \bar{t}_j], \qquad \max_{t \in I_j} \mathcal{N}(t) - A_\varepsilon \geq B_\varepsilon - \delta_\varepsilon,$$

$$-B_\varepsilon - \delta_\varepsilon \leq \mathcal{N}(t) - A_\varepsilon \leq \delta_\varepsilon \qquad \forall t \in E_j = [\bar{t}_j, t_{j+1}], \qquad \min_{t \in E_j} \mathcal{N}(t) - A_\varepsilon \leq -B_\varepsilon + \delta_\varepsilon,$$

其中

$$t_j = \frac{s_j}{b\varepsilon^3}, \quad \bar{t}_j = \frac{\bar{s}_j}{b\varepsilon^3},$$

对于时间区间 $[0, T_\varepsilon]$中包含的所有区间 I_j, E_j，其中

$$T_\varepsilon = K\varepsilon^{-3} \log(\varepsilon^{-1}).$$

对所有 $j = 0, \dots, N$，均有 $I_j, E_j \subset [0, T_\varepsilon]$，其中整数 N满足

$$\sum_{j=0}^{N} m_j \leq K_0 \log(\varepsilon^{-1}).$$

换言之，定理 1.1 表明，在平衡态 $u = 0$ 附近，基尔霍夫方程存在这样的解：其范数 $\mathcal{N}(t)$ 在时间区间 $[0, T_\varepsilon]$ 上呈现振荡，并遵循任意给定的时间序列；而在该区间内，振荡的次数 N，或者更一般地说，振荡时间长度之和，可以在 ε 足够小时任意大。这些振荡也可以看作稳定运动的类混沌调制：这意味着振荡解的大小为 ε，它们与有效稳定的解相差至多 ε^2（在长时间尺度上），但不同傅里叶模的振幅之间会发生大小为 ε^2 的类混沌交换。

注 1.2。定理 1.1 中的解 $u(t,x)$ 的傅里叶支撑位于集合 $\{k \in \mathbb{Z}^d : |k| \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}\}$ 上，其中

$$\alpha_1 = m, \quad \alpha_2 = m + p, \quad \alpha_3 = 2m + p, \quad \alpha_4 = 3m + 2p,$$

并且 m、p 是整数，满足 $2 \leq m < p$，且比值为 $\sigma = m/p \leq \sigma_*$，其中 σ_* 是一个普适常数。

事实上，比值 σ 是我们在整个构造中使用的扰动参数。原则上，定理 1.1 中的常数 M 取决于比值 $\sigma = m/p$，其量级为$M \sim \log(\sigma^{-1})$，见 (4.15)。定理 1.1 是在固定 m、p，且满足 $m = 2$ 的条件下陈述的，其中 p 是满足 $p > 2$ 和 $2/p \leq \sigma_*$的最小整数。 □

注 1.3. 在定理 1.1 中，使用 Sobolev 范数 $\mathcal{N}(t)$ 来描述傅里叶模之间的能量传递，因为 $H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{T}^d) \times H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^d)$ 是基尔霍夫方程标准局部适定性所处的空间。由于定理 1.1 中的解 $u(t,x)$ 对所有时间都具有固定且有限的傅里叶支撑，因此 $(u, \partial_t u)$ 的所有 Sobolev 范数彼此等价，也都同样能够描述傅里叶模之间混沌的能量传递——唯独能量空间的范数 $H^1(\mathbb{T}^d) \times L^2(\mathbb{T}^d)$ 除外，它对应于我们在构造中使用的近似系统的一个守恒量；见注 3.2。

□

注 1.4。定理 1.1 中 δ_ε 的定义里出现因子 $1/10$，源于一个任意的选择。我们可以将 1/10 替换为任意其他正数；在这种情况下，必须相应地选取常数 M、ε_*、C、r_0、b、K、K_0。

□

注 1.5。为简便起见，定理 1.1 及其证明完全以非负时间来表述。不过，只需稍作修改，便可证明该结果在时间区间 $[-T_\varepsilon, T_\varepsilon]$ 上成立。

□

注 1.6。调整近似系统的符号动力学表述（见命题 4.7），可以证明定理 1.1 的一个替代版本：预先指定的范数 $\mathcal{N}(t)$ 的随机行为，不仅可以由其振荡持续时间的序列给出，也可以由任意序列（a_0、a_1、a_2、.....）给出，其中 $a_j \in \{0,1\}$ 指定了 $\mathcal{N}(t)$“上升”和“下降”运动的有序序列。在这种情况下，$\mathcal{N}(t)$ 仍以中心值量级为 ε 的值为中心，作量级为 ε^2 的振荡，并在一个范围（例如 $[\ell_\varepsilon, h_\varepsilon]$）内变化；与定理 1.1 的区别在于，在第 j 个时间区间内，若 $a_j = 0$，则 $\mathcal{N}(t)$ 接近低值 ℓ_ε，并保持在略微扩大的范围下半部；若 $a_j = 1$，则 $\mathcal{N}(t)$ 接近高值 h_ε，并保持在略微扩大的范围上半部。

换言之，在平衡态 $u = 0$附近，基尔霍夫方程存在一些解，其范数 $\mathcal{N}(t)$ 在时间区间 $[0, T_\varepsilon]$ 上呈现振荡，并遵循任意给定的“上升”和“下降”序列。

□

注 1.7. [3] 中的结果表明，在长度为 ε^{-4}的时间区间内，傅里叶球面之间不会发生规模为 ε 的能量转移。这可能使人以为，在这样的时间尺度上，傅里叶球面之间完全不会发生能量转移。定理 1.1表明事实并非如此；特别是，它证明了在更短的时间尺度上存在规模更小的混沌能量转移，即在时间尺度 $\varepsilon^{-3}\log(\varepsilon^{-1})$上发生规模为 ε^2 的转移。

□

1.2 证明的主要思路

定理 1.1的证明主要分为以下几个步骤：

1. 为方程 (1.1) 的小解推导一个有效共振模型。通过采用正规形论证，并引入一些描述模相同的傅里叶频率集体行为的“宏观”变量，可以得到这个约化系统。2. 证明通过谨慎选择有限个傅里叶频率，可以使有效系统近可积。3. 证明有效系统存在混沌动力学（Smale 马蹄）。4. 证明在足够长的时间区间内，基尔霍夫方程 (1.1) 的某些解会紧密跟随有效系统中 Smale 马蹄内的解。

有效系统通过正规形分析得到。为此，在第 2 节中，我们进行两步拟线性正规形变换（遵循 [3, 4]），并引入一组特殊变量，这些变量见于 [4], ，使我们能够在不丢失关于解的 Sobolev 范数时间演化信息的前提下降低问题的维数。因此，所得约化模型可视为一个“宏观”有效系统，其中我们不区分每个单独傅里叶模的能量演化。

在第 3 节中，我们将其约化为一个有限维有效系统。我们将傅里叶支撑限制在两个相互耦合的共振三元组上。由于其非线性项具有特殊形式，支撑在这些模态上的函数空间对于方程 (1.1) 是不变的。利用该问题的对称性，我们能够进一步约化模型，得到一个四维系统。

下一步是为这类系统构造混沌运动。由于我们依赖摄动技术，希望该系统是近可积的；通过选择具有傅里叶模的共振三元组，可以实现这一点，具体解释见注 1.2。特别地，该系统的行为类似于一对弱耦合摆。

然后，在第 4 节中，我们应用经典的 Poincar´e-Melnikov 理论 [29] ，证明该系统具有一个带横截同宿轨道的双曲周期轨道。根据经典的 Smale-Birkhoff 定理，这意味着存在一个 Smale 马蹄，它是一个具有符号动力学的双曲不变集。注意，该集合是不变的，因此可以描述其轨道在所有时间上的动力学。

最后，我们还需要将有效系统的动力学转化为原方程 (1.1) 的动力学。我们证明，存在一些完整偏微分方程的解，能够紧密跟随有效系统的解。尽管近似论证是通过 Gronwall估计完成的（见第 6 节），但这一过程相当微妙。实际上，由于我们进行了多次约化、缩放和两步正规形变换，因此必须确保那些跟随有效系统解的基尔霍夫方程解，在足够长的时间尺度内满足所有所需的约束。证明的最后部分在第 5 节和第 6 节完成。

证明的一般策略与 [14] 中针对三次波动方程和梁方程所采用的策略类似。不过，定理 1.1 的证明基于高阶正规形分析，这是研究一阶项可积的系统所必需的。这是一维空间域上的偏微分方程的典型情形。事实上，低阶的共振哈密顿单项式决定了原点附近的主要动力学，但通常不会显著改变傅里叶作用量（因而也不会显著改变 Sobolev 范数）。主要例子包括 KdV、Klein-Gordon 和 Schr¨odinger 方程，以及无限深水中的纯重力水波方程；这些方程满足 Dirichlet 或周期边界条件。方程 (1.1) 在某种程度上也属于这种情形，尽管其空间域是任意维数 $d \geq 1$ 的环面 $\mathbb{T}^d$ ，并且该方程的三次阶可积性仅对宏观变量成立。这使得上述策略的实施相当微妙。进行这类分析时的一个难点是，有趣的不稳定现象只有经过更长时间才会出现。

与 [14] 中考虑的方程相比，另一个相关区别在于，方程 (1.1) 是拟线性的，也就是说，非线性项中包含与线性部分阶数相同的导数。这一点并非显而易见，因为即使能够为拟线性方程 (1.1) 构造正规形变换（如 [3, 4]中所做的），此处仍须在长时间尺度上给出有效模型与完整偏微分方程之间的近似结果。这就要求考虑有效系统的一条特殊轨道与一个解之差所满足的方程

(1.1)。该方程本身也是拟线性的，并且具有时变线性部分。对于这样的方程，必须给出长时间稳定性结果。

与 [14] 相比，另一个差异涉及傅里叶频率之间能量交换的定量特征：在 [14] 中，大部分能量在模长相近的傅里叶频率之间转移；而在这里，能量仅有极小一部分在模长为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的傅里叶频率之间转移（见注 1.2），其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 远大于 α_1。

致谢

P.B. 和 E.H. 得到了意大利项目 PRIN 2020XB3EFL“哈密顿系统与弥散型偏微分方程”的资助。F.G. 和 E.H. 获得了 INdAM-GNAMPA 项目 CUP E55F22 000270001 的资助。M.G. 获得了欧洲研究委员会（ERC）在欧盟地平线 2020 研究与创新计划下提供的资助（资助协议编号：757802）。M.G. 还通过 ICREA 学术奖 2019 获得加泰罗尼亚研究与高等研究院的支持。本研究还获得了西班牙国家研究署通过塞韦罗·奥乔亚与玛丽亚·德·梅斯图计划（研发卓越中心与单位，CEX2020-001084-M）提供的资助。

2 基尔霍夫方程的有效动力学

本节回顾如何从基尔霍夫方程 (1.1) 推导出式 (2.12) 中的“宏观”量 S_λ, B_λ，并从正规形过程开始。

2.1 拟线性部分正规形

将 (1.1) 写成一阶演化方程后，得到

$$\begin{cases} \partial_t u = v, \\ \partial_t v = \big(1 + \int_{\mathbb{T}^d} |\nabla u|^2 dx\big) \Delta u. \end{cases} \tag{2.1}$$

文献 [3] 和 [4]（另见 [5] 附录 A 中更简洁统一的描述）证明，经过两步拟线性部分正规形过程，系统 (2.1) 可以变换为另一个系统，其中三次项和五次项处于正规形（除去不影响能量估计的无害项）。更准确地说，证明表明，将 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 重新命名为系统 (2.1) 的原始“物理”变量，并作变量变换 $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Phi(u, v)$ 后，系统 (2.1) 变为

$$\partial_t (u, v) = W(u, v), \tag{2.2}$$

其中

$$W(u, v) = (1 + \mathcal{P}(u, v))\big(\mathcal{D}_1(u, v) + \mathcal{Z}_3(u, v) + \mathcal{Z}_5(u, v)\big) + W_{\geq 7}(u, v). \tag{2.3}$$

变换后系统（2.2）的未知量（u， v）是一对关于 $\mathbb{T}^d$ 的零平均值复共轭函数。项（$1 + \mathcal{P}$（u， v））是一个接近 1 的标量乘法因子，取决于（u， v），并且是时间的函数，与空间变量 x 无关。此外，$\mathcal{D}_1$ 是线性算子 $\mathcal{D}_1$（u， v）：=（$-i|D_x|u$， $i|D_x|v$），其中 $|D_x|$ 是傅里叶乘子 $e^{ik\cdot x} \mapsto$

$|k|e^{ik\cdot x}$， $k\in\mathbb{Z}^d$。接下来， $\mathcal{Z}_3$ 是三次共振算子 $\mathcal{Z}_3(u,\ v)\ =\ (\ (\mathcal{Z}_3)_{\ 1}(u,\ v)\ ,\ (\mathcal{Z}_3)_{\ 2}(u,\ v)\ )$，其分量为

$$(\mathcal{Z}_3)_1(u,v):=-\frac{i}{4}\sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}\\ |j|=|k|}}u_ju_{-j}|j|^2v_ke^{ik\cdot x},\quad (\mathcal{Z}_3)_2(u,v):=\frac{i}{4}\sum_{\substack{j,k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}\\ |j|=|k|}}v_jv_{-j}|j|^2u_ke^{ik\cdot x},$$

其中，u_j、v_j是 u、v的傅里叶系数。整个项 $(1+\mathcal{P}(u,\ v))\ (\mathcal{D}_1(u,\ v)\ +\mathcal{Z}_3(u,\ v))$ 对能量估计没有贡献。项 $\mathcal{Z}_5$ 是五次共振算子$\mathcal{Z}_5(u,\ v)\ =\ (\ (\mathcal{Z}_5)_{\ 1}(u,\ v)\ ,\ (\mathcal{Z}_5)_{\ 2}(u,\ v)\ )$，其中

$$\begin{aligned}(\mathcal{Z}_5)_1(u,v)=&\frac{i}{32}\sum_{\substack{j,\ell,k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}\\ |j|=|\ell|}}u_ju_{-j}v_\ell v_{-\ell}u_ke^{ik\cdot x}|j|^2|\ell|^2\Big(\frac{1}{|j|+|k|}-\frac{(1-\delta_{|\ell|}^{|k|})}{|\ell|-|k|}\Big)\\&+\frac{3i}{32}\sum_{\substack{j,\ell,k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}\\ |k|=|j|+|\ell|}}u_ju_{-j}u_\ell u_{-\ell}v_ke^{ik\cdot x}|j||\ell||k|\\&+\frac{i}{16}\sum_{\substack{j,\ell,k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}\\ |j|=|k|}}u_ju_{-j}u_\ell v_{-\ell}v_ke^{ik\cdot x}|j|^2|\ell|\Big(6+\frac{|\ell|}{|\ell|+|j|}+\frac{|\ell|(1-\delta_{|\ell|}^{|j|})}{|\ell|-|j|}\Big)\\&+\frac{3i}{16}\sum_{\substack{j,\ell,k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}\\ |k|=|j|-|\ell|}}u_ju_{-j}v_\ell v_{-\ell}v_ke^{ik\cdot x}|j||\ell||k|,\end{aligned}\tag{2.4}$$

而 $(\mathcal{Z}_5)_{\ 2}(u,\ v)$ 可由 $(\mathcal{Z}_5)_{\ 1}(u,\ v)$ 通过复共轭得到。对于（2.4）中的系数，我们采用如下约定：$\frac{0}{0}=0$，其中 δ 是通常的克罗内克δ。项 $W_{\geq 7}(u,\ v)$ 在（2.3）中仅包含关于 $(u,\ v)$ 的齐次度至少为7的项，并在 [4] 和 [5]中进行估计。

将（2.1）变换为（2.2）的映射 Φ 由复合得到，并且它为

$$\Phi=\Phi_1\circ\Phi_2\circ\Phi_3\circ\Phi_4\circ\Phi_5.\tag{2.5}$$

映射 Φ_1 和 Φ_2 只是将系统 (2.1)（即线性波动方程）的线性部分对称化并对角化的线性算子，见 (6.34)。映射 Φ_3 是一个非线性的预备变换，由于问题是拟线性的，因此需要这一变换。映射Φ_4 是正规形过程第一步中的变换， Φ_5 则是第二步中的变换。 Φ_3 和 Φ_4 的显式表达式见 [3] ，而 Φ_5 的显式表达式见[4]。与 Φ_1 和 Φ_2不同，变换 Φ_3、Φ_4、Φ_5 都接近恒等映射。本文不使用 Φ_3、Φ_4、Φ_5的显式公式，而只用到它们复合后的以下性质。

对于 $s\in\mathbb{R}$， 令 $H_0^s(\mathbb{T}^d,\mathbb{C})$ 表示零平均值复值函数的索伯列夫空间

$$H_0^s(\mathbb{T}^d,\mathbb{C}):=\{u:\mathbb{T}^d\to\mathbb{C}:u_0=0,\ \|u\|_s<\infty\},\quad \|u\|_s^2:=\sum_{k\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}}|u_k|^2|k|^{2s},$$

其中 u_k、 $k\in\mathbb{Z}^d$ 是 u 的傅里叶系数，并令

$$H_0^s(\mathbb{T}^d,c.c.):=\{(u,v):u,v\in H_0^s(\mathbb{T}^d,\mathbb{C}),\ v=\overline{u}\}=\{(u,\overline{u}):u\in H_0^s(\mathbb{T}^d,\mathbb{C})\},$$

其中，记号“$c.c.$”表示它们是成对的复共轭函数。给定 $d \in \mathbb{N}$，令

$$m_1 := 1 \quad \text{if } d = 1; \qquad m_1 := 2 \quad \text{if } d \geq 2. \tag{2.6}$$

引理 2.1（引自 [5] 的引理 2.9）。存在普适常数 $\delta, C > 0$，使得对于球 $\|u\|_{m_1} \leq \delta$ 中所有的 $(u, v) \in H_0^{m_1}(\mathbb{T}^d, c.c.)$，以及所有 $k \in \mathbb{Z}^d$，(f, g) 的第 k 个傅里叶系数 $f_k = \overline{g_{-k}} := (\Phi_3 \circ \Phi_4 \circ \Phi_5)(u, v)$ 满足

$$|f_k - u_k| \leq C\|u\|_{m_1}^2 (|u_k| + |u_{-k}|). \tag{2.7}$$

由 (2.7) 可知，对于所有 $s \in \mathbb{R}$，$\|f - u\|_s \leq 2C\|u\|_{m_1}^2 \|u\|_s$；并且映射 $\Phi_3 \circ \Phi_4 \circ \Phi_5$ 在球 $\|u\|_{m_1} \leq \delta$ 中定义良好，其中 $\|f\|_s \leq \|u\|_s (1 + 2C\|u\|_{m_1}^2)$，$s \in \mathbb{R}$。

不等式 (2.7) 还蕴含傅里叶支撑的不变性：若对于某个 $k \in \mathbb{Z}^d$ 有 $u_k = u_{-k} = 0$，则也有 $f_k = f_{-k} = 0$，反之亦然（因为 $C\delta^2 < 1/2$）。

引理 2.2（由 [5] 中的引理 2.3 得出）。存在普适常数 δ_1、C_1、$C_0 > 0$，具有以下性质。设 $(u_0, v_0) \in H_0^{m_1}(\mathbb{T}^d, c.c.)$，且

$$\|u_0\|_{m_1} \leq \delta_1. \tag{2.8}$$

那么，系统 (2.2) 在初始条件

$$(u(0), v(0)) = (u_0, v_0) \tag{2.9}$$

下的柯西问题在时间区间 $[0, T_{\mathrm{NF}}]$ 上有唯一解 $(u, v) \in C([0, T_{\mathrm{NF}}], H_0^{m_1}(\mathbb{T}^d, c.c.))$。该解满足

$$\|u(t)\|_{m_1} \leq C_1 \|u_0\|_{m_1} \leq \delta \quad \forall t \in [0, T_{\mathrm{NF}}], \qquad T_{\mathrm{NF}} = C_0 \|u_0\|_{m_1}^{-4}, \tag{2.10}$$

其中 δ 是引理 2.1 中的常数。因此，对于所有 $t \in [0, T_{\mathrm{NF}}]$，解 $(u(t), v(t))$ 始终位于球 $\|u(t), v(t)\|_{m_1} \leq \delta$ 内，在此处 $\Phi_3 \circ \Phi_4 \circ \Phi_5$ 有良好定义，函数

$$(\tilde{u}(t), \tilde{v}(t)) := \Phi(u(t), v(t)) \tag{2.11}$$

（其中 Φ 是 (2.5) 中的映射）在时间区间 $[0, T_{\mathrm{NF}}]$ 上解原系统 (2.1)，且 $\tilde{u}(t)$ 在 $[0, T_{\mathrm{NF}}]$ 上解基尔霍夫方程 (1.1)。

