arXiv:2303.00706v1 [physics.flu-dyn] 1 Mar 2023

通过卷积神经网络预测壁面剪切应力和壁面压力

A.G. Balasubramanian[a,b,*],L. Guastoni[a,b],P.Schlatter[a,b],H. Azizpour[c,b],R. Vinuesa[a,b,*]

[a]流体力学，工程力学系，瑞典皇家理工学院，*SE-100 44* 斯德哥尔摩，瑞典[b]瑞典电子科学研究中心（*SeRC*），*SE-100 44* 斯德哥尔摩，瑞典[c]机器人、感知与学习系，瑞典皇家理工学院，*SE-100 44* 斯德哥尔摩，瑞典

摘要

本研究旨在评估基于卷积的神经网络能否根据流动内部的测量数据，预测湍流明渠流中的壁面量。首先逐步将测量位置移近壁面：通过训练一个全卷积网络（FCN），预测内尺度壁法向位置 y^+_{target} 处的二维速度脉动场；作为输入的是在距离壁面更远、位于 $y^+_{\text{输入}}$ 处的壁面平行平面中采样的速度脉动。作为网络研究的一部分，我们将 FCN 的预测结果与所提出的 R-Net架构的预测结果进行比较。由于 R-Net 模型的表现优于 FCN 模型，因此我们进一步优化前者的架构，以便根据距离壁面更远处采样的速度脉动场，预测二维流向和展向壁面剪切应力分量以及壁面压力。训练和测试数据取自摩擦雷诺数为 $Re_\tau = 180$ 和 550 的明渠流直接数值模拟（DNS）。我们在多个内尺度壁法向位置采样湍流速度脉动场，即 $y^+ = \{15, 30, 50, 100, 150\}$，并同时采集壁面剪切应力和壁面压力。在 $Re_\tau = 550$ 处，FCN 和 R-Net 均可利用流动对数区的自相似性，以 y^+ 处的速度脉动场为输入，预测 y^+_{target} 处的速度脉动场；对流向速度脉动强度的预测误差约为 10%。

*通讯作者电子邮箱：argb@kth.se (A. G. Balasubramanian), rvinuesa@mech.kth.se (R. Vinuesa)

此外，本研究训练的网络模型还能够利用 $y^+ = 50$ 处的速度脉动场预测壁面剪切应力场和壁面压力场；在 $Re_\tau = 180$ 和 550 两种情况下，对相应脉动强度的预测误差均约为 10%。这些结果为开发基于神经网络的方法、在数值模拟（尤其是大涡模拟（LES））中模拟近壁湍流，提供了令人鼓舞的起点。

关键词： 湍流通道流、壁面剪切应力、深度学习、全卷积网络、自相似性

---

1. 引言

由于需要足够高的分辨率来模拟流体运动的所有长度和时间尺度，直接数值模拟（DNS）湍流的计算成本很高，因而面临计算上的挑战。各种工程应用中的湍流以及人们所关注的实际流动，通常具有很高的雷诺数，因此，对与这些流动相关的宽泛尺度范围进行模拟在计算上变得不可行。基于这一原因，研究人员广泛采用 DNS，在相对较低的雷诺数下研究通道流（Hoyas 等人，2022）和湍流边界层（Sillero 等人，2014；Pozuelo 等人，2022）等较为简单的典型流动案例，以理解流动的物理机制并据此建立模型。在更高的雷诺数下，已有多项研究采用高分辨率大涡模拟（Schlatter 等人，2010；Bobke 等人，2017；Li 等人，2021）。除了典型流动之外，大涡模拟也被广泛应用于不同的实际流动问题，例如城市流动（Atzori 等人，2022）以及翼型周围的流动（Vinuesa 等人，2018；Tamaki 和 Kawai，2022）。

大涡模拟通过滤除最小的湍流尺度，并对小于滤波尺度的涡旋进行建模，来解决计算成本问题。然而，值得注意的是，尽管对最小尺度的影响进行了建模，在高雷诺数条件下，尤其是在壁面受限流动中，大涡模拟的计算成本仍可能很高。这是因为，要解析黏性层和对数层中具有动力学重要性的流动结构，需要满足相应的分辨率要求，而这些要求随

