arXiv:2303.00700v2 [math.CV] 6 Jan 2024

单位圆盘中单参数半群花瓣的角导数问题

PAVEL GUMENYUK、MARIA KOUROU[§] 和 OLIVER ROTH

谨以此文缅怀 Larry Zalcman 教授

摘要。我们研究单位圆盘全纯自映射单参数半群的花瓣所涉及的角导数问题。对于双曲花瓣，我们根据花瓣的内在双曲几何以及半群的后向动力学，证明了花瓣具有共形性的一个充要条件。对于抛物型花瓣，我们根据 Koenigs 函数在 Denjoy–Wolff 点处的渐近行为，刻画了花瓣的共形性。

1. 引言

单位圆盘上全纯自映射的单参数半群 $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ 已研究了一个多世纪，但关于其边界和渐近行为的许多关键性质直到近二十年才得以确立。除了单参数半群本身就很有研究价值外，单位圆盘上的单参数半群还是其他复动力系统的重要范例，这些系统涉及一个或多个复变量的全纯函数，既包括连续情形，也包括离散情形。专著 [15] 对单位圆盘上单参数半群进行了全面综述，内容涵盖基础理论和众多近期成果。

传统上，人们尤其关注动力系统轨道的前向动力学。然而，近年来，单参数半群的后向动力学研究（参见例如 [14, 26, 33], ）以及离散复动力系统（一元和多元复变量情形）的后向动力学研究（参见例如 [2, 5, 12, 36], ）已成为另一个研究焦点。

关于单位圆盘上的单参数半群的前向动力学，最引人注目的结果之一是著名的 Denjoy–Wolff 定理的连续版本。它保证半群的所有正向轨道都收敛于同一个点 $\tau \in \mathbb{D} \cup \partial\mathbb{D}$，即该半群的 Denjoy–Wolff 点，简称 DW 点。相比之下，

日期：2024年1月9日。2020年数学主题分类。主要分类号：37F44、30D05、30D40、30C35；次要分类号：37C10、37C25、30C80。关键词和短语：角导数、单参数半群、花瓣、反向轨道、排斥不动点。[§]部分经费由亚历山大·冯·洪堡基金会资助。

单参数半群的反向流仅定义在 $\mathbb{D}$ 的一个真子集 $\mathscr{W}$ 上，该子集被称为反向不变集。$\mathscr{W}$ 内部的连通分支是单连通域，被称为半群的花瓣。每个花瓣 Δ 都与一个特定的边界点 $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ 相关联。对于半群的后向动力学而言，这个边界点 σ 所起的作用类似于 DW 点对于前向动力学所起的作用：从花瓣 Δ 内部出发的所有反向轨道都以 σ 为共同极限。鉴于动力系统中的惯用术语（例如参见 [4, 第 IV 章第 17 节，第 225] 页），我们将 σ 称为该花瓣的 α 点。关于这些概念的精确定义，尤其是关于先驱性论文 [14, 18, 26] 的内容，请参见第 2 节。

本文旨在研究单参数半群的花瓣 Δ 在其 α-点 σ处的角导数问题。与前向动力学相关的相应角导数问题最近已在 [8, 10, 22, 31]中得到研究。

一般单连通域 G 的角导数问题涉及：从单位圆盘 $\mathbb{D}$到 G 的黎曼映射 f 在给定边界点 $\xi \in \partial\mathbb{D}$处是否存在有限非零角导数。可以证明，f 的角导数是否存在并不取决于共形映射 f 的选择，而只取决于域 G 本身。因此，当这一角导数条件在边界点 ξ处满足时，我们称域 G 在 f (ξ)处共形。在其论文 [3], 中，Ahlfors 提出了如下问题：寻找 G 在边界点 ξ附近所满足的充要几何条件，使得 G 在 f (ξ)处共形[1]。这就是角导数问题。该问题引起了广泛关注，至今仍然如此。Rodin 和 Warschawski [41, 42],、Jenkins 和 Oikawa [30], 作出了奠基性贡献，随后还有许多其他学者，例如 Burdzy [16], 、Carroll [17], , 以及最近的 Betsakos 和 Karamanlis [11]。

现在可以陈述我们的主要结果了。该结果涉及双曲花瓣，即 Δ 满足其 α点 σ 不同于 Denjoy–Wolff 点的花瓣。抛物型花瓣的情形较为简单，即 α点与 Denjoy–Wolff 点重合的花瓣，将在第 5 节中讨论。我们用 λ_G表示域 G 的双曲度量密度。我们采用 [6, 34], 中的约定，因此域 G 上的双曲度量是 G 上具有常数负曲率 -1的唯一完备共形度量。特别地，单位圆盘 $\mathbb{D}$ 的双曲度量密度为

$$\lambda_{\mathbb{D}}(z) = \frac{2}{1-|z|^2}.$$

定理 1.1. 设 Δ 是单位圆盘中一个非平凡单参数半群 (ϕ_t) 的双曲花瓣，且 $z_0 \in \Delta$。那么，花瓣 Δ 在其 α点 σ处是共形的，当且仅当

$$\int_{-\infty}^{0} \log\left(\frac{\lambda_\Delta(z_0)}{\lambda_{\mathbb{D}}(\phi_t(z_0))\,|\phi_t'(z_0)|}\right) \mathrm{d}t \;<\; +\infty. \tag{1.1}$$

在这种情况下，(1.1) 中的积分对每个 $z_0 \in \Delta$ 都收敛，并且事实上在 Δ 中局部一致收敛。

[1]“区域 G 应具有什么几何性质，才能使如此确定的函数在点 ξ 处具有一个非零且有限的角导数？”[3, 第 47] 页

我们注意到，第二位署名作者和 Zarvalis 最近证明了 [33, 定理 1。3] 当 $t \to -\infty$时，

$$\lambda_{\mathbb{D}}(\phi_t(z))\,|\phi_t'(z)| \nearrow \lambda_\Delta(z) \quad \text{locally uniformly in } \Delta. \tag{1.2}$$

因此，定理 1.1 将 (1.2) 中的收敛速率与 Δ 在 σ 处的共形性联系起来。

注 1.2. 很容易构造出这样的双曲花瓣 Δ：它在其 α 点 σ 的某个邻域内与 $\partial\mathbb{D}$ 重合，参见例如 [14, 例 7.4 和 7.8]；显然，在这种情况下，Δ 在 σ 处是共形的。[14, 第 8] 节基于双曲距离的某些微妙性质，给出了一个非共形双曲花瓣的例子。在注 2.22 中，我们将介绍一种简单的方法，可轻松构造出大量共形及非共形双曲花瓣的例子。

定理 1.1 的证明较长，因此分为几个步骤。我们将用到单位圆盘上单参数半群一般理论中的多种工具，特别是 Berkson–Porta 理论、全纯模型和预模型，以及花瓣的基本性质。这些工具将在预备性的第 2 节中汇总并加以说明。本节还将全面介绍角导数问题。第 3 节中，我们陈述并证明两个技术性但至关重要的辅助结果：一个关于无穷远处星形域共形性的积分判据，以及一个关于边界上共形映射收敛的引理。定理 1.1 的证明见第 4 节，并分为几个步骤。第 4.1 小节中，我们给出该半群的 Koenigs 域 Ω 的共形性判据（定理 4.1），并说明它如何推出定理 1.1。第 4.2 小节中，我们通过定理 4.2 证明定理 4.1 的充分性部分；定理 4.2 给出了一个逐点下界，以欧几里得意义表示无穷远处星形的域 Ω 与包含在 Ω 中的最大条带的双曲密度之比。这个下界的证明综合运用了几何函数论中的多种工具，例如双曲密度的单调性、格林函数、调和测度和核收敛。第 4.3 小节中，我们通过将半群 (ϕ_t) 的 Koenigs 域 Ω 与精心选取的裂缝域进行比较，并运用势论工具，证明定理 4.1 的必要性部分。第 4.4 小节中，我们完成定理 4.1 的证明，并说明此前得到的逐点估计实际上是局部一致的。第 5 节中，我们陈述并证明抛物型花瓣情形下的共形性判据，见定理 5.1。最后，在第 6 节中，我们讨论本文结果与近期其他若干结果之间的联系，特别是 Betsakos 和 Karamanlis [11] 得到的共形条件。此外，我们还指出了几种研究花瓣共形性问题的潜在替代方法，并提出了若干尚未解决的问题。

2. 预备知识

2.1. 单位圆盘中的单参数半群。这里我们简要回顾有关全纯函数单参数半群的主要定义和基本事实。有关本节所引用陈述的更多细节和证明，请读者参阅专著 [15, 24, 43], [1, 第 4]章以及 [25, 第 4]章。

对于一个域 $D \subset \mathbb{C}$ 和一个集合 $E \subset \mathbb{C}$，我们用 Hol(D,E) 表示 D 中取值于 E 的所有全纯函数的集合。按照惯例，我们在 Hol(D,E) 上赋予局部一致收敛拓扑。于是，关于复合运算 $(\phi, \psi) \mapsto \phi \circ \psi$，Hol(D, D) 成为一个拓扑半群。

定义 2.1. 单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中的单参数半群是一个连续的半群同态 $[0,+\infty) \ni t \mapsto \phi_t \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$，它从带有欧几里得拓扑的半群 $\big([0,+\infty)\ +\big)$ 映到半群 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$。

等价地，族 $(\phi_t)_{t\geqslant 0} \subset \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ 是单参数半群，当且仅当它满足以下三个条件：(i) $\phi_0 = \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$；(ii) 对任意 s、t $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t} \geqslant 0$；(iii) 当 $t \to 0^+$ 时，$\phi_t \to \mathrm{id}_{\mathbb{D}}$ 在 $\mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$ 中。根据蒙泰尔正规性判别准则（参见例如 [27, § II.7，定理 1],），连续性条件 (iii) 等价于逐点收敛：对于每个 $z \in \mathbb{D}$，当 $t \to 0^+$ 时，$\phi_t(z) \to z$。与此同时，在满足 (i) 和 (ii) 的前提下，条件 (iii) 等价于一个强得多的性质：映射 $(z, t) \mapsto \phi_t(z)$ 关于 $\mathbb{D} \times [0,+\infty)$ 联合实解析。此外，$\mathbb{D}$ 中的每个单参数半群都表示一个（唯一确定的）全纯向量场 $G : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 的半流，该向量场称为 (ϕ_t) 的无穷小生成元。这意味着，对于每个固定的 $z \in \mathbb{D}$，函数 $t \mapsto \phi_t(z)$ 是以下初值问题的唯一解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi_t(z) = G\big(\phi_t(z)\big), \quad t \geqslant 0; \quad \phi_0(z) = z. \tag{2.1}$$

利用条件 (i) 和 (ii)，可以很容易地由 (2.1) 推导出以下偏微分方程：

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = G(z)\phi_t'(z), \quad t \geqslant 0,\ z \in \mathbb{D}. \tag{2.2}$$

备注 2.2. 根据常微分方程解的标准唯一性结果可知，单参数半群的每个元素都是单射映射。

备注 2.3. 单参数半群的定义可以直接推广到任意域 $D \subset \mathbb{C}$。然而，只有当 D 与 $\mathbb{D}$ 或 $\mathbb{D}^* := \mathbb{D} \setminus \{0\}$ 共形等价时，才会得到一类有趣的对象；后一种情形很容易归结为前一种情形；例如参见 [15, §8.4]。显然，若 D 存在一个到 $\mathbb{D}$ 的共形映射 f，则一族 $(\phi_t)_{t\geqslant 0} \subset \mathrm{Hol}(D, D)$ 是 D 中的单参数半群，当且仅当映射 $f \circ \phi_t \circ f^{-1}$ 在 $\mathbb{D}$中构成一个单参数半群。

修改单参数半群定义的另一种方法是允许参数 t 取负值。在这种情况下，对于任意 t，我们都有 $\phi_t \circ \phi_{-t} = \mathrm{id}_{\mathbb{D}} \in \mathbb{R}$，因此最终得到一个由自同构构成的单参数群 $(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$。

Berkson and Porta [7] 提出的经典表示公式将复平面 $\mathbb{D}$ 中的无穷小生成元刻画为如下形式的函数：

$$G(z) = (\tau - z)(1 - \overline{\tau}z)p(z), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{2.3}$$

其中，p 是 $\mathbb{D}$ 上的全纯函数，满足 $\mathrm{Re}\, p \geqslant 0$，且$\tau$是 $\mathbb{D}$闭包中的一点。函数 p 由 G 唯一确定。除非 $G \equiv 0$，否则同样的结论也适用于 τ。

为了排除某些退化情形，我们作出如下

假设：本文所研究的单参数半群（ϕ_t）不能延拓为单参数自同构群。

这一假设等价于要求不存在这样的 $t > 0$，使得 ϕ_t 是一个自同构。

Berkson–Porta 表示公式 (2.3) 中的特征点 τ具有非常明确的动力学意义：当 $t \to +\infty$时，$\phi_t(z) \to \tau$ 在 $\mathbb{D}$ 中局部一致。如果 $\tau \in \mathbb{D}$，那么

$$\phi_t(\tau) = \tau \quad \phi_t'(\tau) = e^{\lambda t}, \ \lambda := G'(\tau), \quad \text{for all } t \geqslant 0, \tag{2.4}$$

其中 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$。

如果 $\tau \in \partial\mathbb{D}$，那么 (2.4) 在角极限的意义下成立。此处及下文中，给定一个全纯函数 $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ 和一点 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$，我们用 $f(\zeta)$ 表示角极限$\angle\lim_{z\to\zeta} f(z) \in \overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$。类似地，如果 $f(\zeta)$ 有限存在，那么我们用 $f'(\zeta)$ 表示角导数

$$f'(\zeta) := \angle\lim_{z\to\zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}.$$

注2.4。一种特别重要的情形是，角导数的存在性可以得到保证：当 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ 且 $f(\zeta)$ 存在并属于 $\partial\mathbb{D}$ 时，参见例如第 82] 页的 [38, 命题4.13。在这种情况下，ζ 称为自映射 f 的接触点；接触点处的角导数 $f'(\zeta)$ 不为零，但可以是无穷大。

$f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D})$ 的边界不动点是满足 $f(\zeta) = \zeta$ 的接触点 ζ。边界不动点（或更一般地，接触点）ζ 若满足 $f'(\zeta) \neq \infty$，则称为正则。非正则的边界不动点也称为 f 的超排斥不动点（或超排斥型不动点）。边界正则不动点处的角导数 $f'(\zeta)$ 是一个正实数，并可进一步分为两种情形：若边界不动点 ζ 满足 $f'(\zeta) > 1$，则称其为排斥的（或排斥型）；若 $f'(\zeta) \in (0, 1]$,，则称其为吸引的。

注2.5. 值得一提的是，对于单参数半群的元素，在每个点 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ 处，角极限 $\phi_t(\zeta)$ 都存在，参见 [20, 28]。此外，对于每个 $\zeta \in \partial\mathbb{D}$，轨道 $t \mapsto \phi_t(\zeta)$ 都是连续的。同时，全纯映射 $\phi_t(\cdot)$ 通过角极限在 $\partial\mathbb{D}$ 上的延拓，在 $\partial\mathbb{D}$ 上不一定连续。

根据 Denjoy–Wolff 定理，自映射 $f \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{D}) \setminus \{\mathrm{id}_{\mathbb{D}}\}$ 要么有一个吸引不动点 $\tau \in \partial\mathbb{D}$，且在 $\mathbb{D}$ 中没有不动点；要么有一个不动点 $\tau \in \mathbb{D}$，且在 $\partial\mathbb{D}$ 上没有吸引不动点。在这两种情况下，τ 都是唯一的，它被称为自映射 f 的 Denjoy–Wolff 点（简称 DW 点）。

由 (2.4) 可知，Berkson–Porta 表示公式 (2.3) 中的 τ 对每个满足 $t > 0$ 的 ϕ_t 都是 Denjoy–Wolff 点。若 $\tau \in \mathbb{D}$，则称 (ϕ_t) 为椭圆型。若 $\tau \in \partial\mathbb{D}$，则 $\lambda \leqslant 0$；并且根据 $\lambda < 0$ 还是 $\lambda = 0$，单参数半群 (ϕ_t) 分别称为双曲型或抛物型。根据 Denjoy–Wolff 定理的连续版本，当 $t \to +\infty$ 时，$\phi_t(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 中局部一致地趋于 $\to \tau$。

与 Denjoy–Wolff 点类似，排斥的（以及超排斥的）不动点是单参数半群所有元素共有的。更确切地说，若 $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ 对某个满足 $t > 0$ 的 ϕ_t 是排斥的（或超排斥的）不动点，当且仅当它对所有满足 $t > 0$ 的 ϕ_t 都是排斥的（分别为超排斥的）不动点；例如参见 [20]。