正如记号所示，T_{NF} 是我们通过正规形过程得到的存在时间。有关映射 Φ 和变换后的向量场 $W(u, v)$ 的更多细节，请参见 [3], [4], [5]。

2.2 有效系统

我们回顾从 [4], [5] 推导有效系统（或有效方程）的过程。令

$$\Gamma := \{|k| : k \in \mathbb{Z}^d,\ k \neq 0\} \subseteq \{\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset [1, \infty).$$

对于任意一对 $(u, v) \in L^2(\mathbb{T}^d, c.c.)$ 复共轭函数，以及任意 $\lambda \in \Gamma$，我们定义

$$S_\lambda := \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ |k| = \lambda}} |u_k|^2 = \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ |k| = \lambda}} u_k v_{-k}, \qquad B_\lambda := \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ |k| = \lambda}} u_k u_{-k}, \tag{2.12}$$

并注意到

$$S_\lambda \geq 0, \qquad B_\lambda \in \mathbb{C}, \qquad |B_\lambda| \leq S_\lambda.$$

量 S_λ 称为 u 在球面 $|k| = \lambda$ 上的“超作用量”。在时间区间 $[0, T_{\mathrm{NF}}]$ 上，其演化始终处于其初始值的两个倍数之间，正如下一个引理所示。

引理 2.3（引自 [5]中的引理 2.4）。设 $(u_0, v_0) \in H_0^{m_1}(\mathbb{T}^d, c.c.)$，其中 u_0 属于球 (2.8)。设 $(u(t)\ v(t))$ 是柯西问题 (2.2)、(2.9) 在时间区间 $[0, T_{\mathrm{NF}}]$上的解，其中 T_{NF} 属于 (2.10)，该解由引理 2.2 给出。对于每个 $t \in [0, T_{\mathrm{NF}}]$，令 $S_\lambda(t)$ 为 (2.12) 中定义的和。则

$$C_1 S_\lambda(0) \le S_\lambda(t) \le C_2 S_\lambda(0) \tag{2.13}$$

对所有 $t \in [0, T_{\mathrm{NF}}]$、所有 $\lambda \in \Gamma$，其中 C_1、$C_2 > 0$ 是普适常数。

由 (2.13)，对于每个 $\lambda \in \Gamma$，要么对所有 $t \in [0, T_{\mathrm{NF}}]$，$S_\lambda(t) > 0$，要么对所有 $t \in [0, T_{\mathrm{NF}}]$，$S_\lambda(t) = 0$。因此，我们将 Γ 分解为以下不交并：

$$\Gamma_0 := \{\lambda \in \Gamma : S_\lambda = 0\}, \qquad \Gamma_1 := \{\lambda \in \Gamma : S_\lambda > 0\}. \tag{2.14}$$

在 [4], [5] 中可以观察到，若 $(u(t)\ v(t))$ 在某个时间区间上满足 (2.2)，则对于每个 $\lambda \in \Gamma$，计算 (2.3) 中 $W(u, v)$ 的傅里叶系数，并对球面 $|k| = \lambda$ 上的所有指标 $k \in \mathbb{Z}^d$ 求和后，(2.12) 中相应的量 $S_\lambda(t)$ $B_\lambda(t)$ 满足方程

$$\begin{aligned}
\partial_t S_\lambda &= \frac{3i}{32} \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Gamma \\ \alpha+\beta=\lambda}} (B_\alpha B_\beta \overline{B_\lambda} - \overline{B_\alpha B_\beta} B_\lambda)\alpha\beta\lambda + \frac{3i}{16} \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Gamma \\ \alpha-\beta=\lambda}} (B_\alpha \overline{B_\beta B_\lambda} - \overline{B_\alpha} B_\beta B_\lambda)\alpha\beta\lambda + R_{S_\lambda}, \\
\partial_t B_\lambda &= -2i(1+\mathcal{P})\Big(\lambda + \frac{1}{4}\lambda^2 S_\lambda\Big) B_\lambda + R_{B_\lambda}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

在同一时间区间上，其中各项 R_{S_λ}、R_{B_λ} 满足以下估计。

引理 2.4（ [5]中的引理 2.2）。设 $(u, v) \in H_0^{m_1}(\mathbb{T}^d, c.c.)$，其中 $\|u\|_{m_1} \le \delta$，δ 是引理 2.1 给出的并出现在 (2.10) 中的常数。那么，对于所有 $\lambda \in \Gamma$，(2.15) 中的项 $R_{S_\lambda}, R_{B_\lambda}$ 满足

$$|R_{S_\lambda}| \le C\|u\|_{m_1}^6 S_\lambda, \qquad |R_{B_\lambda}| \le C\|u\|_{m_1}^4 S_\lambda, \tag{2.16}$$

其中 $C > 0$ 是一个普适常数。

定义

$$Z_{\alpha\beta\lambda} := B_\alpha B_\beta \overline{B_\lambda}, \qquad \vartheta_{\alpha\beta\lambda} := \mathrm{Im}(Z_{\alpha\beta\lambda}) = \frac{B_\alpha B_\beta \overline{B_\lambda} - \overline{B_\alpha B_\beta} B_\lambda}{2i}. \tag{2.17}$$

若 S_λ, B_λ 满足系统 (2.15)，则 $S_\lambda, Z_{\alpha\beta\lambda}$ 满足

$$\begin{aligned}
\partial_t S_\lambda &= -\frac{3}{16} \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Gamma \\ \alpha+\beta=\lambda}} \vartheta_{\alpha\beta\lambda}\, \alpha\beta\lambda + \frac{3}{8} \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Gamma \\ \beta+\lambda=\alpha}} \vartheta_{\beta\lambda\alpha}\, \alpha\beta\lambda + R_{S_\lambda}, \\
\partial_t Z_{\alpha\beta\lambda} &= -2i(1+\mathcal{P})\Big(\alpha + \beta - \lambda + \frac{1}{4}(\alpha^2 S_\alpha + \beta^2 S_\beta - \lambda^2 S_\lambda)\Big) Z_{\alpha\beta\lambda} + \widetilde{R}_{Z_{\alpha\beta\lambda}},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

其中

$$\widetilde{R}_{Z_{\alpha\beta\lambda}} := R_{B_\alpha} B_\beta \overline{B_\lambda} + B_\alpha R_{B_\beta} \overline{B_\lambda} + B_\alpha B_\beta \overline{R_{B_\lambda}}.$$

对于 $\alpha + \beta = \lambda$，将齐次阶数更高的项中的第一个非平凡贡献单独分离出来，可得

$$\partial_t Z_{\alpha\beta\lambda} = -\frac{i}{2}(\alpha^2 S_\alpha + \beta^2 S_\beta - \lambda^2 S_\lambda) Z_{\alpha\beta\lambda} + R_{Z_{\alpha\beta\lambda}} \tag{2.19}$$

其中

$$R_{Z_{\alpha\beta\lambda}} := -\frac{i}{2}\mathcal{P}_2(\alpha^2 S_\alpha + \beta^2 S_\beta - \lambda^2 S_\lambda) Z_{\alpha\beta\lambda} + \widetilde{R}_{Z_{\alpha\beta\lambda}}. \tag{2.20}$$

式 (2.18) 中的余项 R_{S_λ} 已在引理 2.4 中给出了界。式 (2.20) 中的余项 $R_{Z_{\alpha\beta\lambda}}$ 将在下一个引理中估计。

引理 2.5（ [5] 的引理 2.5）。假设引理 2.4 的条件成立。那么，对于所有满足 $\alpha+\beta=\lambda$ 的 α、β、 $\lambda \in \Gamma$，式 (2.20) 中定义的余项 $R_{Z_{\alpha\beta\lambda}}$ 满足

$$|R_{Z_{\alpha\beta\lambda}}| \le C\|u\|_{m_1}^4 S_\alpha S_\beta S_\lambda, \tag{2.21}$$

其中， $C>0$ 是一个普适常数。

2.3 截断有效系统

从方程 (2.18) 和 (2.19) 中去掉余项后，我们得到一个系统，称为截断有效系统，其形式为

$$\partial_t S_\lambda = -\frac{3}{16}\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Gamma\\ \alpha+\beta=\lambda}} \vartheta_{\alpha\beta\lambda}\alpha\beta\lambda + \frac{3}{8}\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Gamma\\ \beta+\lambda=\alpha}} \vartheta_{\beta\lambda\alpha}\beta\lambda\alpha, \tag{2.22}$$

$$\partial_t Z_{\alpha\beta\lambda} = -\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta\lambda} Z_{\alpha\beta\lambda}, \tag{2.23}$$

其中

$$\omega_{\alpha\beta\lambda} := \alpha^2 S_\alpha + \beta^2 S_\beta - \lambda^2 S_\lambda. \tag{2.24}$$

对于所有满足 $\alpha+\beta=\lambda$ 的 $\alpha,\beta,\lambda\in\Gamma$，令

$$r_{\alpha\beta\lambda} := \mathrm{Re}\,(Z_{\alpha\beta\lambda}).$$

由于 $\omega_{\alpha\beta\lambda}$ 为实数，方程 (2.23) 的实部和虚部构成如下系统

$$\partial_t r_{\alpha\beta\lambda} = \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta\lambda}\vartheta_{\alpha\beta\lambda}, \qquad \partial_t \vartheta_{\alpha\beta\lambda} = -\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta\lambda} r_{\alpha\beta\lambda}. \tag{2.25}$$

方程 (2.25) 的解 ($r_{\alpha\beta\lambda}(t)$ $\vartheta_{\alpha\beta\lambda}(t)$) 保持在一个圆上，因为它们满足

$$\partial_t(|Z_{\alpha\beta\lambda}|^2) = \partial_t\big(r_{\alpha\beta\lambda}^2 + \vartheta_{\alpha\beta\lambda}^2\big) = 0. \tag{2.26}$$

因此， $|Z_{\alpha\beta\lambda}|$ 是截断有效系统 (2.22)-(2.23) 的第一积分。因此，若 $S_\lambda, Z_{\alpha\beta\lambda}$ 是 (2.22)-(2.23) 的解，则 $Z_{\alpha\beta\lambda}$ 的实部和虚部满足

$$r_{\alpha\beta\lambda}(t) = \rho_{\alpha\beta\lambda}\cos(\varphi_{\alpha\beta\lambda}(t)), \qquad \vartheta_{\alpha\beta\lambda}(t) = \rho_{\alpha\beta\lambda}\sin(\varphi_{\alpha\beta\lambda}(t)), \tag{2.27}$$

其中

$$\rho_{\alpha\beta\lambda} = |Z_{\alpha\beta\lambda}| \ge 0$$

是一个常数，而 $\varphi_{\alpha\beta\lambda}(t)$ 是一个角变量。此外，将 (2.27) 代入 (2.25)，得到角变量的演化方程。因此，截断有效系统 (2.22)-(2.23) 变为

$$\partial_t S_\lambda = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Gamma\\ \alpha+\beta=\lambda}} c_{\alpha\beta\lambda}\sin(\varphi_{\alpha\beta\lambda}) + \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\Gamma\\ \beta+\lambda=\alpha}} c_{\beta\lambda\alpha}\sin(\varphi_{\beta\lambda\alpha}), \tag{2.28}$$

$$\partial_t \varphi_{\alpha\beta\lambda} = -\frac{1}{2}(\alpha^2 S_\alpha + \beta^2 S_\beta - \lambda^2 S_\lambda), \tag{2.29}$$

其中

$$c_{\alpha\beta\lambda} := \frac{3}{8}\rho_{\alpha\beta\lambda}\alpha\beta\lambda = \frac{3}{8}|Z_{\alpha\beta\lambda}|\alpha\beta\lambda = \frac{3}{8}|B_\alpha||B_\beta||B_\lambda|\alpha\beta\lambda \tag{2.30}$$

是一个常数。注意，(2.28) 和 (2.29) 构成了关于变量 S_λ、$\varphi_{\alpha\beta\lambda}$ 的封闭系统。

3 含两个三元组的截断有效系统

我们考虑这样的情形：式 (2.14) 中的傅里叶支撑 Γ_1 只有 4 个不同元素，它们以下述方式构成两个共有两个元素的共振三元组：

$$\begin{aligned} &\Gamma_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}, \qquad \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4, \\ &\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3, \qquad \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4, \qquad 2\alpha_1 \neq \alpha_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

不失一般性，我们可以假设 Γ_1 的四个元素都是自然数。此类集合的例子包括斐波那契数列中任意四个大于 1 的连续元素，例如 $\{2, 3, 5, 8\}$；更一般地，也包括任何形如

$$\alpha_1 := m, \quad \alpha_2 := m + p, \quad \alpha_3 := 2m + p, \quad \alpha_4 := 3m + 2p, \tag{3.2}$$

其中 m、p 是不同的正整数，且满足

$$2 \leq m < p.$$

引理 3.1。假设 (3.1)、(3.2) 成立。若 α、β、$\lambda \in \Gamma_1$ 满足 $\alpha + \beta = \lambda$，则有序三元组 (α, β, λ) 必为

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \quad or \quad (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3) \quad or \quad (\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) \quad or \quad (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_4),$$

并且没有其他选择。

证明。例如，有

$$\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 < \alpha_2 + \alpha_2 < \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4,$$

因此 $2\alpha_2 \notin \Gamma_1$，三元组 $(\alpha_2, \alpha_2, 2\alpha_2)$ 不可容许；其他情况可类似验证。

□

为略微简化记号，我们记

$$S_1 := S_{\alpha_1}, \quad \varphi_{123} := \varphi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \quad c_{123} := c_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3},$$

依此类推。因此，系统 (2.28)-(2.29) 变为

$$\begin{aligned} \partial_t S_1 &= c_{123}\sin(\varphi_{123}), \\ \partial_t S_2 &= c_{123}\sin(\varphi_{123}) + c_{234}\sin(\varphi_{234}), \\ \partial_t S_3 &= -c_{123}\sin(\varphi_{123}) + c_{234}\sin(\varphi_{234}), \\ \partial_t S_4 &= -c_{234}\sin(\varphi_{234}), \\ \partial_t \varphi_{123} &= -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 S_1 + \alpha_2^2 S_2 - \alpha_3^2 S_3), \\ \partial_t \varphi_{234} &= -\frac{1}{2}(\alpha_2^2 S_2 + \alpha_3^2 S_3 - \alpha_4^2 S_4), \end{aligned} \tag{3.3}$$

这是一个包含 6 个方程、6 个未知数的系统。

3.1 解的有意义性条件

我们的策略如下：我们希望找到截断有效系统 (3.3) 的解，使其具有预先指定且有趣的动力学行为；并证明有效系统 (2.18)-(2.19) 的解与截断有效系统 (3.3) 的解足够接近，以至于在足够长的时间区间内，这两个解的动力学行为非常相似。稍后，在第6节中，我们将证明原始偏微分方程 (2.1) 存在一个解，它与有效系统的解非常接近（仅相差坐标变换 Φ）。

因此，我们寻找满足系统 (2.18)-(2.19) 所要求的自然有意义性条件的截断有效系统 (3.3) 的解。该条件很简单：若一个解定义在时间区间 $[0,T]$ 上，则它必须满足

$$S_n(t) > 0 \quad \forall n = 1,2,3,4, \quad \forall t \in [0,T]. \tag{3.4}$$

因此，对于 (3.3) 的任何解，只要其中某些 S_n 在某个时间 t 变为非正，我们就予以排除（回顾定义 (2.12) 和 (2.14)）。

在接下来的分析中，我们首先忽略约束 (3.4)；之后再只选取满足该约束的解。类似地，我们先将系数 c_{123}、c_{234} 视为任意给定的两个常数；之后再回到恒等式 (2.30)。

3.2 第一积分与坐标的线性变换

给定 S_1、.....、S_4 的任意线性组合 $E := \mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 + \mu_3 S_3 + \mu_4 S_4$，其系数为任意实常数 μ_1、.....、μ_4，则有

$$\partial_t E = (\mu_1 + \mu_2 - \mu_3) c_{123} \sin(\varphi_{123}) + (\mu_2 + \mu_3 - \mu_4) c_{234} \sin(\varphi_{234})$$

沿着 系统 (3.3) 的解。因此，任何满足以下条件、系数为 $\mu_1, \ldots, \mu_4$ 的 E

$$\mu_1 + \mu_2 - \mu_3 = 0, \qquad \mu_2 + \mu_3 - \mu_4 = 0$$

都是第一积分。我们选取两个函数独立的第一积分

$$E_1 := S_1 + S_3 + S_4, \quad E_2 := S_2 + S_3 + 2S_4. \tag{3.5}$$

注 3.2. 有

$$\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 = \alpha_1 (S_1 + S_3 + S_4) + \alpha_2 (S_2 + S_3 + 2S_4) = \sum_{n=1}^{4} \alpha_n S_n \tag{3.6}$$

因为 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$ 且 $\alpha_1 + 2\alpha_2 = \alpha_2 + (\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_4$。因此，当 S_n 由 (2.12) 给出时，恒等式 (3.6) 表明，Sobolev 范数 $\|u\|_{\underline{1}}^2 = \sum_{n=1}^4 \alpha_n S_n$ 也是 (3.3) 的第一积分。 □

在每个时刻 t，数值 $S_1(t)$ $S_2(t)$ 可由 $E_1, E_2, S_3(t)$ $S_4(t)$ 根据（3.5）得到，即 ，

$$S_1(t) = E_1 - S_3(t) - S_4(t), \quad S_2(t) = E_2 - S_3(t) - 2S_4(t). \tag{3.7}$$

因此，系统（3.3）可化为关于 4 个未知数 $S_3, S_4, \varphi_{123}, \varphi_{234}$ 的 4 个方程组成的系统：将（3.7）代入（3.3）的最后两个方程中，以替换 S_1, S_2 。我们得到

$$\begin{aligned}
\partial_t S_3 &= -c_{123}\sin(\varphi_{123}) + c_{234}\sin(\varphi_{234}),\\
\partial_t S_4 &= -c_{234}\sin(\varphi_{234}),\\
\partial_t \varphi_{123} &= -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 E_1 + \alpha_2^2 E_2) + \frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)S_3 + \frac{1}{2}(\alpha_1^2+2\alpha_2^2)S_4,\\
\partial_t \varphi_{234} &= -\frac{1}{2}\alpha_2^2 E_2 - \frac{1}{2}(\alpha_3^2-\alpha_2^2)S_3 + \frac{1}{2}(2\alpha_2^2+\alpha_4^2)S_4.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

我们将上述观察总结为以下引理。

引理 3.3. 设 c_{123}, c_{234} 为任意两个常数。以下性质成立 .