而按 $\mathcal{O}(Re_\tau^2)$ 缩放（Larsson 等人，2016），其中摩擦雷诺数 Re_τ 定义为参考长度 h 与摩擦速度 $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ 的函数，其中 τ_w 为壁面剪切应力，ρ 为流体密度。在壁面湍流中，表征近壁区的尺度非常小。因此，随着雷诺数增加，壁面解析大涡模拟的计算成本会显著上升（Choi 和 Moin，2012），并逐渐接近直接数值模拟的成本，从而限制了其在工程应用中高雷诺数壁面受限流动问题上的应用（Park 和 Moin，2014）。解决这一问题的一种方法是引入壁面模型，在考虑壁面存在所带来的流动特性的同时，使分辨率要求保持在可控范围内。

人们提出了多种方法来模拟近壁区，并在较高雷诺数下模拟复杂流动。这些方法主要侧重于壁面应力建模，以及大涡模拟/雷诺平均纳维–斯托克斯方程（RANS）混合方法。这些壁面模型旨在再现内层动力学中最重要的特征，例如（例如条带和流向涡），而无需在该流动区域内求解纳维–斯托克斯方程。传统上，壁面模型要么基于物理原理，要么基于数学论证（Larsson 等人，2016）。聚焦于壁面剪切应力建模，代数平衡壁面模型因其简单性而成为最常用的壁面剪切应力确定方法。该模型基于壁面附近的湍流达到平衡状态、产生与耗散相互平衡这一设想，在局部和瞬时层面均遵循壁面定律（Schumann，1975）。然而，对于存在逆压梯度或具有强非平衡效应的流动，平衡假设可能并不成立。特别是，积分壁面模型通过求解垂直积分的动量方程来处理非平衡效应，并在平衡对数速度分布的基础上进行修正（Yang 等人，2015）。Wang 和 Moin（2002）以及 Kawai 和 Larsson（2012）等研究也探索了通过求解雷诺平均纳维–斯托克斯方程来处理非平衡效应的壁面模型。另一方面，分区模型在壁面附近一组加密网格上求解薄边界层方程（Park 和 Moin，2014；Larsson 等人，2016）。壁面剪切应力脉动建模（Inoue 等人，2012）和动态滑移壁面模型（Bose 和 Moin，2014；Bae 等人，2018）也是获取所需壁面剪切应力的其他方法。Piomelli 和 Balaras（2002）对壁面模型进行了分类，并介绍了相应的假设和误差来源。关于壁面模型的最新综述可见

Larsson 等人（2016）以及 Bose 和 Park（2018）。

Mizuno 和 Jim´enez（2013）提出了另一种方法：利用自相似假设——即在高雷诺数下，对数区中的涡尺度呈线性缩放——定义了一种离壁边界条件。该方法将计算域的边界移离壁面，从而无需模拟与之相关的小尺度。在他们的研究中，离壁边界位置处的速度场由一个距壁面更远的内部参考平面的重缩放和平移副本代替。这样便可在不考虑近壁动力学的情况下模拟对数区。本研究探讨训练一种神经网络模型的可能性：利用远离壁面的信息预测壁面附近的流动，并期望未来将其用作离壁边界条件。

近年来，基于机器学习的方法已越来越多地应用于湍流研究，涉及多种任务，例如流动预测（Duraisamy 等人，2019；Brunton 等人，2020；Guastoni 等，2021，2022）、时间动力学预测（Srinivasan 等人，2019；Eivazi 等人，2021；Borrelli 等人，2022）、流动模式提取（Jim´enez，2018；Eivazi 等人，2022；Mart´ınez-S´anchez 等人，2023）、入口条件生成（Fukami 等人，2019；Yousif 等人，2023）或流动控制（Rabault 等人，2019；Vinuesa 等人，2022；Guastoni 等人，2023）等。此外，正如 Vinuesa 和 Brunton（2022）所强调的，神经网络模型已开始为构建高效的数据驱动壁面模型带来新的机遇。Yang 等人（2019）采用物理信息神经网络（PINN）提出了一种壁面模型，将平均流动标度的知识融入前馈神经网络，以根据距壁面一定距离处的速度预测经大涡模拟网格滤波的壁面剪切应力。结果表明，该预测模型能够捕捉训练数据集中未包含的不同雷诺数下的壁面定律。Zhou 等人（2021）训练了一个前馈神经网络，将周期性山丘流动中离壁位置处的壁面剪切应力预测为速度梯度和压力梯度的函数。尽管先验测试结果良好，后验测试却未能得到准确结果。另一方面，在定义离壁边界条件方面，Moriya 等人（2021）以及 Bae 和 Koumoutsakos（2022）的研究展现了基于深度学习和强化学习的方法在预测近壁流动方面的良好潜力。关于大涡模拟壁面模型的综述

