arXiv:2303.00699v1 [math.RA] 1 Mar 2023

图解有限格同余的一个公开问题

¨George Grätzer

Abstract. 设 L 是一个平面半模格。若它不含 M_3 子格，我们称其为 L *slim*。我们将 *SPS lattice* 定义为瘦平面半模格 L。

2016年，我证明了纤细平面半模格（SPS 格）的同余具有一项性质（双覆盖性质），并提出了刻画这类格的问题。

此后，已有 50 多篇论文为解决这一问题作出了贡献。在这篇综述中，我概述了这一领域的发展，并重点介绍 G´abor Cz´edli 的重要贡献。

1. Introduction引言

保罗·埃尔德什将数学家定义为一台机器，输入是（浓缩咖啡）咖啡，输出则是定理和猜想。他认为，提出问题与证明定理同样重要。

下面举例说明。我的书 [35]，《一般格论》于1978年出版。出版一年后，我写了一篇文章（见 [36]），*1979*年问题更新。这篇文章列有21条参考文献，涉及书中提出的40个问题。这本书及其第二版和第三版（见 [37] 和 [38]）在《数学评论》中有850条参考文献，其中许多与这些书提出的开放问题有关。

这篇综述聚焦于一个关于有限格同余的开放问题；我在2016年的一篇论文中提出了这个问题（见 [43]），相关内容也记述在我的书中 [51]。

1.1. **记号**。我们采用我的书中 [51]所用的记号。本书第一部分可免费下载：arXiv:2104.06539

1.2. **概要**。 Birkhoff 对偶有助于在大型分配格中进行计算；第 2 节将介绍这一主题。第 3 节回顾了这一领域的起源。G. Gr¨atzer、H. Lakser 和 E. T. Schmidt [58] 的一项关键成果在第 4 节中陈述。第 5 节提出了该问题。有限格的同余已知的第一个性质——双覆盖性质——见第 6 节。

解决该问题需要三项主要工具，分别在第 7.1 节、第 7.2 节和第 7.3 节中介绍。第 8 节介绍了 G. Cz´edli 的四项主要性质。第 9 节讨论 3P3C 性质。

为说明如何使用工具，第 10 节概述了一些证明。最后，第 11 节提出了一个相关问题。

Date: 2023年3月2日。

2. Finite distributive lattices

小型分配格易于计算，大型分配格则不然。***Birkhoff*** 对偶 （参见 G. Birkhoff [2]）提供了一种解决方案。

对于有限偏序集 P，若 $x \in A$ 和 $y \leq x$ 属于 P，并且 $y \in A$，则称 $A \subseteq P$ 下集 。对于 $H \subseteq P$，包含 H 的最小下集是 $\{ x \mid x \leq h, ,$ 其中 $h \in H \}$；我们用记号 $\downarrow H$ 表示这个集合。若 $H = \{a\}$，则我们用 $\downarrow a$ 表示 $\downarrow \{a\}$。令 $\mathrm{Dn}\, P$ 表示按集合包含关系排序的所有下集构成的集合。那么 $\mathrm{Dn}\, P$ 是一个有限分配格。

反过来，对于有限分配格 D，令 P 表示 D 中不可约并元构成的有序集。

Birkhoff 对偶。
(i) 映射 $P \to \mathrm{Dn}\, P$ 是有限偏序集与有限分配格之间的一个双射。它将 $a \in P$ 映射到 $\downarrow a \in \mathrm{Dn}\ P$。(ii) 逆映射为 $D \to \mathrm{J}(D)$。它将 $a \in D$ 映射到 $\mathrm{id}(a) \cap P$。

图 1 给出了一个例子。左侧的有限分配格 D 有 20 个元素，结构相当复杂。右侧与之对应的有限偏序集 P 只有 6 个元素。

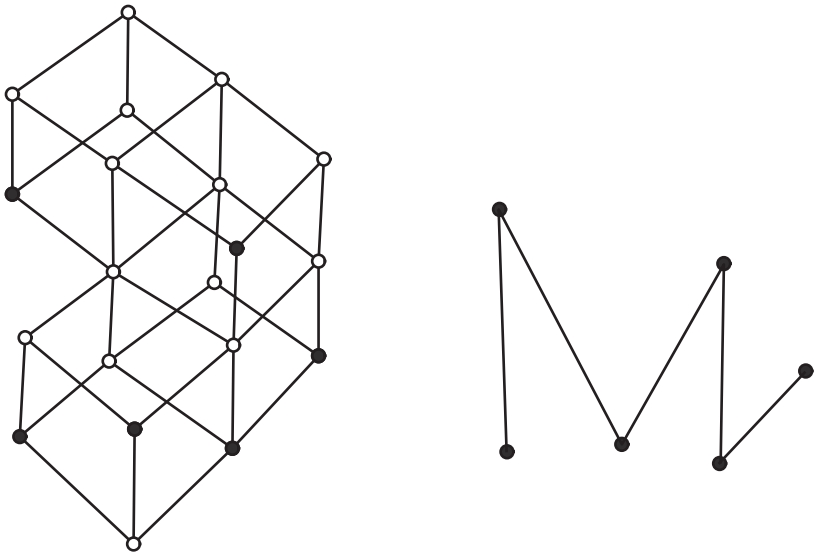


Figure 1. 有限分配格及与之对应的有限偏序集

对于有限格 L，其同余构成一个有限分配格 $\mathrm{Con}\, L$。与之对应的有限偏序集是其不可约同余所组成的有序集 $\mathrm{J(Con}\, L)$。对于 $a \prec b \in L$，我们可以构造 $\mathrm{con}(a,\ b)$，即使 L 中的 a 和 b合并的最小同余。于是 $\mathrm{con}(a,\ b) \in \mathrm{J(Con}\, L)$，反之亦然。