单参数半群的不动点可以用无穷小生成元来刻画。已知 [19] 当且仅当 $G(\sigma) = 0$ 且 $\lambda := G'(\sigma)$ 有限存在时，$\sigma \in \partial\mathbb{D}$ 是 (ϕ_t) 的边界正则不动点；另见 [15, 第 122] 节。在这种情况下，对于所有 $t \geqslant 0$，$\lambda \in \mathbb{R}$ 且 $\phi_t'(\sigma) = e^{\lambda t}$。显然，如果 $\lambda > 0$，则 σ 是一个排斥不动点；否则，也就是说，如果 $\lambda \leqslant 0$，则 σ 是 (ϕ_t) 的 Denjoy–Wolff 点。

以下备注给出了一种有用的构造，表明每个非群的椭圆型单参数半群，都与唯一的非椭圆型单参数半群相关联。

注 2.6. 假设 (ϕ_t) 是一个椭圆型半群，其 Denjoy–Wolff 点为 $\tau \in \mathbb{D}$。那么 (ϕ_t) 可视为 $\mathbb{D}\setminus\{\tau\}$ 中的一个单参数半群。考虑覆盖映射 $T \circ C : \mathbb{D} \to \mathbb{D}\setminus\{\tau\}$，其中 $C(z) := \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$，$T(w) := (w+\tau)/(1+\overline{\tau}w)$。众所周知，参见[28, 第 2] 节，存在一个（唯一的）单参数半群 (φ_t)，它是相对于 $C \circ T$ 对 (ϕ_t) 的提升，即满足对所有 $t \geqslant 0$，$\phi_t \circ T \circ C = T \circ C \circ \varphi_t$。上述构造的更多细节及其应用将在定理 1.1 的证明中给出。

2.2. 全纯模型与 Koenigs 函数。众所周知，参见例如 [15, 第 9.2] 节或 [13],，任意单参数半群都存在一个全纯模型 (Ω_0, h, L_t)。这意味着 $\Omega_0 \subset \mathbb{C}$ 是一个单连通域，称为基空间；$h : \mathbb{D} \to \Omega_0$ 是一个单射全纯映射；而 (L_t) 是 Ω_0 的全纯自同构构成的单参数群，且具有以下两个性质：

$$h \circ \phi_t = L_t \circ h, \qquad \text{for all } t \geqslant 0; \tag{2.5}$$

$$\bigcup_{t \leqslant 0} L_t(\Omega) = \Omega_0, \qquad \text{where } \Omega := h(\mathbb{D}). \tag{2.6}$$

在自然定义的同构意义下，给定单参数半群的全纯模型是唯一的。

本节及后续各节所要介绍的理论，也可以（经过适当修改后）推广到不是椭圆群的椭圆型单参数半群情形。考虑到注 2.6，从这里开始，我们可以放心地只考虑非椭圆单参数半群（即双曲型或抛物型）。

非椭圆单参数半群存在全纯模型，使得 $L_t(z) := z + t$, $t \in \mathbb{R}$, and Ω_0 是整个 $\mathbb{C}$，或是边界 $\partial\Omega_0$ 由一条或两条平行于 $\mathbb{R}$ 的直线构成的半平面或条带。对于这类全纯模型，方程 (2.5) 变为阿贝尔函数方程

$$h\big(\phi_t(z)\big) = h(z) + t \quad \text{for all } z \in \mathbb{D} \text{ and all } t \geqslant 0\,. \tag{2.7}$$

函数 h 称为 (ϕ_t) 的 Koenigs 函数，且除加法常数外唯一。集合 $\Omega := h(\mathbb{D}) \subset \Omega_0$ 称为 (ϕ_t) 的 Koenigs 域（有时也称为平面域）。Abel 方程

蕴含了 Ω 的一个重要性质：对于其中的每个点 w，Koenigs 域都包含射线 $\{w+t : t \geqslant 0\}$。这样的域称为无穷远星形域。

（ϕ_t）的许多动力学性质都蕴含在相应 Koenigs 域 Ω 的几何结构中。此外，任何不同于整个复平面的无穷远处星形域 Ω，都是某个非椭圆单参数半群的 Koenigs 域。这常用于构造具有特定行为的单参数半群实例，参见下文注 2.22。

定义 2.7. 我们用 $\mathbb{S}$ 表示“标准”水平带 $\{z : |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{2}\}$，更一般地，用 $\mathbb{S}(a, b) := \{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$ 表示，其中 $a, b \in \mathbb{R}$，且 $a < b$。设 Ω 为某个非椭圆单参数半群（ϕ_t）的 Koenigs 域。若条带 $\mathbb{S}(a, b)$ 包含于 Ω 中，则称其为（ϕ_t）的极大条带，当且仅当 $\mathbb{S}(a, b) \subset \mathbb{S}(a', b') \subset \Omega$ 仅在 $(a', b') = (a, b)$ 时成立。

容易看出，上述定义的最大条带是 $\bigcap_{t\geqslant 0} \Omega + t$ 的内部的连通分支。

注 2.8. 已知 [18]，(ϕ_t) 的排斥型不动点 $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ 与 (ϕ_t) 的 Koenigs 域中的最大条带之间存在一一对应关系。若 S 是 (ϕ_t) 的一个最大条带，且 $w \in S$，则当 $t \to -\infty$ 时，$h^{-1}(w + t)$ 趋于相应的排斥型不动点 σ。此外，最大条带 S 的宽度 $\nu(S)$ 与 σ 处的角导数有关：具体而言，$\nu(S)G'(\sigma) = \pi$。

2.3. 反向轨道、不变花瓣与预模型。本节沿用 [14] 中的术语。下文引用命题的证明请参阅同一文献。记 d_D 为双曲域 D 中的双曲距离。

定义 2.9。（[14, 定义 3.1]）连续曲线 $\gamma : [0, +\infty)$ 称为单参数半群 (ϕ_t) 的反向轨道，若对任意 $t > 0$ 以及任意 $s \in (0, t)$，都有 $\phi_s(\gamma(t)) = \gamma(t - s)$。若反向轨道 γ 满足 $\limsup_{t\to+\infty} d_{\mathbb{D}}\big(\gamma(t), \gamma(t+1)\big) < +\infty$，则称其为正则反向轨道。

备注 2.10。设 (ϕ_t) 是 $\mathbb{D}$ 中的非椭圆单参数半群。取定 $z \in \mathbb{D}$。容易看出，以下三个条件等价：

(i) 存在一条反向轨道 γ，使得 $\gamma(0) = z$；(ii) $z \in \mathcal{W} := \bigcap_{t\geqslant 0} \phi_t(\mathbb{D})$；(iii) 直线 $\{h(z) + t : t \in \mathbb{R}\}$，其中 h 是 (ϕ_t) 的 Koenigs 函数，包含于 (ϕ_t) 的 Koenigs 域 Ω 中。

如果上述条件成立，那么 (i) 中的反向轨道 γ 唯一，且由 $\gamma(t) := \phi_t^{-1}(z) = h^{-1}\big(h(z) - t\big)$ 给出，对所有 $t \geqslant 0$ 均成立。此外，当且仅当 $z \in \mathcal{W}^\circ$ 时，这条反向轨道 γ 是正则的。

注 2.11. 负迭代 $\phi_{-t} := \phi_t^{-1}$，$t > 0$，在 $\mathcal{W}^\circ$ 中是良定义且全纯的。因此，对于 $z \in \mathcal{W}^\circ$，微分方程 (2.1) 和 (2.2) 对所有 $t < 0$ 均成立。

定义 2.12。备注 2.10 中的集合 $\mathcal{W}$ 称为 (ϕ_t) 的反向不变集。$\mathcal{W}^\circ$ 的每个非空连通分支称为一个花瓣。

每个花瓣 Δ 都是一个单连通域，且 $\left(\phi_t|_\Delta\right)_{t\in\mathbb{R}}$ 是 Δ 上的一个单参数自同构群。Δ 的边界包含 (ϕ_t) 的 Denjoy–Wolff 点 τ。位于花瓣 Δ 内的所有正则反向轨道都收敛于 (ϕ_t) 的同一个边界不动点，该点位于该花瓣的边界上。我们称这一唯一的极限点为花瓣 Δ的 α 点。以下二分性成立：

(P) 花瓣 Δ 的 α 点与 τ 重合，且它是包含在 $\partial\Delta$ 中的 (ϕ_t) 的唯一不动点；
(H) 或者 $\partial\Delta$ 恰好包含半群的两个不动点：Denjoy–Wolff 点 τ 和一个排斥不动点 σ，后者是花瓣 Δ 的 α 点。

情形 (P) 仅当单参数半群为抛物型时才会出现。在这种情况下，Koenigs 函数 h 下花瓣 Δ 的像 $h(\Delta)$ 是一个由平行于 $\mathbb{R}$ 的直线所界定的半平面；它在如下意义下是最大的：不存在半平面 $H \neq h(\Delta)$ 使得 $h(\Delta)\subset H\subset\Omega$。

在情形 (H) 中，花瓣 Δ 称为双曲型，且 $h(\Delta)$ 与对应于排斥不动点 σ 的最大条带重合（其意义见注 2.8）。此外，排斥不动点与双曲花瓣之间存在一一对应关系[2]，因为任意最大条带 S 的原像 $h^{-1}(S)$ 都是一个双曲花瓣。下文中，与给定排斥不动点 σ 对应的双曲花瓣记作 $\Delta(\sigma)$。

Koenigs 函数可视为一种全局变量变换，它将 (ϕ_t) 的动力学化为规范形式 $w\mapsto w+t$。在研究花瓣 Δ 中单参数半群的动力学时，与其使用全纯模型，不如采用所谓的预模型。这一概念最初是为 [35] 中的离散迭代引入的。下面的定义是在 [14, Definition 3.8] 与 [14, Remark 3.9] 的基础上稍作修改而成。我们用 $\mathbb{H}$ 表示右半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re} z>0\}$。

定义2.13。设 $\sigma\in\partial\mathbb{D}$ 是单参数半群 (ϕ_t) 的一个排斥不动点，其对应的无穷小生成元为 G。若满足以下条件，则称三元组 $(\mathbb{H},\psi,Q_t)$ 为 (ϕ_t) 在 σ 处的预模型：

(i) 对每个 $t\geqslant 0$，Q_t 是 $\mathbb{H}$ 的自同构，由 $Q_t(z):=e^{\lambda t}z$ 给出，其中 $\lambda:=G'(\sigma)$；(ii) 映射 $\psi\colon\mathbb{H}\to\mathbb{D}$ 是全纯且单射的，$\angle\lim_{w\to 0}\psi(w)=\sigma$，并且 ψ 在 0 处是等角的，即

$$\angle\lim_{w\to 0}\operatorname{Arg}\frac{1-\overline{\sigma}\psi(w)}{w}=0; \tag{2.8}$$

(iii) 对所有 $t\geqslant 0$，$\psi\circ Q_t=\phi_t\circ\psi$。

注 2.14. 已知 [14, 定理 3.10]，每个单参数半群在其每个排斥不动点 σ处，都存在一个预模型，且在变换 $\psi(w)\mapsto\psi(cw)$意义下唯一，其中 c 是任意正常数。此外，$\psi(\mathbb{H})$是双曲花瓣 $\Delta(\sigma)$，其

[2]对于非椭圆单参数半群的情形，这一一对应关系由 Contreras 和 D´ıaz-Madrigal [18] 发现。关于椭圆型和双曲型单参数半群的类似结果，则由 Elin、Shoikhet 和 Zalcman 于 [26] 独立建立。涵盖所有情形的证明及更多细节见 [14, Sect. 4]。

α-点 σ。映射 ψ 可以通过(ϕ_t)的 Koenigs 函数 h 表示。也就是说，若条带 h(Δ(σ)) = 𝕊(a, b)，则(ϕ_t)在 σ 处的预模型中的映射 ψ 由下式给出

$$\psi(w) := h^{-1}\left(\tfrac{b-a}{2\pi}\log w + \tfrac{b+a}{2}i + s\right), \quad w \in \mathbb{H},$$

其中 s 是任意实常数。

注记 2.15. 注记 2.14 中提到的事实有一个重要推论：从双曲花瓣 Δ(σ) 中一点 z 出发的每条反向轨道 γ 都会以非切向方式并以确定的斜率收敛到 σ，即存在极限

$$\theta(z) := \lim_{t\to+\infty} \operatorname{Arg}\left(1 - \overline{\sigma}\gamma(t)\right),$$

其中 θ(z) $\in (-\pi/2, \pi/2)$。

2.4. 域在边界点处的共形性。非椭圆单参数半群的 Koenigs 域的几何学与“条带规范化”中的共形性概念密切相关；例如，文献 [42] 对此进行了详细研究。

定义 2.16. 设 S := 𝕊(a,b) 是包含在域 Ω 中的最大条带，并设 g 是一个将 Ω 共形映射到 𝕊(a,b) 的共形映射，使得

$$\operatorname{Re} g(t + iy_0) \to -\infty \quad \text{as } t \to -\infty \tag{2.9}$$

对于某个，因而也对于所有 $y_0 \in (a, b)$。若域 Ω 在 $-\infty$ 处相对于 S 具有角导数或具有共形性，则对任意 $\varepsilon \in (0, b - a)$，都存在有限实极限

$$\lim_{D(\varepsilon)\ni z\to\infty} g(z) - z, \quad D(\varepsilon) := \{z \in S\colon \operatorname{Re} z \leqslant 0,\ \operatorname{dist}(z, \partial S) \geqslant \varepsilon/2\}. \tag{2.10}$$

备注 2.17。显然，上述映射 g 并非唯一确定。不过，很容易看出，若条件 (2.10) 对于一个满足 (2.9) 的、将 Ω 映到 𝕊(a,b) 的共形映射 g 成立，那么对于所有此类映射 g，条件 (2.10) 均成立。

在另一种几何情形下，自然会考虑一个类似且密切相关的概念，即相对于单位圆盘 𝔻 的共形性。在这种情况下，我们将范围限制在 𝔻 的子域。

定义 2.18。若存在一个将 𝔻 映到 U 的共形映射 φ，使得 φ(1) = σ 以角极限的意义成立，且角导数 φ′(1) 有限，则称单连通域 U $\subset \mathbb{D}$ 在点 σ $\in \partial U \cap \partial\mathbb{D}$ 处相对于 𝔻 具有共形性。

注意，上述定义中的条件 φ(1) = σ 意味着 ζ = 1 是 φ的接触点；因此，角导数φ′(1) 存在且不为零，但通常可能为无穷大；参见注2.4。为了简化 U 为花瓣时的术语，我们作出如下定义。

定义 2.19. 设 Δ(σ) 是单参数半群 (ϕ_t) 的一个双曲花瓣，其 α-点为 σ。如果 Δ(σ) 关于 𝔻 在 σ 处是共形的，则称 Δ(σ) 是共形的。

注记 2.20. 请注意，一般来说，可能存在两个将 $\mathbb{D}$ 共形映射到同一个域 $U \subset \mathbb{D}$ 的共形映射 φ_k 和 $k = 1, 2$，使得对于某个 $\sigma \in \partial\mathbb{D}$，$\varphi_k(1) = \sigma$，$k = 1, 2$；但此时 $\varphi_1'(1) = \infty$，而 $\varphi_2'(1)$ 是有限的。如果几何点 σ 对应于 U 的至少两个不同的可达边界点，就可能出现这种现象。然而，对于花瓣而言，情况从不如此，见 [14, 命题 4.15]。因此，为了确定花瓣 $\Delta(\sigma)$ 是否共形，只需构造一个将 $\mathbb{D}$ 共形映射到 $\Delta(\sigma)$ 的共形映射 φ，使其在角极限意义下满足 $\varphi(1) = \sigma$，并检查角导数 $\varphi'(1)$ 是否有限。根据注 2.14，每个单参数半群在每个排斥不动点 σ 处都存在一个预模型 $(\mathbb{H}, \psi, Q_t)$。一个将 $\mathbb{D}$ 共形映射到 $\Delta(\sigma)$ 并将 1 映射到 σ 的共形映射由 $\varphi(z) := \psi\left(\frac{1-}{1+}zz\right)$ 给出。因此，双曲花瓣 $\Delta(\sigma)$ 是共形的，当且仅当预模型 $(\mathbb{H}, \psi, \overline{Q_t})$ 是正则的，即角导数 $\psi'(0)$ 是有限的。注意，这一条件强于等角条件 (2.8)，后者有时也称为半共形性；例如见 [38, 第 4 节。3] 在我们的语境中，根据预模型的定义，条件 (2.8) 得到满足。

对于非椭圆单参数半群 (ϕ_t)，上文提出的角导数问题的两个版本实际上是等价的。

命题 2.21. 按照上述记号，双曲花瓣 $\Delta(\sigma)$ 是共形的，当且仅当 Koenigs 域 Ω 在最大条带 $\mathbb{S}(\sigma)$ w.r.t. $-\infty$ 处是共形的：$= h(\Delta(\sigma))$。