(i) 设($S_1(t)$ $S_2(t)$ $S_3(t)$ $S_4(t)$ $\varphi_{123}(t)$ $\varphi_{234}(t)$)是在某个时间区间 I上系统(3.3)的一个解。则由(3.5)定义的 E_1, E_2 在时间上为常数，并且($S_3(t)$ $S_4(t)$ $\varphi_{123}(t)$,$\varphi_{234}(t)$)在 I上满足系统(3.8)。

(ii) 设 E_1, E_2 为常数，并设($S_3(t)$ $S_4(t)$ $\varphi_{123}(t)$ $\varphi_{234}(t)$)是在某个时间区间 I上系统(3.8)的一个解。通过恒等式(3.7)定义函数 $S_1(t)$ $S_2(t)$。则($S_1(t)$ $S_2(t)$ $S_3(t)$ $S_4(t)$ $\varphi_{123}(t)$ $\varphi_{234}(t)$)在 I上满足系统(3.3)。

注意到，(3.8) 中前两个方程之和不含角变量 φ_{234}。因此，我们考虑进行线性变量变换，将和 $S_3 + S_4$ 作为一个新变量。

引理 3.4. 设 c_{123}, c_{234} 为任意两个常数。以下性质成立。

(i) 设 E_1, E_2 为常数，且 ($S_3(t)$ $S_4(t)$ $\varphi_{123}(t)$ $\varphi_{234}(t)$) 是系统 (3.8) 在某个时间区间 I 上的一个解。通过坐标变换定义函数 $x_1(t)$ $x_2(t)$ $y_1(t)$ $y_2(t)$

$$\varphi_{123} = x_1, \quad \varphi_{234} = x_2, \quad S_3 = y_1 - y_2, \quad S_4 = y_2. \tag{3.9}$$

则 ($x_1(t)$ $x_2(t)$ $y_1(t)$ $y_2(t)$) 是下列方程的解

$$\begin{aligned}
\partial_t x_1 &= -\frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)y_1 - \frac{1}{2}(\alpha_3^2-\alpha_2^2)y_2,\\
\partial_t x_2 &= -\frac{1}{2}b_2 - \frac{1}{2}(\alpha_3^2-\alpha_2^2)y_1 + \frac{1}{2}(\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)y_2\\
\partial_t y_1 &= -c_{123}\sin(x_1),\\
\partial_t y_2 &= -c_{234}\sin(x_2),
\end{aligned} \tag{3.10}$$

在 I 上，其中 b_1, b_2 为常数

$$b_1 := \alpha_1^2 E_1 + \alpha_2^2 E_2, \quad b_2 := \alpha_2^2 E_2. \tag{3.11}$$

(ii) 设 b_1, b_2 为常数，且 ($x_1(t)$ $x_2(t)$ $y_1(t)$ $y_2(t)$) 是系统 (3.10) 在某个时间区间 I 上的一个解。定义常数 E_1, E_2 如下

$$E_1 = \frac{b_1 - b_2}{\alpha_1^2}, \qquad E_2 = \frac{b_2}{\alpha_2^2}, \tag{3.12}$$

并根据 (3.9) 定义函数 $S_3(t)$ $S_4(t)$ $\varphi_{123}(t)$ $\varphi_{234}(t)$。那么，($S_3(t)$ $S_4(t)$ $\varphi_{123}(t)$,$\varphi_{234}(t)$) 在 I 上满足系统 (3.8)。

3.3 哈密顿结构

系统 (3.10) 是一个二维哈密顿系统

$$\dot{x}_n = \partial_{y_n} H(x,y), \quad \dot{y}_n = -\partial_{x_n} H(x,y), \quad n = 1,2,$$

哈密顿量为

$$H(x,y) = -c_{123}\cos(x_1) - c_{234}\cos(x_2) - \frac{1}{2} b\cdot y + \frac{1}{4} Ay\cdot y \tag{3.13}$$

其中 $b = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ 和 A 是矩阵

$$A := \begin{pmatrix} (\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) & -(\alpha_3^2-\alpha_2^2) \\ -(\alpha_3^2-\alpha_2^2) & (\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2) \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

矩阵 A 是对称、正定且可逆的，并且

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} (\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2) & (\alpha_3^2-\alpha_2^2) \\ (\alpha_3^2-\alpha_2^2) & (\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2) \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

and

$$\det A = \alpha_1^2\alpha_4^2 + (\alpha_1^2+\alpha_4^2)(\alpha_2^2+\alpha_3^2) + 4\alpha_2^2\alpha_3^2 > 0. \tag{3.16}$$

A 的可逆性就是哈密顿量 H的所谓扭转条件；得益于此，我们可以通过对 y 变量作平移，将线性项 $b\cdot y$ 从哈密顿量中消去

$$x_1 = \tilde{x}_1, \quad x_2 = \tilde{x}_2, \quad y_1 = q_1 + \tilde{y}_1, \quad y_2 = q_2 + \tilde{y}_2, \tag{3.17}$$

其中 $q = A^{-1}b$，即

$$q_1 = \frac{\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2}{\det A}\, b_1 + \frac{\alpha_3^2-\alpha_2^2}{\det A}\, b_2, \qquad q_2 = \frac{\alpha_3^2-\alpha_2^2}{\det A}\, b_1 + \frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{\det A}\, b_2. \tag{3.18}$$

˜这个坐标变换是辛的，新哈密顿量就是 $H(\tilde{x},\tilde{y}) = H(\tilde{x}, q+\tilde{y})$，其方程为

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{x}_1 &= \tfrac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\tilde{y}_1 - \tfrac{1}{2}(\alpha_3^2-\alpha_2^2)\tilde{y}_2, \\ \partial_t \tilde{y}_1 &= -c_{123}\sin(\tilde{x}_1), \\ \partial_t \tilde{x}_2 &= -\tfrac{1}{2}(\alpha_3^2-\alpha_2^2)\tilde{y}_1 + \tfrac{1}{2}(\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)\tilde{y}_2, \\ \partial_t \tilde{y}_2 &= -c_{234}\sin(\tilde{x}_2). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Th系统 (3.10) 与 (3.19) 的等价性由以下引理描述。

引理 3.5. 任取常数 c_{123}, c_{234} 。以下性质成立 .

(i) 设 b_1, b_2 为常数，且 $(x_1(t)\ x_2(t)\ y_1(t)\ y_2(t))$ 是系统 (3.10) 在某个时间区间 I 上的一个解。令常数 q_1, q_2 由 (3.18) 定义，并令函数$\tilde{x}_1(t)\ \tilde{x}_2(t)\ \tilde{y}_1(t)\ \tilde{y}_2(t)$ 由 (3.17) 定义。则 $(\tilde{x}_1(t)\ \tilde{x}_2(t)\ \tilde{y}_1(t)\ \tilde{y}_2(t))$ 是 (3.19) 的解。

(ii) 设 $(\tilde{x}_1(t)\ \tilde{x}_2(t)\ \tilde{y}_1(t)\ \tilde{y}_2(t))$ 是系统 (3.19) 在某个区间 I 上的一个解。设 q_1、q_2 为任意两个实数。根据恒等式 $b = Aq$ 定义常数 b_1、b_2，即定义

$$b_1 = (\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)q_1 - (\alpha_3^2-\alpha_2^2)q_2, \qquad b_2 = -(\alpha_3^2-\alpha_2^2)q_1 + (\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)q_2, \tag{3.20}$$

并根据（3.17）定义函数 $x_1(t)\ x_2(t)\ y_1(t)\ y_2(t)$。那么，$(x_1(t)\ x_2(t)\ y_1(t)\ y_2(t))$ 在 I 上满足（3.10）。

3.4 通过缩放对系数进行归一化

现在，我们希望通过对时间变量进行缩放以及对 $\tilde{y}$ 变量进行伸缩变换，将系统（3.19）的首项系数规范化。我们考虑变量替换

$$\tilde{x}_1(t) = \xi_1(\mathtt{B}t), \quad \tilde{x}_2(t) = \xi_2(\mathtt{B}t), \quad \tilde{y}_1(t) = \mathtt{A}_1\eta_1(\mathtt{B}t), \quad \tilde{y}_2(t) = \mathtt{A}_2\eta_2(\mathtt{B}t), \tag{3.21}$$

其中 $\mathtt{A}_1$,$\mathtt{A}_2, \mathtt{B}$ 定义如下。我们假设

$$c_{123} > 0 \tag{3.22}$$

并固定

$$\mathtt{A}_1 := \Big(\frac{2c_{123}}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad \mathtt{B} := \Big(\frac{c_{123}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}{2}\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.23}$$

$$\mathtt{A}_2 := \frac{2\mathtt{B}}{\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2}. \tag{3.24}$$

注意，$\mathtt{A}_1$ 与 $\mathtt{A}_2$ 之间满足关系

$$\mathtt{A}_1 = \mathtt{A}_2\gamma, \qquad \text{with} \qquad \gamma := \frac{\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}. \tag{3.25}$$

因此，系统 (3.19) 变为

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \eta_1 - \mu_1\eta_2, \\ \dot{\eta}_1 &= -\sin(\xi_1), \\ \dot{\xi}_2 &= \eta_2 - \mu_2\eta_1, \\ \dot{\eta}_2 &= -\lambda\sin(\xi_2), \end{aligned} \tag{3.26}$$

其中

$$\mu_1 := \frac{\alpha_3^2-\alpha_2^2}{\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2} = \frac{(\alpha_3^2-\alpha_2^2)\mathtt{A}_2}{2\mathtt{B}}, \tag{3.27}$$

$$\mu_2 := \frac{\alpha_3^2-\alpha_2^2}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2} = \mu_1\gamma = \frac{(\alpha_3^2-\alpha_2^2)\mathtt{A}_1}{2\mathtt{B}}, \tag{3.28}$$

$$\lambda := \frac{c_{234}(\alpha_2^2+\alpha_3^2+\alpha_4^2)}{c_{123}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)} = \frac{c_{234}}{c_{123}}\gamma = \frac{c_{234}}{\mathtt{A}_2\mathtt{B}}. \tag{3.29}$$

我们注意到，含有 $\mu_1 = 0$ 的系统由两个互不耦合的哈密顿量之和给出，而对于 $\mu_1 \neq 0$，哈密顿结构则不再成立。系统 (3.19) 和 (3.26) 的等价性由以下引理描述。

引理 3.6. 以下结论成立。

(i) 设 c_{123}、c_{234} 为任意两个常数，满足 $c_{123} > 0$，并设 $(\tilde{x}_1(t)\ \tilde{x}_2(t)\ \tilde{y}_1(t)\ \tilde{y}_2(t))$ 是系统 (3.19) 在某个时间区间 $[0,T]$ 上的一个解。令 $\mathtt{A}_1, \mathtt{A}_2, \mathtt{B}$ 为由 (3.23)、(3.24) 定义的常数。定义函数 ξ_1、ξ_2、η_1、η_2 如下

$$\xi_1(t) = \tilde{x}_1\Big(\frac{t}{\mathtt{B}}\Big), \quad \xi_2(t) = \tilde{x}_2\Big(\frac{t}{\mathtt{B}}\Big), \quad \eta_1(t) = \frac{1}{\mathtt{A}_1}\tilde{y}_1\Big(\frac{t}{\mathtt{B}}\Big), \quad \eta_2(t) = \frac{1}{\mathtt{A}_2}\tilde{y}_2\Big(\frac{t}{\mathtt{B}}\Big). \tag{3.30}$$

按 (3.27)、(3.28)、(3.29) 定义常数 μ_1, μ_2, λ。则 $(\xi_1(t)\ \xi_2(t)\ \eta_1(t)\ \eta_2(t))$ 是方程 (3.26) 在时间区间 $[0, \mathtt{B}T]$ 上的解。

(ii) 设 λ 为任意常数。设 μ_1, μ_2 为 (3.27)、(3.28) 中定义的常数。设 $(\xi_1(t)\ \xi_2(t)\ \eta_1(t)\ \eta_2(t))$ 是系统 (3.26) 在某个时间区间 $[0, T]$ 上的解。设 $\mathtt{A}_1$ 为任意正常数。定义常数 c_{123} 为

$$c_{123} = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2}\mathtt{A}_1^2 \tag{3.31}$$

并通过 (3.29) 定义常数 c_{234}，即 $c_{234} = c_{123}\lambda/\gamma$，其中 γ 在 (3.25) 中定义。根据 (3.23) 中的第二个恒等式定义常数 $\mathtt{B}$，并根据 (3.24) 定义常数 $\mathtt{A}_2$。根据 (3.21) 定义函数 $\tilde{x}_1$、$\tilde{x}_2$、$\tilde{y}_1$、$\tilde{y}_2$。那么，$(\tilde{x}_1(t)\ \tilde{x}_2(t)\ \tilde{y}_1(t)\ \tilde{y}_2(t))$ 是基尔霍夫方程 (3.19) 在时间区间 $[0, \mathtt{B}^{-1}T]$ 上的解。

3.5 大傅里叶频率作为扰动参数

回顾定义 (3.2)：α_1、.....、α_4 是关于两个整数参数 m、p 的函数。于是

$$\begin{aligned}
\alpha_3^2 - \alpha_2^2 &= (2m+p)^2 - (m+p)^2 = 3m^2 + 2mp,\\
\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= m^2 + (m+p)^2 + (2m+p)^2 = 6m^2 + 6mp + 2p^2,\\
\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 &= (m+p)^2 + (2m+p)^2 + (3m+2p)^2 = 14m^2 + 18mp + 6p^2.
\end{aligned}$$

注意，单项式 p^2 在差 $\alpha_3^2 - \alpha_2^2$ 中抵消了，而在另外两个和中则存在。因此，取 p 相对于 m 足够大，就会得到一个小参数，我们将在摄动分析中使用它（问题中的另一个小参数是解的大小，也就是基尔霍夫方程初始数据的大小）。记

$$\sigma := \frac{m}{p}, \tag{3.32}$$

有

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{2\sigma + 3\sigma^2}{6 + 18\sigma + 14\sigma^2} = \sigma\Big(\frac{1}{3} + \tilde{\mu}_1(\sigma)\Big), \qquad \gamma = \frac{6 + 18\sigma + 14\sigma^2}{2 + 6\sigma + 6\sigma^2} = 3 + O(\sigma),\\
\mu_2 &= \mu_1\gamma = \frac{2\sigma + 3\sigma^2}{2 + 6\sigma + 6\sigma^2} = \sigma\big(1 + \tilde{\mu}_2(\sigma)\big), \qquad \tilde{\mu}_1(\sigma), \tilde{\mu}_2(\sigma) = O(\sigma) \quad \text{as } \sigma \to 0,
\end{aligned} \tag{3.33}$$

其中 $\tilde{\mu}_1(\sigma)$ $\tilde{\mu}_2(\sigma)$ 由恒等式 (3.33) 定义。我们还注意到，对于所有 $\sigma > 0$，$1 < \gamma < 3$。

因此，当 $\sigma = m/p$ 较小时，系统 (3.26) 中的“耦合”项 $\mu_1\eta_2$ 和 $\mu_2\eta_1$ 可以视为由两个非耦合摆构成的“未扰动”系统的扰动

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \eta_1, \\ \dot{\eta}_1 = -\sin(\xi_1), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{\xi}_2 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = -\lambda\sin(\xi_2). \end{cases} \tag{3.34}$$

我们还希望对系统 (3.26) 最后一个方程中出现的系数 λ 进行归一化。稍后我们会看到，这种归一化对应于方程 (2.23) 初始数据的一项约束；不过在此阶段，我们只需注意，引理 3.6 的 (ii) 部分中的参数 λ 不受任何约束。因此，在接下来的分析中，我们固定 $\lambda = 1$，不考虑该参数的其他取值。对于 $\lambda = 1$，系统 (3.26) 变为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \eta_1 - \mu_1\eta_2, \\ \dot{\eta}_1 = -\sin(\xi_1), \\ \dot{\xi}_2 = \eta_2 - \mu_2\eta_1, \\ \dot{\eta}_2 = -\sin(\xi_2). \end{cases} \tag{3.35}$$

系统 (3.35) 有一个守恒量（通过用新变量表示旧的哈密顿量得到），即

$$\mu_2\Big(\frac{1}{2}\eta_1^2+1-\cos\xi_1\Big)+\mu_1\Big(\frac{1}{2}\eta_2^2+1-\cos\xi_2\Big)-\mu_1\mu_2\eta_1\eta_2. \tag{3.36}$$

系统 (3.35) 中唯一的参数是式 (3.27)、(3.28) 中定义的常数 μ_1、μ_2，它们仅取决于比值 $\sigma=m/p$，并且当 $\sigma\to 0$ 时趋于零（见 (3.33)）。系统 (3.35) 的“未扰动”部分是取 $\lambda=1$ 时的 (3.34)，即

$$\begin{cases}\dot\xi_1=\eta_1,\\ \dot\eta_1=-\sin(\xi_1),\end{cases}\qquad\qquad\begin{cases}\dot\xi_2=\eta_2,\\ \dot\eta_2=-\sin(\xi_2).\end{cases} \tag{3.37}$$

系统 (3.37) 已完全标准化，是由两个相互独立的标准化摆组成的二维哈密顿系统

$$\dot\xi_n=\partial_{\eta_n}H,\quad \dot\eta_n=-\partial_{\xi_n}H,\quad n=1,2,$$

其哈密顿量为

$$H=H_1(\xi_1,\eta_1)+H_2(\xi_2,\eta_2),\qquad H_n(\xi_n,\eta_n)=\frac{1}{2}\eta_n^2+\big(1-\cos(\xi_n)\big),\quad {}^{n=1,\ 2。} \tag{3.38}$$

H_n 的公式中加入常数项 1，只是为了使椭圆平衡点的能量为零。

将系统 (3.35) 视为一个受扰双摆系统是很方便的，其中微扰参数由 σ 给出，而不是由 μ_1、μ_2 给出。也就是说，利用 (3.33)，

$$\begin{aligned}&\dot\xi_1=\eta_1-\sigma\Big(\frac{1}{3}+\tilde\mu_1(\sigma)\Big)\eta_2,\qquad &&\dot\xi_2=\eta_2-\sigma\big(1+\tilde\mu_2(\sigma)\big)\eta_1,\\ &\dot\eta_1=-\sin(\xi_1),&&\dot\eta_2=-\sin(\xi_2).\end{aligned} \tag{3.39}$$

(3.36) 中的守恒量除以 σ 后为

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2):=&\Big(\frac{1}{3}+\tilde\mu_1(\sigma)\Big)H_1(\xi_1,\eta_1)+\big(1+\tilde\mu_2(\sigma)\big)H_2(\xi_2,\eta_2)\\ &-\sigma\Big(\frac{1}{3}+\tilde\mu_1(\sigma)\Big)\big(1+\tilde\mu_2(\sigma)\big)\eta_1\eta_2.\end{aligned} \tag{3.40}$$

4 两个弱耦合摆的混沌

本节我们证明关于系统 (3.39) 的混沌解的如下结果。记$\mathbb{N}_0:=\{0,1,2,\dots\}$ 为非负整数集合。给定能量参数 $a\in(0,2)$，我们用 $(\xi_1^*(t),\ \eta_1^*(t))$ 表示满足下式的摆的周期解

$$H_1(\xi_1^*(t),\eta_1^*(t))=a,\quad \xi_1^*(0)=0\quad \eta_1^*(0)>0. \tag{4.1}$$

为强调　　其对 a 的依赖性，我们也将 $\xi_1^*(t)=\xi_1^*(t;\ a)$ 和 $\eta_1^*(t)=\eta_1^*(t;\ a)$ 记作　　.