可参见 Vadrot 等人（2022）。这类基于机器学习的模型的优势在于，一旦训练完成，神经网络的计算开销很低，因此可作为数值模拟中现用模型的有效替代方案。

在本研究中，我们首先采用全卷积网络，利用远离壁面的速度脉动场来预测近壁速度脉动场，对应于 $Re_\tau = 180$。此外，我们还探究了带有残差跳跃连接的全卷积网络（记为 R-Net）预测近壁速度脉动场的能力。随后，使用所述网络模型（FCN 和 R-Net）预测位于自相似区内、距壁面更近处的速度脉动场，该区域对应于 $Re_\tau = 550$。我们简要比较了 FCN 和 R-Net 得到的结果，以便深入了解如何设计高效的网络模型来预测壁面量。最后，使用 R-Net架构模型，根据远离壁面的速度脉动场预测壁面剪切应力和壁面压力。

本文结构如下。§2概述了本研究采用的方法： §2.1介绍神经网络模型的架构， §2.2描述用于训练网络模型的数据集。 §2.3报告用于比较不同网络性能的指标。 §3讨论研究结果，其中 §3.1–§3.4分别呈现内层预测、自相似区预测、网络比较和壁面预测的结果。最后， §4给出结论。

2. 方法论

受 Guastoni 等人（2021）提出的数据驱动非侵入式 传感方法启发，该方法利用壁面测得的量作为输入，预测给定壁法向距离处的湍流速度场。我们旨在探索卷积网络解决相反问题的能力：输入位于某一壁法向距离处，目标是预测壁面剪切量和壁面压力。我们将利用远离壁面的场预测壁面量称为壁面预测。为初步了解卷积网络预测壁面量的能力，我们首先考虑一个更简单的问题，即预测更靠近壁面的速度

脉动场：在 y^+_{target} 处利用远离壁面的速度脉动场 y^+ 作为输入。请注意，“+”表示内尺度化，即以摩擦速度 u_τ 和流体运动黏度 ν进行尺度化。y^+ 训练 $> y^+_{\text{target}}$ 的这类预测称为内层预测；而 y^+ 训练 $< y^+_{\text{target}}$ 的情形则称为外层预测。我们通过分析瞬时预测和湍流统计量的均方误差随输入速度平面与目标速度平面之间距离的变化，来检验网络对内层预测的性能，$\Delta y^+ \left(||y^+_{\text{输入}} - y^+_{\text{target}}||\right)$。这项参数化研究在较低雷诺数 Re_τ 下进行（数值为 180）；此外，还考察了一个较高雷诺数下的选定案例，在该案例中，预测模型可以利用自相似性。

Mizuno 和 Jim´enez（2013）基于通道高度为 $2h$ 、摩擦雷诺数为 $Re_\tau \approx 1000$ 时两个位于 $y/h = 0.2$ 和 $y/h = 0.1$ 处的壁法向平面所具有的自相似性（其中长度尺度与 y成正比），设计了模型中的离壁边界条件。本研究在雷诺数相对较低（ $Re_\tau = 550$）的自相似区域进行预测，壁法向平面在外尺度化单位下分别对应 $y/h = 0.2$ 和 $y/h = 0.1$ 。这些壁法向平面在内尺度下分别对应 $y^+ = 100$ 和 $y^+ = 50$。

我们将全卷积网络（FCN）的预测结果与 R-Net架构模型的预测结果进行了比较。随后，使用不同壁法向距离处的速度脉动场作为输入，对 R-Net架构进行训练，以预测壁面剪切力和壁面压力。本文总结了 R-Net 对研究中考虑的两种不同雷诺数下壁面量的预测结果。