证明. 利用 $\mathbb{D}$ 的共形自同构，我们不妨设 $\sigma = -1$ 和 $\tau = 1$。记 $S := \mathbb{S}(\sigma)$，$a := \inf_{z\in S} \mathrm{Im}\, z$，$b := \sup_{z\in S} \mathrm{Im}\, z$。令

$$q(z) := \frac{e^{L(z)} - 1}{e^{L(z)} + 1}, \quad \text{where } L(z) := \pi \frac{z - (b+a)i/2}{b-a}.$$

函数 q 将 S 共形映 onto $\mathbb{D}$，且当 $\mathrm{Re}\, z \to +\infty$ 时 $q(z) \to \tau = 1$，当 $\mathrm{Re}\, z \to -\infty$ 时 $q(z) \to \sigma = -1$。

那么，$g := (h \circ q)^{-1}$ 是从 Ω 到 S 的共形映射。此外，由注 2.8 和注记 2.10 可知，对任意 $y_0 \in (a,b)$，曲线 $[0, +\infty) \ni t \mapsto h^{-1}(-t + iy_0)$ 是 $\Delta(\sigma)$ 中的一条反向轨道，因此当 $t \to +\infty$ 时，它收敛到 σ。所以，g 满足归一化条件 (2.9)。根据定义，Ω 在关于 S 的 $-\infty$ 处共形，当且仅当 g 满足条件 (2.10)。

容易看出，(2.10) 又等价于全纯自映射 $\varphi\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 在 $\sigma = -1$ 处存在有限角导数，其中该映射由 $\varphi := q \circ g \circ q^{-1}$ 定义。同时，我们有

$$\varphi = q \circ (h \circ q)^{-1} \circ q^{-1} = h^{-1} \circ q^{-1}.$$

因此，φ 将 $\mathbb{D}$ 共形地映到双曲花瓣 $\Delta(\sigma)$。再次利用注 2.8，可知 φ 在 $\sigma = -1$ 处的径向极限等于 σ。根据 Lindel¨of 定理（例如参见第 27] 页上的定理 1.5.7），这意味着 $\varphi(\sigma) = \sigma$ 在角极限意义下成立。根据注记 2.20，$z \mapsto \varphi(-z)$ 在 $z = 1$ 处存在有限角导数，这意味着 $\Delta(\sigma) = \varphi(\mathbb{D})$ 在关于 $\mathbb{D}$ 的 σ 处共形，因此得到所需结果。□

备注 2.22（非共形双曲花瓣的例子）。经过一些努力，我们在 [14, 第 8]节中构造了一个非共形双曲花瓣的例子。下面简要说明如何轻易获得许多其他共形和非共形双曲花瓣的例子。

引理 3.2 将在下一节中证明，它可以用来构造无穷远处星形域 Ω，其中包含一个最大条带 S，使得相对于该条带，Ω 在 $-\infty$处是共形的（或非共形的）。设 h 是从 $\mathbb{D}$ 到 Ω 的共形映射。那么 $\Delta := h^{-1}(S)$ 是非椭圆半群 (ϕ_t) 的一个双曲花瓣，该半群由 $\phi_t := h^{-1} \circ (h + t)$、$t \geqslant 0$ 给出。根据命题 2.21，该花瓣 Δ是共形的（分别地，非共形的）。注意，利用注 2.6 中所述的技巧，这一方法同样可以扩展到椭圆半群。

3. 辅助结果

3.1. 格林函数的强马尔可夫性质。设 $D \subsetneq \mathbb{C}$ 为一个单连通域。令 G_D 和 ω_D 分别表示域 D 上的（正）格林函数和调和测度；例如参见 [40, 第 4]章。在证明过程中，我们会用到格林函数 G_D的以下重要性质，参见 [39, 第 111]页。

引理 3.1（格林函数的强马尔可夫性质）。设 D_1 和 D_2 为两个满足 $D_1 \subset D_2 \subsetneq \mathbb{C}$的单连通域。则对所有 $z, w \in D_1$, $z \neq w$,

$$G_{D_2}(z,w) - G_{D_1}(z,w) = \int_A G_{D_2}(\alpha, z)\, \omega_{D_1}(w, d\alpha), \tag{3.1}$$

其中 $A := D_2 \cap \partial D_1$。

在主要结果的证明中，我们偶尔会用共形半径替代双曲密度；读者可参见 [23, §2.1]。对于单连通域 $D \subsetneq \mathbb{C}$，D 关于点 $z_0 \in D$ 的共形半径 $\mathscr{R}(z_0, D)$ 恰为双曲密度 $\lambda_D(z_0)$ 的倒数；即 $\mathscr{R}(z_0, D) = 2/\lambda_D(z_0)$。

进一步已知，当 $z \to w \in D$ 时，$G_D(z, w) + \log|w - z| \to \log \mathscr{R}(w, D)$。因此，推出 (3.1)

$$\log \frac{\mathscr{R}(w, D_2)}{\mathscr{R}(w, D_1)} = \int_A G_{D_2}(\alpha, w)\, \omega_{D_1}(w, d\alpha), \quad w \in D_1. \tag{3.2}$$

3.2. 无穷远处星形域共形性的积分判据。设 Ω 是一个无穷远处星形的域，并记 $S = \mathbb{S}(a, b) = \{x + iy : a < y < b\}$ 为包含在 Ω 中的最大水平条带。

定理 4.1 的证明要点之一，是用欧几里得意义刻画 Ω 在边界点 $-\infty$ 相对于 S 的共形性。根据 Rodin & Warschawski [42] 和 Jenkins & Oikawa [30] 的工作，很容易推出这种刻画如下。

取一点 $w_0 = iy_0 \in S$，其中 $y_0 \in (a, b)$，并记

$$\delta_{\Omega,1}(t) := a - \inf I(t), \quad \delta_{\Omega,2}(t) := \sup I(t) - b,$$

其中，I(t) 是 $\{y : t + iy \in \Omega\}$ 中包含 y_0 的连通分支。显然，$\delta_{\Omega,\, j}(t) \geqslant 0$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$、$j = 1$、2 均成立，因为 $S \subset \Omega$。我们记

$$\delta_\Omega(t) := \max\left\{\delta_{\Omega,1}(t), \delta_{\Omega,2}(t)\right\}. \tag{3.3}$$

请注意，$\delta_{\Omega,}1(t)$、$\delta_{\Omega,}2(t)$ 和 $\delta_\Omega(t)$ 均不依赖于基点 w_0 的选择。我们还应注意，可能存在某个 $t \in \mathbb{R}$，使得 $\delta_\Omega(t) = +\infty$。由于条带 S 的极大性

在 Ω 内，总存在一个 $t_0 \in \mathbb{R}$，使得对于所有 $t \leqslant t_0$，$\delta_\Omega(t) < +\infty$。事实上，$\Omega$ 在无穷远处的星形性保证了 δ_Ω 在 $(-\infty, t_0]$ 中单调不减，并且当 $t \to -\infty$ 时，$\delta_\Omega(t) \to 0$。

由于 Koenigs 函数 h 在相差一个加法常数的意义下定义，因此，只需将域 Ω 沿实轴平移，在证明中我们不妨假设 $t_0 = 1$。下面的引理将无穷远处星形域 Ω 在 $-\infty$ 处相对于条带 S 的共形性，与欧几里得量 δ_Ω 的可积性联系起来。

引理 3.2. 在上述记号下，Ω 在 $-\infty$ 处相对于条带 S 共形，当且仅当

$$\int_{-\infty}^{0} \delta_\Omega(t)\, dt < +\infty. \tag{3.4}$$

证明。假设 (3.4) 成立。令 $(Q_n)_{n\geqslant 0}$ 为一列两两不相交的正方形，它们包含于 $(\Omega \setminus S) \cap \{z : \operatorname{Re} z \leqslant 0\}$ 中，并且对每个 Q_n，其中一条边包含在 ∂S 上。由 (3.4) 可轻易推出 $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{area}(Q_n) < +\infty$。因此，根据 [42, 定理 2]，$\Omega$ 相对于 S 在 $-\infty$ 处共形。

现在假设 Ω 在 $-\infty$ 处相对于 S 共形。由于对于任意 $x \geqslant 0$，$\Omega + x \subset \Omega$，函数 $\delta_j := \delta_{\Omega,\, j}$，$j = 1,\ 2$，均单调不减。因此，根据 [42, 定理 2], 的蕴含关系 (i) $\Rightarrow$ (iii)，存在一个递增序列 $0 = u_0 < u_1 < \ldots < u_n < \ldots$ 趋于 $+\infty$，使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)^2 < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \delta_j(-u_{n+1})^2 < +\infty,\ \ j = 1, 2.$$

借助柯西–施瓦茨–布尼亚科夫斯基不等式，可得

$$\int_{-\infty}^{0} \delta_j(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-u_{n+1}}^{-u_n} \delta_j(t)\, dt \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} (u_{n+1} - u_n) \cdot \delta_j(-u_{n+1}) < +\infty$$

根据 δ_j 的单调性。 □

3.3. 关于黎曼映射在边界上收敛的一个引理。设 (D_n) 是复平面 $\mathbb{C}$ 中的一列单连通域，且 $\mathscr{B}$ 是 $\partial\mathbb{D}$ 的一个开子弧，满足以下性质：$\mathbb{D} \subset D_n$ 且 $\mathscr{B} \subset \partial D_n$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立。记 σ_k、$k = 1$、2 为弧 $\mathscr{B}$ 的端点。

引理 3.3。在上述记号下，进一步假设每个 D_n 都是若尔当域。对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 f_n 表示从 $\mathbb{D}$ 到 D_n 的共形映射，并满足归一化条件 $f_n(0) = 0$、$f_n'(0) > 0$，且通过连续延拓成为闭包之间的同胚。若 (D_n) 关于 0 按核收敛的意义收敛到 $\mathbb{D}$，则当 $n \to +\infty$ 时，$f^{-1}{}_n(\sigma_k) \to \sigma_k$，$k = 1,\ 2$。

备注 3.4. 要求每个域 D_n 都是若尔当域，并非上述引理的必要条件，但在我们将应用引理 3.3 的情形中，这一条件是满足的。对于更一般的域，引理的陈述和证明都会变得更加复杂。另一方面，假设对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都有 $\mathbb{D} \subset D_n$，似乎起着

重要作用。同样，在我们的情形中这一假设成立；但若不满足该假设，引理 3.3 的结论可能不成立，以下示例便说明了这一点。由若尔当域构成的序列

$$D_n := \left\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 - \tfrac{1}{n}\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{D} : |\arg z| < \tfrac{\pi}{2n}\right\} \cup \left\{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Re} z > 0,\ |z| > 1 - \tfrac{1}{2n}\right\} \subset \mathbb{D}$$

关于核收敛，收敛到以 0 为中心的 $\mathbb{D}$。尽管弧 $\mathscr{B} := \{z \in \partial\mathbb{D} : \operatorname{Re} z > 0\}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$ 都位于 n D 的边界上，且如上定义的函数 f_n 在 $\mathbb{D}$ 中局部一致收敛到恒等映射，但原像 $f_n^{-1}(\mathscr{B})$ 随 $n \to +\infty$ 增大而收缩至点 $\sigma_0 = 1$，而不是收敛到 $\mathscr{B}$。

引理 3.3 的证明。记 $g_n := f_n^{-1}\big|_{\overline{\mathbb{D}}}$，其中 $\overline{\mathbb{D}}$ 表示 $\mathbb{D}$的闭包。根据卡拉西奥多里核收敛定理（[38, 定理 1.8]），(f_n) 和 (g_n) 在 $\mathbb{D}$ 中局部一致收敛到恒等映射。此外，限制映射 $g_n\big|_{\mathbb{D}}$ 可通过施瓦茨反射原理延拓为共形映射 g_n^*，其定义域为 $\mathbb{D}_{\mathscr{B}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \neq 1\} \cup \mathscr{B}$，值域为 $\mathbb{C}$。回顾一下，对所有 $n \in \mathbb{N}$，$g_n(0) = 0$。此外，由于 (g_n) 在 $\mathbb{D}$ 中局部一致收敛，序列 $|g_n'(0)|$ 有界。因此，延拓后的函数 g_n^* 构成 $\mathbb{D}_{\mathscr{B}}$ 中的正规族，故 $g_n^* \to \mathrm{id}^{\mathbb{D}_{\mathscr{B}}}$ 在 $\mathbb{D}_{\mathscr{B}}$ 中局部一致收敛。然而，这一事实本身并不能推出引理的结论，因为 $\sigma_k \notin \mathbb{D}_{\mathscr{B}}$。另一方面，对所有 $w \in \mathscr{B}$ 及所有 $n \in \mathbb{N}$，$g_n(w) = g_n^*(w)$，因此我们可以得出结论：(g_n) 在 $\mathscr{B}$ 的任意闭子弧上一致收敛到恒等映射。

考虑序列 $h_n(w) := \sigma_0 g_n(w)/g_n(\sigma_0)$，$w \in \overline{\mathbb{D}}$，其中 σ_0 是弧 $\mathscr{B}$的中点。注意，$h_n(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$，$h_n(\mathscr{B}) \subset \partial\mathbb{D}$，且 $h_n(\sigma_0) = \sigma_0$。因此，根据 Loewner 引理（[38, 命题 4.15]），$\mathscr{B} \subset h_n(\mathscr{B})$。由于 $g_n(\sigma_0) \to \sigma_0$，只需证明当 $n \to +\infty$、$k = 1$、2 时，$h_n(\sigma_k) \to \sigma_k$。假设并非如此。于是，必要时取一个子序列后，不妨设存在 $\partial\mathbb{D}$ 上的一个开弧 $\mathscr{C}$，使得 $\mathscr{C} \not\subset \mathscr{B}$，并且

$$\mathscr{C} \subset h_n(\mathscr{B}) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

特别地，对任意 $n \in \mathbb{N}$，$h_n^{-1}(\mathscr{C}) \subset \partial\mathbb{D}$。函数 h_n^{-1}是映射 $z \mapsto f_n\big(z g_n(\sigma_0)/\sigma_0\big)$ 在 $\overline{\mathbb{D}}$上的限制。因此，仿照上述论证可知，$h_n^{-1} \to \mathrm{id}_{\mathscr{C}}$于 $\mathscr{C}$上。由于 $\mathscr{C} \not\subset \mathscr{B}$，可知当 $n \in \mathbb{N}$ 充分大时，$h_n^{-1}(\mathscr{C}) \not\subset \mathscr{B}$。要完成证明，只需注意到后一个结论与 (3.5) 矛盾。□

4. 主要结果的证明

4.1. 问题的重新表述。本节将定理 1.1 化为证明如下命题：若域 Ω 在无穷远处星形，那么它在 $-\infty$ 处相对于最大条带 $\mathbb{S}(a, b) \subset \Omega$的共形性，等价于关于 λ_Ω 沿水平射线$\{t + iy_0 : t \leqslant 0\} \subset \mathbb{S}(a, b)$ 趋近 $\lambda_{\mathbb{S}(a,b)}$ 的速度的某个条件，其中 $t \to -\infty$。该结果的精确表述如下。

定理 4.1. 设 $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$ 是一个无穷远处星形的域，并设 $S := \mathbb{S}(a, b)$ 是包含于 Ω 中的最大条带。取一点 $w_0 \in S$。则 Ω 关于 S 在 $-\infty$ w 处共形，当且仅当

$$\int_{-\infty}^{0} \log \frac{\lambda_S(t + w_0)}{\lambda_\Omega(t + w_0)}\, dt < +\infty. \tag{4.1}$$

在此情形下，积分 (4.1) 对每个 $w_0 \in S$ 都收敛，事实上在 S 上局部一致收敛。

在本小节中，我们证明定理 4.1 蕴含定理 1.1。对于 $\mathbb{D}$ 中的非椭圆半群（ϕ_t），这并不困难；但在椭圆情形下则不那么显然。定理 4.1 的证明将在第 4.2 和 4.3 小节给出。

定理 1.1 的证明。首先，我们证明定理 1.1 对于 $\mathbb{D}$ 中的非椭圆半群（ϕ_t）成立。对 Abel 方程 (2.7) 关于 z 求导，得到

$$h'\big(\phi_t(z)\big)\phi_t'(z) = h'(z) \tag{4.2}$$

对所有 $z \in \mathbb{D}$、$t \geqslant 0$。此外，根据注 2.11，当 $z \in \mathscr{W}^\circ$ 时，(4.2) 对所有 $t < 0$ 也成立.