命题 4.1. 存在一个普适常数 $a_0\in(0,2)$（见引理 4.6），使得以下结论成立。设 $a\in[a_0,2)$，并设 T_a 为 $(\xi_1^*(t;\ a),\ \eta_1^*(t;\ a))$ 的周期。存在

普适常数 $\sigma_0 \in (0,1)$、 C_1、 $C_2 > 0$，使得对于每个 $\sigma \in (0, \sigma_0)$，都存在区间内的 $M_0(\sigma)$

$$C_1 \log(\sigma^{-1}) \le M_0(\sigma) \le C_2 \log(\sigma^{-1})$$

使得满足以下性质。设（$m_0, m_1, m_2, \ldots$） $= (m_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ 为任意一个整数序列，且对所有 $j \in \mathbb{N}$ 都有 $m_j \ge M_0(\sigma)$。那么，存在系统 (3.39) 的一个解（$\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$）$(t)$，使得以下性质成立。

（i）函数（ξ_1, η_1）满足

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\xi_1(t) - \xi_1^*(t)| \le C\sigma, \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}} |\eta_1(t) - \eta_1^*(t)| \le C\sigma,$$

其中 $C > 0$ 为某个普适常数。

（ii）存在一个时间序列（$t_0, t_1, t_2, \ldots$） $= (t_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$，满足

$$t_0 = 0, \quad t_{j+1} = t_j + T_a(m_j + \theta_j), \quad 0 \le \theta_j < 1, \quad \forall j \in \mathbb{N}_0 \tag{4.2}$$

使得

$$\eta_2(t_j) = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}_0.$$

此外，还存在另一个时间序列（$\bar{t}_j$）$_{j\in\mathbb{N}_0}$，满足 $t_j < \bar{t}_j < t_{j+1}$，使得

$$1 < \eta_2(t) \le 2 + C\sigma \quad \forall t \in (t_j, \bar{t}_j), \qquad -C\sigma \le \eta_2(t) < 1 \quad \forall t \in (\bar{t}_j, t_{j+1}) \tag{4.3}$$

and

$$\max_{t\in[t_j,\bar{t}_j]} \eta_2(t) \ge 2 - C\sigma, \qquad \min_{t\in[\bar{t}_j,t_{j+1}]} \eta_2(t) \le C\sigma \tag{4.4}$$

对于某个普适常数 $C > 0$。

我们注意到， $\eta_2 = 1$ 是 $\eta_2(t)$围绕其上下振荡的值，振荡所依据的是随机选取的时间序列。

为了证明命题 4.1，我们将寻找完整系统 (3.39) 的一个部分双曲周期轨道，并证明当 $\sigma > 0$ 足够小时，其稳定与不稳定不变流形横截相交。这将意味着 Smale 马蹄的存在以及符号混沌动力学的存在。

注 4.2。(4.1) 中的摆的能量 a 仅在本节中用作自由参数。命题 4.1 只会在第 5 节和第 6 节中针对 $a = a_0$应用。由于 a_0 是一个普适常数，因此对于 $a = a_0$，任何仅依赖于 a 的量都是普适常数。 □

4.1 部分双曲周期轨道

我们首先寻找部分双曲周期解。未扰动系统 ($\sigma = 0$) 有大量部分双曲周期轨道，例如，它们由第一个摆（在平面 (ξ_1, η_1) 中）的天平动与第二摆（在平面 (ξ_2, η_2) 中）的鞍点的乘积给出。我们选取其中一条轨道，并运用隐函数定理证明存在一条邻近的、周期相同的周期轨道。

我们考虑未扰动系统

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(t; a) := (\xi_1^*(t; a), \eta_1^*(t; a), \pi, 0) \tag{4.5}$$

(3.37) 的周期轨道（该系统是含有 $\sigma = 0$ 的系统 (3.39)），其中 (ξ_1^*, η_1^*) 定义于 (4.1)，而 $a \in (0, 2)$ 将在第 4.2 小节末固定。注意，第一个摆的椭圆平衡点 $(\xi_1, \eta_1) = (0, 0)$ 的能量为 $H_1(0, 0) = 0$；其鞍点 $(\xi_1, \eta_1) = (\pi, 0)$ 及其同宿轨道的能量则为 $H_1(\pi, 0) = 2$。解 $\mathcal{P}$ 支持在曲线上

$$\mathbb{T}_0 := \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) : H_1(\xi_1, \eta_1) = a,\ \xi_2 = \pi,\ \eta_2 = 0\}. \tag{4.6}$$

我们用 T 表示轨道 $\mathcal{P}$ 的周期 T_a，用 $\omega := 2\pi/T$ 表示其频率。当然，$\mathbb{T}_0$、T、ω取决于能量参数 a；事实上，本子节及下一子节中的所有量（尤其是命题 4.3 给出的微小半径 σ_1）都取决于 a。尽管如此，通常我们不会明确指出对 a的依赖；我们只强调，固定 a之后，出现在子节 4.1 和 4.2 中的每个量都将被确定，不依赖于任何其他隐藏参数。

$\mathcal{P}$ 的未扰动（$\sigma = 0$）同宿流形为

$$W_0(\mathcal{P}) = \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) : H_1(\xi_1, \eta_1) = a,\ H_2(\xi_2, \eta_2) = 2\}. \tag{4.7}$$

我们考虑其时间参数化

$$\Gamma_0^{\pm} := \{(\xi_1^*(\tau_1), \eta_1^*(\tau_1), q_h(\tau_2), p_h^{\pm}(\tau_2)) : \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}\}, \tag{4.8}$$

其中

$$(q_h(s), p_h^{\pm}(s)) = \Big(2\arcsin(\tanh(s)),\ \pm\frac{2}{\cosh(s)}\Big).$$

现在我们证明，当 $0 < \sigma \ll 1$时，周期轨道 $\mathcal{P}$ 仍然存在。更准确地说，我们证明以下结果。

命题 4.3. 设 $\mathcal{P}$ 为 (3.37) 的 T-周期轨道，由 (4.5) 定义。那么，存在常数 $\sigma_1 > 0$、$C > 0$，使得对所有 $0 < \sigma < \sigma_1$，均存在 (3.39) 的一个 T-周期解 $\mathcal{P}_\sigma(t)$，它在 C^1-拓扑下与 $\mathcal{P}$ 相距 σ，即

$$\|\mathcal{P}_\sigma - \mathcal{P}\|_{C^1(\mathbb{R})} \le C\sigma.$$

此外，$\mathcal{P}_\sigma$ 具有一个稳定的双曲方向和一个不稳定的双曲方向。

回忆一下，系统 (3.39) 以能量 (3.40) 为第一积分。因此，在每个能量面上存在一条双曲周期轨道，这是经典微扰理论的推论。不过，命题 4.3 给出了固定周期的周期轨道的存在性。可以通过证明周期随 $\mathcal{E}$ 单调变化来说明这一点。下面，为使本文自成一体，我们基于对称性论证给出命题 4.3 的另一种证明。

命题 4.3 的证明。为证明周期轨道 $\mathcal{P}$ 的持久性，我们利用系统 (3.39) 关于对合可逆这一事实

$$\rho\colon (\mathbb{T}\times\mathbb{R})^2 \to (\mathbb{T}\times\mathbb{R})^2 \qquad \rho(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = (-\xi_1, \eta_1, -\xi_2, \eta_2).$$

这意味着，若将 (3.39) 的向量场记为 X，则 $X \circ \rho = -\rho_* X$，其中 ρ_* 是 ρ 的微分，它作用于切空间 $\mathbb{R}^4$。为了应用隐函数定理论证，方便起见，我们将第一个摆（平面

(ξ_1, η_1) 上的坐标变换为作用量-角变量。这将简化对周期轨道 $\mathcal{P}$ 处切向方向上线性化问题的分析。在定义域中

$$S := \{(x_1, y_1) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : H_1(x_1, y_1) \in (0, 2)\},$$

我们考虑作用-角变量变换

$$\Phi \colon \mathbb{T} \times \mathcal{I} \to S, \qquad (\xi_1, \eta_1) = \Phi(\theta, I) = (f(\theta, I), g(\theta, I))$$

对于某个开区间 $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$。若固定 (ξ_1, η_1) 并记 $2\kappa = H_1(\xi_1, \eta_1)$，则可按如下方式利用椭圆函数表示 f 和 g：

$$\begin{cases} f(\theta, I) = 2 \arcsin\left(\sqrt{\kappa}\, \mathrm{sn}\left(\dfrac{2\mathtt{K}(\kappa)}{\pi}\theta \,\middle|\, \kappa\right)\right) \\ g(\theta, I) = 2\sqrt{\kappa}\ \mathrm{cn}\left(\dfrac{2\mathtt{K}(\kappa)}{\pi}\theta \,\middle|\, \kappa\right), \end{cases} \tag{4.9}$$

其中，$\mathtt{K}(\kappa)$ 是第一类完全椭圆积分，sn 和 cn 分别为椭圆正弦函数和椭圆余弦函数（例如见 [18]）。

现在我们省略 ξ_2, η_2 的下标。记为

$$\Psi = (\Phi, \mathrm{Id}) \colon \mathbb{T} \times \mathcal{I} \times \mathbb{T} \times \mathbb{R} \to S \times \mathbb{T} \times \mathbb{R}, \qquad \Psi(\theta, I, \xi, \eta) = (\Phi(\theta, I), \xi, \eta).$$

用这些新坐标表示时，对合 ρ 恰由 $\nu = \Psi^{-1} \circ \rho \circ \Psi$ 给出。由于椭圆正弦函数是奇函数，而椭圆余弦函数是偶函数（相对于其第一个变量），不难看出，新坐标下的系统 (3.39) 关于该对合是可逆的

$$\nu(\theta, I, \xi, \eta) = (-\theta, I, -\xi, \eta).$$

我们用 $I \mapsto \Omega(I)$ 表示未扰摆的作用量-频率映射。

注 4.4. 注意，对于所有 $I \in \mathcal{I}$，$\Omega'(I) \neq 0$。 □

未受扰动的周期轨道 $\mathcal{P}$ 现在写作

$$\theta(t) = \Omega(I_0)t, \quad I(t) = I_0, \quad \xi(t) = \pi, \quad \eta(t) = 0$$

对于某个 $I_0 \in \mathcal{I}$。我们注意到 $\Omega(I_0) = \omega$，其中 $\omega = 2\pi/T$ 在 (4.6) 下方定义。我们考虑缩放时间 $t \rightsquigarrow \omega t$，系统 (3.39) 变为

$$\begin{cases} \omega\dot{\theta} &= \Omega(I) + \sigma\mathcal{R}_1(\theta, I, \eta), \\ \omega\dot{I} &= \sigma\mathcal{R}_2(\theta, I, \eta), \\ \omega\dot{\xi} &= \eta + \sigma\mathcal{R}_3(\theta, I), \\ \omega\dot{\eta} &= -\sin(\xi) \end{cases} \tag{4.10}$$

其中函数 $\mathcal{R}_i$、$i = 1$、2、3 由以下关系确定

$$[D\Psi(\theta, I, \xi, \eta)]^{-1} \begin{pmatrix} -(\frac{1}{3} + \tilde{\mu}_1(\sigma))\eta \\ 0 \\ -(1 + \tilde{\mu}_2(\sigma))g(\theta, I) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1(\theta, I, \eta) \\ \mathcal{R}_2(\theta, I, \eta) \\ \mathcal{R}_3(\theta, I) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

我们寻找式 (4.10) 的 2π-周期光滑可逆解，即 $u(t) = (\theta(t)\ I(t)\ \xi(t)\ \eta(t))$，满足 $\nu u(-t) = u(t)$。换言之，我们在不变集

$$C^1_{\text{odd, even}}(\mathbb{T}) := \{(\theta(t), I(t), \xi(t), \eta(t)) \in C^1(\mathbb{T}; \mathbb{T}\times\mathcal{I}\times\mathbb{T}\times\mathbb{R}) : \theta(t), \xi(t) \text{ odd},\ I(t), \eta(t) \text{ even}\}.$$

同样，我们定义空间

$$C^0_{\text{even, odd}}(\mathbb{T}) := \{(g_1(t), g_2(t), g_3(t), g_4(t)) \in C^0(\mathbb{T}; \mathbb{R}^4) : g_1(t), g_3(t) \text{ even},\ g_2(t), g_4(t) \text{ odd}\}.$$

注 4.5. 我们注意到，(4.10) 的 2π-解对应于 (3.39) 的 T-周期解。

□

我们定义

$$\mathcal{F}(\sigma;\cdot)\colon C^1_{\text{odd, even}}(\mathbb{T}) \to C^0_{\text{even, odd}}(\mathbb{T}), \qquad \mathcal{F}(\sigma;\theta,I,\xi,\eta) = \begin{pmatrix} \omega\dot\theta - \Omega(I) - \sigma\mathcal{R}_1(\theta,I,\eta) \\ \omega\dot I - \sigma\mathcal{R}_2(\theta,I,\eta) \\ \omega\dot\xi - \eta - \sigma\mathcal{R}_3(\theta,I) \\ \omega\dot\eta + \sin(\xi) \end{pmatrix}.$$

由于映射 Ω、Ψ 和向量场 X 都是解析的，因此 $\mathcal{F}(\sigma;\cdot)$ 至少是 C^1。于是

$$\mathcal{F}(0;\omega t, I_0, \pi, 0) = 0.$$

现在我们研究未扰动解处的线性化系统。固定 $(g_1, g_2, g_3, g_4) \in C^0_{\text{even, odd}}(\mathbb{T})$，并考察线性系统的解

$$\begin{cases} \omega\partial_t\theta - \Omega'(I_0)I = g_1 \\ \omega\partial_t I = g_2 \\ \omega\partial_t\xi - \eta = g_3 \\ \omega\partial_t\eta - \xi = g_4. \end{cases} \tag{4.11}$$

我们注意到上述系统是解耦的，因此可以分别研究关于 (θ, I) 的方程和关于 (ξ, η) 的方程。关于前者，我们先求作用量的方程。由于 g_2 是奇函数，我们有 $\langle g_2\rangle = 0$，并且

$$I - \langle I\rangle = (\omega\partial_t)^{-1} g_2,$$

其中，我们用 $\langle\cdot\rangle$ 表示对 $\mathbb{T}$ 的时间平均，并用 $(\omega\partial_t)^{-1}g_2$ 表示 g_2的零平均值原函数。因此，I 由其平均值确定。代入角变量方程后，我们得到

$$\omega\partial_t\theta = \Omega'(I_0)(\omega\partial_t)^{-1}g_2 + \Omega'(I_0)\langle I\rangle + g_1. \tag{4.12}$$

方程 (4.12) 只有在右端项的平均值为零时才能求解。因此，我们令

$$\langle I\rangle = -\frac{\langle g_1\rangle}{\Omega'(I_0)}, \qquad \theta = (\omega\partial_t)^{-1}\big[\Omega'(I_0)(\omega\partial_t)^{-1}g_2 + \Omega'(I_0)\langle I\rangle + g_1\big]$$

（注意 $\Omega'(I_0) \neq 0$，参见注释 4.4）。关于 (ξ, η) 变量的方程，我们有如下结果：令 $v := \xi + \eta$, $w := \xi - \eta$, $h := g_3 + g_4$ 和 $h := g_3 - g_4$，则有

$$\omega\partial_t v - v = h, \qquad \omega\partial_t w + w = \tilde h. \tag{4.13}$$

通过傅里叶级数，可得

$$v(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{h_k}{\mathrm{i}\omega k-1}e^{\mathrm{i}kt},\qquad w(t)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\frac{\tilde{h}_k}{\mathrm{i}\omega k+1}e^{\mathrm{i}kt}$$

是方程 (4.13) 的唯一解。由于 $\xi=(v+w)/2$ 且 $\eta=(v-w)/2$，我们便可恢复方程 (4.11) 解的 ξ、η分量。由解的显式表达式可知，对于 $g_i\equiv 0,\ i=1,\dots,4$，方程 (4.11) 的唯一解为零。此外，这些解属于 C^1 类。这意味着 $d\mathcal{F}(0;\,\omega t,I_0,\pi,0)$ 可逆，因此根据隐函数定理，存在 $\sigma_1>0$和一个偶函数 $\mathsf{g}:(-\sigma_1,\sigma_1)\to C^1_{\text{odd, 偶函数}}(\mathbb{T})$，使得

$$\mathcal{F}(\sigma;\mathsf{g}(\sigma))=0\quad\forall\sigma\in(-\sigma_1,\sigma_1),\qquad \mathsf{g}(0;t)=(\omega t,I_0,\pi,0).$$

我们称 $\mathcal{P}_\sigma$ 为用原坐标 $(\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2)$ 表示的周期轨道 $\mathsf{g}(\sigma)$。还注意到，由 (4.13) 可知，该轨道在 (ξ_2,η_2) 方向上是双曲的。证明完毕。

□

根据不变流形延拓的经典理论，$\mathcal{P}_\sigma$ 具有稳定与不稳定不变流形 $W^{s,\,\sigma}{}^{u}(\mathcal{P}_\sigma)$，它们关于 σ 可微地依赖。此外，这些流形可在局部参数化为未受扰不变流形（4.7）上的 C^1 图像。

4.2 不变流形的横截相交

在本节中，我们证明稳定与不稳定不变流形 $W^{s,\,\sigma}{}^{u}(\mathcal{P}_\sigma)$在某点横截相交。由于不变流形的维数为 2，而我们要在一个 3 维能量面内寻找交点（见（3.40）），因此只需构造一个 1 维截面 Λ，并测量流形在其投影 Λ上的距离。

我们回顾（4.8）中给出的未受扰分离曲线 $\Gamma_0^{\pm}$ 的时间参数化。根据对称性，我们只需考虑未受扰同宿流形的一条分支，例如$\Gamma_0=\Gamma_0^{+}$。考虑点 $z_0=z_0(\tau_1,\tau_2)\in\Gamma_0\subset\{H_1=a,H_2=2\}$，并定义截面

$$\Lambda:=\{z_0+\lambda\nabla H_1(z):\lambda\in\mathbb{R}\},$$

其中我们使用记号 $H_1(\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2):=H_1(\xi_1,\eta_1)$。直线 Λ 经过 z_0，且垂直于 Γ_0。

根据不变流形对参数的连续依赖性，当 σ 足够小时，Λ 也与 $W^{s,\,\sigma}{}^{u}(\mathcal{P}_\sigma)$ 横截相交于两点 $z^{s,\,\sigma}{}^{u}=z^{s,\,\sigma}{}^{u}(\tau_1,\tau_2)$。我们利用第一个摆的未扰动能量 H_1 来测量 z^s_σ 与 z^u_σ 之间的距离。注意，H_1 的梯度在 Γ_0 上从不为零，因此它可以很好地衡量沿 Γ_0 法向方向的位移。我们定义距离

$$H_1(z^s_\sigma)-H_1(z^u_\sigma)=\sigma\,M+O(\sigma^2),\tag{4.14}$$

其中，这一距离的一阶项为

$$M=M(\tau_1,\tau_2):=\frac{d}{d\sigma}_{|_{\sigma=0}}(H_1(z^s_\sigma)-H_1(z^u_\sigma)).$$

通过经典论证（例如参见 [31]），我们可知一阶项由 Melnikov积分给出

$$M(\tau_1,\tau_2)=\int_{-\infty}^{+\infty} DH_1(\Phi_H^t(\Gamma_0(\tau_1,\tau_2)))[Y(\Phi_H^t(\Gamma_0(\tau_1,\tau_2)))]\,dt,$$

其中， Y 是系统 (3.39) 的扰动关于 σ 的一阶项，即

$$Y(\xi_1,\eta_1,\xi_2,\eta_2):=(-\eta_2/3,0,-\eta_1,0),$$

而 Φ_H^t 是 (3.38) 中 H 的哈密顿流。我们注意到（回顾 (4.8)）)

$$\Phi_H^t(\Gamma_0(\tau_1,\tau_2))=(\xi_1^*(\tau_1+t),\eta_1^*(\tau_1+t),q_h(\tau_2+t),p_h^+(\tau_2+t)).$$

由于系统 (3.39) 的自治性，Melnikov积分只依赖于一个参数。我们定义 $\tau:=\tau_2-\tau_1$，并考虑约化Melnikov积分

$$\mathcal{M}(\tau):=-\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} p_h^+(\tau+s)\,\sin(\xi_1^*(s))\,ds.$$

注意，对于所有 $\tau_1\in\mathbb{R}$，都有 $\mathcal{M}(\tau)=M(\tau_1,\tau_1+\tau)=M(0,\tau)$。现在我们证明以下结论。

引理 4.6. 存在一个普适常数 $a_0\in(0,2)$，使得对于所有 $a\in[a_0,2)$，约化Melnikov积分 $\mathcal{M}(\tau)$ 在 $\tau=0$ 处有一个非退化零点。

证明。我们注意到，由于 $\xi_1^*(t)$ 是奇函数，而 $p_h^+(t)$ 是偶函数，因此 $\mathcal{M}(0)=0$。约化Melnikov积分在 $\tau=0$ 处的导数为

$$\frac{d}{d\tau}\mathcal{M}(0)=\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(q_h(s))\sin(\xi_1^*(s))\,ds=\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\sin(q_h(s))\sin(\xi_1^*(s))\,ds.$$

我们回顾一下，(4.5) 中的 (ξ_1^*,η_1^*) 依赖于参数 a，并明确表示出我们要研究的积分对 a 的依赖，记为

$$J(a):=\int_0^{+\infty}\sin(q_h(s))\,\sin(\xi_1^*(s;a))\,ds.$$

我们必须证明，对于某个 $a\in(0,2)$ 中的值， $J(a)$ 非零。根据常微分方程初值连续依赖经典定理，有如下逐点收敛:

$$\text{for every } s\in[0,\infty),\quad \lim_{a\to 2}\xi_1^*(s;a)=q_h(s)$$

（事实上，该收敛在紧区间上一致）。因此，对于每个 $s\in[0,\infty)$，当 $a\to 2$ 时， $f_a(s)$ 收敛于 $f_2(s)$，其中

$$f_a(s):=\sin(q_h(s))\sin(\xi_1^*(s;a)),\qquad f_2(s):=\sin^2(q_h(s)).$$

此外，由于对于所有 $s\in[0,\infty)$， $q_h(s)\in[0,\pi)$，所以有

$$|f_a(s)|\le|\sin(q_h(s))|=\sin(q_h(s))=\frac{2\sinh(s)}{\cosh^2(s)}=:g(s)\quad\forall s\in[0,\infty),$$

并且 $g\in L^1(0,\infty)$。因此，根据控制收敛定理，

$$J_*:=\lim_{a\to 2}J(a)=\int_0^\infty f_2(s)\,ds=\int_0^\infty g^2(s)\,ds.$$

由于 g^2 指数衰减，极限 J_* 有限；又由于 g^2 为正，该极限也为正。因此，存在 $a_0\in(0,2)$，使得对所有 $a\in[a_0,2)$， $|J(a)-J_*|\le J_*/2$，引理得证。

□

由上述引理和隐函数定理可知，当 $\sigma > 0$ 足够小时，距离 (4.14) 至少有一个零点，且两者横截相交。

4.3 符号动力学

我们引入截面

$$\Pi := \{(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) : \xi_2 = 0,\ \eta_2 > 0,\ \mathcal{E}(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \mathcal{E}(\mathcal{P}_\sigma)\},$$