3. How it started

这一领域的首个结果见于 N. Funayama 和 T. Nakayama[34] 1942年的一篇论文：格的同余格是分配格。因此，有限格的同余格是有限分配格。

逆命题由 R. P. Dilworth 于约$circa$ 1944年发现，但未发表（讨论见 K. P. Bogart、R. Freese 和 J. P. S. Kung 编的著作，[3]）。

定理 1. 每个有限分配格 D 都可以表示为某个有限格 L的同余格。

这一结果的第一个证明发表于1962年（见 G. Gr¨atzer 和 E.T. Schmidt [59]）；该证明用一个截面对偶补格 L表示了 D 。

4. Representing with semimodular latices

我们能否将每个有限分配格 D 表示为有限半模 格 L 的同余格 Con L?

或者，等价地，我们能否将每个有限偏序集 P 表示为有限半模 格 L 的不可约同余所组成的偏序集 J(Con)L?

事实上，我们可以做到，正如 G. Gr¨atzer、H. Lakser 和 E. T. Schmidt [58] 所证实的那样。

定理 2。 每个有限分配格 D 都可以表示为某个有限平面半模格 L 的同余格。

令我们惊讶的是，这个证明得出了一个**平面格**。

我们现在给出一个图示证明，利用半模格 S_8，（见图 2），将图 3 中的有序集 P 表示为某个有限半模格 L 的 J(Con)L

着色格是一个有限格，其中（某些）边（素区间）带有标签，使得如果边 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}$ 颜色相同，那么 con($\mathfrak{p}$) =con($\mathfrak{q}$)。这些标签表示定义相同并不可约同余的边的等价类。

为了表示 P，我们首先构造着色格 A_a 和 A_b （见图4）。我们通过将两个 S_8 粘合在一起得到 A_a，并用 $\{a, b, d\}$ 对其着色，使得 con(a) $>$ con(b) 在 A_a 顶部的 S_8 中实现，而 con(a) $>$ con(d) 则

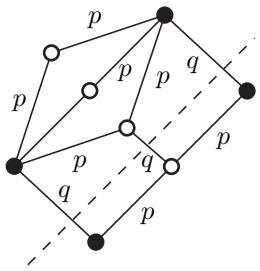


Figure 2. 用 $p < q$ 着色的半模格 S_8,

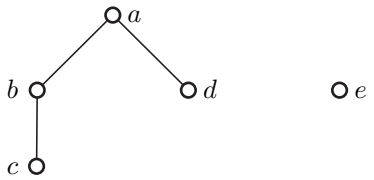


Figure 3. 有序集 P

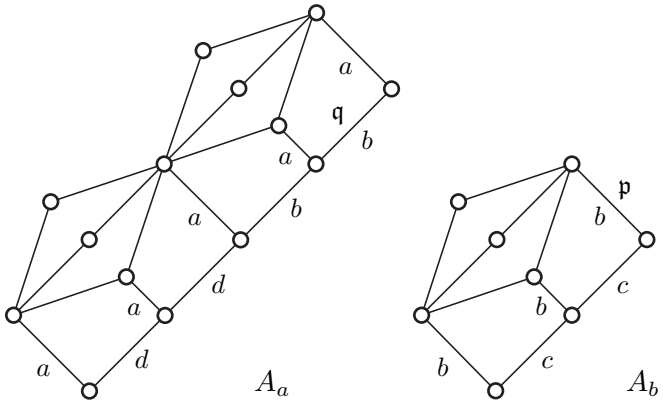


FIGURE 4. 两个着色格

在 A_a 底部的 S_8 中实现。格 A_b 是用 $\{b, c\}$ 着色的 S_8，使得 $\mathsf{con}(b) > \mathsf{con}(c)$ 在 A_b 中成立。

请注意，格 A_a 处理了所有 $a \succ x$ 序；在这个例子中，只有两种。我们可以通过粘合三个 S_8，来构造三个覆盖，以此类推。

构造 S、A_a 和 A_b 的粘合和；P 的所有覆盖都由 S 处理。只有一个问题：S 不是着色格；在这个例子中，如果 $\mathfrak{p}$ 是 S_b 中颜色为 b 的一个素区间（如图4所示），而 $\mathfrak{q}$ 是 S_b中颜色为 b 的一个素区间（如图4所示），那么在 S 中，我们有 $\mathsf{con}(\mathfrak{p}) \wedge \mathsf{con}(\mathfrak{q}) = \mathbf{0}$。当然，我们应该有 $\mathsf{con}(\mathfrak{p}) = \mathsf{con}(\mathfrak{q}) = \mathsf{con}(b)$。我们通过将 S 扩展为图5中的格 L 来解决这个问题。在 L 中，黑色填充的元素构成子格 S。

如你所见，我们通过添加一个分配的“网格”来扩展 S。右侧角落是由 $\{a, b, c, d\}$ 着色的 C_5^2；四个覆盖方形中，每个被同一种颜色着色两次的方形都被改造成保覆盖的 M_3。这使右侧角落的着色符合要求。在格的其余部分，我们也采用相同的方法：寻找一个被同一种颜色着色两次的覆盖方形，并将其改造成保覆盖的 M_3。这样就使 L 成为着色格：任意两个颜色相同的素区间都生成相同的同余。

最后，我们记住元素 $e \in P$。我们给格添加一条“尾巴”，并将它染成 e。

所得格 L 是平面半模格，并且 $\mathsf{J}(\mathsf{Con}\, L)$ 与 P 同构，其中同构 $x \mapsto \mathsf{con}(x)$ 对应于 $x \in \{a, b, c, d, e\}$。

5. THE PROBLEM

根据定理 2，每个有限分配格 D 都可以表示为有限平面半模格 L 的同余格。在构造中，我们大量使用 M_3 子格。我们能否不借助它们完成构造?