记 Ω 为 (ϕ_t) 的 Koenigs 域，记 $S = \mathbb{S}(a, b)$ 为与双曲花瓣 $\Delta = \Delta(\sigma)$ 的 α-点 σ 相关联的 Ω 中的最大条带，见注 2.8。于是 Ω 无穷远处星形，且 Koenigs 函数 h 将 $\mathbb{D}$ 共形地映射到 Ω，并将 $\Delta(\sigma)$ 映射到 S，见 [15, 定理 13.5。5]。固定 $z_0 \in \Delta(\sigma)$。考虑到双曲度量在共形映射下保持不变，并利用等式 (4.2)，可知 (1.1) 中的被积函数可写为

$$\log \frac{\lambda_\Delta(z_0)}{\lambda_{\mathbb{D}}(\phi_t(z_0))\,|\phi_t'(z_0)|} = \log \frac{|h'(z_0)|\,\lambda_S\big(h(z_0)\big)}{|h'(\phi_t(z_0))|\,\lambda_\Omega\big(h(\phi_t(z_0))\big)\,|\phi_t'(z_0)|} = \log \frac{\lambda_S\big(h(z_0)\big)}{\lambda_\Omega\big(h(\phi_t(z_0))\big)},$$

根据 Abel 方程 (2.7) 和注 2.11，对于任意 $t \in \mathbb{R}$，其等于

$$\log \frac{\lambda_S\big(h(z_0)\big)}{\lambda_\Omega\big(h(z_0)+t\big)}.$$

此外，显然对于任意 $t \in \mathbb{R}$，$\lambda_S(h(z_0)) = \lambda_S(h(z_0) + t)$。因此，对于 $w_0 := h(z_0)$，(1.1) 中的积分与 (4.1) 中的积分相同。由此，非椭圆半群的情形下，定理 1.1 可由定理 4.1 和命题 2.21 推出。

现在我们说明如何将椭圆情形化归为非椭圆情形。考虑单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中一个以 $\tau \in \mathbb{D}$ 为 Denjoy–Wolff 点的半群 (ϕ_t)。根据注 2.6，存在一个单位圆盘 $\mathbb{D}$ 中的抛物型半群 (φ_t)，使得对所有 $t \geqslant 0$,

$$\phi_t \circ F = F \circ \varphi_t, \quad \text{where } F := T \circ C,\ C(z) := \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right),\ T(w) := \frac{w+\tau}{1+\overline{\tau}w}. \tag{4.3}$$

注意，$F(\zeta_1) = F(\zeta_2)$ 当且仅当存在某个 $n \in \mathbb{Z}$，使得 $L^{\circ n}(\zeta_1) = \zeta_2$，其中 L 是 $\mathbb{D}$ 的自同构，定义为 $L(\zeta) := H^{-1}\big(H(\zeta) + 2\pi i\big)$，$H(z) := (1+z)/(1-z)$，而 $L^{\circ n}$ 表示 L 的第 n 次迭代。半群 (φ_t) 对每个 $t \geqslant 0$ 都满足函数方程 $\varphi_t \circ L = L \circ \varphi_t$。这显然可由 [28, 第 2] 节中的构造得出。因此，若对某个 $t \geqslant 0$ 有 $\zeta \in \varphi_t(\mathbb{D})$，则 $\varphi_t(\mathbb{D})$ 包含所有满足 $F(\zeta') = F(\zeta)$ 的点。记号

$$\mathscr{W} := \bigcap_{t \geqslant 0} \phi_t(\mathbb{D}), \qquad \mathscr{U} := \bigcap_{t \geqslant 0} \varphi_t(\mathbb{D}),$$

由此可得

$$F(\mathscr{U}) = \bigcap_{t\geqslant 0} F(\varphi_t(\mathbb{D})) = \bigcap_{t\geqslant 0} \phi_t(F(\mathbb{D})) = \bigcap_{t\geqslant 0} \phi_t(\mathbb{D}\setminus\{\tau\}) = \mathscr{W}\setminus\{\tau\}.$$

注意， $\Delta(\sigma)$ 是一个单连通域，且 $\tau\in\partial\Delta(\sigma)$；参见 [15, 命题 13.4。2]此外，根据花瓣的定义， $\Delta(\sigma)$ 是 $\mathscr{W}$ 内部的一个连通分支。由于 $F:\mathbb{D}\to\mathbb{D}\setminus\{\tau\}$ 是一个覆盖映射，因此存在 $\mathscr{U}$ 内部的一个连通分支 D，使得 F 将 D 共形地（特别地，单射地）映射到 $\Delta(\sigma)$ 上。根据定义，D 是 (φ_t) 的一个花瓣。

此外，根据 [15, 命题 13.4，9], D 是一个若尔当域，且 $\partial\Delta(\sigma)$ 是局部连通的。由此可知，参见例如 [38, 第 2 节。2], $F_*:=F|_D$ 可连续延拓到 ∂D，并且 $F_*(\partial D)=\partial\Delta(\sigma)$。回忆 $\sigma\in\partial\Delta(\sigma)$。因此，存在一点 $\varsigma\in\partial D$，使得 $F_*(\varsigma)=\sigma$。由于 F 在 $\mathbb{D}$ 中于 $|F|<1$ 连续，并且 $\sigma\in\partial\mathbb{D}$，我们有 $\varsigma\in\partial\mathbb{D}$。我们断言，$\varsigma\neq 1$。事实上，设 Γ 是 $D\cup\{1\}$ 中的一条约当弧，其端点之一为 1。由于 F_* 在 D 的闭包中连续，当 $\Gamma\ni z\to 1$ 时，我们有 $F(z)\to F_*(1)$。考虑到 $\mathbb{H}\ni\zeta\mapsto e^{-\zeta}$ 在 ∞ 处唯一的渐近值为 0，可推出 $F_*(1)=\tau\neq\sigma$。

注意，F 可以全纯延拓到 $\partial\mathbb{D}\setminus\{1\}$ 的任意一点。因此 $F(\varsigma)=\sigma$。于是，利用注2.5，容易看出 ς 是 (φ_t) 的一个排斥不动点。

因此，我们为 (φ_t) 构造了一个双曲花瓣 D，其 α 点为 ς，使得 F 将 D 共形映 onto $\Delta(\sigma)$，且 $F(\varsigma)=\sigma$。由于 F 在 ς 处全纯，且 $F'(\varsigma)\neq 0$，花瓣 D 是共形的，当且仅当花瓣 $\Delta(\sigma)$ 是共形的。

剩下要证明的是，对于 (ϕ_t) 和一点 $z_0\in\Delta(\sigma)$，条件 (1.1) 等价于将 (ϕ_t)、$\Delta(\sigma)$ 和 z_0 分别替换为 (φ_t)、D 和 $\zeta_0:=F_*^{-1}(z_0)$ 后的条件 (1.1)。

首先，由于 F 将 D 共形地映 onto $\Delta(\sigma)$，且 $F(\zeta_0)=z_0$,，我们有 $\lambda_D(\zeta_0)=|F'(\zeta_0)|\lambda_{\Delta(\sigma)}(z_0)$。此外，根据 (4.3),

$$\phi_t(z_0)=F\big(\varphi_t(\zeta_0)\big)\quad\text{ and }\quad \varphi_t'(\zeta_0)=\phi_t'(z_0)\frac{F'(\zeta_0)}{F'\big(\varphi_t(\zeta_0)\big)}$$

对所有 $t\in\mathbb{R}$。利用这些关系，我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_D(\zeta_0)}{\lambda_{\mathbb{D}}(\varphi_t(\zeta_0))\,|\varphi_t'(z_0)|} &= \frac{|F'(\zeta_0)|\,\lambda_{\Delta(\sigma)}(z_0)}{\lambda_{\mathbb{D}}\big(\varphi_t(\zeta_0)\big)}\,\frac{|F'\big(\varphi_t(\zeta_0)\big)|}{|\phi_t'(z_0)F'(\zeta_0)|} = \\ &= \frac{\lambda_{\Delta(\sigma)}(z_0)}{\lambda_{\mathbb{D}}(\phi_t(z_0))\,|\phi_t'(z_0)|}\,\frac{|F'\big(\varphi_t(\zeta_0)\big)|\,\lambda_{\mathbb{D}}(\phi_t(z_0))}{\lambda_{\mathbb{D}}\big(\varphi_t(\zeta_0)\big)} \\ &= \frac{\lambda_{\Delta(\sigma)}(z_0)}{\lambda_{\mathbb{D}}(\phi_t(z_0))\,|\phi_t'(z_0)|}\,\frac{|F'\big(\varphi_t(\zeta_0)\big)|\,\lambda_{\mathbb{D}}\big(F(\varphi_t(\zeta_0))\big)}{\lambda_{\mathbb{D}}\big(\varphi_t(\zeta_0)\big)}\end{aligned} \tag{4.4}$$

对所有 $t\in\mathbb{R}$。(φ_t) 的反向轨道 $\gamma(t):=\varphi_{-t}(\zeta_0)$ 以指数速率收敛到 ς，也就是说，

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{t}\log\left(1-\overline{\varsigma}\varphi_t(\zeta_0)\right)=\lambda\in(0,+\infty), \tag{4.5}$$

参见 [15, 命题 13.4。14], 以及非切向地，参见注记 2.15。此外，对任意 $w \in \mathbb{D}$,

$$0 \geqslant \log \frac{|F'(w)|\,\lambda_{\mathbb{D}}\big(F(w)\big)}{\lambda_{\mathbb{D}}(w)} = \log \frac{|C'(w)|\,\lambda_{\mathbb{D}}\big(C(w)\big)}{\lambda_{\mathbb{D}}(w)} = \log \frac{\mu(w)}{\sinh \mu(w)} \geqslant -\frac{\mu(w)^2}{6},$$

其中 $\mu(w) := (1-|w|^2)/(|1-w|^2)$。第一个等号成立，是因为 $F = T \circ$复平面且 $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$; 第二个等号由直接计算式 (4.3) 得出，不等号则可通过比较双曲正弦$(x)/x$ 与 $e^{x^2/6}$ 的麦克劳林展开得到。注意，对于所有 $t < 0$，$1-|\varphi_t(\zeta_0)|^2 < 2\,|1-\overline{\zeta}\varphi_t(\zeta_0)|$，并且 $|1-\varphi_t(\zeta_0)|_t \xrightarrow{\to -\infty} |1-\zeta| \neq 0$。因此，由 (4.5) 可得 $\int_{-\infty}^0 \mu(\varphi_t(\zeta_0))^2\,dt < +\infty$，于是我们可以得出，积分

$$\int_{-\infty}^{0} \log \frac{|F'\big(\varphi_t(\zeta_0)\big)|\,\lambda_{\mathbb{D}}\big(F(\varphi_t(\zeta_0))\big)}{\lambda_{\mathbb{D}}\big(\varphi_t(\zeta_0)\big)}\,dt$$

收敛。事实上，上述积分关于 $\zeta_0 \in D$ 局部一致收敛，因为极限 (4.5) 在 D 中局部一致地成立；这又是因为全纯函数的取值

$$D \ni \zeta \mapsto \frac{1}{t}\log\big(1-\overline{\zeta}\varphi_t(\zeta)\big), \quad t < -1,$$

位于条带 $\mathbb{S}$ 中，因此这些函数在 D 中构成一个正规族。由 (4.4) 可知，证明定理 4.1 推出椭圆半群的定理 1.1，因而归结为前面讨论的非椭圆型半群情形。□

4.2. 定理 4.1 充分性部分的证明：条件 (4.1) 蕴含共形性。出于个人偏好，我们更倾向于使用共形半径，而非双曲度量的密度。因此，定理 4.1 中的条件 (4.1) 可改写为

$$\int_{-\infty}^{0} \log \frac{\mathscr{R}(t+w_0,\Omega)}{\mathscr{R}(t+w_0,S)}\,dt \;<\; +\infty, \quad w_0 \in S. \tag{4.6}$$

为简化记号，在本节及下一节中，我们都只考虑 $\mathrm{Re}\, w_0 = 0$ 的情形。以下定理是本节的关键结果。它表明，(4.6) 中的被积函数可以用 (3.3) 中引入的欧几里得量 $\delta_\Omega(t)$ 从下方估计。

定理 4.2. 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 的一个无穷远处星形的真子域，并且标准条带 $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}\colon |\mathrm{Im}\, z| < \frac{\pi}{2}\}$ 是包含于 Ω 中的最大水平条带。那么对于任意紧集 $K \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，存在常数 $c > 0$ 和 $T \geqslant 0$，使得对于任意 $y \in K$,

$$\log \frac{\mathscr{R}(t+iy,\Omega)}{\mathscr{R}(t+iy,\mathbb{S})} \geqslant c\,\delta_\Omega(t) \quad \textit{for all } t \leqslant T. \tag{4.7}$$

由我们之前的讨论显然可知，定理 4.2 蕴含了定理 4.1 的“如果”部分。事实上，如果条件 (4.1) 对某个 $w_0 = iy_0 \in S$、$y_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 成立，那么定理 4.2 和引理 3.2 蕴含 Ω 在 $-\infty$ 处是共形的。

定理 4.2 的证明相当长，将分成若干步骤。证明思路如下。

注 4.3（定理 4.2 的证明思路）。回忆 $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ 表示右半平面。对于 $\delta > 0$，我们考虑扩大的条带

$$\mathbb{S}_\delta := \left\{ z : -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2} + \delta \right\}$$

以及“半加宽的”标准条带

$$\mathbb{S}_\delta^* := \mathbb{S} \cup \left(\mathbb{S}_\delta \cap \mathbb{H} \right).$$

固定一点 $iy_0 \in \Omega$，其中 $y_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$。根据 $\delta_2(t) := \delta_{\Omega,\,2}(t)$ 的定义，见第 3.2 小节，并且由于 Ω 在无穷远处星形，立即得到

$$\mathbb{S}^*_{\delta_2(t)} + t \subset \Omega.$$

因此，由共形半径的区域单调性，

$$\log \frac{\mathscr{R}\left(t + iy_0, \Omega\right)}{\mathscr{R}\left(t + iy_0, \mathbb{S}\right)} \geqslant \log \frac{\mathscr{R}\left(t + iy_0, \mathbb{S}^*_{\delta_2(t)} + t\right)}{\mathscr{R}\left(t + iy_0, \mathbb{S}\right)} = \log \frac{\mathscr{R}\left(iy_0, \mathbb{S}^*_{\delta_2(t)}\right)}{\mathscr{R}\left(iy_0, \mathbb{S}\right)}, \qquad t \leqslant 0. \tag{4.8}$$

证明的关键在于证明 (4.8) 右端的表达式有如下下界：

$$\log \frac{\mathscr{R}(iy_0, \mathbb{S}_{\delta_2(t)})}{\mathscr{R}(iy_0, \mathbb{S})}, \tag{4.9}$$

至少相差一个正的乘法常数，该常数仅依赖于 y_0，但其依赖方式相当可控。(4.9) 中出现的量可用 $\delta_2(t)$（以及 y_0）显式计算；正如我们将看到的，实际上它与 $\delta_2(t)$ 在关于 y_0 局部一致的意义下可比。这也给出了 (4.8) 左端以 $\delta_2(t) = \delta_{\Omega,\,2}(t)$ 表示的下界；进而，根据对称性，还可得出以 $\delta_\Omega(t) = \max\{\delta_{\Omega,1}(t), \delta_{\Omega,\,2}(t)\}$ 表示的下界，于是 (4.7) 得证。

命题 4.4. 对于 $\delta > 0$，设 $\Phi_\delta : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to (0, +\infty)$ 定义如下：

$$\Phi_\delta(y) := \log \frac{\mathscr{R}(iy, \mathbb{S}^*_\delta)}{\mathscr{R}(iy, \mathbb{S})} \left(\log \frac{\mathscr{R}(iy, \mathbb{S}_\delta)}{\mathscr{R}(iy, \mathbb{S})} \right)^{-1}. \tag{4.10}$$

Then

$$\lim_{\delta \to 0^+} \Phi_\delta = \frac{1}{2} \tag{4.11}$$

在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上局部一致。

注 4.5. (4.10) 中出现的两个量 $\mathscr{R}(\cdot, \mathbb{S})$ 和 $\mathscr{R}(\cdot, \mathbb{S}_\delta)$ 确实有简单的显式表达式。原则上，第三个量 $\mathscr{R}(\cdot, \mathbb{S}^*_\delta)$ 也有显式表达式，因为从单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到 $\mathbb{S}^*_\delta$ 的共形映射已知其“显式”形式，见 [32, 公式 (5.2.15),

第 272] 页。然而，这个显式公式相当复杂，似乎很不适合用来获取关于 $\mathscr{R}(\cdot,\mathbb{S}^*_\delta)$ 的精确信息，而这些信息是证明命题 4.4 所必需的。下面命题 4.4 的证明通过利用格林函数的强马尔可夫性质，绕过了这一困难，见第 3.1 节。

为了证明命题 4.4，我们还需要几个辅助引理。

引理 4.6。固定某个 $\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$、某个正的 $\alpha_0\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$，以及某个 $\alpha\in(0,\alpha_0)$，并设

$$h(x):=G_{\mathbb{S}}\left(i\beta,x+i\left(\tfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\right),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Then

$$h(0)\geqslant h(x)\geqslant h(0)\,\frac{1-\cos\alpha_0}{\cosh x-\cos\alpha_0} \tag{4.12}$$