其中， $\mathcal{E}(\mathcal{P}_\sigma)$ 是解 $\mathcal{P}_\sigma$ 处第一积分 $\mathcal{E}$ in (3.40) 的值。该截面在 $W_0(\mathcal{P})$ 的一点处与未扰动流 ($\sigma = 0$) 横截，因此，当 $\sigma > 0$ 足够小时，它也与扰动流横截。此外，根据引理 4.6，其中包含 $W^s_\sigma(\mathcal{P}_\sigma) \pitchfork W^u_\sigma(\mathcal{P}_\sigma)$ 的点（其中 $\pitchfork$ 表示横截相交）。

用 Φ^t 表示系统 (3.39) 的流。固定一点 $z \in \Pi$，我们将 $\mathcal{T}(z) > 0$ 定义为首次（向前）返回到截面 Π 的返回时间。对于那些不会返回截面 Π 的点 z （例如 $W^s_\sigma(\mathcal{P}_\sigma)$ 中的点），我们令 $\mathcal{T}(z) = +\infty$。我们将开集 $\mathcal{U} \subset \Pi$ 定义为

$$\mathcal{U} := \{z \in \Pi : \mathcal{T}(z) < +\infty\}$$

以及相应的庞加莱映射 P: $\mathcal{U} \subset \Pi \to \Pi$，满足 $\mathrm{P}(z) = \Phi^t(z)\big|_{t=\mathcal{T}(z)}$。

命题 4.7。（Smale 马蹄）存在普适常数 $\sigma_0, C_1, C_2 > 0$，使得对于所有 $\sigma \in (0, \sigma_0)$，都存在区间内的正整数 $M_0(\sigma)$

$$C_1 \log(\sigma^{-1}) \le M_0(\sigma) \le C_2 \log(\sigma^{-1}) \tag{4.15}$$

使得庞加莱映射 P 存在一个不变集 $Y \subset \mathcal{U}$，其动力学与无限符号移位共轭。具体而言，存在一个同胚 h: $\mathcal{A} \to Y$，其中

$$\mathcal{A} := \{\omega = \{\omega_k\}_{k\in\mathbb{Z}} : \omega_k \in \mathbb{N},\ \ \omega_k \ge M_0(\sigma)\ \forall k \in \mathbb{Z}\},$$

使得 $\mathrm{P}_{|_Y} = h \circ \mathfrak{d} \circ h^{-1}$，其中 $\mathfrak{d}$: $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是移位

$$(\mathfrak{d}\omega)_k = \omega_{k+1}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

此外， h^{-1} 可按如下方式定义。与 $z \in Y$ 相对应，可以定义命中时间序列

$$t_0 = 0, \qquad t_k = t_{k-1} + \mathcal{T}(\mathrm{P}^{k-1}z) \quad \text{for } k \ge 1, \qquad t_k = t_{k+1} - \mathcal{T}(\mathrm{P}^k z) \quad \text{for } k \le -1,$$

以及 $h^{-1}(z) := \omega = (\omega_k)_{k\in\mathbb{Z}}$，其中

$$\omega_k = \left\lfloor \frac{t_k - t_{k-1}}{T} \right\rfloor,$$

其中 $T = T_a$ 是周期轨道 $\mathcal{P}_\sigma$ 的周期，而 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示整数部分。

证明。证明沿用了 Moser 在 [30] 第 3 章中构造符号动力学的相同思路。

□

命题 4.7 完成了命题 4.1 的证明。注意，返回截面的时间较长，因为轨道会接近双曲周期轨道。

5 回到截断有效系统

在第 4 节中，我们证明了系统 (3.39) 存在混沌解。这些解在时间上是全局的。在下一个引理中，我们将得到截断有效系统 (3.3) 的相应解。

引理 5.1. 设 $a = a_0$ 属于命题 4.1，并令 σ_0 为命题 4.1 给出的相应普适常数。设 m、p 为两个整数，$2 \le m < p$，其比值为 $\sigma := m/p$，且位于区间 $(0, \sigma_0)$ 内。由 (3.2) 定义 α_1、$\dots \alpha_4$，由 (3.33) 定义 $\tilde{\mu}_1(\sigma)$ $\tilde{\mu}_2(\sigma)$，并由 (3.25) 中的第二个恒等式定义 γ。假设命题 4.1 的假设成立，并考虑命题 4.1 中得到的系统 (3.39) 的解 $(\xi_1(t)\ \eta_1(t)\ \xi_2(t)\ \eta_2(t))$。

任取三个实数 $\mathtt{A}_1, q_1, q_2$，其中 $\mathtt{A}_1 > 0$，并定义以下常数：由 (3.31) 定义 c_{123}，定义 $c_{234} = c_{123}/\gamma$，由 (3.23) 中的第二个恒等式定义 $\mathtt{B}$，由 (3.24) 定义 $\mathtt{A}_2$，由 (3.20) 定义 b_1、b_2，由 (3.12) 定义 E_1、E_2。定义函数

$$\begin{aligned} S_1(t) &:= E_1 - q_1 - \mathtt{A}_1\eta_1(\mathtt{B}t), \\ S_2(t) &:= E_2 - q_1 - q_2 - \mathtt{A}_1\eta_1(\mathtt{B}t) - \mathtt{A}_2\eta_2(\mathtt{B}t), \\ S_3(t) &:= q_1 - q_2 + \mathtt{A}_1\eta_1(\mathtt{B}t) - \mathtt{A}_2\eta_2(\mathtt{B}t), \\ S_4(t) &:= q_2 + \mathtt{A}_2\eta_2(\mathtt{B}t), \\ \varphi_{123}(t) &:= \xi_1(\mathtt{B}t), \\ \varphi_{234}(t) &:= \xi_2(\mathtt{B}t). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Then $(S_1(t)\ S_2(t)\ S_3(t)\ S_4(t)\ \varphi_{123}(t)\ \varphi_{234}(t)\ c_{123}, c_{234})$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均满足 (3.3)。

证明。我们应用引理 3.6-(ii) 和 $\lambda = 1$，从系统 (3.39) 回到系统 (3.19)；然后应用引理 3.5-(ii)，从系统 (3.19) 回到系统 (3.10)；接着应用引理 3.4-(ii)，从系统 (3.10) 回到系统 (3.8)；最后应用引理 3.3-(ii)，从系统 (3.8) 回到系统 (3.3)。 □

5.1 超作用量的正性

现在我们来探讨引理 5.1 中得到的系统 (3.3) 的解是否满足不等式 (3.4)。首先，我们研究常数项

$$E_1 - q_1, \qquad E_2 - q_1 - q_2, \qquad q_1 - q_2, \qquad q_2 \tag{5.2}$$

出现在引理 5.1 中 S_1，…，S_4 的定义里。我们计算 E_1、E_2 关于 q_1、q_2 的函数公式：由 (3.12) 和 (3.20) 得到

$$E_1 = \frac{\alpha_1^2 + 2\alpha_3^2}{\alpha_1^2} q_1 - \frac{2\alpha_3^2 + \alpha_4^2}{\alpha_1^2} q_2, \qquad E_2 = -\frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{\alpha_2^2} q_1 + \frac{\alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2}{\alpha_2^2} q_2. \tag{5.3}$$

接下来，我们在以下引理中观察到，可以选择 q_1、q_2，使得常数项 (5.2) 全部为正。

引理 5.2. 设 q_1、q_2 为正实数，其比值 q_1/q_2 位于区间 $(1 + \frac{r}{2}, 1 + r)$ 内，$r = \alpha_4^2/\alpha_3^2$，并令 E_1、E_2 由 (5.3) 定义。则 (5.2) 中的常数均为正数。特别地，如果

$$q_1 = \Big(1 + \frac{2}{3} r\Big) q_2, \tag{5.4}$$

then

$$E_1 - q_1 = \frac{1}{3}\frac{\alpha_4^2}{\alpha_1^2}q_2, \qquad E_2 - q_1 - q_2 = \frac{1}{3}\frac{\alpha_4^2}{\alpha_2^2}q_2, \qquad q_1 - q_2 = \frac{2}{3}\frac{\alpha_4^2}{\alpha_3^2}q_2. \tag{5.5}$$

证明. 由 (5.3) 可得,

$$E_1 - q_1 = \Big(\frac{2\alpha_3^2}{\alpha_1^2}\,\frac{q_1}{q_2} - \frac{2\alpha_3^2+\alpha_4^2}{\alpha_1^2}\Big)q_2, \qquad E_2 - q_1 - q_2 = \Big(-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\,\frac{q_1}{q_2} + \frac{\alpha_3^2+\alpha_4^2}{\alpha_2^2}\Big)q_2,$$
$$q_1 - q_2 = \Big(\frac{q_1}{q_2} - 1\Big)q_2.$$

我们将比值 q_1/q_2 记作 $1+\vartheta r$，其中 $\vartheta \in \mathbb{R}$ 是自由参数，且 $r = \alpha_4^2/\alpha_3^2$。那么

$$E_1 - q_1 = \frac{\alpha_4^2 q_2}{\alpha_1^2}(2\vartheta - 1), \qquad E_2 - q_1 - q_2 = \frac{\alpha_4^2 q_2}{\alpha_2^2}(1-\vartheta), \qquad q_1 - q_2 = \frac{\alpha_4^2 q_2}{\alpha_3^2}\vartheta.$$

最小值

$$\min\{2\vartheta - 1, 1-\vartheta, \vartheta, 1\} = \min\{2\vartheta - 1, 1-\vartheta\}$$

当 $\vartheta \in (\frac{1}{2}, 1)$ 时为正，并在 $\vartheta = 2/3$ 处达到最大值。 □

注意，根据 (3.2)，当 $\sigma = m/p \to 0$ 时，比值 $r = \alpha_4^2/\alpha_3^2$ 趋于 4。根据 (3.25)、(3.33)，引理 5.1 中的常数 $\mathtt{A}_2$ 满足

$$\mathtt{A}_2 = \frac{\mathtt{A}_1}{\gamma} = \frac{1+3\sigma+3\sigma^2}{3+9\sigma+7\sigma^2}\mathtt{A}_1 \le \mathtt{A}_1. \tag{5.6}$$

解　　在命题 4.1 中构造并在引理 5.1 中出现的 η_1、η_2，满足　　fy

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|\eta_1(t)| \le 3, \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}}|\eta_2(t)| \le 3 \tag{5.7}$$

（命题 4.1 中关于 η_1、η_2 的估计更为精确）。因此，我们证明以下关于 S_n 下界的界。

引理 5.3. 设 q_2、$\mathtt{A}_1$ 是任意两个正实数，并由 (5.4) 定义 q_1。若

$$\mathtt{A}_1 \le \frac{q_2}{9}, \tag{5.8}$$

则引理 5.1 中定义的函数 $S_n(t)$ 满足

$$S_n(t) \ge \frac{q_2}{2} > 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R} \quad \textit{and} \quad \forall n = 1,2,3,4. \tag{5.9}$$

证明。根据 (5.5) 和 (5.6)，引理 5.1 中定义的函数 $S_n(t)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 均满足

$$S_1(t) \ge E_1 - q_1 - 3\mathtt{A}_1 = \frac{1}{3}\frac{\alpha_4^2}{\alpha_1^2}q_2 - 3\mathtt{A}_1,$$
$$S_2(t) \ge E_2 - q_1 - q_2 - 3\mathtt{A}_1 - 3\mathtt{A}_2 \ge \frac{1}{3}\frac{\alpha_4^2}{\alpha_2^2}q_2 - 6\mathtt{A}_1,$$
$$S_3(t) \ge q_1 - q_2 - 3\mathtt{A}_1 - 3\mathtt{A}_2 \ge \frac{2}{3}\frac{\alpha_4^2}{\alpha_3^2}q_2 - 6\mathtt{A}_1,$$
$$S_4(t) \ge q_2 - 3\mathtt{A}_2 \ge q_2 - 3\mathtt{A}_1.$$

根据 (3.2)，有

$$\frac{\alpha_4^2}{\alpha_1^2} > 4, \qquad \frac{\alpha_4^2}{\alpha_2^2} > 4, \qquad \frac{2\alpha_4^2}{\alpha_3^2} > 4,$$

这与（5.8）一起推出（5.9）。 □

根据引理 5.3，条件（5.8）蕴含系统（3.3）的解满足有意义性条件（3.4）。根据引理 5.3，现在我们有两个自由参数，即 q_2 和 $\mathtt{A}_1$，它们满足不等式 $0 < \mathtt{A}_1 \le q_2/9$，而 q_1 现在由公式（5.4）约束。

5.2 正规形球中的初始数据

引理 5.1 中定义的系统（3.3）的特殊解将通过格朗沃尔论证，与从时间 $t = 0$ 处相同初始数据出发的完整（即未截断的）有效系统（2.18）、（2.19）的解进行比较。我们所关注的初始数据对应于球（2.8）中的函数$u_0(x)$，因为该球中的每个 u_0 都会产生柯西问题（2.2）、（2.9）的一个解，并且在足够长的时间区间内保持在正规形变换有定义的区域中，正如引理 2.2 中定量说明的那样。回顾一下，（2.8）中的 $\delta_1 > 0$ 是一个普适常数，而 m_1 在（2.6）中定义。下面的引理讨论用 S_n 表示的球（2.8）。

引理 5.4。考虑由引理 5.1 给出的系统 (3.3) 的解，并假设 (5.4)、(5.8) 成立。则

$$\sum_{n=1}^{4} \alpha_n^{2s} S_n(t) \le 8\alpha_4^{2s} q_2 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad s \in [1, \infty). \tag{5.10}$$

证明。对于所有 $t \in \mathbb{R}$，若小量条件 (5.8) 满足，则引理 5.1 中得到的系统 (3.3) 的解满足

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{4} \alpha_n^{2s} S_n &\le \alpha_1^{2s}(E_1 - q_1 + 3\mathtt{A}_1) + \alpha_2^{2s}(E_2 - q_1 - q_2 + 6\mathtt{A}_1) + \alpha_3^{2s}(q_1 - q_2 + 6\mathtt{A}_1) + \alpha_4^{2s}(q_2 + 3\mathtt{A}_1) \\ &\le \alpha_1^{2s}\frac{2\alpha_4^2 q_2}{\alpha_1^2} + \alpha_2^{2s}\frac{2\alpha_4^2 q_2}{\alpha_2^2} + \alpha_3^{2s}\frac{2\alpha_4^2 q_2}{\alpha_3^2} + \alpha_4^{2s} 2q_2 \le 8\alpha_4^{2s} q_2,\end{aligned}$$

其中，我们对 η_1、η_2 使用了 (5.7) 中的界，对常数项 (5.2) 使用了 (5.5) 中的恒等式，对 $\mathtt{A}_1$，使用了 (5.8) 中的界，对 $\mathtt{A}_2$，使用了 (5.6) 中的界，并使用了 $s \ge 1$、 $\alpha_1 < \cdots < \alpha_4$ 这一事实。 □

该引理的一个推论如下。若选择 q_2 使得

$$8\alpha_4^{2m_1} q_2 \le \delta_1^2, \tag{5.11}$$

其中， m_1, δ_1 是球 (2.8) 的普适常数，则

$$\sum_{n=1}^{4} \alpha_n^{2m_1} S_n(t) \le \delta^2 \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{5.12}$$

5.3 相容初始数据的构造

给定一个三角多项式 $u \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$，其傅里叶支撑集为 $\{k \in \mathbb{Z}^d : |k| \in \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}\}$，傅里叶系数为 u_k，我们用上标 u 表示

$$S_n^{(u)} := \sum_{|k|=\alpha_n} |u_k|^2, \qquad B_n^{(u)} := \sum_{|k|=\alpha_n} u_k u_{-k}, \qquad n = 1, 2, 3, 4, \tag{5.13}$$

$$Z_{123}^{(u)} := B_1^{(u)} B_2^{(u)} \overline{B_3^{(u)}}, \qquad \rho_{123}^{(u)} := |Z_{123}^{(u)}|, \qquad c_{123}^{(u)} := \frac{3}{8} \rho_{123}^{(u)} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \tag{5.14}$$

对 $Z_{234}^{(u)}$、$\rho_{234}^{(u)}$、$c_{234}^{(u)}$ 也作类似定义；若 $\rho_{123}^{(u)}$、$\rho_{234}^{(u)}$ 为正，则根据以下恒等式定义角变量 $\varphi_{123}^{(u)}$、$\varphi_{234}^{(u)} \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

$$Z_{123}^{(u)} = \rho_{123}^{(u)} \exp(i\varphi_{123}^{(u)}), \qquad Z_{234}^{(u)} = \rho_{234}^{(u)} \exp(i\varphi_{234}^{(u)}). \tag{5.15}$$

我们考虑以下问题：

给定由引理 5.1 得到的方程组 (3.3) 的一个解 $(S_1(t)\ S_2(t)\ S_3(t)\ S_4(t)\ \varphi_{123}(t)\ \varphi_{234}(t)$，特别是取其在时间 $t = 0$ 时的值，是否存在球 (2.8) 内的一个函数 $u_0(x)$，其傅里叶支撑位于半径为 α_1、α_2、α_3、α_4 的球面上，使得

$$\begin{cases} S_n^{(u_0)} = S_n(0), \quad n = 1, 2, 3, 4, \\ \varphi_{123}^{(u_0)} = \varphi_{123}(0), \quad \varphi_{234}^{(u_0)} = \varphi_{234}(0), \\ c_{123}^{(u_0)} = c_{123}, \quad c_{234}^{(u_0)} = c_{234} \quad ? \end{cases} \tag{5.16}$$

角变量的方程必须解释为 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 中元素的恒等式。下面的引理 5.8 对这个问题给出了肯定答案，其证明将用到接下来的三个简单预备引理。

引理 5.5. 设 $(S_1(t)\ S_2(t)\ S_3(t)\ S_4(t)\ \varphi_{123}(t)\ \varphi_{234}(t))$ 是引理 5.1 中得到的系统 (3.3) 的一个解。假设 q_1, q_2, $\mathtt{A}_1$ 满足 (5.4)、(5.8)。此外，若 $\mathtt{A}_1, q_2$ 满足

$$\mathtt{A}_1 \le \Big(\frac{3}{32} \frac{\alpha_1^3}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\Big)^{\frac{1}{2}} q_2^{\frac{3}{2}}, \tag{5.17}$$

那么存在实数 r_n, ψ_n, $n = 1,2,3,4$，使得

$$0 < r_n \le S_n(0), \tag{5.18}$$

使得

$$\psi_1 + \psi_2 - \psi_3 = \varphi_{123}(0), \qquad \frac{3}{8}(r_1\alpha_1)(r_2\alpha_2)(r_3\alpha_3) = c_{123}, \tag{5.19}$$

$$\psi_2 + \psi_3 - \psi_4 = \varphi_{234}(0), \qquad \frac{3}{8}(r_2\alpha_2)(r_3\alpha_3)(r_4\alpha_4) = c_{234}. \tag{5.20}$$

证明。对于 $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$，有无穷多个解，因为这 4 个未知数只需满足 2 个线性约束。例如，我们可以固定 $(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4) = (\varphi_{123}(0), 0, 0, -\varphi_{234}(0))$。对于 r_n，我们首先回顾，根据引理 5.1，常数 c_{123},c_{234} 是

$$c_{123} = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2} \mathtt{A}_1^2, \qquad c_{234} = \frac{c_{123}}{\gamma},$$

其中 γ 在 (3.25) 中定义，并满足 $1<\gamma<3$。因此 c_{123}, c_{234} 为正，因为 $\mathtt{A}_1$为正。我们必须选择 r_n，使得

$$(\alpha_1 r_1)(\alpha_2 r_2)(\alpha_3 r_3) = \frac{8}{3}c_{123} = \frac{4}{3}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\mathtt{A}_1^2,$$
$$(\alpha_2 r_2)(\alpha_3 r_3)(\alpha_4 r_4) = \frac{8}{3}\frac{c_{123}}{\gamma} = \frac{4}{3}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\mathtt{A}_1^2\frac{1}{\gamma}.$$

因此我们固定

$$r_1 = \frac{r_0}{\alpha_1}, \quad r_2 = \frac{r_0}{\alpha_2}, \quad r_3 = \frac{r_0}{\alpha_3}, \quad r_4 = \frac{r_0}{\gamma\alpha_4}, \qquad r_0 := \Big(\frac{4}{3}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\mathtt{A}_1^2\Big)^{\frac{1}{3}}.$$

因此，r_n 均为正数，并满足所需的恒等式。只需检验$r_n \le S_n(0)$。由 (5.9)，我们知道对所有 $n=1,2,3,4$，均有 $q_2/2 \le S_n(0)$。由于 $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4$且 $\gamma>1$，因此 $r_4<r_3<r_2<r_1$。故只需检验 $r_1 \le q_2/2$；根据 $r_1 = r_0/\alpha_1$的定义，当 $\mathtt{A}_1, q_2$ 满足 (5.17) 时，这一条件成立。 □