如果一个有限平面半模格 L瘦不含 M_3 子格，我们就称它为瘦格。我们将纤细平面半模格 定义为不含 M_3 子格的瘦有限平面半模格 L。（SPS 代表**瘦**、**平面**、**半模**。）

在论文 [43]，中，我提出了如下问题。

问题。刻画 *SPS* 格的同余格。

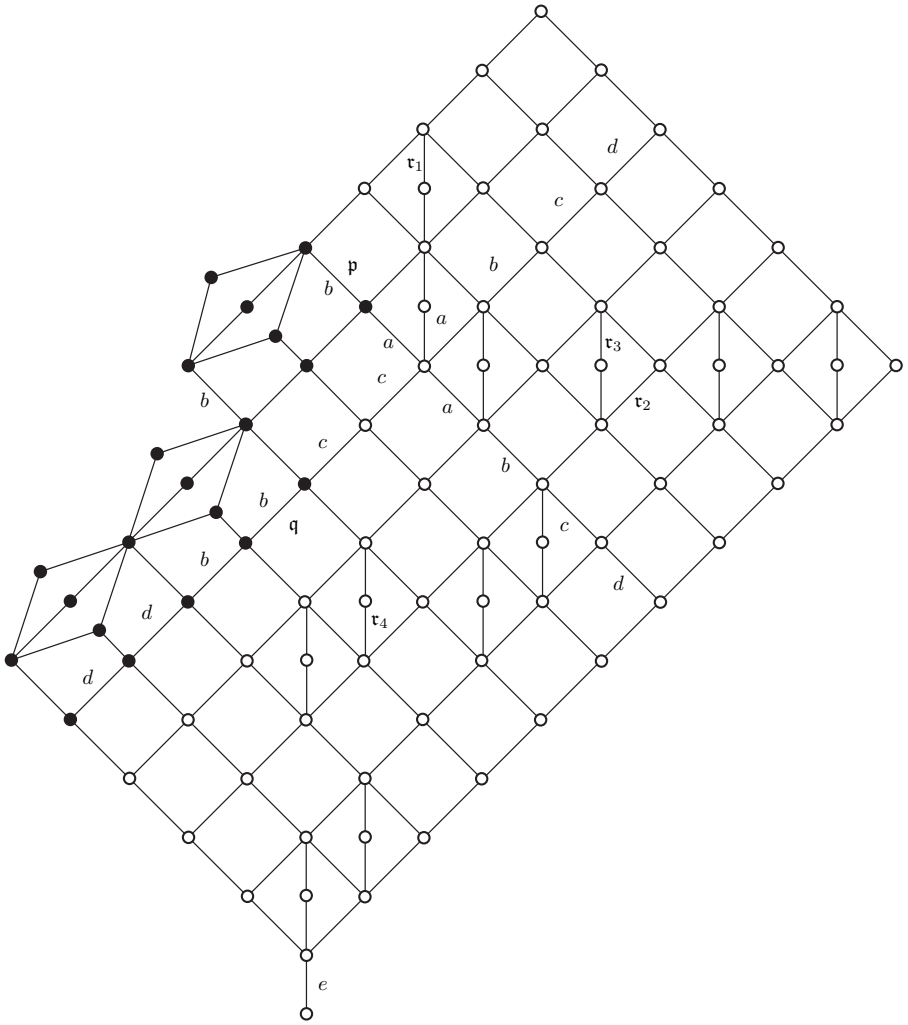


FIGURE 5. 格 L

6. THE TWO-COVER PROPERTY

有限有序集 P 满足双覆盖条件 （见我的论文 [43]），当且仅当 P 中的每个元素至多有两个覆盖。图 7 展示了一个不满足双覆盖条件的有序集 F_3 的图。有限有序集 P 满足双覆盖条件，当且仅当 F_3 不能保覆盖嵌入 到 P中。

以下是我的论文 [43]的主要结果。

定理 3（双覆盖定理）。 *SPS* 格 L 的并不可约同余所构成的有序集满足双覆盖条件。

双覆盖条件是一个必要条件。G. Cz´edli [7] 证明了它并非充分条件。我的论文 [41]给出了一个简短的证明。

我们称有限偏序集 P 满足双极大条件，如果 P 至少有两个极大元。

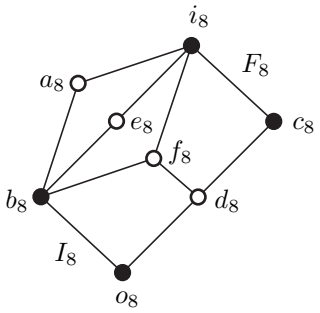


FIGURE 6. 半模构造 S_8, 的记号

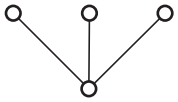


FIGURE 7. 满足双覆盖条件的有序集 F_3

在我的笔记 [45], 中，我证明了以下非常简单的结果。

定理 4 (双极大定理)。 *</style}*非平凡 *SPS* 格的并不可约同余的有序集 L 满足双极大条件。

因此，满足双覆盖条件的三元链 C_3, 不能表示为某个 SPS 格的同余格；当然，这是一个规模最小的例子。

G. Cz´edli [13] 发现了 SPS 格的同余格的四个主要性质。我们将在第 8 节讨论这些性质。我们在第 9 节介绍第六个主要性质，参见 G. Cz´edli 和 G. Gr¨atzer [23]。

G. Cz´edli维护着一份为这一问题作出贡献的论文清单；截至本文撰写时共有 52 篇，参见

http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/m/listak/publ-psml.pdf 这些论文都列在参考文献中。