对所有 $x\in\mathbb{R}$。

证明。设 $z:=x+i(\frac{\pi}{2}-\alpha)$。利用 $\mathbb{S}$ 的格林函数公式（见 [40,第 109] 页），可得

$$h(x)=G_{\mathbb{S}}\left(i\beta,z\right)=\log\left|\frac{e^z+e^{-i\beta}}{e^z-e^{i\beta}}\right|=\tfrac{1}{2}\log q(\cosh x,\alpha),\quad q(u,\alpha):=\frac{u-\sin(\beta-\alpha)}{u-\sin(\beta+\alpha)}.$$

现在，(4.12) 的证明显而易见。为方便起见，我们给出主要步骤。由于对任意 $u\geqslant 1$，$q(1,\alpha)\geqslant q(u\alpha)>1$，可知 (4.12) 中的左侧不等式成立。由于 $u\mapsto\rho(u):=(u-\sin(\beta+\alpha))\log q(u\ \alpha)$ 是凹函数，且 $\lim_{u\to\infty}\rho'(u)=0$，函数 $\rho(u)$ 单调递增，因此有

$$\begin{aligned}\log q(u,\alpha)\geqslant\frac{1-\sin(\beta+\alpha)}{u-\sin(\beta+\alpha)}\log q(1,\alpha)&>\frac{1-\sin(\beta+\alpha_0)}{u-\sin(\beta+\alpha_0)}\log q(1,\alpha)\\&\geqslant\frac{1-\cos\alpha_0}{u-\cos\alpha_0}\log q(1,\alpha).\end{aligned}$$

(4.12) 中的右侧不等式很容易得到。 □

引理 4.7. 设 $\mathscr{B}:=\{e^{i\theta}:\alpha<\theta<\beta\}$ 且 $\mathscr{B}':=\{e^{i\theta}:\alpha'<\theta<\beta'\}$。设 $z,z'\in\mathbb{D}$。那么

$$\left|\omega_{\mathbb{D}}(z,\mathscr{B})-\omega_{\mathbb{D}}(z',\mathscr{B}')\right|\ \leqslant\ \frac{|\alpha'-\alpha|+|\beta'-\beta|+2|z'-z|}{\pi(1-r)}, \tag{4.13}$$

其中 $r:=\max\{|z|,|z'|\}$。

证明. 回顾一下，$2\pi\omega_{\mathbb{D}}(0,\cdot)$ 与单位圆上的一维勒贝格测度 $\partial\mathbb{D}$ 一致。因此

$$\left|\omega_{\mathbb{D}}(0,\mathscr{B})-\omega_{\mathbb{D}}(0,\mathscr{B}')\right|\leqslant\frac{|\alpha'-\alpha|+|\beta'-\beta|}{2\pi}. \tag{4.14}$$

要证明 $z'=z\neq 0$ 时的 (4.13)，只需将 (4.14) 应用于圆弧 $T(\mathscr{B},z)$ 和 $T(\mathscr{B}',z)$，其中 $T(\sigma,z):=(\sigma-z)/(1-\sigma^{-}z)$，并注意到

$$\left|\frac{\partial T(\sigma,z)}{\partial\sigma}\right|\leqslant\frac{1+|z|}{1-|z|}<\frac{2}{1-r}\quad\text{for any }\sigma\in\partial\mathbb{D}.$$

最后，要证明一般情形下的 (4.13)，我们注意到对于任意 $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ 和 $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\partial T(\sigma, z+te^{i\theta})}{\partial t}\Big|_{t=0}\right| \leqslant \left|\frac{\partial T(\sigma,z)}{\partial z}\right| + \left|\frac{\partial T(\sigma,z)}{\partial \bar{z}}\right| \leqslant \frac{2}{1-r}.$$

因此，对于任意 $\sigma \in \partial\mathbb{D}$，有 $\left|\arg T(\sigma, z')/T(\sigma, z)\right| \leqslant 2|z'-z|/(1-r)$。由此，

$$2\pi\left|\omega_{\mathbb{D}}(z', \mathscr{B}') - \omega_{\mathbb{D}}(z, \mathscr{B}')\right| \leqslant 4|z'-z|/(1-r)$$

估计式 (4.13) 的一般情形立即得证。 □

命题 4.4 的证明。应用公式 (3.2)，立即得到

$$\log\frac{\mathscr{R}(iy, \mathbb{S}_\delta)}{\mathscr{R}(iy, \mathbb{S})} = \int_A G_{\mathbb{S}_\delta}(iy, z)\, \omega_{\mathbb{S}}(iy, \mathrm{d}z), \qquad \text{where } A := \left\{z : \operatorname{Im} z = \tfrac{\pi}{2}\right\}, \tag{4.15}$$

$$\log\frac{\mathscr{R}(iy, \mathbb{S}_\delta)}{\mathscr{R}(iy, \mathbb{S}^*_\delta)} = \int_{B\cup C_\delta} G_{\mathbb{S}_\delta}(iy, z)\, \omega_{\mathbb{S}^*_\delta}(iy, \mathrm{d}z), \quad \text{where } B := \left\{z : \operatorname{Im} z = \tfrac{\pi}{2},\ \operatorname{Re} z < 0\right\} \tag{4.16}$$

$$\text{and } C_\delta := \left\{iy : \tfrac{\pi}{2} \leqslant y < \tfrac{\pi}{2} + \delta\right\}.$$

显然，我们可以将讨论限制在较小的 $\delta > 0$ 情形；也就是说，我们假设

$$\delta \in (0, \delta_0), \quad \text{where } \delta_0 := \min_{y\in K} \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2} - y\right).$$

暂时固定 $y \in K$ 和 $\delta \in (0, \delta_0)$。由引理 4.6 应用于

$$\beta := \left(y - \frac{\delta}{2}\right)\frac{\pi}{\pi+\delta}, \quad \alpha_0 := \delta_0, \quad \alpha := \delta\frac{\pi}{\pi+\delta},$$

我们有，$h(x) = h(x; y\delta) := G^{\mathbb{S}_\delta}(iy, x + i\frac{\pi}{2})$ 满足不等式 (4.12)。一方面，结合 [40, 表 4.1 中的显式公式，p.100]

$$\omega_{\mathbb{S}}(iy, \mathrm{d}z) = (2\pi)^{-1}\cos y\,(\cosh x - \sin y)^{-1}\,\mathrm{d}x, \quad z = x + i\pi/2 \in A,$$

这使我们能够对 (4.15) 右端进行下界估计：

$$\begin{aligned}\int_A G_{\mathbb{S}_\delta}(iy, z)\, \omega_{\mathbb{S}}(iy, \mathrm{d}z) &\geqslant \frac{h(0; y, \delta)}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{(1-\cos\delta_0)\sin 2\delta_0}{(\cosh x - \cos\delta_0)(\cosh x + 1)}\,\mathrm{d}x \\ &= m(\delta_0) h(0; y, \delta) \quad \text{for all } \delta \in (0, \delta_0) \text{ and all } y \in K, \end{aligned} \tag{4.17}$$

其中，$m(\delta_0)$ 是一个仅取决于 δ_0 的正常数。另一方面，由 (4.12) 可知，

$$\begin{aligned}\int_A G_{\mathbb{S}_\delta}(iy, z)\, \omega_S(iy, \mathrm{d}z) &\leqslant h(0; y, \delta)\int_A \omega_{\mathbb{S}}(iy, \mathrm{d}z) = h(0; y, \delta)\left(\frac{y}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \\ &\leqslant h(0; y, \delta)\left(1 - \frac{2\delta_0}{\pi}\right). \end{aligned} \tag{4.18}$$

证明的主要内容如下:

断言 1。当 $\delta \to 0^+$ 时,

$$\sup_{y\in K} \frac{1}{h(0;y,\delta)} \left| \int_B G_{\mathbb{S}_\delta}(iy,z)\, \omega_{\mathbb{S}^*_\delta}(iy,\mathrm{d}z) - \frac{1}{2}\int_A G_{\mathbb{S}_\delta}(iy,z)\, \omega_{\mathbb{S}}(iy,\mathrm{d}z) \right| \to 0. \tag{4.19}$$

为证明这一断言，我们首先注意到，由于对称性，如果将第二个积分中的集合 A 替换为 B，则可以去掉 (4.19) 中的因子 $1/2$。此外，根据调和测度的单调性，参见例如 [40, 第 4.3.9 条，见第 102], 页

$$\mu_{y,\delta} := \omega_{\mathbb{S}^*_\delta}(iy,\cdot)\big|_B - \omega_{\mathbb{S}}(iy,\cdot)\big|_B$$

是 B 上的非负有界测度。还要回忆 $0 < h(x; y\delta) \leq h(0; y\ \delta)$ 对所有 $x \in \mathbb{R}$ 均成立，见 (4.12)。因此，为了证明 (4.19)，只需证明

$$\sup_{y\in K} \mu_{y,\delta}(B) \to 0 \quad \text{as } \delta \to 0^+. \tag{4.20}$$

为此，我们将利用调和测度的共形不变性。记 F_δ、 $\delta \in (0,\delta_0)$ 和 F 分别为 $\mathbb{S}^*_\delta$ 与 $\mathbb{S}$ 到 $\mathbb{D}$ 的共形映射，并满足归一化条件 $F(0) = F_\delta(0) = 0$、 $F'(0) > 0$、 $F'_\delta(0) > 0$。显然，$F(z) = (e^z - 1)/(e^z + 1)$ 可全纯且单射地延拓到更宽的条带 $|\mathrm{Im}\, z| < \pi$，因此可以写成 $F_\delta = f_\delta^{-1} \circ F$，其中 f_δ 是从 $\mathbb{D}$ 到若尔当域 $D_\delta := F(\mathbb{S}^*_\delta)$ 的共形映射，并且 $f_\delta(0) = 0$、$f'_\delta(0) > 0$。

记 $\mathscr{B} := F(B) = \{z \in \partial\mathbb{D} : \pi/2 < \arg z < \pi\}$。由调和测度的共形不变性，$\omega_{\mathbb{S}}(iy, B) = \omega_{\mathbb{D}}(F(iy)\ \mathscr{B})$ 和 $\omega_{\mathbb{S}^*_\delta}(iy, B) = \omega_{\mathbb{D}}\big(f_\delta^{-1}(F(iy)), f_\delta^{-1}(\mathscr{B})\big)$。

注意，对任意 $\delta \in (0,\delta_0)$， $\mathbb{D} \subset D_\delta$，并且当 $\delta \to 0^+$ 时，$D_\delta \to \mathbb{D}$ 关于 0 核收敛。记 $z = z(y) := F(iy)$，以及 $z' = z'(y\ \delta) := F_\delta(iy) = f_\delta^{-1}(z(y))$。由于 $\delta \to 0^+$，由 Carath´eodory 的核收敛定理可得，$z'(y\ \delta) \to z(y)$ 关于 $y \in K$ 一致收敛。另注意，由施瓦茨引理，对任意 $y \in K$ 及任意 $\delta \in (0,\delta)$，估计式 $|z'(y\delta)| \leqslant |z(y)| \leqslant r_0 := \max_{y\in K} |F(iy)| < 1$ 成立。因此，由引理 3.3 和 4.7 可得 (4.20)，进而可得 (4.19)。

考虑到 (4.15)–(4.19)，可知只需估计 (4.16) 中积分在复平面$_\delta$上的部分。我们断言

断言 2。当 $\delta \to 0^+$ 时,

$$\sup_{y\in K} \frac{1}{h(0;y,\delta)} \left| \int_{C_\delta} G_{\mathbb{S}_\delta}(iy,z)\, \omega_{\mathbb{S}^*_\delta}(iy,\mathrm{d}z) \right| \to 0. \tag{4.21}$$

固定某个 $\delta \in (0,\delta_0)$ 以及 $y \in K$。显然，对于任意 $z \in$ 复平面$_\delta$，$0 < G^{\mathbb{S}}{}_\delta(iy, z) \le h(0; y\ \delta)$。因此，只需证明

$$\sup_{y\in K} \omega_{\mathbb{S}^*_\delta}(iy, C_\delta) \to 0 \quad \text{as } \delta \to 0^+. \tag{4.22}$$

再次考虑上文引入的映射 F_δ。正如我们在断言 1 的证明中所示，$|F\delta(iy)| \leqslant r_0$，，其中 $r_0 \in [0,1)$ 仅取决于紧集 K。因此，要证明 (4.22)，我们只需验证当 $\delta \to 0^+$ 时，$F_\delta(C_\delta)$ 的线性勒贝格测度趋于零。假设情况并非如此。那么存在一个趋于 0 的序列 $(\delta_n) \subset (0,\delta_0)$，以及一个非退化闭弧 $\mathscr{C} \subset \partial\mathbb{D}$，使得对每个 $n \in \mathbb{N}$，$g_n := F_{\delta_n}^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{S}^*_{\delta_n}$ 可连续延拓至 $\mathscr{C}$，且 $g_n(\mathscr{C}) \subset C\delta_n$。

由于 g_n 在紧集 $\{\sigma r : \sigma \in \mathscr{C}, r \in [0,1]\}$ 上连续，存在 $r_n \in (0,1)$，使得 $g_n(\mathscr{C}_n)$（其中 $\mathscr{C}_n := \{\sigma r_n : \sigma \in \mathscr{C}\}$）包含于 $C\delta_n$ 的 $1/n$-邻域内。因此，$\operatorname{diam} g_n(\mathscr{C}_n) \to 0$。注意，函数 g_n 在 $\mathbb{D}$ 中“一致正规”，其含义是

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|g_n'(z)|(1-|z|^2)}{1+|g_n(z)|^2} \leqslant M \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} \tag{4.23}$$

以及某个与 n 无关的常数 $M > 0$。事实上，$\mathbb{S}^*_\delta \subset \mathbb{S}^*_{\delta_0}$。因此，$g_n = F_{\delta_0}^{-1} \circ \phi_n$，其中$\phi_n$ 是 $\mathbb{D}$上的全纯自映射。考虑到 $F_{\delta_0}^{-1}$ 在 $\mathbb{D}$ 中是单叶的，因而是正规族（见 [37, 第 262]页引理 9.3），由 Schwarz–Pick 引理可得所需结论 (4.23)。现在，根据全纯函数序列的无柯比弧定理（见[37, 第 265]页定理 9.2 及其后续备注），(g_n) 在 $\mathbb{D}$ 上局部一致收敛于一个常数，这不可能，因为按构造有 $g_n \to F^{-1}$。矛盾，由此证明了断言 2。

现在，利用 (4.15)–(4.19) 和 (4.21)，即可轻易推出命题的结论。 □

现在我们可以证明定理 4.2。

定理 4.2 的证明。设 $\delta_j(t) := \delta_{\Omega,\ j}(t)$，并令 K 为区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 的紧子集。只需证明存在 $T_j < 0$和 $c_j > 0$，$j = 1$、2，使得

$$\log \frac{\mathscr{R}(t+iy,\Omega)}{\mathscr{R}(iy,\mathbb{S})} \geqslant c_j \delta_j(t) \quad \text{for all } t \leqslant T_j \text{ and all } y \in K. \tag{4.24}$$

此外，显然只需考虑 $j = 2$ 的情形。固定 $t \le 0$。由于 $\mathbb{S}^*_{\delta_2(t)} + t \subset \Omega$，我们有

$$\mathscr{R}(t+iy,\Omega) \geqslant \mathscr{R}\left(t+iy, \mathbb{S}^*_{\delta_2(t)} + t\right) = \mathscr{R}\left(iy, \mathbb{S}^*_{\delta_2(t)}\right) \quad \text{for all } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

因此，命题 4.4 意味着

$$\log\left[\frac{\mathscr{R}(t+iy,\Omega)}{\mathscr{R}(iy,\mathbb{S})}\right] \geqslant \log\left[\frac{\mathscr{R}\left(iy, \mathbb{S}^*_{\delta_2(t)}\right)}{\mathscr{R}(iy,\mathbb{S})}\right] \geqslant \Phi_{\delta_2(t)}(y) \cdot \log\left[\frac{\mathscr{R}\left(iy, \mathbb{S}_{\delta_2(t)}\right)}{\mathscr{R}(iy,\mathbb{S})}\right] \tag{4.25}$$

对于任意 t 6 0 以及任意 y $\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，其中 Φ_δ 在 K 上一致收敛到 $1/2$，当 $\delta\to 0^+$ 时。利用众所周知的显式表达式（例如参见 [6, 例 7.9]）

$$\mathscr{R}(iy,\mathbb{S}_\delta)=\frac{2}{\lambda_{\mathbb{S}_\delta}(iy)}=4\frac{\pi+\delta}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2y-\delta}{\pi+\delta}\right)$$

对于条带 $\mathbb{S}_\delta$ 的共形半径，容易验证

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\log\left[\frac{\mathscr{R}(iy,\mathbb{S}_\delta)}{\mathscr{R}(iy,\mathbb{S})}\right]=\frac{1}{\pi}+\frac{(\pi+2y)\tan y}{2\pi}\in(0,+\infty)$$