引理 5.6. 设 s、r、ψ为满足 $0<r\le s$的实数。则存在 z_1、$z_2 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$，使得 $|z_1|^2+|z_2|^2 = s$ 且 $2z_1z_2 = re^{i\psi}$。

引理 5.7. 设 s_n, r_n, ψ_n, $n=1, 2, 3, 4$ 为实数，且满足 $0<r_n\le s_n$。那么，对于任意维数 $d\ge 1$，都存在一个三角多项式 $u_0 \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$，其傅里叶支撑位于集合 $\{k\in\mathbb{Z}^d : |k| \in \{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}\}$，并回顾记号 (5.13)，

$$S_n^{(u_0)} = s_n, \quad B_n^{(u_0)} = r_n e^{i\psi_n}, \quad n=1,2,3,4. \tag{5.21}$$

证明. 对每个 $n=1,2,3,4$，固定一个满足 $|k_n|=\alpha_n$ 的整数向量 $k_n\in\mathbb{Z}^d$，并应用引理 5.6，确定两个非零复数 $z_{1,\,n}, z_{2,\,n}$，使得

$$|z_{1,n}|^2+|z_{2,n}|^2 = s_n, \qquad 2z_{1,n}z_{2,n} = r_n e^{i\psi_n}.$$

我们将 u_0 定义为一个三角多项式，其在频率 $k_n, -k_n$ 处的傅里叶系数为 $z_{1,\,n}, z_{2,\,n}$，并且其支撑中不含其他频率，即

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{4}(z_{1,n}e^{ik_n\cdot x} + z_{2,n}e^{-ik_n\cdot x}).$$

Then

$$S_n^{(u_0)} = |z_{1,n}|^2+|z_{2,n}|^2 = s_n, \qquad B_n^{(u_0)} = 2z_{1,n}z_{2,n} = r_n e^{i\psi_n}.$$ □

引理 5.7 讨论的是仅支撑在球面 $\{k : |k| = \alpha_n\}$ 上一对点 $(k_n, -k_n)$ 上的三角多项式；这是最简单的情形，在任意维数 $d\ge 1$ 下均成立。当然，在维数 $d\ge 2$ 下，傅里叶支撑可以包含同一球面上不止一对相反频率，因此，构造具有给定 $S^{(u_0)}{}_n, B^{(u_0)}{}_n$ 的 u_0 时，可用的自由参数会更多。

下面的引理给出了问题 (5.16) 的答案。

引理 5.8. 设 $(S_1(t)\ S_2(t)\ S_3(t)\ S_4(t)\ \varphi_{123}(t)\ \varphi_{234}(t))$ 是由引理 5.1 得到的系统 (3.3) 的一个解。另设 $q_1, q_2, \mathtt{A}_1$ 满足 (5.4)、(5.8)、(5.17)。那么存在一个三角多项式 $u_0\in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$，其傅里叶支撑包含于集合 $\{k\in\mathbb{Z}^d : |k|\in\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\}\}$，并满足 (5.16) 中的所有恒等式。此外，若 q_2 满足 (5.11)，则 u_0 属于球 (2.8)。

证明. 根据引理 5.5，存在满足 (5.18)、(5.19)、(5.20) 的常数 r_n, ψ_n。定义 $s_n := S_n(0)$，使得 (5.18) 化为 $0 < r_n \le s_n$。根据引理 5.7，存在一个具有所需傅里叶支撑且满足 (5.21) 的三角多项式 u_0。由 (5.21) 中的第一个恒等式可直接得到

$$S_n^{(u_0)} = s_n = S_n(0), \qquad n = 1, 2, 3, 4.$$

由 (5.21) 中的第二个恒等式、(5.14) 中的第一个定义以及 (5.19) 中的第一个恒等式，我们得到

$$Z_{123}^{(u_0)} = r_1 r_2 r_3 \exp(i(\psi_1 + \psi_2 - \psi_3)) = r_1 r_2 r_3 \exp(i\varphi_{123}(0)). \tag{5.22}$$

由 (5.22)、(5.14) 中的第二个和第三个定义，以及 (5.19) 中的第二个恒等式，我们得到

$$\rho_{123}^{(u_0)} = r_1 r_2 r_2, \qquad c_{123}^{(u_0)} = \frac{3}{8} r_1 r_2 r_3 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = c_{123}.$$

此外，由于 $r_1 r_2 r_3 > 0$，(5.22) 是 $Z^{(u_0)}{}_{123}$ 的极坐标表示，因此 $\varphi^{(u_0)}{}_{123} = \varphi_{123}(0)$ 是 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 中的元素。对 $c_{234}, \varphi_{234}(0)$ 也有类似的证明。

最后，若 q_2 满足 (5.11)，则由引理 5.4，界 (5.12) 成立；特别地，在时间 $t = 0$ 处的这个界意味着 u_0 属于球 (2.8)。 □

5.4 合并两个振幅参数

在引理 5.1 中，由命题 4.1 得到的系统 (3.3) 的解由三个独立参数 q_1、q_2、A_1 描述。于是，为了得到函数 S_n 的正性，只需利用比值 q_1/q_2 由 (5.4) 从下方和上方有界这一事实。此后，只剩下两个独立参数，即 q_2 和 A_1。接下来，为了得到下界 (5.9)，我们需要 (5.8)，它是形如 $\mathrm{A}_1 \le C q_2$ 的界，其中 C 是某个普适常数。此外，q_2 本身还必须满足小量条件 (5.11)，这是一个形如$q_2 \le K$的不等式，其中常数 K 依赖于 m, p。接下来，A_1, q_2 也必须满足条件 (5.17)，这是一个形如 $\mathrm{A}_1 \le K q_2^{3/2}$ 的不等式，其中常数 K 依赖于 m, p。

我们希望取得尽可能大的 A_1，因为 A_1 及其倍数 A_2 是我们要构造的混沌运动的振幅。我们将 A_1 固定为与 (5.8) 和 (5.17) 相容的最大值。因此，我们定义

$$\varepsilon := q_2^{\frac{1}{2}}, \qquad \mathtt{A}_1 := \Big(\frac{3}{32}\frac{\alpha_1^3}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^3, \tag{5.23}$$

使得 (5.17) 得以满足。注意，(5.8) 变为

$$\Big(\frac{3}{32}\frac{\alpha_1^3}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}\Big)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^3 \le \frac{1}{9}\varepsilon^2. \tag{5.24}$$

我们定义

$$\varepsilon_0 := \min\Big\{1,\ \frac{1}{9}\Big(\frac{32}{3}\frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{\alpha_1^3}\Big)^{\frac{1}{2}},\ \frac{\delta_1}{\sqrt{8}\alpha_4^{m_1}}\Big\}, \tag{5.25}$$

其中，δ_1 是 (5.11) 和 (2.8) 中的普适常数，因此对于所有 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$，(5.24) 和 (5.11) 均得以满足。常数 ε_0 仅依赖于 m、p。当 $\sigma = m/p$ 足够小时，(5.25) 中的最小值是集合中的第三个元素，正如我们在下面的引理中指出的那样。

引理 5.9. 存在一个普适常数 $\sigma_1 \in (0, 1)$，使得若 $\sigma = m/p \le \sigma_1$，则 (5.25) 中定义的 ε_0 为 $\varepsilon_0 = \delta_1/(\sqrt{8}\alpha_4^{m_1})$。

证明。只需回想 $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2>3\alpha_1^2$、 $\alpha_4^{m_1}\geq\alpha_4$ 和 $\alpha_4>\alpha_1>\sqrt{\alpha_1}$。 □

引理 5.10. 设 $a,m,p,\sigma,\alpha_1,\dots\alpha_4,\tilde{\mu}_1(\sigma)$ $\tilde{\mu}_2(\sigma)$ γ, $(\xi_1(t)$ $\eta_1(t)$ $\xi_2(t)$ $\eta_2(t))$ 与引理 5.1 中相同。取任意 $\varepsilon\in(0,$ $\varepsilon_0)$，其中 ε_0 是仅依赖于 m,p、在 (5.25) 中定义的常数，并定义 $q_2:=\varepsilon^2$，由 (5.23) 中第二个恒等式给出的 A_1，由 (5.4) 给出的 q_1，由 (5.3) 给出的 E_1,E_2，以及与引理 5.1 中相同的 c_{123}, c_{234}, B, A2, $S_1(t)$, $S_2(t)$, $S_3(t)$, $S_4(t)$, $\varphi_{123}(t)$, $\varphi_{234}(t)$ 还定义 $\rho_{123}=\frac{8}{3}c_{123}/(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$, $\rho_{234}=\frac{8}{3}c_{234}/(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)$。

于是，对于所有 $t\in\mathbb{R}$, $(S_1(t)$ $S_2(t)$ $S_3(t)$ $S_4(t)$ $\varphi_{123}(t)$ $\varphi_{234}(t))$ 都是系统 (3.3) 的一个解。此外，恒等式 (5.4) 成立，因此 (5.5) 成立；不等式 (5.8) 成立，因此下界 (5.9) 成立；不等式 (5.11) 成立，因此界 (5.12) 成立；不等式 (5.17) 成立，因此引理 5.8 的结论成立。

证明。证明可由 (5.23)、(5.25) 以及前面各子节的结果推出 . □

回顾命题 4.1 给出的函数 η_2 满足 (4.4)，我们还有如下引理，其中 ε^2、ε^3 与系数的其他部分分离开来。在 (5.29) 中考虑量 $\mathcal{N}_1$ 的原因是，它对应于 Kirchhoff 方程解的 Sobolev 范数$H^1(\mathbb{T}^d)$ 的平方。

为简化引理的论述，我们将（5.1）重写为

$$\begin{aligned}
S_1(t)&=\varepsilon^2 s_1-\varepsilon^3 a_1\eta_1(b\varepsilon^3 t),\\
S_2(t)&=\varepsilon^2 s_2-\varepsilon^3 a_1\eta_1(b\varepsilon^3 t)-\varepsilon^3 a_2\eta_2(b\varepsilon^3 t),\\
S_3(t)&=\varepsilon^2 s_3+\varepsilon^3 a_1\eta_1(b\varepsilon^3 t)-\varepsilon^3 a_2\eta_2(b\varepsilon^3 t),\\
S_4(t)&=\varepsilon^2 s_4+\varepsilon^3 a_2\eta_2(b\varepsilon^3 t),
\end{aligned}\tag{5.26}$$

其中

$$\begin{gathered}
s_1:=\frac{\alpha_4^2}{3\alpha_1^2},\qquad s_2:=\frac{\alpha_4^2}{3\alpha_2^2},\qquad s_3:=\frac{2\alpha_4^2}{3\alpha_3^2},\qquad s_4:=1,\\
a_1:=\Big(\frac{3}{32}\frac{\alpha_1^3}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}\Big)^{\frac{1}{2}},\qquad a_2:=\frac{1}{\gamma}a_1,\qquad b:=\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2}{2}a_1,
\end{gathered}\tag{5.27}$$

从而

$$\mathtt{A}_1=a_1\varepsilon^3,\quad \mathtt{A}_2=a_2\varepsilon^3,\quad \mathtt{B}=b\varepsilon^3.\tag{5.28}$$

注意，常数 s_1、s_2、s_3、s_4、a_1、a_2、b 仅取决于 m、p。我们还定义相应的函数

$$\mathcal{N}_1(t):=\sum_{n=1}^{4}\alpha_n^2 S_n(t)=\varepsilon^2\frac{7\alpha_4^2}{3}+\varepsilon^3(2\alpha_1\alpha_2)a_1\eta_1(b\varepsilon^3 t)+\varepsilon^3(2\alpha_2\alpha_3)a_2\eta_2(b\varepsilon^3 t).\tag{5.29}$$

引理 5.11. 存在一个普适常数 $\sigma_2\in(0,1)$，具有如下性质。设命题 4.1 给出的 $_t_j,t_j$，并定义

$$t_j^*:=\frac{t_j}{B}=\frac{t_j}{b\varepsilon^3},\qquad \bar{t}_j^*:=\frac{\bar{t}_j}{B}=\frac{\bar{t}_j}{b\varepsilon^3},\qquad I_j^*:=[t_j^*,\bar{t}_j^*],\qquad E_j^*:=[\bar{t}_j^*,t_{j+1}^*].\tag{5.30}$$

假设引理 5.10 的条件成立。此外，若比值 $\sigma = m/p$ 满足 $\sigma \le \sigma_2$，则在 (5.29) 中定义的 $\mathcal{N}_1(t)$ 满足

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2 c_1 + \frac{99}{100}\varepsilon^3 r_1 \le \mathcal{N}_1(t) \le \varepsilon^2 c_1 + \frac{201}{100}\varepsilon^3 r_1 \quad \forall t \in I_j^*, \\
&\varepsilon^2 c_1 - \frac{1}{100}\varepsilon^3 r_1 \le \mathcal{N}_1(t) \le \varepsilon^2 c_1 + \frac{101}{100}\varepsilon^3 r_1 \quad \forall t \in E_j^*, \\
&\max_{t\in I_j^*} \mathcal{N}_1(t) \ge \varepsilon^2 c_1 + \frac{199}{100}\varepsilon^3 r_1, \qquad \min_{t\in E_j^*} \mathcal{N}_1(t) \le \varepsilon^2 c_1 + \frac{1}{100}\varepsilon^3 r_1,
\end{aligned} \tag{5.31}$$

对所有 $j \ge 0$，其中 $c_1 := \frac{7}{3}\alpha_4^2$, $r_1 := (2\alpha_2\alpha_3)a_2$ 仅依赖于 m, p。

证明。为证明 (5.31) 最后一行中的第一个不等式，考虑区间 I_j^*，并设 t_j' 是该区间内使函数 $\eta_2(b\varepsilon^3 t)$ 取得最大值的点。由 (4.4) 和 (5.7) 可知

$$\eta_2(b\varepsilon^3 t_j') \ge 2 - C\sigma \quad \text{and} \quad |\eta_1(t)| \le 3 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

由 (5.29) 以及恒等式 $a_1 = \gamma a_2$ （见 (5.27)），我们得到

$$\begin{aligned}
\max_{t\in[t_j^*, \bar{t}_j^*]} \mathcal{N}_1(t) \ge \mathcal{N}_1(t_j') &\ge \varepsilon^2 \frac{7\alpha_4^2}{3} + \varepsilon^3(2\alpha_2\alpha_3)a_2(2 - C\sigma) - \varepsilon^3(2\alpha_1\alpha_2)3a_1 \\
&= \varepsilon^2 \frac{7\alpha_4^2}{3} + \varepsilon^3(2\alpha_2\alpha_3)a_2(2 - C\sigma)\Big(1 - \frac{3\gamma\alpha_1}{\alpha_3(2 - C\sigma)}\Big).
\end{aligned}$$

最后一组括号中的差在 $\sigma \to 0$ 时趋于 1，这是因为 $\gamma \to 3$，且比值 $\alpha_1/\alpha_3 = m/(2m+p)$ 在 $\sigma = m/p \to 0$ 时趋于 0。(5.31) 中的其他不等式也可类似地证明，利用 (4.3)、(4.4) 以及以下事实：

$$\mathcal{N}_1(t) = \varepsilon^2 \frac{7\alpha_4^2}{3} + \varepsilon^3(2\alpha_2\alpha_3)a_2\Big(\eta_2(b\varepsilon^3 t) + \frac{\alpha_1\gamma}{\alpha_3}\eta_1(b\varepsilon^3 t)\Big) = \varepsilon^2 c_1 + \varepsilon^3 r_1\big(\eta_2(b\varepsilon^3 t) + O(\sigma)\big). \tag{5.32}$$

□

注 5.12. 根据 (5.32)，$\mathcal{N}_1$ 在 σ 中的主阶振荡完全由 η_2的振荡描述，即由 S_4的振荡描述。

□

记号. 从现在起，我们有时会比之前宽松得多，不再精确追踪各个常数对 α_1、α_2、α_3、α_4 的显式依赖；我们将统称为 K （有时也用 K'或 K''）任意一个常数，该常数可能因行而异，且仅依赖于整数 m、p。

采用新的记号后，引理 5.10 中定义的常数变为

$$c_{123} = K\varepsilon^6, \quad c_{234} = K\varepsilon^6, \quad \rho_{123} = K\varepsilon^6, \quad \rho_{234} = K\varepsilon^6, \tag{5.33}$$

其中，四个常数 K 表示四个（可能不同的）值。

6 近似论证

考虑引理 5.10 中得到的系统 (3.3) 的一个解 $(S_1(t)\ S_2(t)\ S_3(t)\ S_4(t)\ \varphi_{123}(t)\ \varphi_{234}(t))$，并令 H^{m_1} 球 (2.8) 中按引理 5.8 构造的对应三角多项式为 u_0。令 $v_0 := \overline{u_0}$ 为 u_0 的复共轭，并令 $(u(t)\ v(t))$ 为变换后的基尔霍夫方程 (2.2) 在初始条件 (2.9) 下的柯西问题的解。由于 u_0 是三角多项式，解 (u, v) 在时间上全局存在。此外，由于 u_0 属于球 (2.8)，解 (u, v) 在时间区间 $[0, T_{\mathrm{NF}}]$ 上满足 (2.10)，见引理 2.2。

在时间 $t = 0$ 处计算的引理 5.4 中的估计给出不等式

$$\|u_0\|_s^2 \le 8\alpha_4^{2s} q_2 \quad \forall s \ge 1, \tag{6.1}$$

因此，回顾 (5.23) 以及前一节末尾的记号，(2.10) 中的 T_{NF} 也可以用 ε 估计为

$$T_{\mathrm{NF}} \ge \frac{C_0}{(8\alpha_4^{2m_1} q_2)^2} = K\varepsilon^{-4}. \tag{6.2}$$

对于每个时间 $t \in [0, T_{\mathrm{NF}}]$，为略微简化记号 (5.13)、(5.14)、(5.15)，我们记

$$S_n^u(t) := S_n^{(u(t))} \tag{6.3}$$

函数 $u(t, \cdot)$ 的超作用量，并且对 (5.13)、(5.14)、(5.15) 中的所有其他量也引入类似的记号。

由引理 2.3，可得

$$C_1 S_n^u(0) \le S_n^u(t) \le C_2 S_n^u(0) \quad \forall t \in [0, T_{\mathrm{NF}}], \quad n = 1, 2, 3, 4. \tag{6.4}$$

根据构造，有 $S_n^u(0) = S_n(0)$。因此，由 (6.4)、(5.10)、(5.23)，

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_s^2 &= \sum_{n=1}^4 \alpha_n^{2s} S_n^u(t) \\ &\le C_2 \sum_{n=1}^4 \alpha_n^{2s} S_n^u(0) = C_2 \sum_{n=1}^4 \alpha_n^{2s} S_n(0) = C_2 \|u_0\|_s^2 \le 8 C_2 \alpha_4^{2s} q_2 = 8 C_2 \alpha_4^{2s} \varepsilon^2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

对所有 $t \in [0, T_{\mathrm{NF}}]$、所有 $s \ge 1$ 均成立。对于 $s \in \{1, m_1\}$，有 $\alpha_4^{2s} \le \alpha_4^{2m_1}$，因此我们可以直接写成

$$\|u(t)\|_s \le K\varepsilon \qquad \forall t \in [0, T_{\mathrm{NF}}], \quad s \in \{1, m_1\}. \tag{6.6}$$

由于 $(u(t)\ v(t))$ 在 $[0, T_{\mathrm{NF}}]$ 上满足 (2.2)，函数 $S_n^u(t)$、$B_n^u(t)$ 在同一时间区间上满足有效方程 (2.15)，而 $Z_{123}^u(t)$、$Z_{234}^u(t)$ 在同一时间区间上满足 (2.19)。由于 $\rho_{123}^u(t)\ \rho_{234}^u(t)$ 连续，且在时间 $t = 0$ 处为正，因此存在 $T_{\mathrm{polar}} > 0$，使得对于所有 $t \in [0, T_{\mathrm{polar}}]$，$\rho_{123}^u(t)\rho_{234}^u(t)$ 均为正。

注 6.1. 请注意，一般而言，T_{polar} 可能小于 T_{NF}。 □

在时间区间 $[0, T_{\mathrm{polar}}]$ 上，角 $\varphi_{123}^u(t)\ \varphi_{234}^u(t)$ 由以下恒等式明确定义

$$Z_{123}^u(t) = \rho_{123}^u(t) \exp(i\varphi_{123}^u(t)), \quad Z_{234}^u(t) = \rho_{234}^u(t) \exp(i\varphi_{234}^u(t)), \quad \forall t \in [0, T_{\mathrm{polar}}]. \tag{6.7}$$