7. THE TOOLS

7.1. 摆动引理。 对于 SPS 格 L 的边 $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, 我们定义一个二元关系：若 $1_\mathfrak{p} = 1_\mathfrak{q}$, 且该元素覆盖至少三个元素，并且 $0_\mathfrak{q}$ 既不是 $1_\mathfrak{p} = 1_\mathfrak{q}$ 所覆盖元素中最靠左的，也不是最靠右的，则称 $\mathfrak{p}$ 摆动至 $\mathfrak{q}$, 记作 $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{q}$。我们称元素 $1_\mathfrak{p} = 1_\mathfrak{q}$ 为该摆动的铰点 。如果 $0_\mathfrak{p}$ 是铰点所覆盖元素中最靠左或最靠右的元素，则称该摆动为外部摆动，记作 $\mathfrak{p}$ 外部$\mathfrak{q}$。否则，该摆动为内部摆动，记作 $\mathfrak{p}$ 内部$\mathfrak{q}$。图 8 给出了两个例子；在第一个例子中，铰点覆盖三个元素，且 $\mathfrak{p}$ 外部$\mathfrak{q}$；在第二个例子中，铰点覆盖五个元素，且 $\mathfrak{p}$ 内部$\mathfrak{q}$。

引理 5 (摆动引理)。 设 L 是一个 *SPS* 格，且 $\mathfrak{p}$ 和 $\mathfrak{q}$ 是 L 中不同的边。则 $\mathfrak{q}$ 被 $\mathrm{con}(\mathfrak{p})$ 收缩，当且仅当存在一条边 $\mathfrak{r}$ 和一列两两不同的边

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0, \mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_n = \mathfrak{q} \tag{1}$$

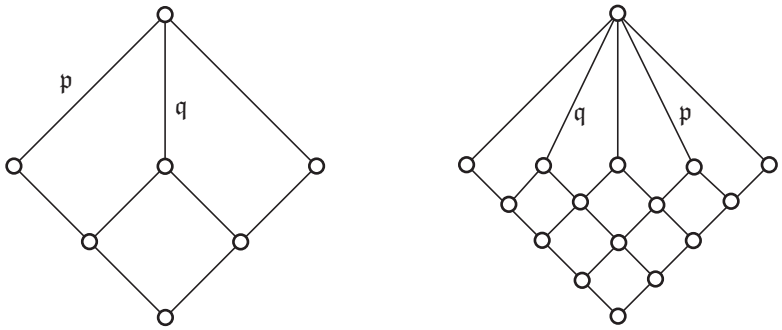


FIGURE 8. 摆动， $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{q}$

使得 $\mathfrak{p}$ 与 $\mathfrak{r}$ 向上透视，且对于 $i=0$， $\mathfrak{r}_i$ 与 $\mathfrak{r}_{i+1}$ 向下透视或发生摆动，.....。此外，序列 (1) 还满足

$$1_{\mathfrak{r}_0} \geq 1_{\mathfrak{r}_1} \geq \cdots \geq 1_{\mathfrak{r}_n}. \tag{2}$$

借助滑雪类比，可以很容易地直观理解摆动引理。

（i）向上透视是“攀爬”（见图 10）。（ii）向下透视是“滑行”（见图 11）。（iii）摆动是“转向”（见图 12）。

因此，我们从 $\mathfrak{p}$ 到 $\mathfrak{q}$，先向上攀爬一次，然后交替滑动和摆动。在图 9 的例子中，我们从 $\mathfrak{p}$ 向上攀爬到 $\mathfrak{r}=\mathfrak{r}_0$，从 $\mathfrak{r}_0$ 摆动到 $\mathfrak{r}_1$，从 $\mathfrak{r}_1$ 向下滑到 $\mathfrak{r}_2$，从 $\mathfrak{r}_2$ 摆动到 $\mathfrak{r}_3$，最后从 $\mathfrak{r}_3$ 向下滑到 $\mathfrak{r}_4$。

7.2. 自然图和 $\mathcal{C}_1$-图。正如我与 E. Knapp 合著的论文[52], 中所述，如果一个平面半模格 L 是矩形的，且其左边界链恰有一个双重不可约元 lc(L)，右边界链恰有一个双重不可约元 rc(D)，并且这两个元素互补，也就是说，

$$\begin{aligned} \mathrm{lc(D)} \vee \mathrm{rc(D)} &= 1, \\ \mathrm{lc(D)} \wedge \mathrm{rc(D)} &= 0. \end{aligned}$$

我们称瘦矩形格为*SR* 格。

本节中，我们讨论 SR 格的良图。

SR 格的自然图。我们遵循我与 E. Knapp 合著、发表于 2010 年的论文 [56]。对于一个 SR 格 L，分别以 $\mathrm{C_l}(L)$ 表示其左下边界链，以 $\mathrm{C_r}(L)$ 表示其右下边界链 L。