关于 y $\in$ K 一致成立。将这一事实与 $\Phi_\delta\to 1/2$ 在 K 上的一致性（当 $\delta\to 0^+$ 时）以及 $\lim_{t\to-\infty}\delta_2$ (t) $=0$ 结合起来可知，不等式 (4.25) 蕴含估计 (4.24) 对 j $=2$ 成立。如上所述，这就完成了定理 4.2 的证明。□

4.3. 条件 (4.1) 的必要性。本小节中，我们证明条件 (4.1) 的必要性。证明依赖于这样一个事实：式 (4.6) 中的积分可以由函数 δ_Ω 上的积分从上方估计。以下定理阐述了这一结论。

定理 4.8. 设 Ω 是 $\mathbb{C}$ 的一个真子域，它在无穷远处星形，并且标准条带 $\mathbb{S}=\{z\in\mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z|<\frac{\pi}{2}\}$ 是包含于 Ω 中的最大水平条带。那么，对于任意紧集 K $\subset(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，存在常数 c >0 和 C >0，使得对任意 y $\in$K,

$$\int_{-\infty}^{0}\log\frac{\mathscr{R}(t+iy,\Omega)}{\mathscr{R}(t+iy,\mathbb{S})}\,\mathrm{d}t\leqslant C+2c\int_{-\infty}^{0}\delta_\Omega(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.26}$$

因此，定理 4.8 结合引理 3.2 可推出，当域 Ω 关于 $\mathbb{S}$ 在 $-\infty$ 处共形时，(4.26) 中共形半径之比的积分收敛。

为了证明定理 4.8，我们构造一族双裂域 $D_0(t)$，它们都包含 Koenigs 域 Ω。为简洁起见，记

$$\delta:=\delta_\Omega(1+t/2),\quad \delta_j:=\delta_{\Omega,j}(1+t/2),\ j=1,2,\quad t\leqslant 0.$$

由于 Ω 在无穷远处星形，容易看出

$$D_0(t):=\mathbb{C}\setminus\left\{z\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}z\leqslant 1+\tfrac{t}{2}\text{ and }\operatorname{Im}z\in\{-\tfrac{\pi}{2}-\delta_1,\tfrac{\pi}{2}+\delta_2\}\right\},\quad t\leqslant 0,$$

确实包含 Ω。令 y $\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$。那么

$$\log\frac{\mathscr{R}(t+iy,\Omega)}{\mathscr{R}(t+iy,\mathbb{S})}\leqslant\log\frac{\mathscr{R}(t+iy,D_0(t))}{\mathscr{R}(t+iy,\mathbb{S})}. \tag{4.27}$$

此外，令 S(t) $:=\mathbb{S}\left(-\frac{\pi}{2}-\delta_1,\frac{\pi}{2}+\delta_2\right)$ 为域 D_0(t) 中两条裂隙之间的最大条带，并令

$$D(t):=D_0(t)-\left(1+\tfrac{t}{2}\right)=\mathbb{C}\setminus\left\{z\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Re}z\leqslant 0\text{ and }\operatorname{Im}z\in\{-\tfrac{\pi}{2}-\delta_1,\tfrac{\pi}{2}+\delta_2\}\right\}.$$

鉴于条带中的双曲度量在水平平移下保持不变，可得

$$\log\frac{\mathscr{R}(t+iy,\Omega)}{\mathscr{R}(t+iy,\mathbb{S})}\leqslant\log\frac{\mathscr{R}(\frac{t}{2}-1+iy,D(t))}{\mathscr{R}(\frac{t}{2}-1+iy,S(t))}+\log\frac{\mathscr{R}(iy,S(t))}{\mathscr{R}(iy,\mathbb{S})}.\tag{4.28}$$

定理 4.8 的证明思路是分析 (4.28) 中各加数的渐近行为。对于第二项，这项任务相当初等；而第一项则需要更精细一些的处理，并要利用格林函数的一个估计，我们将在下面的引理中建立该估计。记 D_* 为“标准”双裂隙域 $\mathbb{C}\setminus\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}w\leqslant 0,\ |\operatorname{Im}w|=\pi/2\}$。

引理 4.9。对于所有满足 $\operatorname{Re}w<0$ 的 $w\in\mathbb{S}$ 以及所有 $s\in D_*\cap\partial\mathbb{S}$，我们有

$$G_{D_*}(w,s)\leqslant\log\frac{1+e^{\operatorname{Re}w}}{1-e^{\operatorname{Re}w}}.\tag{4.29}$$

证明。利用 $\mathbb{S}$ 的格林函数的显式公式，我们有

$$\begin{aligned}G_{\mathbb{S}}(z_1,z_2) &= \frac{1}{2}\log\frac{\cosh(x_2-x_1)+\cos(y_2+y_1)}{\cosh(x_2-x_1)+\cos(y_2+y_1)}\\ &\leqslant \log\frac{1+e^{-|x_2-x_1|}}{1-e^{-|x_2-x_1|}},\quad x_k:=\operatorname{Re}z_k,\ y_k:=\operatorname{Im}z_k,\ k=1,2,\end{aligned}\tag{4.30}$$

对于任意一对点 $z_1,z_2\in\mathbb{S}$。

为了应用上述公式估计 G_{D_*}，我们注意到 $g(z):=z+(1+e^{2z})/2$ 将 $\mathbb{S}$ 共形地映到 D_* 上。事实上，$f(\zeta):=g(\log\zeta)=\log(\zeta)+(1+\zeta^2)/2$ 是从右半平面到 D_* 的 Schwarz–Christoffel 映射，其归一化为 $f(0)=\infty, f(\pm i)=\pm i\pi/2$，这由下列等式可知

$$\frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}=\frac{1}{\zeta-i}+\frac{1}{\zeta+i}-\frac{1}{\zeta},\quad \operatorname{Re}\zeta>0.$$

令 $w\in U:=\{w\in\mathbb{S}:\operatorname{Re}w<0\}$。容易看出，$g(U)\supset U$。因此，$z:=g^{-1}(w)\in U$。由此可得

$$\operatorname{Re}g^{-1}(w)=\operatorname{Re}w-(1+\operatorname{Re}e^{2z})/2<\operatorname{Re}w\quad\text{for all } w\in U.\tag{4.31}$$

此外，容易看出，$g\big(\{w\in\mathbb{S}:\operatorname{Re}w>0\}\big)$ 包含集合 $A:=D_*\cap\partial\mathbb{S}$。因此，

$$\operatorname{Re}g^{-1}(s)>0\qquad\text{for all } s\in A.\tag{4.32}$$

现在结合 (4.30)、(4.31) 和 (4.32)，可得

$$G_{D_*}(w,s)=G_{\mathbb{S}}\big(g^{-1}(w),g^{-1}(s)\big)\leqslant\log\frac{1+e^{\operatorname{Re}w}}{1-e^{\operatorname{Re}w}}$$

对于任意 $w\in U$ 和任意 $s\in A$，正如所需。 □

引理 4.10. 对于任意 $w \in U := \{w \in \mathbb{S}: \operatorname{Re} w < 0\}$，我们有

$$\log \frac{\mathscr{R}(w, D_*)}{\mathscr{R}(w, \mathbb{S})} \leqslant \log \frac{1+e^{\operatorname{Re} w}}{1-e^{\operatorname{Re} w}}. \tag{4.33}$$

证明。根据 (3.2)，对于任意 $w \in \mathbb{S}$，(4.33) 左端等于

$$\int_A G_{D_*}(w,s)\, \omega_{\mathbb{S}}(w, \mathrm{d}s), \quad A := D_* \cap \partial \mathbb{S},$$

考虑到 $\omega_{\mathbb{S}}(w\,\cdot)$ 是概率测度，不等式 (4.33) 由 (4.29) 立即推出。□

定理 4.8 的证明。利用条带共形半径的显式公式，容易看出存在常数 $c > 0$，它仅取决于紧集 $K \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，使得

$$\log \frac{\mathscr{R}(iy, S(t))}{\mathscr{R}(iy, \mathbb{S})} \leqslant c\delta = c\,\delta_\Omega\big(1 + t/2\big) \quad \text{for all } t \leqslant 0 \text{ and all } y \in K. \tag{4.34}$$

此外，回想一下，函数 δ_Ω 在 $(-\infty, 1]$ 上有限且单调。特别地，它在 $[0,1]$ 上可积。因此，根据不等式 (4.28)，只需证明

$$\sup_{y \in K} \int_{-\infty}^{0} \log \frac{\mathscr{R}(\frac{t}{2} - 1 + iy, D(t))}{\mathscr{R}(\frac{t}{2} - 1 + iy, S(t))}\, \mathrm{d}t \; < \; +\infty. \tag{4.35}$$

线性函数

$$F_t(z) := \frac{\pi}{\pi + \delta_1 + \delta_2} \left(z + i\, \tfrac{\delta_1 - \delta_2}{2} \right),$$

将条带 S(t) 共形映射到标准条带 $\mathbb{S}$，并将双裂隙域 D(t) 映射到 D_*。因此，(4.35) 中的被积函数等于

$$\log \frac{\mathscr{R}(w(t), D_*)}{\mathscr{R}(w(t), \mathbb{S})}, \quad \text{where } \; w(t) := F_t\big(\tfrac{t}{2} - 1 + iy\big).$$

由 $\delta_{\Omega,j}$ 的单调性，$j = 1, 2$，

$$\operatorname{Re} w(t) \leqslant \frac{\pi}{\pi + \delta_{\Omega,1}(1) + \delta_{\Omega,2}(1)} \Big(\frac{t}{2} - 1 \Big) \quad \text{for any } t \leqslant 0,$$

于是证明完成，因为现在 (4.35) 可由引理 4.10 得出。 □

定理 4.1 中必要性的证明。设 Ω 关于 S 在 $-\infty$ 处共形。由引理 3.2，δ_Ω 在 $(-\infty, 0]$ 上可积。因此，定理 4.8 表明条件 (4.1) 成立。□

4.4. 定理 4.1 证明的完成：条件 (4.1) 的局部一致收敛。我们还需证明，若 (4.6) 对某个点 $w_0 \in S$ 成立，则它对所有 $w_0 \in S$ 都成立，并且 (4.6) 中的积分关于 $w_0 \in S$ 局部一致收敛。显然，我们可以假设 $S = \mathbb{S}$。

令 S(t) 和 D(t) 如第 4.3 小节中所定义。对于 $t \leq 0$ 和 $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，我们记

$$F_1(t,y) := \log \frac{\mathscr{R}(\frac{t}{2} - 1 + iy, D(t))}{\mathscr{R}(\frac{t}{2} - 1 + iy, S(t))},\ F_2(t,y) := \log \frac{\mathscr{R}(iy, S(t))}{\mathscr{R}(iy, \mathbb{S})},\ J_k(y) := \int_{-\infty}^{0} F_k(t,y)\,dt,\ k = 1,2.$$

函数 δ_Ω 在 $(-\infty, 1]$ 上单调，因此在包含于 $(-\infty, 1]$ 的任意紧区间上可积。因此，由定理 4.2 可知，若 (4.6) 对至少一个点 $w_0 \in \mathbb{S}$ 成立，则函数 δ_Ω 在 $(-\infty, 1]$ 上可积。

由不等式 (4.34) 可知，δ_Ω 在 $(-\infty, 1]$ 上的可积性意味着积分 $J_2(y)$ 关于 y 在任意紧区间 $[y_1, y_2] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上一致收敛。此外，定理 4.8 证明中使用的论证表明，积分 $J_1(y)$ 在整个区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上一致收敛。

现在令 $w_0 := x + iy \in \mathbb{S}$。由不等式 (4.28)，对所有 $t \leq \min\{-x, 0\}$，我们有

$$0 \leqslant \log \frac{\mathscr{R}(t + w_0, \Omega)}{\mathscr{R}(t + w_0, \mathbb{S})} \leqslant F_1(t + x, y) + F_2(t + x, y).$$

因此，对于每个包含于 $\mathbb{S}$ 的矩形 $R := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$，(4.6) 中的积分关于 $w_0 \in R$ 一致收敛。证明至此完成。□

5. 抛物型花瓣的角导数问题

本节研究抛物型花瓣在 Denjoy–Wolff 点处的共形性。所谓的双曲步长 $q(z, s) := \lim_{t \to +\infty} d_{\mathbb{D}}(\phi_{t+s}(z), \phi_t(z))$在其中起着重要作用，这里 $d_{\mathbb{D}}$ 表示 $\mathbb{D}$ 中的双曲距离。如果对某个 $z \in \mathbb{D}$ 和 $s > 0$，$q(z, s) = 0$，那么 $q \equiv 0$ 在 $\mathbb{D} \times (0, +\infty)$ 上成立，并且称单参数半群 (ϕ_t)具有零双曲步长。否则，也就是说，如果对某个（因而对所有）$z \in \mathbb{D}$ 和 $s > 0$，$q(z, s) > 0$，则称 (ϕ_t) 具有正双曲步长。

定理 5.1. 设 Δ 是一个单参数半群 (ϕ_t) 的抛物型花瓣，其 Denjoy–Wolff 点为 τ，对应的 Koenigs 函数为 h。以下结论成立：

(A) 花瓣 Δ 在 τ 处相对于 $\mathbb{D}$ 共形，当且仅当角极限

$$L := \angle \lim_{z \to \tau} (z - \tau) h(z)$$

是有限的。

(B) 若 (ϕ_t) 具有正双曲步长，则 Δ 在 τ 处相对于 $\mathbb{D}$ 共形（因此 $L \neq \infty$）。

注 5.2。上述陈述 (A) 中的角极限 L，此前 Contr- eras、D´ıaz-Madrigal 和 Pommerenke 曾在离散迭代这一更一般的背景下进行研究，参见 [22,定理 4.1 和 6.2]。此外，这个极限与 Betsakos [8, 定理 3] 以及 Karamanlis [31, 定理 2] 所研究的正双曲步长抛物型单参数半群的共形性问题直接相关。正如我们将在定理 5.1 的证明中看到的，

抛物型花瓣的存在确保角极限 L 存在且不为零，但它也可能是无穷大。事实上，正如证明之后给出的例 5.4 所示，对于零双曲步长半群，$L \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ 和 $L = \infty$ 两种情况都有可能。

定理 5.1 的证明。首先，回想一下，存在抛物型花瓣 Δ 意味着单参数半群 (ϕ_t) 是抛物型的。此外，关于 Koenigs 函数 h，(ϕ_t) 下 Δ 的像是一个半平面，其边界为一条平行于 $\mathbb{R}$ 的直线。

如果 (ϕ_t) 具有正双曲步长，那么 $\Omega := h(\mathbb{D})$ 包含于某个半平面 U 中，且∂U 平行于 $\mathbb{R}$，参见 [15, 定理 9.3.5]。令 T 为一个将 $\mathbb{D}$映到 U 的线性分式变换，且 $T(1) = \infty$。选取一个数 $c \in \mathbb{C}$，使得 $w \mapsto w + c$ 将 U 映到 $h(\Delta)$。于是

$$\varphi(z) := h^{-1}\big(T(z)+c\big), \quad z \in \mathbb{D},$$

是一个将 $\mathbb{D}$ 映到 Δ 的共形映射，且 $\varphi(1) = \tau$以角极限的意义成立。此外，记作 $\psi := T^{-1} \circ h : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$。由于 $\psi \circ \varphi = T^{-1} \circ (T + c)$ 在 $\zeta = 1$ 处有一个正规接触点，根据角导数链式法则（例如参见 [21, 引理 2] 或 [29, 引理 5.1]），φ在 $\zeta = 1$ 处也有一个正规接触点，这意味着 Δ 关于 $\mathbb{D}$在 τ处共形。这就证明了断言 (B)。

为证明 (A)，固定某个 $w_0 \in \mathbb{C}\setminus\Omega$，并记 $g := 1/(h - w_0)$。进一步，记 D 为半平面 $h(\Delta)$ 在映射 $w \mapsto 1/(w - w_0)$ 下的像。显然，D 是包含于 $g(\mathbb{D})$ 中的一个圆盘，且 $0 \in \partial D$。令 f 为将 $\mathbb{D}$ 映至 D 的线性函数，并满足归一化条件 $f(\tau) = 0$。于是，对于适当选取的、端点为 τ 的圆弧 $\Gamma \subset \mathbb{D}$，$g^{-1}\big(f(\Gamma)\big)$ 是半群 (ϕ_t) 中某点 $z_0 \in \Delta$ 的正向轨道。特别地，当 $\Gamma \ni z \to \tau$ 时，$g^{-1}(f(z)) \to \tau$。因此，根据比较定理（例如参见 [37, 第 10.6 定理，见第 307], 页），存在有限的角导数 $g'(\tau)$。进而，这意味着 $L := \angle\lim_{z\to\tau}(z - \tau)h(z)$ 存在，且 $L = 1/g'(\tau) \in \overline{\mathbb{C}}\setminus\{0\}$。