2.1. 网络架构

本研究采用了与 Guastoni 等人（2022）提出的类似的全卷积网络，该网络在每一层中都采用卷积运算（LeCun 等人，1998），如下所示：

$$F_{i,j} = \sum_m \sum_n I_{i-m,j-n} K_{m,n}\,, \tag{1}$$

其中，$\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{d_1 \times d_2}$ 为输入，$\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{k_1 \times k_2}$ 为包含待学习参数的卷积核（或滤波器），$\mathbf{F}$ 为生成的特征图。卷积核由其宽度和高度定义；在本研究中，

使用大小为 3×3 的卷积核。卷积层由卷积核的数量及其尺寸定义，其中包含可学习参数。变换后的输出称为特征图。通常会将多个特征图堆叠起来，并应用逐元素激活函数，使每一层都执行非线性变换。层的激活非线性由修正线性单元（ReLU）激活函数引入。激活函数的输出会输入另一个卷积层，使下一层能够组合各特征图中单独识别出的特征。由此，随着网络逐渐加深，可以预测更大、更复杂的特征。每个卷积层之后（最后一层除外）都会进行批归一化（Ioffe 和 Szegedy，2015）。由于 ReLU 激活函数会滤除负值，因此在输出层之前使用了一个经过修改的 ReLU 函数，其阈值为 -1（用于预测速度脉动）或 -25（用于预测脉动壁面量）。本研究所用全卷积网络的示意图如图 1 所示。本研究采用的全卷积网络包含 31 个隐藏层，共有 2,902,791 个可训练参数。本研究还考察了一种在隐藏层 i 和$N-i-1$ 之间具有跳跃连接的全卷积网络（He 等，2016）（其中 N 表示网络中的隐藏层总数），并将其记为 R-Net。请注意，这些跳跃连接与典型 U-Net 架构（Ronneberger 等，2015）中使用的连接类似。R-Net 是全卷积网络与 U-Net 之间的一个中间方案，不采用 U-Net 中的上采样。所提出的 R-Net架构如图 1 所示。网络上游部分的特征图尺寸与下游部分的不同。因此，在执行跳跃连接时，会将网络上游部分的特征图裁剪为所需形状，再与下游部分的特征图拼接。R-Net架构共包含 31 个隐藏层，具有 2,568,681 个可训练参数。