我们将网格 $G = \mathrm{C_l}(L) \times \mathrm{C_r}(L)$ 视为一个平面格，其中 $\mathrm{C_l}(L) = \mathrm{C_l}(G)$ 且 $\mathrm{C_r}(L) = \mathrm{C_r}(G)$。那么映射

$$\psi\colon x \mapsto (x \wedge \mathrm{lc(L)}, x \wedge \mathrm{rc(L)})$$

是从 L 到 G的交 meet 嵌入；映射 ψ 也保持界。因此， L 在 ψ 下于 G 中的像是 L的一个图；我们称之为表示 L的自然图。

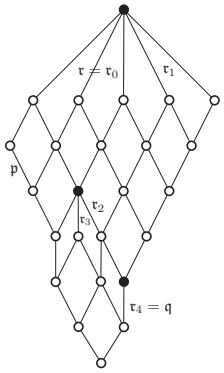


FIGURE 9. 摆动引理图解



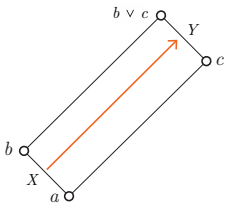
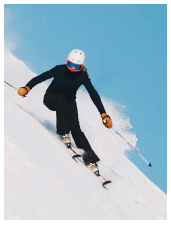


FIGURE 10. 乘坐吊厢上行——向上透视性



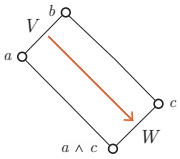
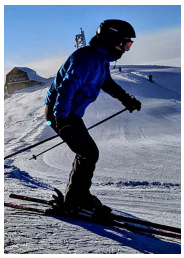


FIGURE 11. 滑雪下行——向下透视性



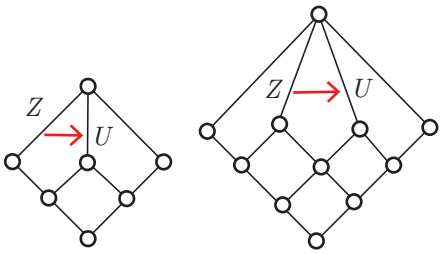


FIGURE 12. 转弯——摆动

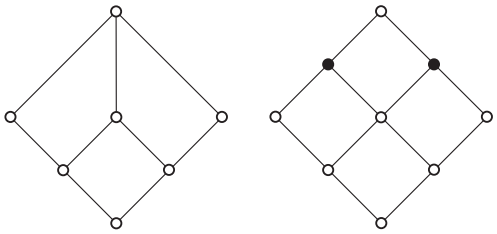


FIGURE 13. 获取 S_7 的自然图

$\mathcal{C}_1$-图。这项由 G. Cz´edli 于 2017 年提出的研究工具，近年来在论文中发挥着重要作用（参见 G. Cz´edli [12]–[17], 我与 G. Cz´edli 合著的论文 [23], 以及 G. Gr¨atzer [47]; 定义见 G. Cz´edli [12] 和 G. Gr¨atzer [47]）。

在 SR 格 K 的图中，正常边（直线）的斜率为 $45°$ 或 $135°$。斜率严格介于 $45°$ 和 $135°$ 之间的任何边（直线）都是陡峭的。正常边（直线）的斜率为 $45°$ 或 $135°$。K 中的一个窥视子格是一个顶端的三个元素均为覆盖关系的 S_7 子格。

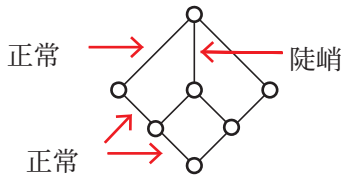


FIGURE 14. 普通边和陡边

定义 6. 如果窥视子格的中间边是陡边，而所有其他边都是普通边，那么 SR 格 L 的图就是一个 $\mathcal{C}_1$-图。

定理7. 每个 *SR* 格 L 都有一个 $\mathcal{C}_1$-图。

G. Cz´edli [12] 证明了这一点。我的笔记 [47] 给出了一个简短而直接的证明。事实证明，SR 格良图的两种构造方法是相同的（见我的论文 [50]）。

定理 8. 设 L 是一个 *SR* 格。那么，L 的自然图是一个 $\mathcal{C}_1$-图。反过来，每个 $\mathcal{C}_1$-图都是自然图。

7.3. 灯。设 L 是一个 SR 格。在 L 中底为交不可约元的那些边上，内摆动 $\mathfrak{p}$ $\mathfrak{q}$ 是一种自反、对称且传递的二元关系。因此，这些边被划分为若干等价类；G. Cz´edli [13] 称它们为灯。

灯的概念是发现 SPS 格的同余格大多数深层性质的关键工具。这是一个非常深奥且技术性很强的概念，期待 Cz´edli 撰写一篇以本文风格介绍该领域的文章。

G. Cz´edli [18] 还利用灯，找到了 SPS 格的同余格的一族无限多个独立性质。

观察 SP 格中同余如何传播，有多种方法。第一种方法使用轨迹，参见 G. Cz´ edli [6] 和我的论文 [44]。第二种是摆动引理。第三种是灯。它们在某些方面非常相似，但在技术上却大不相同。

8. Four major properties

本节介绍 SR 格同余的四个主要性质，这些性质由 G.Cz´edli [13] 引入。

设 K 是一个至少含有三个元素的瘦平面半模格，并设 $\mathcal{P}$ 是 K的并不可约同余所成的有序集。

8.1. 无子性质。

参见 G. Cz´edli [13], 在图 15 中的说明。

定理 9 (无子性质)。 设 $x \neq y \in \mathcal{P}$，并设 z 是 $\mathcal{P}$的一个极大元。假设 x 和 y 都被 z 在 $\mathcal{P}$中覆盖。那么不存在元素 $u \in \mathcal{P}$，使得 u 被 x 覆盖且 y。