注意到 $\varphi(\zeta) := g^{-1}\big(f(\tau\zeta)\big)$ 是从 $\mathbb{D}$ 到 Δ 的共形映射，并且根据林德洛夫定理，参见例如 [37, 第 9.3 定理，第 268] 页，$\angle\lim_{\zeta\to\tau}\varphi(\zeta) = \tau$。回顾一下，由于 $\varphi \in \mathrm{Hol}(\mathbb{D},\mathbb{D})$，且由于 $\zeta = 1$ 是 φ 的接触点，角导数 $\varphi'(1) := \angle\lim_{\zeta\to 1}(\varphi(\zeta) - \tau)/(\zeta - 1)$ 确实存在，可以是有限值，也可以是无穷值，并且 $\varphi'(1) \neq 0$。下面的简单计算

$$\tau f'(\tau) = (g\circ\varphi)'(1) = \lim_{(0,1)\ni x\to 1}\left(\frac{g\big(\varphi(x)\big)}{\varphi(x)-\tau}\cdot\frac{\varphi(x)-\tau}{x-1}\right)$$

表明，$R(z) := g(z)/(z - \tau)$，$z \in \mathbb{D}$，在 $z = \tau$ 处具有有限渐近值 $\tau f'(\tau)/\varphi'(1)$。考虑到 g 是单叶的，且在 $\mathbb{D}$ 中不为零，并按照 [37, 定理 10.5 的证明（第 305–306], 页）中的方法推导，我们得到 $g'(\tau) = \angle\lim_{z\to\tau}R(z) = \tau f'(\tau)/\varphi'(1)$。由此可知，$L = 1/g'(\tau) \neq \infty$ 当且仅当 $\varphi'(1) \neq \infty$。这就完成了 (A) 的证明。□

注 5.3. 请注意，在上述证明中所考虑的圆盘 D 的中心位于虚轴上。因此，在定理 5.1 的假设下，若 $L \neq \infty$，则 $\mathrm{Re}(\overline{\tau}L) = 0$。

例 5.4. 令 $h_1(z) := z/(1 - z)^2$ 为经典的 Koebe 函数，并令

$$h_2(z) := w(z) - i\sqrt{w(z)}, \quad \text{where } w(z) := i(1+z)/(1-z),\ z \in \mathbb{D},$$

而 $\sqrt{w}$ 表示将上半平面映射到第一象限的平方根分支。不难看出，对所有 $z \in \mathbb{D}$，$k = 1, 2$，都有 $\mathrm{Re}(1-z)^2 h_k'(z) > 0$。因此，参见例如 [15, 定理 9.4.11，第 257]，页，h_k 在 $\mathbb{D}$ 中是单叶的，且公式 $\phi_t^k := h_k^{-1} \circ (h_k + t)$，$t \geqslant 0$，$k = 1, 2$，定义了两个以 $\tau = 1$ 为 DW 点的抛物型单参数半群。注意，$h_1(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4}]$ 且 $h_2(\mathbb{D}) = \{\zeta : \mathrm{Re}\,\zeta > f(\mathrm{Im}\,\zeta)\}$，其中 $f(\eta) := -\infty$ if $\eta > 0$，$f(0) := \frac{1}{4}$，且 $f(\eta) := \eta^2$ if $\eta < 0$。由于像域 $h_k(\mathbb{D})$ 不包含在任何半平面内，两个半群 (ϕ_t^k)，$k = 1, 2$，都是零双曲步长。显然，$\lim_{z \to 1}(z-1)h_1(z) = \infty$。相应的半群 (ϕ_t^1) 有两个非共形抛物型花瓣 $\{z \in \mathbb{D} : \pm \mathrm{Im}\, z > 0\}$。与此同时，$\angle \lim_{z \to 1}(z-1)h_2(z) = -2i \neq \infty$。由于 $\{\zeta : \mathrm{Im}\,\zeta > 0\} \subset h_2(\mathbb{D})$，半群 (ϕ_t^2) 有一个抛物型花瓣。根据定理 5.1 (A)，该抛物型花瓣在 τ 处相对于 $\mathbb{D}$ 是共形的。

6. 总结性备注与未决问题

6.1. 正则反向轨道的收敛速率。若 $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ 是 (ϕ_t) 上单参数半群的排斥不动点，则正如 [14, 命题 4.20], 中所证明的,

$$\lim_{t \to -\infty} \frac{1}{t} \log |\phi_t(z) - \sigma| = \lambda := G'(\sigma) \quad \text{for any } z \in \Delta(\sigma),$$

其中 G 表示 (ϕ_t) 的无穷小生成元。因此，自然会问极限

$$C(\sigma, z) := \lim_{t \to -\infty} e^{-\lambda t} |\phi_t(z) - \sigma| \tag{6.1}$$

对于 $z \in \Delta(\sigma)$ 是否存在。回想 (ϕ_t) 在 σ 处有一个预模型 $(\mathbb{H}, \psi, z \mapsto e^{\lambda t} z)$，其中 ψ 是将 $\mathbb{H}$ 共形映射到 $\Delta(\sigma)$ 的共形映射，且 $\psi(0) = \sigma$；见注 2.14。对于任意 $z \in \Delta(\sigma)$ 和任意 $t \in \mathbb{R}$，我们有 $\phi_t(z) = \psi\left(e^{\lambda t} \psi^{-1}(z)\right)$。因此，对于所有 $z \in \Delta(\sigma)$,

$$C(\sigma, z) = \lim_{t \to -\infty} e^{-\lambda t} |\psi\left(e^{\lambda t} \psi^{-1}(z)\right) - \sigma| = |\psi^{-1}(z) \psi'(0)|.$$

如果双曲花瓣 $\Delta(\sigma)$ 是共形的，那么根据注记 2.20，$\psi'(0) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$，因此对于 $\Delta(\sigma)$ 中的所有点 z，极限 (6.1) 都有限存在且不为零。如果 $\Delta(\sigma)$ 不是共形的，那么 $\psi'(0) = \infty$，因此对于 $\in \Delta(\sigma)$ 中的所有 z，$C(z\sigma) = +\infty$。

因此，对于 $z_0 \in \Delta(\sigma)$，定理 1.1 中的条件 (1.1) 等价于 $C(z0, \sigma) \in (0, +\infty)$。由于 $\Delta(\sigma)$ 中的反向轨道非切向地收敛到 σ，见注记 2.15，当且仅当 $12 \log\left(e^{-\lambda t}(1 - |\phi_t(z_0)|^2)\right)$ 在 $t \to -\infty$ 时趋于有限极限，才有 $C(z0, \sigma) \in (0, +\infty)$。另一方面，由于根据注 2.11，$\Delta(\sigma)$ 中的常微分方程 (2.1) 对所有 $t \in \mathbb{R}$ 都成立，因此后一条件可以改述为积分收敛:

$$J(z_0) := \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\lambda}{2} + \frac{\mathrm{Re}\left[G(\phi_t(z_0)) \overline{\phi_t(z_0)} \right]}{1 - |\phi_t(z_0)|^2} \right) \mathrm{d}t. \tag{6.2}$$

同时，结合 (2.1) 和 (2.2)，可得 $\phi_t'(z_0) = G\big(\phi_t(z_0)\big)/G(z_0)$。由此可知，定理 1.1 中的条件 (1.1) 等价于下式收敛：

$$I(z_0) := \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{A(z_0)}{2} - \frac{\big|G(\phi_t(z_0))\big|}{1-|\phi_t(z_0)|^2} \right) \mathrm{d}t, \tag{6.3}$$

其中 $A(z_0) := \lim_{t\to-\infty} \big|G(\phi_t(z_0))\big| \lambda_{\mathbb{D}}\big(\phi_t(z_0)\big) = |G(z_0)| \lambda_{\Delta(\sigma)}(z_0)$。

6.2. Koenigs 函数的边界行为。对于非椭圆型单参数半群 (ϕ_t)，双曲花瓣的共形性与 Koenigs 函数 h 的边界行为有关。令 $\sigma \in \partial\mathbb{D}$ 为 (ϕ_t) 的一个排斥不动点。由于 $S := h\big(\Delta(\sigma)\big)$ 是 $\Omega := h(\mathbb{D})$ 中的最大条带，根据 Betsakos 的一个结果 [9], ，角极限

$$\nu := \angle \lim_{z\to\sigma} (z-\sigma) h'(z) \in (0,+\infty)$$

存在，且等于条带 S 的宽度除以 π。（由于 $h' = 1/G$，上述极限的存在性也可由 [21, 定理 1]得出。）

对于适当的 $b \in \mathbb{C}$，函数 $\psi(\zeta) := h^{-1}\big(b + \nu \log \zeta\big)$ 将右半平面 $\mathbb{H}$映 onto $\Delta(\sigma)$。因此，双曲花瓣 $\Delta(\sigma)$ 的共性等价于 $\psi'(0) \neq \infty$。借助等角性 (2.8)，可以使用变量代换 $\zeta := \psi^{-1}(z)$ 得到

$$\angle \lim_{z\to\sigma} \big[h(z) - \nu \log(1-\overline{\sigma} z)\big] = b - \nu \log\big(-\overline{\sigma}\psi'(0)\big). \tag{6.4}$$

上述极限存在，并且为有限值或无穷大，这是因为 $\psi'(0)$ 存在，且 $-\overline{\sigma}\psi'(0) \in (0,+\infty) \cup \{+\infty\}$。因此， $\Delta(\sigma)$ 是共形的，当且仅当 (6.4) 左端的极限是有限的。

6.3. 关于实数轴具有对称性的半群。考虑 $\mathbb{D}$中的一个单参数半群 (ϕ_t)，其在 $\sigma = -1$ 处具有一个排斥不动点，并且对于所有 $t \geqslant 0$，$\phi_t\big((-1,1)\big) \subset (-1,1)$。固定某个 $z_0 \in \Delta(-1) \cap \mathbb{R}$。在这一相当特殊的情形下，定理 1.1 （不包括关于收敛一致性的部分）可以基于下面的初等引理给出一个简单的证明。

引理 6.1. 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且在 $(0,+\infty)$ 上属于 C^2。假设

(i) $f(0) = 0$ *and* $f'(x) > 0$ *for all* $x \in (0,+\infty)$*;*

(ii) $g(x) := f(x)/\big(xf'(x)\big) \geqslant 1$ *for all* $x \in (0,+\infty)$.

固定 $\xi_0 > 0$。若当 $x \to +\infty$ 时，$f'(x) \to A$，其中某个 $A \in (0,+\infty)$，则

$$I := \int_0^{\xi_0} \frac{\log g(x)}{x}\, \mathrm{d}x < +\infty. \tag{6.5}$$

如果当 $x \to +\infty$ 时，$f(x)/x \to +\infty$，则 $I = +\infty$。

证明。设当 $x \to +\infty$ 时，$f'(x) \to A \in (0,+\infty)$。则 $f(x)/x \to A$，并且当 $x \to +\infty$ 时，$g(x) \to 1$。因此，考虑到 (ii)，我们看到反常积分 I 收敛，因为

$$\int_0^{\xi_0} \left(1-\frac{1}{g(x)}\right)\frac{dx}{x} = \int_0^{\xi_0} \left(\frac{1}{x}-\frac{f'(x)}{f(x)}\right) dx = \lim_{a\to 0^+} \log\frac{x}{f(x)}\Big|_{x=a}^{x=\xi_0} \in \mathbb{R}.$$

同样，如果当 $x \to +\infty$ 时 $f(x)/x \to +\infty$，那么

$$I \geqslant \int_0^{\xi_0} \left(1-\frac{1}{g(x)}\right)\frac{dx}{x} = \lim_{a\to 0^+} \log\frac{x}{f(x)}\Big|_{x=a}^{x=\xi_0} = +\infty. \qquad \square$$

对称情形下定理 1.1 的证明。借助凯莱映射 $H(z) := (1+z)/(1-z)$，将单位圆盘 $\mathbb{D}$ 映到 $\mathbb{H}$，我们得到一个位于 $\mathbb{H}$ 中的单参数半群 (φ_t)，它在 0 处有一个排斥不动点，并且对所有 $t \geqslant 0$，都有 $\varphi_t\big((0,+\infty)\big) \subset (0,+\infty)$。由此可知，$(\varphi_t)$ 的双曲花瓣 D 在 0 处有 α-点，且关于实数轴对称。因此，对所有 $t \in \mathbb{R}$、所有 $z \in D$，以及适当的 $\lambda > 0$，我们有

$$\varphi_t(z) = f\big(e^{\lambda t} f^{-1}(z)\big),$$

其中，f 是一个将 $\mathbb{H}$ 共形映射到 D 的共形映射，且 $f(0) = 0$，$f\big((0,+\infty)\big) \subset (0,+\infty)$。因此，对于 $z_0 \in \Delta(-1) \cap \mathbb{R}$，(1.1) 中的积分等于

$$\int_{-\infty}^{0} \log\frac{f(e^{\lambda t}\xi_0)}{e^{\lambda t}\xi_0 f'(e^{\lambda t}\xi_0)}\, dt = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\xi_0} \left(\log\frac{f(x)}{x f'(x)}\right)\frac{dx}{x}, \tag{6.6}$$

其中 $\xi_0 := f^{-1}\big(H(z_0)\big)$。

应用 Schwarz–Pick 引理，例如参见 [6, 定理 6.4]，对 $f: \mathbb{H} \to \mathbb{H}$，不难看出，f 在 $[0,+\infty)$ 上的限制满足引理 6.1 的假设。若 $\Delta(-1)$ 是共形的，则 $f'(x) \to f'(0) \in (0,+\infty)$，当 $(0,+\infty) \ni x \to 0$ 时成立，因此由引理 6.1，积分 (6.6) 收敛。

类似地，若 $\Delta(-1)$ 不是共形的，则当 $(0,+\infty) \ni x \to 0$ 时，$f(x)/x \to +\infty$。在这种情况下，引理 6.1 保证积分 (6.6) 发散。□

上述对称情形下定理 1.1 的证明基于这样一个观察：$(\phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ 是 $\Delta(\sigma)$的双曲自同构单参数群。与一般情形的证明不同，对于对称情形的证明而言，$t \geqslant 0$时 ϕ_t在整个单位圆盘上都是定义良好的全纯函数这一事实并非必不可少。

若试图将本节所用的方法推广到一般情形，则需要考虑的不是积分 (6.5)，而是

$$I_1(\theta) := \int_0^{\rho_0} \left(\log\frac{\operatorname{Re} f(\rho e^{i\theta})}{\big|f'(\rho e^{i\theta})\big|\,\rho\cos\theta}\right)\frac{d\rho}{\rho}, \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2), \tag{6.7}$$

其中 $\rho_0 > 0$ 固定。由于 f 在 0 处等角，$\operatorname{Re} f(\rho e^{i\theta})/|f(\rho e^{i\theta})| \to \cos\theta$ as $\rho \to 0^+$。因此，考虑下式也是合理的：

$$I_2(\theta) := \int_0^{\xi_0} \log \left| \frac{f(\rho e^{i\theta})}{\rho f'(\rho e^{i\theta})} \right| \frac{d\rho}{\rho}. \tag{6.8}$$

注意到，(6.8) 中 $\log|\cdot|$ 的真数在 $\rho \to 0^+$ 时趋于 1，因为根据第 81], 页的 [38, 命题 4.11，共形映射 $f \circ H$，$H(z) := (1-z)/(1+z)$ 满足 $\zeta = 1$ Visser–Ostrowski 条件。

6.4. 反向轨道的双曲长度。对于双曲域 $D \subset \mathbb{C}$ 和一条可求长曲线 $\gamma : [0,T] \to D$，我们记

$$\ell_D(\gamma) := \int_\gamma \lambda_D(z)\,|dz|$$

γ 的双曲长度。容易验证，定理 1.1 可改述如下：单参数半群 (ϕ_t) 在 $\mathbb{D}$ 中的双曲花瓣 Δ 是共形的，当且仅当

$$\lim_{T\to+\infty} \left[\ell_\Delta(\gamma_z|_{[0,T]}) - \ell_{\mathbb{D}}(\gamma_z|_{[0,T]}) \right] < +\infty \tag{6.9}$$

对于花瓣 Δ 中的任意反向轨道 $\gamma_z(t) := \phi_{-t}(z)$，$z \in \Delta$，均成立。注意，上述极限总是存在的，无论有限还是无穷，因为 $\Delta \subset \mathbb{D}$，从而对所有 $z \in \Delta$ 都有 $\lambda_\Delta(z) \geqslant \lambda_{\mathbb{D}}(z)$。