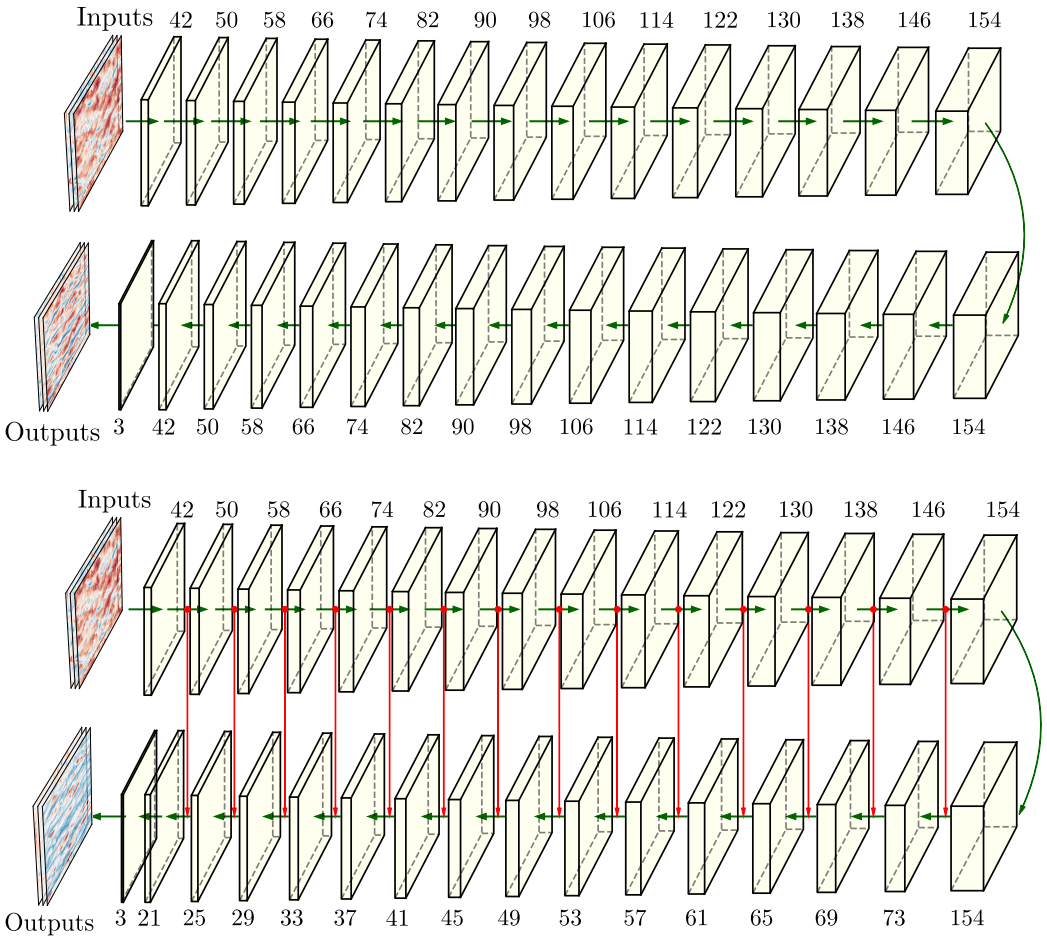

图 1：FCN架构（上）和 R-Net架构（下）的示意图。图中标出了各层所使用的卷积核数量。此处，输入为 $y^+ = 50$ 处的速度脉动场，FCN 的输出为 $y^+ = 15$ 处的速度脉动场。对于 R-Net，输出为壁面剪切应力分量和壁面压力。图中以红色标出了从 R-Net架构的上游部分到网络下游部分的跳跃连接。

2.2. 数据集

训练卷积网络，利用距离壁面较远处、位于 $y^+_{\text{输入}}$ 位置的速度脉动场作为输入（其中 $y^+_{\text{输入}} > y^+_{\text{target}}$），预测给定壁法向位置 y^+_{target} 处的二维速度脉动场。这些速度脉动场取自一次直接数值

模拟，该模拟针对明渠流，在摩擦雷诺数为 $Re_\tau = 180$ 和 $Re_\tau = 550$ 的条件下进行，采用伪谱求解器 SIMSON（Chevalier 等人，2007年）。该流动工况的参考长度 h 为明渠高度，采样得到的壁面平行场尺寸为 $L_x \times L_z = 4\pi h \times 2\pi h$。壁面平行方向采用周期性边界条件。湍流场在壁法向位置 $y^+ =$15、30、50、100 和 150 处采样。采样场的分辨率为 $(N_x$、$N_z) =$（192、192），对应 $Re_\tau = 180$；而 $Re_\tau = 550$ 对应（512、512）。关于数据集生成的更多细节，参见 Guastoni 等人（2021）。

速度场以恒定的采样周期 $\Delta t_s^+ =$5。08 存储，适用于 $Re_\tau = 180$，而 $\Delta t_s^+ = 1.49$ 适用于 $Re_\tau = 550$。网络使用 $Re_\tau = 180$ 的 50,400 个瞬时场进行训练，使用 $Re_\tau = 550$的 19,920 个场进行训练，并将数据按 4:1 的比例划分为训练集和验证集。输入网络的速度脉动场在壁面平行方向上采用周期性填充操作进行填充，以确保得到的预测具有周期性。填充操作中，沿场的边界总共增加 64 个点（两侧各 32 个点）。因此，对于 $Re_\tau = 180$ 处的场，输入场的尺寸比输出场大 $\approx 77\%$；而对于 $Re_\tau = 550$ 处的场，尺寸大 $\approx 26\%$。由于此处考虑的网络感受野为 63×63，网络输出的尺寸略大于采样得到的 DNS流场，因此需要执行裁剪操作，使场的尺寸与直接数值模拟场相匹配。