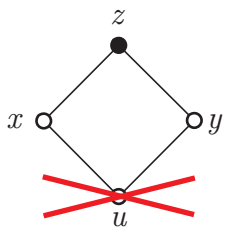


Figure 15. 无子性质

8.2. 四冠双悬枝性质。

参见 G. Cz´edli [13] ，并见图 16。

定理 10 (四冠双悬枝性质)。不存在将图 *16* 中的有序集 $\mathcal{R}$ 保覆盖嵌入到 $\mathcal{P}$ 中的嵌入，使得 $\mathcal{R}$ 的任一极大元都映射到 $\mathcal{P}$的极大元。

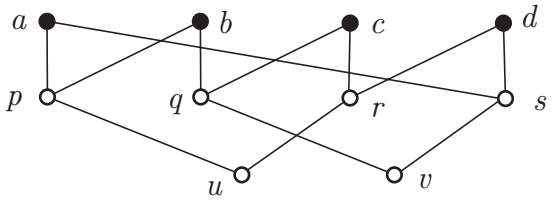


Figure 16. 有序集 $\mathcal{R}$

8.3. 分割性质。

参见 G. Cz´edli [13]。

定理 11 (分割性质)。 $\mathcal{P}$ 的极大元集合可以划分为两个非空子集，使得同一子集中任意两个不同的元素都没有公共下覆盖。

8.4. **极大覆盖性质**。 参见 G. Cz´edli [13]。

定理 12 (极大覆盖性质)。 如果 $x \in \mathcal{P}$ 被一个极大元$y \in \mathcal{P}$覆盖，那么 y 就不是 x的唯一覆盖。

8.5. **译名**。 “你花你的钱，自己挑着办。”奥尔德斯·赫胥黎，《美丽新世界》

Cz´edli 和我对其中一些性质使用了不同的名称。译名：

Cz´edli	**Gr¨atzer**
禁婚性质	无子性质
雌雄异株极大元性质	极大覆盖性质
二部极大元性质	分割性质

9. The 3P3C Property

我们要讨论的最后一个重要性质见 G. Cz´edli 和 G. Gr¨atzer [49]。

定理 13 (三悬垂三冠性质)。 图 *17* 中的有序集无法嵌入 $\mathcal{P}$，且保持覆盖关系。

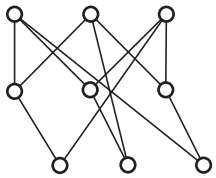


Figure 17. 三悬链三冠性质对应的有序集

10. Some proofs

本节概述基于我的论文 [48] 对 SR 格的同余的分割性质和双悬链四冠性质的证明。

分割性质。我们从一个引理开始。

引理 14。 设 X 和 Y 是 K 左上边界上的不同边。则不存在 K 的边 Z 使得

$$\operatorname{col} Z \prec \operatorname{col} X, \operatorname{col} Y. \tag{3}$$

证明。 反设 Z 是一条满足（3）的边。由于 X 和 Y 位于左上边界上，存在正常向上边 S_X, S_Y 以及陡边 T_X, T_Y 使得

$$X \overset{\mathrm{dn}}{\sim} S_X \overset{\mathrm{ex}}{} T_X, \quad Y \overset{\mathrm{dn}}{\sim} S_Y \overset{\mathrm{ex}}{} T_Y, \quad Z \in \mathcal{T}_X \cap \mathcal{T}_Y.$$

第三个公式推出 $T_X = T_Y$。由于 S_X 和 S_Y 是 normal-up，因此可得 $X = Y$，这与 X 和 Y 互不相同的假设矛盾。□

$\mathcal{P}$ 的极大元集合与上边界中边的颜色集合相同。后者可划分为左上边界中的边的集合 $\mathcal{L}$ 和右上边界中的边的集合 $\mathcal{R}$。设 X和 Y 是 $\mathcal{L}$中两条不同的边。根据引理 14，不存在 K 中满足 col $Z \prec$ col X，col Y的边 Z 。由对称性可知，分割性质成立。

双悬垂四冠性质。反设，图 16 中的有序集 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{P}$ 的保覆盖有序子集，其中 a, b, c, d 是 $\mathcal{P}$ 的极大元。因此， K 的上边界上有边 A, B, C, D，使得 col $A = a$, col $B = b$, col $C = c$, col $D = d$。由左右对称性，不妨设边 A 位于 K 的左上边界上。由于 $p \prec a, b$ 属于 $\mathcal{P}$，由引理 14 可知，边 B 位于 K 的右上边界上， D 也如此。类似地， C 位于 K 的左上边界上。

由于有序集 $\mathcal{R}$ 的自同构，只需考虑一种情形： C 在 A 之下，且 B 在 D 之下。

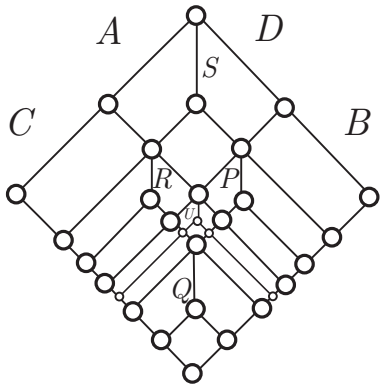


FIGURE 18. 双悬垂四冠性质证明示意图

因此，存在一个峰子格 S_7 ，其具有中间边 P （如图18所示），使得 A 和 B 分别向下透视到该峰子格的左上边和右上边。类似地，我们为 C 和 B 定义边 Q ，为 A 和 D 定义边 S ，为 C 和 D 定义边 R ，并为 R 和 P 定义边 U 。最后， $v \prec q$， s 在 $\mathcal{R}$ 中，因此，存在一个峰子格 S_7 ，其具有中间边 V，以及左上边 V_l 和右上边 V_r ，使得 $S \overset{\text{dn}}{\sim} V_l$ 和 $Q \overset{\text{dn}}{\sim} V_r$，或对称地成立。于是， V 同时属于分别包含 S_7、 S 和 Q 的两个峰子格，矛盾。至此，双悬垂四冠性质得证。