6.5. 角导数问题与双曲长度。定理 1.1 与 Betsakos 和 Karamanlis [11] 最近提出的共形条件密切相关。我们简要讨论这一问题。[11] 中得到的共形条件适用于任意包含实数轴 $\mathbb{R}$ 的单连通域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$。为了将 [11] 的结果与我们的定理 4.1 进行比较，我们还假设 Ω 包含标准条带 $\mathbb{S}$。考虑到 Ostrowski 对半共形性的刻画，参见例如 [11, 定理 A], ，我们看到在此情形下，[11,定理 1] 指出，Ω 在 $-\infty$ 处相对于 $\mathbb{S}$ 共形，当且仅当

$$\operatorname{dist}(z, \partial\Omega) := \inf_{w\in\partial\Omega} |z-w| \to 0 \qquad \text{as } \operatorname{Re} z \to -\infty,\ z \in \partial\mathbb{S}, \tag{6.10}$$

$$\text{and} \qquad d_{\mathbb{S}}(iy+a, iy+b) - d_\Omega(iy+a, iy+b) \to 0 \qquad \text{as } a,b \to -\infty,\ a,b \in \mathbb{R}, \tag{6.11}$$

对某个（因而对任意）$y \in (-\pi/2,\ \pi/2)$ 成立。事实上，在 [11] 中，共形条件（6.11）只对 $y = 0$ 作出陈述，但在我们的情形下，我们还具有 $\mathbb{S} \subset \Omega$，并且 [11] 中的证明对 $y \in (-\pi/2,\ \pi/2)$ 也成立。

如果 Ω 是单参数半群 (ϕ_t) 的 Koenigs 域，且 $\mathbb{S}$ 是包含于 Ω 中的最大条带，那么条件 (6.10) 自动成立。

另一方面，容易看出，定理 4.1 表明，Ω 在 $-\infty$ 处关于 $\mathbb{S}$共形，当且仅当对某个（因而对所有）$y \in (-\pi/2, \pi/2)$，

$$\int_a^b \left(\lambda_S(iy+x) - \lambda_\Omega(iy+x) \right) dx \to 0 \quad \text{as } a,b \to -\infty,\ a,b \in \mathbb{R}. \tag{6.12}$$

我们来比较条件 (6.11) 和 (6.12)。

由于对于任意 $a < b$，$a, b \in \mathbb{R}$，都有 $\int_{ba} \lambda_S(x)\,dx = b - a = d_S(a, b)$ 和 $\int_{ba} \lambda_\Omega(x)\,dx \geqslant d_\Omega(a, b)$，因此，$y = 0$ 时的条件 (6.11) 蕴含 $y = 0$时的条件 (6.12)。因此，若 Ω 关于 $\mathbb{S}$在 $-\infty$ 处共形，且 $\mathbb{S} \subset \Omega$，那么无论 Ω 在无穷远处是否星形，我们的条件 (6.12) 对 $y = 0$ 都成立。

类似的备注也适用于 (6.12) 与 Bracci 等人 [14, (8.2)] 所确立的以下共形性的充要条件之间的关系：

$$\limsup_{x \to -\infty} \left[d_{\mathbb{S}}(iy, iy + x) - d_\Omega(iy, iy + x) \right] < +\infty \tag{6.13}$$

对于某个，因而也对于所有 $y \in (-\pi/2, \pi/2)$。如上所述，可以看出 (6.13) 蕴含 (6.12)，但显然仅对 $y = 0$ 成立。尽管 [14, 第 8] 节在单参数半群的背景下讨论了角导数问题，(6.13) 的证明并不依赖于 Ω 在无穷远处星形这一事实；实际上，它对任何包含 $\mathbb{S}$ 的单连通域 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ 都成立。

6.6. 未决问题。

最后，我们提出几个未决问题。设 (ϕ_t) 是一个非椭圆单参数半群，其对应的无穷小生成元为 G，Koenigs 函数为 h，Koenigs 域为 $\Omega := h(\mathbb{D})$。进一步设 $\Delta(\sigma)$ 是 (ϕ_t) 的一个双曲花瓣，其 α-点为 σ。如上所述，为简便起见，我们假设 $h(\Delta(\sigma)) = \mathbb{S}$。

问题 1. 与 Betsakos 和 Karamanlis 的一个结果类似 [11, 定理 1], 我们的条件 (1.1) 及其改写形式 (4.1) 和 (6.12) 使用了双曲几何。然而，在证明中，我们用到了与 Koenigs 域 Ω 相关的欧几里得量。能否在不使用以欧几里得几何表述的共形性判据的情况下，证明定理 1.1 中的一个（甚至两个）蕴含?

回答上述问题的一种可能方式，是详细研究第 6.1 节中引入的积分 $I(z_0)$ 和 $J(z_0)$ 的收敛性之间的关系。下一个问题则指向另一种研究方向。

问题 2. 若 Ω 在无穷远处星形，则根据定理 4.1 和 [11,定理 1], Betsakos 和 Karamanlis 提出的共形性条件 (6.11) 与我们的条件 (6.12) 等价。对于这类域，是否有更直接的方法证明 (6.11) 和 (6.12) 等价? 当 Ω 在 $-\infty$ 处半共形（按 Ostrowski 的定义，参见例如 [11, 定理 A], ），但不一定在无穷远处星形时，条件 (6.11) 和 (6.12) 有何关系?

在第 6.3 节给出的对称情形下定理 1.1 的初等证明中，我们考虑一个在接触点处等角的任意单射全纯自映射。与一般（非对称）情形不同，这一论证并不依赖于该自映射的像是复平面 $\mathbb{D}$ 中某个单参数半群的双曲花瓣这一事实。

一方面，第 6.3 节中的论证仅适用于包含在 $(-1, \tau)$ 中的反向轨道。这与第 6.5 节中的情形类似，在那里，将研究限制在对称线 $y = 0$ 上似乎在某个阶段变得不可避免。

另一方面，受对称情形的启发，自然会问：即使在一般情形下，对于单连通域 $\Delta \subset \mathbb{D}$ 的双曲自同构半群 $(\phi_t)_{t\geqslant 0} \subset \mathrm{Aut}(\Delta)$，只要所有反向轨道都收敛于点 $\sigma \in \partial\mathbb{D}$，且 Δ 在该点处为等角，定理 1.1 是否仍然成立；但我们不假设 (ϕ_t) 可扩展为整个单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的全纯自映射单参数半群。这引出了以下问题。

问题 3. 设 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 是一个单射全纯自映射，在 $\zeta = 0$ 处有一个边界不动点。假设 f 在 $\zeta = 0$ 处等角。积分 (6.7) 和 (6.8)（见第 6.3 节）的收敛性与角导数 $f'(0)$ 有限之间是否存在某种关系?

一个密切相关的问题如下。设 φ 是一个将 $\mathbb{D}$ 共形映射到双曲花瓣 $\Delta(\sigma)$ 的共形映射，满足 $\varphi(-1) = \sigma$ 且 $\varphi(1) = \tau$。根据 [26, 定理 1 和 3], ，映射 φ 是下列非线性常微分方程的一个解

$$G'(\sigma)(1-z^2)\varphi'(z) = 2G(\varphi(z)), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{6.14}$$

问题 4. 如果假设花瓣 $\Delta(\sigma)$ 是共形的，那么从方程 (6.14) 能对无穷小生成元 G 得出什么非平凡结论?

下一个未决问题涉及双曲花瓣在 τ的 Denjoy–Wolff 点附近的几何学（ϕ_t）。

问题 5。回忆一下，$\tau \in \partial\Delta$（σ）。令 $\tilde{\varphi}$ 为从 $\mathbb{D}$ 到 Δ（σ）的共形映射，且$\tilde{\varphi}(1) = \tau$。当 z $\to 1$ 在一个 Stolz 角内趋近时， $\tilde{\varphi}$(z) 的渐近行为是什么？特别地，如果（ϕ_t）是双曲型，那么利用 Contreras 和 D´ıaz-Madrigal 的结果 [18]，可以证明 $\partial\Delta$（σ）在 τ处有一个开口为 $\alpha\pi$ 的角，且满足： $\alpha := |G'(\tau)|/G'(\sigma)$。函数是否总是（若非总是，则在什么条件下）

$$f(z) := \left(\tilde{\varphi}(z) - \tau\right)^{1/\alpha}, \quad z \in \mathbb{D},$$

在 $z = 1$处是共形的，即 f 有角导数 $f'(1) \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$?

本文最后提出一个关于抛物型花瓣的问题。对于零双曲步长半群，定理 5.1 将抛物型花瓣的角导数问题归结为 Koenigs 函数 h 的一个性质相似的问题。尽管极限关系 (1.2) 对抛物型花瓣也成立，但我们的定理 1.1 似乎无法推广到这种情形。因此，自然会提出以下问题。

问题6. 能否根据花瓣的内在双曲几何以及半群的逆向（或正向）动力学来刻画抛物型花瓣的共形性，而不涉及该半群的 Koenigs 函数?

致谢。作者非常感谢匿名审稿人认真审阅稿件并提出宝贵意见。

参考文献

[1] M. Abate, 《正规流形上全纯映射的迭代理论》, 数学研究与讲义丛书: 复分析与几何, 地中海出版社, Rende, 1989, MR1098711[2] M. Abate 和 J. Raissy, 《强凸域中的逆向迭代》, 《数学进展》228（2011）, 第5期, 2837–2854。MR2838060[3] L.V. Ahlfors, 《关于共形映射理论与整函数理论的研究》, Acta Soc. Sci. Fenn. N.S. 1（1930）, 第9期, 1-40。[4] H. Amann, 《常微分方程: 非线性分析导论》, De Gruyter, 1990。[5] L. Arosio 和 L. Guerini, 《单位球中的反向轨道》, Proc. Amer. Math. Soc. 147（2019）, 第9期, 3947–3954。MR3993787[6] A.F. Beardon 和 D. Minda, 《双曲度量与几何函数论》, 《拟共形映射及其应用》, 9–56, Narosa, 新德里。MR2492498[7] E. Berkson 和 H. Porta, 《解析函数半群与复合算子》, Michigan Math. J. 25（1978）, 101–115。[8] D. Betsakos, 《全纯半群分类的几何描述》, Proc. Amer. Math. Soc.（144）, 第4期, 1595–1604页, 2016。MR3451236[9] D. Betsakos, 《单方向凸域内条带的存在性》, J. Anal. Math., 134(1):107–126, 2018。[10] D. Betsakos、M.D. Contreras 和 S. D´ıaz-Madrigal, 《全纯函数半群在 Denjoy-Wolff 点处的收敛速率》, Rev. Mat. Iberoam.（36）, 第6期, 1659–1686页, 2020。MR4163980[11] D. Betsakos 和 N. Karamanlis, 《共形不变量与角导数问题》, J. Lond. Math. Soc.（2）105（2022）, 第1期, 587–620。MR4411333[12] F. Bracci, 《Wolff 点以外的可交换全纯映射的不动点》, Trans. Amer. Math. Soc. 355（2003）, 第6期, 2569–2584。MR1974004[13] F. Bracci、M.D. Contreras 和 S. D´ıaz-Madrigal, 《单位圆盘上全纯自映射半群的 Koenigs 函数》, Anal. Math. Phys. 8（2018）, 第4期, 521–540。MR3881011[14] F. Bracci、M.D. Contreras、S. D´ıaz-Madrigal 和 H. Gaussier, 《单位圆盘上全纯自映射半群的反向轨道与花瓣》, Ann. Mat. Pura Appl.（4）198（2019）, 第2期, 411–441。MR3927163[15] F. Bracci、M.D. Contreras 和 S. D´ıaz-Madrigal, 《单位圆盘上的全纯函数连续半群》, 数学专著丛书, 施普林格, 2020。[16] K. Burdzy, 《布朗游程与极小薄性。III. 角导数问题的应用》, 数学杂志 192（1986）, 第1期, 89–107。MR0835394[17] T. F. Carroll, 《Burdzy 定理关于角导数的一个经典证明》, J. London Math. Soc.（2）38（1988）, 第3期, 423–441。MR0972128[18] M.D. Contreras 和 S. D´ıaz-Madrigal, 《单位圆盘上的解析流: 角导数与边界不动点》, Pacific J. Math. 222（2005）, 253–286。[19] M.D. Contreras 和 S. D´ıaz-Madrigal, 《全纯自映射半群中的边界不动点与临界点》, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas F´ıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 114（2020）, 第3期, 论文编号137。MR4103457[20] M.D. Contreras、S. D´ıaz-Madrigal 和 Ch. Pommerenke, 《Koenigs 函数的不动点与边界行为》, 芬兰科学院数学辑刊 29（2004）, 第2期, 471–488。MR2097244[21] M.D. Contreras、S. D´ıaz-Madrigal 和 Ch. Pommerenke, 《解析函数半群的边界临界点》, Math. Scand. 98（2006）, 125–142。[22] M.D. Contreras、S. D´ıaz-Madrigal 和 Ch. Pommerenke, 《单位圆盘中的二阶角导数与抛物迭代》, Trans. Amer. Math. Soc. 362（2010）, 第1期, 357–388。MR2550155[23] V.N. Dubinin, 《几何函数论中的电容器容量与对称化》, 由 Nikolai G. Kruzhilin 从俄语译出, 施普林格, 巴塞尔, 2014。MR3243550[24] M. Elin 和 D. Shoikhet, 《复动力系统的线性化模型》, Birkh¨auser Verlag, 2010。

[25] M. Elin、S. Reich 和 D. Shoikhet，《全纯映射的数值域及其应用》，施普林格，2019。[26] M. Elin、D. Shoikhet 和 L. Zalcman，《半群的后向流不变域的花结构》，芬兰科学院数学辑刊 33 (2008)，第 1 期，3–34。MR2386835[27] G.M. Goluzin，《复变函数几何理论》。美国数学会，普罗维登斯，R.I.，1969。MR0247039（译自 G. M. Goluzin，《复变函数几何理论》（俄语），第二版，Izdat. “Nauka”，莫斯科，1966。）[28] P. Gumenyuk，《单位圆盘中单参数半群的角极限和非受限极限》，数学分析及其应用杂志 417 (2014)，第 1 期，200–224。MR3191421[29] P. Gumenyuk，《具有边界正则不动点的单叶函数的参数表示》，构造性逼近 46 (2017)，第 3 期，435–458。MR3735698[30] J. Jenkins 和 K. Oikawa，《边界处的共形性与半共形性》，纯粹与应用数学杂志 291 (1977)，92–117。[31] N. Karamanlis，《全纯函数的角导数与半群》，伊利诺伊数学杂志 63 (2019)，第 3 期，403–424。MR4012349[32] W. von Koppenfels 和 F. Stallmann，《共形映射实践》，数学科学基础丛书，100，施普林格出版社，柏林-G¨ottingen-海德堡，1959。[33] M. Kourou 和 K. Zarvalis，《花瓣域中的紧集及其在全纯函数半群作用下的反向轨道》，位势分析，（2022）。https://doi.org/10.1007/s11118-022-10036-7[34] D. Kraus 和 O. Roth，《共形度量》，拉马努金数学学会讲义，讲义丛书，第 19 卷（2013），41–83。[35] P. Poggi-Corradini，《Denjoy-Wolff 点以外的不动点处的典范共轭》，芬兰科学院数学辑刊 25 (2000)，第 2 期，487–499。MR1762433[36] P. Poggi-Corradini，《解析圆盘自映射的有界双曲步长后向迭代序列》，伊比利亚美洲数学评论 19 (2003)，第 3 期，943–970。MR2053569[37] Ch. Pommerenke，《单叶函数》，Vandenhoeck a nd Ruprecht，G¨ottingen，1975[38]Ch. Pommerenke，《共形映射的边界行为》，数学科学基础丛书，299，施普林格出版社，柏林，1992。MR1217706[39] S.C. Port 和 C.J. Stone，《布朗运动与经典位势理论》，学术出版社，纽约，1978。[40] T. Ransford，《复平面中的位势理论》，伦敦数学会学生教材，28，剑桥大学出版社，剑桥，1995。MR1334766[41] B. Rodin 和 S. E. Warschawski，《极值长度与共形映射的边界行为》，芬兰科学院数学辑刊 A 辑 I 2 (1976)，467–500。MR0466516[42] B. Rodin 和 S.E. Warschawski，《极值长度与单叶函数 I：角导数》，数学杂志 153 (1977)，第 1 期，1–17。MR0584955[43] D. Shoikhet，《几何函数论中的半群》，克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，2001。

P. GUMENYUK：数学系，米兰理工大学，E. BONARDI街9号，20133 米兰，意大利.
电子邮件地址：pavel.gumenyuk@polimi.it

M. KOUROU：数学系，维尔茨堡朱利叶斯-马克西米利安大学，埃米尔·费舍尔街40号，97074 维尔茨堡，德国。
电子邮件地址：maria.kourou@mathematik.uni-wuerzburg.de

O. ROTH：数学系，维尔茨堡尤利乌斯-马克西米利安大学，EMIL FISCHER STRASSE 40，97074 维尔茨堡，德国。
电子邮件地址：roth@mathematik.uni-wuerzburg.de