输入网络的脉动场经过缩放，使其具有如下所示的相近量级：

$$\hat{u} = u\,, \quad \hat{v} = v\frac{u_{\mathrm{RMS}}}{v_{\mathrm{RMS}}}\,, \quad \hat{w} = w\frac{u_{\mathrm{RMS}}}{w_{\mathrm{RMS}}}\,, \tag{2}$$

其中，RMS 表示均方根量。当网络输出为不同壁法向位置处的速度场时，也采用相同的缩放方式。对于壁面量脉动的预测，输出值通过各自的均方根量进行归一化，定义如下：

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\partial u/\partial y}{\partial u/\partial y_{\mathrm{RMS}}}\,, \quad \overline{\frac{\partial w}{\partial y}} = \frac{\partial w/\partial y}{\partial w/\partial y_{\mathrm{RMS}}}\,, \quad \overline{p} = \frac{p}{p_{\mathrm{RMS}}}\,. \tag{3}$$

为表述清晰，本文其余部分在涉及归一化量时省略 $\overline{\cdot}$。

2.3. 网络性能指标

瞬时直接数值模拟场（u_{DNS}）与预测结果（u_{FCN} 表示全卷积网络的预测结果； u_{RN} 表示R-Net的预测结果）之间的均方误差（MSE）被用作训练本研究所介绍网络的损失函数。其可写为:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_{\mathrm{FCN}};u_{\mathrm{DNS}}) &= \frac{1}{N_x N_z}\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_z}\left|u_{\mathrm{FCN}}(i,j)-u_{\mathrm{DNS}}(i,j)\right|^2,\\ \mathcal{L}(u_{\mathrm{RN}};u_{\mathrm{DNS}}) &= \frac{1}{N_x N_z}\sum_{i=1}^{N_x}\sum_{j=1}^{N_z}\left|u_{\mathrm{RN}}(i,j)-u_{\mathrm{DNS}}(i,j)\right|^2.\end{aligned} \tag{4}$$

网络性能根据测试数据集中瞬时预测的质量进行评估。测试数据集中的样本来自以不同随机种子初始化的模拟，以确保训练数据集和测试数据集不存在不期望的相关性。分别使用总计 8,880 个样本和 3,320 个样本来获得 $Re_\tau = 180$ 和 $Re_\tau = 550$的收敛统计量。测试数据集的采样周期与训练数据集所用的采样周期略有不同。我们将 $\Delta t_s^+ = 1.69$ 用于 $Re_\tau = 180$，将 $\Delta t_s^+ = 1.49$ 用于 $Re_\tau = 550$。需要注意的是，当使用相关性较低的样本训练网络时（即更高的 Δt_s^+），瞬时预测的质量会有所提升，前提是网络具有足够的容量（Guastoni 等人，2021）。

此外，还从统计角度评估预测结果，即考察速度脉动均方根量的误差:

$$\begin{aligned}E_{\mathrm{RMS;FCN}}(u) &= \frac{\left|u_{\mathrm{RMS,FCN}}-u_{\mathrm{RMS,DNS}}\right|}{u_{\mathrm{RMS,DNS}}},\\ E_{\mathrm{RMS;RN}}(u) &= \frac{\left|u_{\mathrm{RMS,RN}}-u_{\mathrm{RMS,DNS}}\right|}{u_{\mathrm{RMS,DNS}}},\end{aligned} \tag{5}$$

以及预测场与直接数值模拟场之间的瞬时相关系数:

$$\begin{aligned}R_{\mathrm{FCN;DNS}}(u) &= \frac{\left\langle u_{\mathrm{FCN}}u_{\mathrm{DNS}}\right\rangle_{x,z,t}}{u_{\mathrm{RMS,FCN}}u_{\mathrm{RMS,DNS}}},\\ R_{\mathrm{RN;DNS}}(u) &= \frac{\left\langle u_{\mathrm{RN}}u_{\mathrm{DNS}}\right\rangle_{x,z,t}}{u_{\mathrm{RMS,RN}}u_{\mathrm{RMS,DNS}}},\end{aligned} \tag{6}$$