当然，图18中的图仅是一个示意。网格可能大得多，边 A， C 和 B， D 可能并不相邻，并且 K 中可能还有许多其他元素。

11. 再提一个问题

设 D 是形如 $D^h \dotplus \mathsf{B}_2$，的有限分配格，其中 D^h 与 B_2 作粘合和。可以将 D^h 视为去掉帽子的 D 格。

回顾一下，如果角元是对偶原子，则矩形格 L 是一个补丁格。容易验证，矩形格 L 是补丁格，当且仅当 $\mathrm{Con}\, L$ 是有限分配格 $\mathrm{Con}^h L$ 与 B_2的粘合和。

补丁问题。用有限分配格 $\mathrm{Con}^h L$ 的性质来刻画补丁格 L 的同余格。

References

[1] K. Adaricheva 和 G. Cz´edli，《通过置换描述并分配格札记》。《Algebra Universalis》72（2014），155-162。[2] G. Birkhoff，《集合环》。《Duke Math. J.》3，443–454。[3] K. P. Bogart、R. Freese 和 J. P. S. Kung（编），《Dilworth 定理》。Robert P. Dilworth 论文选集，Birkh¨auser Boston, Inc.，波士顿，MA，1990。xxvi+465 页。[4] G. Cz´edli，《瘦半模格的矩阵》。《Order》29（2012），85–103。[5] G. Cz´edli，《将分配格的同态表示为矩形格同余的限制》。《Algebra Universalis》67（2012），313–345。[6] G. Cz´edli，《瘦矩形格的补丁扩张与轨迹着色》。《Algebra Universalis》72（2014），125–154。[7] G. Cz´edli，《关于瘦半模格同余格的札记》。《Algebra Universalis》72（2014），225–230。[8] G. Cz´edli，《有限并分配格的坐标化》。《Algebra Universalis》71（2014），385–404。[9] G. Cz´edli，《圆的有限凸几何》。《Discrete Math.》330（2014），61–75。[10] G. Cz´edli，《平面瘦半模格图的渐近数量》。《Order》33（2016），231–237。[11] G. Cz´edli，《准平面图与瘦半模格》。《Order》33（2016），239–262。[12] G. Cz´edli，《平面半模格的图与矩形扩张》。《Algebra Universalis》77（2017），443–498。[13] G. Cz´edli，《瘦矩形平面半模格中的灯》。《Acta Sci. Math. (Szeged)》87（2021），381–413。[14] G. Cz´edli，《瘦半模格的循环同余与某些有限结构的非有限公理化》。《Arch. Math. (Brno)》58（2022），15–33。[15] G. Cz´edli，《作为绝对收缩的瘦补丁格与极大格》。arXiv:2105.12868[16] G. Cz´edli，《从半模格视角重新审视 Faigle 几何》。arXiv:2107.10202[17] G. Cz´edli，《瘦半模格中交的一种性质及其在收缩中的应用》。《Acta Sci. Math. (Szeged)》。arXiv:2112.07594[18] G. Cz´edli，《瘦半模格同余格的无穷多个新性质》。《Acta Sci. Math. (Szeged)》。arXiv:2206.14769[19] G. Cz´edli、T. D´ek´any、G. Gyenizse 和 J. Kulin，《瘦矩形格的数量》。《Algebra Universalis》75（2016），33–50。[20] G. Cz´edli、T. D´ek´any、L. Ozsv´art、N. Szak´acs、B. Udvari，《瘦半模格有多少个》。《Math. Slovaca》66（2016），5–18。[21] G. Cz´edli 和 G. Gr¨atzer，《平面半模格札记。VII. 平面半模格的重截》。《Order》30（2013），847–858。[22] G. Cz´edli 和 G. Gr¨atzer，《平面半模格：结构与图》。第3章，见 [62]。[23] G. Cz´edli 和 G. Gr¨atzer，《瘦、平面、半模格同余格的一种新性质》。《Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl.》16（2021），1–28。[24] G. Cz´edli、G. Gr¨atzer 和 H. Lakser，《平面半模格的同余结构：一般摆动引理》。《Algebra Universalis》79（2018）。[25] G. Cz´edli 和 ´A. Kurusa，《平面紧集的一种凸组合性质及其在格论中的根源》。《范畴与一般代数结构及其应用》11（2019），57–92。