Since $Z^u_{123}(t)$、 $Z^u_{234}(t)$ 满足 (2.19)，函数 $\rho^u_{123}(t)$、 $\rho^u_{234}(t)$ 满足方程 s

$$\partial_t \rho^u_{123} = R_{\rho^u_{123}}, \qquad \partial_t \rho^u_{234} = R_{\rho^u_{234}} \tag{6.8}$$

在 $[0, T_{\text{polar}}]$ 上，且函数 $\varphi^u_{123}(t)$、 $\varphi^u_{234}(t)$ 满足方程

$$\begin{aligned}
\partial_t \varphi^u_{123} &= -\frac{1}{2}(\alpha_1^2 S^u_1 + \alpha_2^2 S^u_2 - \alpha_3^2 S^u_3) + R_{\varphi^u_{123}}, \\
\partial_t \varphi^u_{234} &= -\frac{1}{2}(\alpha_2^2 S^u_2 + \alpha_3^2 S^u_3 - \alpha_4^2 S^u_4) + R_{\varphi^u_{234}}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

在 $[0, T_{\text{polar}}]$ 上，其中

$$R_{\rho^u_{123}} := \operatorname{Re}\Big(\exp(-i\varphi^u_{123}) R_{Z^u_{123}}\Big), \qquad R_{\varphi^u_{123}} := \frac{1}{\rho^u_{123}} \operatorname{Im}\Big(\exp(-i\varphi^u_{123}) R_{Z^u_{123}}\Big), \tag{6.10}$$

以及对 $R_{\rho^u_{234}}$, $R_{\varphi^u_{234}}$ 的类似定义（只需将 (6.10) 中所有的 123 替换为 234）。 R_Z 型余项在 (2.20) 中定义，并在 (2.21) 中估计。此外， S^u_n,$n = 1$,2,3,4 满足

$$\begin{aligned}
\partial_t S^u_1 &= \frac{3}{8}\rho^u_{123}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \sin(\varphi^u_{123}) + R_{S^u_1}, \\
\partial_t S^u_2 &= \frac{3}{8}\rho^u_{123}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \sin(\varphi^u_{123}) + \frac{3}{8}\rho^u_{234}\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \sin(\varphi^u_{234}) + R_{S^u_2}, \\
\partial_t S^u_3 &= -\frac{3}{8}\rho^u_{123}\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \sin(\varphi^u_{123}) + \frac{3}{8}\rho^u_{234}\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \sin(\varphi^u_{234}) + R_{S^u_3}, \\
\partial_t S^u_4 &= -\frac{3}{8}\rho^u_{234}\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \sin(\varphi^u_{234}) + R_{S^u_4}
\end{aligned} \tag{6.11}$$

在 $[0, T_{\text{polar}}]$ 上，其中 R_S 型余项出现在 (2.15) 中，并在 (2.16) 中估计。在下面的引理中，我们证明一个关于 T_{polar} 的公式。

引理 6.2。假设引理 5.10 的假设成立。存在一个普适常数 $\sigma_3 \in$(0,1)，使得若 $\sigma = m/p$ 除满足引理 5.10 的假设外，还满足 $\sigma \le \sigma_3$，则对所有 $t \in [0, T_{\text{polar}}]$，有 $Z^u_{123}(t) \neq 0$, $Z^u_{234}(t) \neq 0$，其中

$$T_{\text{polar}} = \frac{C\alpha_1 A_1^2}{\alpha_4^{4m_1+2} q_2^5} = K\varepsilon^{-4} \le T_{\text{NF}}, \tag{6.12}$$

其中， $C > 0$ 是一个普适常数， $K > 0$ 是仅依赖于 m、 p的常数。因此，在 $[0, T_{\text{polar}}]$上， ρ^u_{123}、 ρ^u_{234} 为正，且 φ^u_{123}、 φ^u_{234} 有定义。此外，

$$|\rho^u_{123}(t) - \rho_{123}| \le \frac{1}{2}\rho_{123}, \qquad |\rho^u_{234}(t) - \rho_{234}| \le \frac{1}{2}\rho_{234}. \tag{6.13}$$

证明。此证明中， C （以及 C'、 C''）表示普适常数，不同处的取值可能不同。假设 ρ^u_{123} 在某个时间区间 $[0, T] \subset [0, T_{\text{NF}}]$上为正。于是，由（6.8）和（6.10）可得，

$$|\partial_t \rho^u_{123}| = \big|\operatorname{Re}\big(\exp(-i\varphi^u_{123}) R_{Z^u_{123}}\big)\big| \le \big|\exp(-i\varphi^u_{123}) R_{Z^u_{123}}\big| = |R_{Z^u_{123}}|.$$

由 (2.21)，对所有 $s \in \mathbb{R}$,

$$|R_{Z^u_{123}}| \le C\|u\|^4_{m_1} S^u_1 S^u_2 S^u_3 = \frac{C\|u\|^4_{m_1}}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{2s}} (\alpha_1^{2s} S^u_1)(\alpha_2^{2s} S^u_2)(\alpha_3^{2s} S^u_3) \le \frac{C\|u\|^4_{m_1}\|u\|^6_s}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{2s}}$$

并且由 (6.5)，对 $s \geq 1$ 和 $t \in [0,T]$,

$$\|u(t)\|_{m_1}^4 \|u(t)\|_s^6 \leq C\alpha_4^{4m_1+6s} q_2^5.$$

因此，由于 $\alpha_4 \leq 2\alpha_3$ 和 $\alpha_4 \leq 3\alpha_2$，对于 $s=1$，我们得到

$$|\partial_t \rho_{123}^u| \leq |R_{Z_{123}^u}| \leq \frac{C\alpha_4^{4m_1+6} q_2^5}{(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2} \leq \frac{C'\alpha_4^{4m_1+2} q_2^5}{\alpha_1^2} \quad \forall t \in [0,T]. \tag{6.14}$$

在时间 $t=0$，根据构造以及 c_{123}的定义（3.31），我们有

$$\rho_{123}^u(0) = \rho_{123} = \frac{8c_{123}}{3\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \frac{4(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)}{3\alpha_1\alpha_2\alpha_3}\mathtt{A}_1^2, \tag{6.15}$$

由于 $\mathtt{A}_1 > 0$，该量为正。因此

$$|\rho_{123}^u(t) - \rho_{123}| \leq \int_0^t |\partial_t \rho_{123}^u(s)|\, ds \leq \frac{C'\alpha_4^{4m_1+2} q_2^5}{\alpha_1^2} t \quad \forall t \in [0,T],$$

并且当满足以下条件时，对于所有 $t \in [0,T]$，最后一个量都严格小于 ρ_{123}

$$T < \frac{C\alpha_1}{\alpha_4^{4m_1+2}} \frac{\mathtt{A}_1^2}{q_2^5} =: T_{123}^*. \tag{6.16}$$

这意味着 $\rho_{123}^u > 0$ 在 $[0, T_{123}^*$上）。此外，由（5.17）和（6.2），

$$T_{123}^* = \frac{C\alpha_1}{\alpha_4^{4m_1+2}} \frac{\mathtt{A}_1^2}{q_2^5} \leq C' \frac{\alpha_1^4}{\alpha_4^4} \frac{1}{\alpha_4^{2m_1} q_2^2} \leq C''\sigma^4 T_{\mathrm{NF}},$$

其中 $\sigma = m/p$。于是，对于 $C''\sigma^4 \leq 1$，有 $T_{123}^* \leq T_{\mathrm{NF}}$。

按照类似的方法处理 ρ_{234}^u，我们得到估计

$$|\partial_t \rho_{234}^u| \leq |R_{Z_{234}^u}| \leq \frac{C\alpha_4^{4m_1+6} q_2^5}{(\alpha_2\alpha_3\alpha_4)^2} \leq C'\alpha_4^{4m_1} q_2^5, \tag{6.17}$$

并推得，在 $[0, T_{234}^*$ 上 $\rho_{234}^u > 0)$，其中

$$T_{234}^* = \frac{C\mathtt{A}_1^2}{\alpha_4^{4m_1+1} q_2^5} \leq C'\sigma^3 T_{\mathrm{NF}}.$$

此外，对于 $C\sigma \leq 1$，有 $T_{123}^* \leq T_{234}^* C\sigma \leq T_{234}^*$。

最后，已证明的估计还表明，对所有 $t \in [0, T_{123}^*/2]$，$|\rho_{123}^u(t) - \rho_{123}| \leq \frac{1}{2}\rho_{123}$。因此，我们固定 $T_{\mathrm{polar}} = T_{123}^*/2$。 □

我们回顾一下，上标 u 表示与柯西问题 (2.2)、(2.9) 的解 (u,v) 相关的量，而没有该上标则表示截断有效系统 (3.3) 的解。根据构造，我们有

$$S^u(0) = S(0), \qquad \rho^u(0) = \rho(0), \qquad \varphi^u(0) = \varphi(0).$$

此外，ρ 关于时间是常数，而且没有上标 u 时不存在余项 R_S, R_ρ, R_φ，因为 (3.3) 是截断有效系统。

下一个引理给出了在某个时间区间内 $S^u(t)$ 与 $S(t)$ 之差的估计。

引理 6.3. 假设引理 5.10 的假设成立，并考虑引理 5.10 给出的系统 (3.3) 的相应解 ($S_1(t)$,$S_2(t)$ $S_3(t)$ $S_4(t)$ $\varphi_{123}(t)$ $\varphi_{234}(t)$)。令 u_0 为引理 5.8 中构造的球 (2.8) 内相应的三角多项式。令 $v_0 := \overline{u_0}$ 为 u_0 的复共轭，并令 ($u(t)$ $v(t)$) 为变换后的基尔霍夫方程 (2.2) 在初始条件 (2.9) 下的柯西问题的解。假设比值 $\sigma = m/p$ 满足 $\sigma \le \sigma_3$，其中 σ_3 在引理 6.2 中定义。

存在 $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_0)$，它仅依赖于 m, p，其中 ε_0 是(5.25)中的常数，使得对于 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1$，有

$$\varepsilon^{-3}|S_n^u(t) - S_n(t)| \le \varepsilon^{\frac{3}{4}} \quad \forall t \in [0, T_\varepsilon], \quad n = 1, 2, 3, 4, \tag{6.18}$$

其中

$$T_\varepsilon = K\varepsilon^{-3}\log(\varepsilon^{-1}) \tag{6.19}$$

其中某个正数常数 K 仅依赖于 m, p。

证明。由S_n^u 的方程(6.11)与 S_n的方程(3.3)之差可得，对所有 $t \in [0, T_{\text{polar}}]$, $n = 1$,2,3,4,

$$\begin{aligned}|\partial_t(S_n^u - S_n)| \le{}& \alpha_1\alpha_2\alpha_3\Big(\rho_{123}|\varphi_{123}^u - \varphi_{123}| + |\rho_{123}^u - \rho_{123}|\Big)\\ &+ \alpha_2\alpha_3\alpha_4\Big(\rho_{234}|\varphi_{234}^u - \varphi_{234}| + |\rho_{234}^u - \rho_{234}|\Big) + |R_{S_n^u}|.\end{aligned}$$

由(2.16)可得$|R_{S_n^u}| \le C\|u\|_{m_1}^6 S_n^u$。由(6.6),

$$\|u\|_{m_1} \le K\varepsilon, \qquad |S_n^u| \le \alpha_n|S_n^u| \le \|u\|_1^2 \le K\varepsilon^2,$$

因此，$|R_{S_n^u}| \le K\varepsilon^8$在 $[0, T_{\text{polar}}]$上成立。因此，对于 $t \in [0, T_{\text{polar}}]$和 $n = 1$, 2, 3, 4,

$$\begin{aligned}|\partial_t(S_n^u - S_n)| \le{}& K\Big(\rho_{123}|\varphi_{123}^u - \varphi_{123}| + |\rho_{123}^u - \rho_{123}|\Big)\\ &+ K\Big(\rho_{234}|\varphi_{234}^u - \varphi_{234}| + |\rho_{234}^u - \rho_{234}|\Big) + K\varepsilon^8.\end{aligned} \tag{6.20}$$

由于 ρ_{123}, ρ_{234} 是常数，根据关于 ρ_{123}^u, ρ_{234}^u 的方程 (6.8)，可得

$$\partial_t(\rho_{123}^u - \rho_{123}) = \partial_t\rho_{123}^u = R_{\rho_{123}^u}, \qquad \partial_t(\rho_{234}^u - \rho_{234}) = \partial_t\rho_{234}^u = R_{\rho_{234}^u}.$$

时间导数 $\partial_t\rho_{123}^u$, $\partial_t\rho_{234}^u$ 已在 (6.14) 和 (6.17) 中估计；因此，对时间积分可得

$$|\rho_{123}^u(t) - \rho_{123}| \le K\varepsilon^{10}t, \quad |\rho_{234}^u(t) - \rho_{234}| \le K\varepsilon^{10}t \quad \forall t \in [0, T_{\text{polar}}].$$

此外，由 (6.15) 和 (5.28)，$\rho_{123} \le K\varepsilon^6$, $\rho_{234} \le K\varepsilon^6$。将这些估计代入 (6.20)，可得

$$|\partial_t(S_n^u - S_n)| \le K\varepsilon^6\big(|\varphi_{123}^u - \varphi_{123}| + |\varphi_{234}^u - \varphi_{234}|\big) + K\varepsilon^{10}t + K\varepsilon^8 \tag{6.21}$$

对所有 $t \in [0, T_{\text{polar}}]$, $n = 1$,2,3,4, 均成立。

将（3.3）中关于 φ_{123}^u、φ_{234}^u 的方程（6.9）与关于 φ_{123}、φ_{234} 的方程相减，得到

$$\begin{aligned}|\partial_t(\varphi_{123}^u - \varphi_{123})| &\le \alpha_1^2|S_1^u - S_1| + \alpha_2^2|S_2^u - S_2| + \alpha_3^2|S_3^u - S_3| + |R_{\varphi_{123}^u}|,\\ |\partial_t(\varphi_{234}^u - \varphi_{234})| &\le \alpha_2^2|S_2^u - S_2| + \alpha_3^2|S_3^u - S_3| + \alpha_4^2|S_4^u - S_4| + |R_{\varphi_{234}^u}|.\end{aligned}$$

由（6.13），$\rho^u_{123} \geq \frac{1}{2}\rho_{123}$ 在 $[0, T_{\text{polar}}]$ 上。因此，由（6.10），$|R_{\varphi^u_{123}}| \leq (2/\rho_{123})\,|R_{Z^u_{123}}|$，且 $R_{Z^u_{123}}$ 已在（6.14）中估计。此外，ρ_{123} 在（6.15）中给出。因此

$$|R_{\varphi^u_{123}}| \leq \frac{2}{\rho_{123}}|R_{Z^u_{123}}| \leq \frac{Kq_2^5}{\mathtt{A}_1^2} = K\varepsilon^4$$

并且，类似地，$|R_{\varphi^u_{234}}| \leq K\varepsilon^4$。因此

$$|\partial_t(\varphi^u_{123} - \varphi_{123})| + |\partial_t(\varphi^u_{234} - \varphi_{234})| \leq K\sum_{n=1}^{4}|S^u_n - S_n| + K\varepsilon^4. \tag{6.22}$$

我们对 (6.21) 和 (6.22) 应用格朗沃尔不等式。引入因子ε^β是方便的，其中 β 待定，因为 (6.21) 和 (6.22) 中的因子含有不同幂次的 ε。我们定义向量

$$\begin{aligned}\psi &:= \big(\varepsilon^\beta(S^u_1 - S_1), \varepsilon^\beta(S^u_2 - S_2), \varepsilon^\beta(S^u_3 - S_3), \varepsilon^\beta(S^u_4 - S_4), (\varphi^u_{123} - \varphi_{123}), (\varphi^u_{234} - \varphi_{234})\big)\\ &=: (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6),\end{aligned} \tag{6.23}$$

它是一个以 $t \in [0, T_{\text{polar}}]$ 为自变量、取值于 $\mathbb{R}^6$的函数。由 (6.21) 可得

$$\begin{aligned}|\partial_t\psi_n| = \varepsilon^\beta|\partial_t(S^u_n - S_n)| &\leq \varepsilon^\beta[K\varepsilon^6(|\psi_5| + |\psi_6|) + K\varepsilon^{10}t + K\varepsilon^8]\\ &\leq K\varepsilon^{6+\beta}|\psi| + K\varepsilon^{10+\beta}t + K\varepsilon^{8+\beta}, \quad n = 1, 2, 3, 4,\end{aligned}$$

由 (6.22) 可得

$$|\partial_t\psi_5| + |\partial_t\psi_6| \leq K\varepsilon^{-\beta}(|\psi_1| + |\psi_2| + |\psi_3| + |\psi_4|) + K\varepsilon^4 \leq K\varepsilon^{-\beta}|\psi| + K\varepsilon^4,$$

其中 $|\,|$ 是 $\mathbb{R}^6$的通常欧几里得范数。因此

$$|\partial_t\psi| \leq K(\varepsilon^{6+\beta} + \varepsilon^{-\beta})|\psi| + K\varepsilon^{10+\beta}t + K\varepsilon^{8+\beta} + K\varepsilon^4. \tag{6.24}$$

我们固定取值　取使和 $\varepsilon^{6+\beta} + \varepsilon^{-\beta}$最小的 β，即 $\beta = -3$。因此，(6.24) 变为

$$|\partial_t\psi| \leq K\varepsilon^3|\psi| + K\varepsilon^7 t + K\varepsilon^4. \tag{6.25}$$

此外，由初始条件 $\psi(0) = 0$的选取可知。于是，根据格朗沃尔不等式，

$$|\psi(t)| \leq \exp(K_0\varepsilon^3 t)K_1(\varepsilon^7 t^2 + \varepsilon^4 t) \quad \forall t \in [0, T_{\text{polar}}], \tag{6.26}$$

其中 K_0、K_1 为仅依赖于 m、p的某些正定常数。

现在考虑时间 $T_{\varepsilon,\,h} := K_0^{-1}\varepsilon^{-3}\log(\varepsilon^{-h})$，其中 h 是任意正实常数，且$K_0 > 0$是 (6.26) 中出现的常数；注意到 $T_{\varepsilon,\,h}$依赖于 h、ε、m、p。由 (6.12)，对于 $0 < \varepsilon \leq C$，有 $T_{\varepsilon,\,h} \leq T_{\text{polar}}$，其中 C为仅依赖于 h、m、p的某个正定常数。由 (6.26)，对于所有 $t \in [0, T_{\varepsilon,h}]$，有

$$\begin{aligned}|\psi(t)| &\leq \exp(K_0\varepsilon^3 t)K_1(\varepsilon^7 t^2 + \varepsilon^4 t) \leq \varepsilon^{-h}K_1\Big(\varepsilon^7 K_0^{-2}\varepsilon^{-6}\log^2(\varepsilon^{-h}) + \varepsilon^4 K_0^{-1}\varepsilon^{-3}\log(\varepsilon^{-h})\Big)\\ &\leq \varepsilon^{1-h}K_1\Big(K_0^{-2}\log^2(\varepsilon^{-h}) + K_0^{-1}\log(\varepsilon^{-h})\Big).\end{aligned}$$

我们还注意到

$$\varepsilon^{1-h}K_1\Big(K_0^{-2}\log^2(\varepsilon^{-h}) + K_0^{-1}\log(\varepsilon^{-h})\Big) \leq \varepsilon^{1-2h} \quad \text{for } 0 < \varepsilon \leq C', \tag{6.27}$$

对于某个正的常数 C'，它依赖于 h、m、p。例如，我们可以固定 $h = 1/8$。 □

6.1 Sobolev 范数的变化

我们使用 $H^1(\mathbb{T}^d)$ Sobolev 范数 $\|u(t)\|_1$ 来描述能量的转移，即超作用量 $S_n^u(t)$、 $n=1$、2、3、4 的振幅随时间演化而发生的交换。除了由引理 5.1 给出的近似系统 (3.39) 的解的 $H^{\frac{1}{2}}$ 范数在时间上保持常数（见注 3.6）之外，任何其他 H^s 范数都可以用来刻画超作用量之间的能量转移。我们决定使用 H^1 范数，因为这里的 H^1 对应于“物理变量”的空间 $H^{\frac{3}{2}}\times H^{\frac{1}{2}}$，该空间也是基尔霍夫方程标准局部适定性理论所用的空间。

引理 6.4. 假设引理 6.3 的所有假设成立，并且设 $\sigma\le\sigma_2$，其中 σ_2 由引理 5.11 给出。设 t_j^*、$\bar{t}_j^*$、I_j^*、E_j^*由 (5.30) 定义。存在一个常数 $\varepsilon_2\in(0,\varepsilon_1)$，仅依赖于 m、p，其中 ε_1 由引理 6.3 定义，使得如果除引理 6.3 的假设外还有 $0<\varepsilon\le\varepsilon_2$，那么 $u(t)$ 的 $H^1(\mathbb{T}^d)$ Sobolev 范数满足

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^2c_1+\frac{98}{100}\varepsilon^3r_1\le\|u(t)\|_1^2\le\varepsilon^2c_1+\frac{202}{100}\varepsilon^3r_1 \quad \forall t\in I_j^*,\\
&\varepsilon^2c_1-\frac{2}{100}\varepsilon^3r_1\le\|u(t)\|_1^2\le\varepsilon^2c_1+\frac{102}{100}\varepsilon^3r_1 \quad \forall t\in E_j^*,\\
&\max_{t\in I_j^*}\|u(t)\|_1^2\ge\varepsilon^2c_1+\frac{198}{100}\varepsilon^3r_1, \qquad \min_{t\in E_j^*}\|u(t)\|_1^2\le\varepsilon^2c_1+\frac{2}{100}\varepsilon^3r_1,
\end{aligned}\tag{6.28}$$

对所有满足区间 I_j^*、E_j^*包含于 $[0,T_\varepsilon]$的指标 $j\ge0$，其中 T_ε 由 (6.19) 定义，而 c_1、r_1 由引理 5.11 定义。

此外，存在一个常数 $K>0$，其仅取决于 m、p，使得如果命题 4.1 中引入的整数 m_j 满足

$$\sum_{j=0}^{N}m_j\le K\log(\varepsilon^{-1})\tag{6.29}$$

对于某个 N，则区间 I_0^*、E_0^*、……、I_N^*、E_N^* 全都包含于 $[0,T_\varepsilon]$ 中 .