[26] G. Cz´edli 和 G. Makay，《Swing格游戏与平面半模格摆动引理的直接证明》。《Acta Sci. Math. (Szeged)》83（2017），13–29。[27] G. Cz´edli 和 A. Molkhasi，《有限分配格与瘦半模格的绝对收缩》。《Order》。arXiv:2105.10604[28] G. Cz´edli、L. Ozsv´art 和 B. Udvari，《两个合成列有多少种交法？》。《Discrete Math.》312（2012），3523–3536。[29] G. Cz´edli 和 E. T. Schmidt，《群与半模格中具有唯一性的 Jordan-H¨older 定理》。《Algebra Universalis》66（2011），69–79。[30] G. Cz´edli 和 E. T. Schmidt，《瘦半模格。I. 一种可视化方法》。《Order》29（2012），481–497。[31] G. Cz´edli 和 E. T. Schmidt，《瘦半模格。II. 一种拼接系统描述》。《Order》30（2013），689–721。[32] G. Cz´edli 和 E. T. Schmidt，《群中的合成列与瘦半模格的结构》。《Acta Sci. Math. (Szeged)》79（2013），369–390。[33] T. D´ek´any、G. Gyenizse、J. Kulin，《赋予瘦矩形格的置换》。《Acta Sci. Math. (Szeged)》82（2016），19–28。[34] N. Funayama 和 T. Nakayama，《关于格上的同余关系》。《Proc. Imp. Acad. Tokyo》18（1942），530–531。[35] G. Gr¨atzer，《一般格论》。纯粹与应用数学75，Academic Press, Inc.（Harcourt Brace Jovanovich, Publishers），纽约-伦敦；精密科学领域教科书与专著，数学丛书，第52卷。Birkh¨auser出版社，巴塞尔-斯图加特；Akademie出版社，柏林，1978年。xiii+381 页。[36] G. Gr¨atzer，《一般格论：1979年问题更新》。《Algebra Universalis》11（1980），396–402。[37] G. Gr¨atzer，《一般格论》，第二版。作者与 B. A. Davey、R. Freese、B. Ganter、M. Greferath、P. Jipsen、H. A. Priestley、H. Rose、E. T. Schmidt、S. E. Schmidt、F. Wehrung 和 R. Wille 合著的新附录。Birkh¨auser出版社，巴塞尔，1998年。xx+663 页。平装版，Birkh¨auser出版社，巴塞尔–波士顿–柏林，2003年。2007年7月再版。[38] G. Gr¨atzer，《格论：基础》。Birkh¨auser出版社，巴塞尔，2011年。xxix+613 页。[39] G. Gr¨atzer，《平面半模格札记。VI. 关于平面半模格的结构定理》。《Algebra Universalis》69（2013），301–304。[40] G. Gr¨atzer，《平面半模格：同余》。第4章，见 [62]。[41] G. Gr¨atzer，《关于 G´abor Cz´edli 有关平面半模格同余格结果的评述》。《Acta Sci. Math. (Szeged)》81（2015），25–32。[42] G. Gr¨atzer，《瘦、平面、半模格中的同余：摆动引理》。《Acta Sci. Math. (Szeged)》81（2015），381–397。[43] G. Gr¨atzer，《瘦、平面、半模格叉扩张的同余》。《Algebra Universalis》76（2016），139–154。[44] G. Gr¨atzer，《平面半模格中的同余与轨迹》。《Discuss. Math. Gen. Algebra Appl.》38（2018），131–142。[45] G. Gr¨atzer，《平面半模格札记。VIII. SPS 格的同余格》。《Algebra Universalis》81（2020），第2期，论文编号15，3页。[46] G. Gr¨atzer，《将 Cz´edli-Schmidt 序列应用于平面半模格的同余性质》。《Discuss. Math. Gen. Algebra Appl.》41（2021），153–169。[47] G. Gr¨atzer，《平面半模格札记。IX. $\mathcal{C}_1$-图》。《Discuss. Math. Gen. Algebra Appl.》arXiv:2104.02534[48] G. Gr¨atzer，《将摆动引理和 $\mathcal{C}_1$-图应用于平面半模格的同余》。arXiv:2106.03241[49] G. Gr¨atzer，《关于瘦矩形格》。arXiv:2201.13343[50] G. Gr¨atzer，《关于瘦、平面、半模格同余格的一种性质》。arXiv:2205.10922[51] G. Gr¨atzer，《有限格的同余》，一种 *Proof-by-Picture* 方法，第三版。Birkh¨auser，2023年。

下载第一部分：arXiv:2104.0653[52] G. Gr¨atzer 和 E. Knapp，《平面半模格札记》I：构造。《Acta Sci. Math. (Szeged)》**73** (2007), 445–462. [53] G. Gr¨atzer 和 E. Knapp，《平面半模格札记》：一则短札。《Algebra Universalis》**58** (2008), 497–499. [54] G. Gr¨atzer 和 E. Knapp，《平面半模格札记》II：同余。《Acta Sci. Math. (Szeged)》**74** (2008), 37–47. [55] G. Gr¨atzer 和 E. Knapp，《平面半模格札记》III：矩形格的同余。《Acta Sci. Math. (Szeged)》**75** (2009), 29–48. [56] G. Gr¨atzer 和 E. Knapp，《平面半模格札记》IV：矩形格的最小同余格表示的大小。《Acta Sci. Math. (Szeged)》**76** (2010), 3–26. [57] G. Gr¨atzer 和 H. Lakser，分配格同态作为同余限制。III. 矩形格与两个凸子格。《Acta Sci. Math. (Szeged)》.arXiv:2112.15248[58] G. Gr¨atzer、H. Lakser 和 E. T. Schmidt，有限半模格的同余格。《Canad. Math. Bull.》**41** (1998), 290–297. [59] G. Gr¨atzer 和 E. T. Schmidt，论格的同余格。《Acta Math. Acad. Sci. Hungar.》**13** (1962年), 179–185. [60] G. Gr¨atzer 和 E. T. Schmidt，矩形格同余表示定理的一个简短证明。《Algebra Universalis》**71** (2014年), 65–68. [61] G. Gr¨atzer 和 T. Wares，《平面半模格札记》 V：有限半模格到简单半模格的保覆盖嵌入。《Acta Sci. Math. (Szeged)》**76** (2010), 27–33. [62] G. Gr¨atzer 和 F. Wehrung 编，《格论：专题与应用》。第1卷。Birkh¨auser Verlag，巴塞尔，2014年。ISBN：978-3-319-06412-3 ISBN：978-3-319-06413-0（电子书）*Email address*： gratzer@mac.com*URL*：
http://server.maths.umanitoba.ca/homepages/gratzer/UNIVERSITY OF MANITOBA