证明。考虑一个区间 $I_j^*\subseteq[0,T_\varepsilon]$，以及该区间内的一点 t_j'，函数 $\mathcal{N}_1$ 在此点取得其在 I_j^* 上的最大值，其中函数 $\mathcal{N}_1$ 定义于 (5.29) 中。由 (5.31) 和 (6.18),

$$\begin{aligned}
\max_{t\in I_j^*}\|u(t)\|_1^2\ge\|u(t_j')\|_1^2&=\sum_{n=1}^{4}\alpha_n^2S_n^u(t_j')=\mathcal{N}_1(t_j')+\sum_{n=1}^{4}\alpha_n^2\big(S_n^u(t_j')-S_n(t_j')\big)\\
&\ge\varepsilon^2c_1+\frac{199}{100}\varepsilon^3r_1-\sum_{n=1}^{4}\alpha_n^2\varepsilon^{3+\frac{3}{4}}\ge\varepsilon^2c_1+\frac{198}{100}\varepsilon^3r_1.
\end{aligned}$$

(6.28) 中的其他不等式可类似地证明。

由 (4.2) 可得 $t_{j+1}=\tau(m_0+\theta_0+\ldots+m_j+\theta_j)$。因此，根据 (5.30),

$$t_{j+1}^*=\frac{\tau}{b\varepsilon^3}\sum_{k=0}^{j}(m_k+\theta_k)\quad\forall j=0,1,2,\ldots.$$

由于 $(m_k+\theta_k)\le2m_k$，回顾 (6.19)，可得 $t_{N+1}^*\le T_\varepsilon$ 若 (6.29) 成立。 □

引理 6.5. 假设引理 6.4 的假设成立。存在常数 $\varepsilon_3 \in (0, \varepsilon_2)$，仅依赖于 m, p，其中 ε_2 在引理 6.4 中定义，使得若 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_3$，则

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\tilde{c}_1 + \frac{48}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1 \le \|u(t)\|_1 \le \varepsilon\tilde{c}_1 + \frac{101}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1 \quad \forall t \in I_j^*,\\
&\varepsilon\tilde{c}_1 - \frac{2}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1 \le \|u(t)\|_1 \le \varepsilon\tilde{c}_1 + \frac{51}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1 \quad \forall t \in E_j^*,\\
&\max_{t\in I_j^*}\|u(t)\|_1 \ge \varepsilon\tilde{c}_1 + \frac{98}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1, \qquad \min_{t\in E_j^*}\|u(t)\|_1 \le \varepsilon\tilde{c}_1 + \frac{1}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1,
\end{aligned} \tag{6.30}$$

其中 $\tilde{c}_1 := \sqrt{c_1}$ 且 $\tilde{r}_1 := r_1/\sqrt{c_1}$。(6.30) 中的不等式对引理 6.4 所述的指标 j 成立，也就是说，对 $j = 0, \dots, N$成立，其中 N满足 (6.29)。

证明。(6.30) 中的不等式由 (6.28) 通过泰勒展开 $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + O(x^2)$（当 $x \to 0$ 时）以及不等式 $(1+x)^{1/2} \le 1 + \frac{1}{2}x$ 得到，该不等式对所有 $x \ge -1$均成立。 □

6.2 回到基尔霍夫方程的解

正如引理 2.2 中所观察到的，若 (u_0, v_0) 属于球 (2.8)，则对所有 $t \in [0, T_{\mathrm{NF}}]$，柯西问题 (2.2)、(2.9) 的解 (u, v) 始终位于球 $\|u\|_{m_1} \le \delta$ 内，在此球上变换Φ 有定义，并且 $(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Phi(u, v)$ 在同一时间区间上满足原系统 (2.1)。

我们希望证明，解 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 的动力学行为与引理 6.5 中 (u, v) 的动力学行为相似。需要强调的是，$v = \overline{u}$，因此 $\|v\|_1 = \|u\|_1$；事实上，引理 6.5 中的不等式针对的是解 (u, v)。相反，“物理”解 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 是一对满足 (2.1) 的实值函数，因此 $\tilde{v} = \partial_t\tilde{u}$。由此，引理 6.5 中出现的 $\|u\|_1$ 对应于引理 6.9 中的 $\mathcal{N}$。

变换 Φ 定义于 (2.5) 中。我们先考虑映射 $\Phi_3 \circ \Phi_4 \circ \Phi_5$，然后考虑$\Phi_1, \Phi_2$。由引理 2.1 可推得以下性质。

引理 6.6。设 δ, C为引理 2.1 中的普适常数。设 $(u, v) \in H_0^{m_1}(\mathbb{T}^d, c.c.)$，其中$\|u\|_{m_1} \le \delta$，并设 $(f, g) := \Phi_3 \circ \Phi_4 \circ \Phi_5(u, v)$。那么，对每个 $s \in \mathbb{R}$，

$$\|f - u\|_s \le 2C\|u\|_{m_1}^2\|u\|_s. \tag{6.31}$$

证明。由 (2.7)，

$$\begin{aligned}
\|f-u\|_s^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d}|k|^{2s}|f_k - u_k|^2 &\le \sum_k |k|^{2s}C^2\|u\|_{m_1}^4(|u_k| + |u_{-k}|)^2\\
&\le 2C^2\|u\|_{m_1}^4\sum_k |k|^{2s}(|u_k|^2 + |u_{-k}|^2) = 4C^2\|u\|_{m_1}^4\|u\|_s^2.
\end{aligned}$$ □

我们应用估 计 (6.31) 到前面各截面中构造的 (2.2) 的解 (u, v) .

引理 6.7。假设引理 6.5 的假设成立。令 v 为 u的复共轭，并令 $(f, g) := \Phi_3 \circ \Phi_4 \circ \Phi_5(u, v)$。存在常数 $\varepsilon_4 \in (0, \varepsilon_3)$，它仅依赖于 m, p，其中 ε_3 由引理 6.5 给出，使得若 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_4$，则

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\tilde{c}_1 + \frac{47}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1 \le \|f(t)\|_1 \le \varepsilon\tilde{c}_1 + \frac{102}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1 \quad \forall t \in I_j^*,\\
&\varepsilon\tilde{c}_1 - \frac{3}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1 \le \|f(t)\|_1 \le \varepsilon\tilde{c}_1 + \frac{52}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1 \quad \forall t \in E_j^*,\\
&\max_{t\in I_j^*}\|f(t)\|_1 \ge \varepsilon\tilde{c}_1 + \frac{97}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1, \qquad \min_{t\in E_j^*}\|f(t)\|_1 \le \varepsilon\tilde{c}_1 + \frac{2}{100}\varepsilon^2\tilde{r}_1,
\end{aligned} \tag{6.32}$$

其中 $\tilde{c}_1, \tilde{r}_1$ 在引理 6.5 中定义。不等式 (6.32) 对引理 6.4 中描述的指标 j 成立，也就是说，对 $j = 0, \dots, N$成立，其中 N满足 (6.29)。

证明。由 (6.31) 和 (6.6)，可得

$$\|f - u\|_1 \le 2C\|u\|_{m_1}^2 \|u\|_1 \le K\varepsilon^3 \tag{6.33}$$

在时间区间 $[0, T_{\mathrm{NF}}]$上，其中常数 K 仅取决于 m、p。引理中的所有不等式均由 (6.30) 和 (6.33) 得证。 □

变换 Φ_1、Φ_2 就是:

$$(q,p) = \Phi_2(f,g) = \Big(\frac{f+g}{\sqrt{2}}, \frac{f-g}{i\sqrt{2}}\Big), \qquad (\tilde{u},\tilde{v}) = \Phi_1(q,p) = (|D_x|^{-\frac{1}{2}}q, |D_x|^{\frac{1}{2}}p), \tag{6.34}$$

其中 $|D_x|^s$ 是傅里叶乘子 $|D_x|^s e^{ik\cdot x} = |k|^s e^{ik\cdot x}$、 $s \in \mathbb{R}$、 $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ （这里可以忽略频率 $k = 0$ ，因为涉及的都是零平均函数）。

引理 6.8。设 $s \in \mathbb{R}$，设 f 是 $H^s(\mathbb{T}^d, \mathbb{C})$ 中的一个零平均复值函数，并设 g 是其复共轭，即 $(f, g) \in H_0^s(\mathbb{T}^d, c.c.)$。那么，(6.34) 中定义的 (q, p) 是 $H_0^s(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ 中一对零平均实值函数，且

$$\|q\|_s^2 + \|p\|_s^2 = \|f\|_s^2 + \|g\|_s^2 = 2\|f\|_s^2,$$

且在 (6.34) 中定义的 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ 是 $H_0^{s+\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}) \times H_0^{s-\frac{1}{2}}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ 中一对零均值实值函数，其中

$$\|\tilde{u}\|_{s+\frac{1}{2}} = \|q\|_s, \qquad \|\tilde{v}\|_{s-\frac{1}{2}} = \|p\|_s.$$

证明。通过傅里叶系数进行简单计算即可。 □

下一个引理讨论系统 (2.1) 的解 $(\tilde{u}, \tilde{v})$，也就是原基尔霍夫方程 (1.1) 的解 $\tilde{u}$ 。

引理 6.9。假设引理 6.7 的假设成立，并令 $(\tilde{u}, \tilde{v}) := \Phi_1 \circ \Phi_2(f, g)$。若 $\varepsilon \le \varepsilon_4$，则函数

$$\mathcal{N}(t) := \Big(\|\tilde{u}(t)\|_{\frac{3}{2}}^2 + \|\tilde{v}(t)\|_{\frac{1}{2}}^2\Big)^{\frac{1}{2}} \tag{6.35}$$

满足

$$\begin{aligned}
&\varepsilon c_0 + \frac{47}{100}\varepsilon^2 r_0 \le \mathcal{N}(t) \le \varepsilon c_0 + \frac{102}{100}\varepsilon^2 r_0 \quad \forall t \in I_j^*, \\
&\varepsilon c_0 - \frac{3}{100}\varepsilon^2 r_0 \le \mathcal{N}(t) \le \varepsilon c_0 + \frac{52}{100}\varepsilon^2 r_0 \quad \forall t \in E_j^*, \\
&\max_{t\in I_j^*} \mathcal{N}(t) \ge \varepsilon c_0 + \frac{97}{100}\varepsilon^2 r_0, \qquad \min_{t\in E_j^*} \mathcal{N}(t) \le \varepsilon c_0 + \frac{2}{100}\varepsilon^2 r_0,
\end{aligned} \tag{6.36}$$

其中 $c_0 := \sqrt{2}\tilde{c}_1$, $r_0 := \sqrt{2}\tilde{r}_1$，且 $\tilde{c}_1, \tilde{r}_1$ 在引理 6.5 中定义。对引理 6.4 中描述的指标 j，即对 $j = 0, \dots, N$，不等式 (6.36) 成立，其中 N 满足 (6.29)。

证明。根据引理 引理 6.8 中，有 $\mathcal{N}(t) = \sqrt{2}\|f(t)\|_1$。因此，(6.36) 可由 (6.32) 直接推出。 □

定理 1.1 的证明。对于 $\sigma \le \sigma_4 := \min\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$， σ 上所有先前的小量条件均成立，其中 $\sigma_0 = \sigma_0(a_0)$ 由命题 4.1 给出， σ_1 由引理 5.9 给出， σ_2 由引理 5.11 给出， σ_3 由引理 6.2 给出。注意， σ_0、σ_1、σ_2、σ_3 都是普适常数，因此 σ_4 也是普适的。对于 $0 < \varepsilon \le \varepsilon_4$， ε 上所有先前的小量条件均成立，其中 ε_4 在引理 6.7 中定义。另请注意， ε_4 仅依赖于 m、p。

令 $m = 2$，并令 p 为满足 $p > m = 2$ 和 $\sigma = m/p = 2/p \le \sigma_*$ 的最小整数。由于 σ_* 是普适常数，整数 m、p 也都是普适常数。于是，所有仅依赖于 m、p 的常数现在都成为普适常数。特别地，命题 4.1 给出的 $M_0(\sigma)$ 现在是一个普适常数。

根据引理 6.9，在 (4.2) 中将时间 s_j、$\bar{s}_j$ 重命名为 t_j、$\bar{t}_j$，将周期 τ 重命名为 $T = T_a$，在 $a = a_0$ 处；在命题 4.1 中，将时间 t_j、$\bar{t}_j$ 重命名为 t_j^*、$\bar{t}_j^*$，将区间 I_j、E_j 重命名为 (5.30) 中的 I_j^*、E_j^*，将乘积 ε 重命名为 εc_0，其中 c_0 在引理 6.9 中定义；将常数 r_0 重命名为 $r_0/(2c_0^2)$，其中 c_0、r_0 在引理 6.9 中定义；将比值 b 重命名为 b/c_0^3，其中 c_0 在引理 6.9 中定义， b 在 (5.27) 中定义；并将引理 6.9 中的解 u 重命名为 $\tilde{u}$，定理 1.1 的证明至此完成。 □

参考文献

[1] A. Arosio、S. Panizzi， *On the well-posedness of the Kirchhoff string*，《美国数学学会会刊》348（1996），305-330。[2] P. Baldi， *Periodic solutions of forced Kirchhoff equations*，《比萨高等师范学校年刊·科学类》（第5辑），第VIII卷（2009），117-141。[3] P. Baldi、E. Haus，
On the existence time for the Kirchhoff equation with periodic boundary conditions，《非线性》33（2020），第1期，196-223。[4] P. Baldi、E. Haus， *On the normal form of the Kirchhoff equation*，《动力学与微分方程杂志》33（2021），1203-1230（纪念Walter Craig的专刊）。[5] P. Baldi、E. Haus，
Longer lifespan for many solutions of the Kirchhoff equation，《SIAM数学分析杂志》54（2022），第1期，306-342。[6] S.N. Bernstein， *Sur une classe d'équations fonctionnelles aux dérivées partielles*，《苏联科学院通报·数学辑》4（1940），17-26。[7] J. Bourgain，
On diffusion in high-dimensional Hamiltonian systems and PDE，《数学分析杂志》80（2000），1-35。[8] J. Bourgain。《哈密顿量偏微分方程中的问题》。 *Geom. Funct. Anal.*，特刊，第I部分：32–56，2000年。GAFA 2000（特拉维夫，1999年）。[9] T. Buckmaster、P. Germain、Z. Hani、J. Shatah，
Onset of the wave turbluence description of the longtimebehavior of the nonlinear Schrödinger equation，arXiv:1907.03667。[10] J. Colliander、M. Keel、G. Staffilani、H. Takaoka、T. Tao，
Transfer of energy to high frequencies in the cubicdefocusing nonlinear Schrödinger equation，《发明数学》181（2010），39-113。[11] L. Corsi、R. Montalto，
Quasi-periodic solutions for the forced Kirchhoff equation on $\mathbb{T}^d$，《非线性》31（2018），第11期，5075-5109。[12] R. W. Dickey， *Infinite systems of nonlinear oscillation equations related to the string*，《美国数学学会会刊》23（1969），459-468。[13] M. Ghisi、M. Gobbino，
Global solutions to the Kirchhoff equation with spectral gap data in the energy space，arXiv:2208.05400。[14] F. Giuliani、M. Guardia、P. Martin、S. Pasquali， *Chaotic-Like Transfers of Energy in Hamiltonian PDEs*，《数学物理通讯》384(2)（2021），1227-1290。[15] B. Gr´ebert、 ´E. Paturel和L. Thomann。
Beating effects in cubic Schrödinger systems and growth of Sobolevnorms。《非线性》26(5)：1361–1376，2013年。

[16] B. Gr´ebert、L. Thomann， *Resonant dynamics for the quintic nonlinear Schrödinger equation*，《亨利·庞加莱研究所分析与非线性年刊》29（2012），455-477。[17] B. Gr´ebert和C. Villegas-Blas。《非线性薛定谔方程中共振模态之间的能量交换》。 *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*，28(1)：127–134，2011年。[18] A.G. Greenhill， *The applications of elliptic functions*，麦克米伦公司，伦敦，1892年。[19] M. Guardia、Z. Hani、E. Haus、A. Maspero、M. Procesi， *Strong nonlinear instability and growth of Sobolev norms near quasiperiodic finite-gap tori for the 2D cubic NLS equation* 2018 1810 03694 ，预印本（arXiv：.）。[20] M. Guardia、E. Haus、M. Procesi， *Growth of Sobolev norms for the analytic NLS on* $\mathbb{T}^2$，《数学进展》301（2016），615-692。[21] M. Guardia、V. Kaloshin， *Growth of Sobolev norms in the cubic defocusing nonlinear Schrödinger equation*，《欧洲数学学会杂志》（JEMS）17（2015），71-149。[22] Z. Hani、B. Pausader、N. Tzvetkov和N. Visciglia。《乘积空间上的三次薛定谔方程的修正散射及其应用》。 *Forum Math. Pi*，3:e4，63，2015年。[23] E. Haus、M. Procesi， *KAM for beating solutions of the quintic NLS*，《数学物理通讯》354（2017），1101-1132。[24] E. Haus和L. Thomann。《五次非线性薛定谔方程的共振簇动力学》。*Dyn. Partial Differ. Equ.*，10(2)：157–169，2013年。[25] P. Holmes和J. Marsden。《一个具有无穷多个周期轨道的偏微分方程：受迫梁的混沌振荡》。 *Arch. Rational Mech. Anal.*，76(2)：135–165，1981年。[26] G. Kirchhoff， *Vorlesungen über mathematische Physik: Mechanik*，第29章，托伊布纳出版社，莱比锡，1876年。[27] S. Klainerman、A. Majda， *Formation of singularities for wave equations including the nonlinear vibrating string* 33 1980 241 263 ，《纯粹与应用数学通讯》（），-。[28] Y. Li。《受扰非线性薛定谔方程中的斯梅尔马蹄与符号动力学》。，（）：–。[29] V. K. Melnikov。《时间周期扰动下的中心稳定性》。 *Trans. Moscow Math. Soc.*，12 1：–57，1963年。[30] J. Moser， *Stable and random motions in dynamical systems*，《数学年刊研究》，第77号，普林斯顿大学出版社（1973年）。[31] C. Robinson， *Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos*，《高等数学研究》，CRC出版社（1999年）。

Pietro Baldi
“R. Caccioppoli”数学与应用系，那不勒斯费德里科二世大学，琴蒂亚街，圣安杰洛山，80126那不勒斯，意大利 pietro.baldi@unina.it

Filippo Giuliani
数学系，米兰理工大学，莱昂纳多·达·芬奇广场32号——博纳尔迪校区，20133米兰，意大利 filippo.giuliani@polimi.it

Marcel Guardia
数学与计算机科学系，巴塞罗那大学，大大道585号，08007巴塞罗那，西班牙；数学研究中心，C楼，贝拉特拉校区，08193贝拉特拉，西班牙 guardia@ub.edu

Emanuele Haus
数学与物理系，罗马第三大学，Largo San Leonardo Murialdo 1，00146 罗马，意大利 ehaus@mat.uniroma3.it