其中，$\langle\cdot\rangle$ 表示空间或时间平均值，具体取决于下标。请注意，方程（5）和（6）中的参数 u 指的是流向速度分量对应的量度。对于 §3.4中讨论的壁面量预测，参数可以是 u_y 、 w_y 或 p，分别对应流向壁面剪切应力、展向壁面剪切应力和壁面压力。文中也使用下标“pred”表示网络给出的预测量。最后，通过比较预乘二维功率谱密度，验证不同长度尺度上的能量分布。针对测试数据集中的目标DNS场，在流向和展向上计算二维（2D）预乘功率谱密度（PSD） $k_z k_x \phi_{ij}(\lambda_x^+,\ \lambda_z^+)$，并将其与网络相应预测结果得到的谱进行比较。请注意，此处的 k_x、 k_z 表示流向和展向的波数，相应的内尺度单位波长记为 λ_x^+、 λ_z^+。 ϕ_{ij} 是针对特定物理量 ij定义的功率谱密度。

3. 结果

3.1. 内层预测

为了了解分离距离如何影响均方误差（MSE），我们使用直接数值模拟获得的不同壁法向位置处的速度场进行了总计 10 次预测，并将其称为内层预测，不同的分离距离定义如下：$\Delta y^+ = y^+_{\text{输入}} - y^+_{\text{target}}$。最靠近壁面的输入速度脉动场位于 $y^+ = 30$ ，相应的目标场位于 $y^+ = 15$。用于内层预测的全卷积网络（FCN）和 R-Net 训练了 50 个训练轮次，其中一个训练轮次表示完整遍历一次训练数据集中的数据。

图2展示了流向速度脉动分量的瞬时预测均方误差、均方根（RMS）脉动预测的相对百分比误差，以及全卷积网络预测场与直接数值模拟场之间的相关系数。均方误差随 Δy^+ 几乎线性增长。然而，从定性分析来看，$\Delta y^+ > 80$ 时的预测性能显著下降。考虑统计误差时，这一点或许更加明显。分离距离较大时，流向脉动强度的预测误差超过 30%，而且我们

还观察到，对于 $\Delta y^+ > 80$，随着分离距离增加，曲线斜率也有所不同。预测场与直接数值模拟场之间的相关系数呈现出与均方误差相似的趋势。分离距离较小时，相关系数较高，接近 1；随后随着 Δy^+ 增大，相关系数迅速下降。根据图2，我们可以得出结论：相关系数达到 $R_{\mathrm{FCN;DNS}}(u) \approx 0.8$ 是获得可信预测的最低要求。在全卷积网络预测的三个速度分量中，流向分量的结果被用作参考，因为它的能量最大，对网络的整体性能影响也最大。与流向分量一同预测的另外两个速度分量，其统计误差和相关系数通常与流向分量相近，或略差一些。

当输入场与目标场之间的壁法向距离较大（$\Delta y^+ > 80$）时，网络可能难以学习输入与输出之间的关系。一种可能的解释是，随着分离距离增大，输入场与目标场之间的相关性较弱。对于较小的 Δy^+，流动特征之间存在显著相关性；而对于较大的 Δy^+ ，相关性则急剧下降，预测质量也随之降低。Sasaki等（2019）的研究表明，当 Δy^+较大时，输入与目标速度场在短波长（即小尺度）范围内缺乏相干性（与相关性类似，并在频域中定义）。这些观察结果表明，当 Δy^+较大时，使用全卷积网络预测这些场会更加困难。此外，分离距离较大时，目标场预测误差较高，这可以归因于卷积运算在预测目标平面（更靠近壁面）中的小尺度时存在局限性。这是因为卷积运算会对输入数据起到滤波作用。因此，网络难以预测输出中的高频成分。

如果考察给定分离距离下的结果，随着预测速度场更接近壁面，速度脉动流向分量的均方误差会增大。这是因为，越靠近壁面的速度脉动场越具有较小的尺度，因此更难根据输入速度场对其进行预测，而输入速度场可能无法清晰地呈现出这种特征。另一个复杂因素是，与更接近壁面的目标速度平面相比，输入速度平面的感受野（从输入场中获取目标中单个点的区域）内特征的变化性较低。我们通过以下方式验证了这一假设

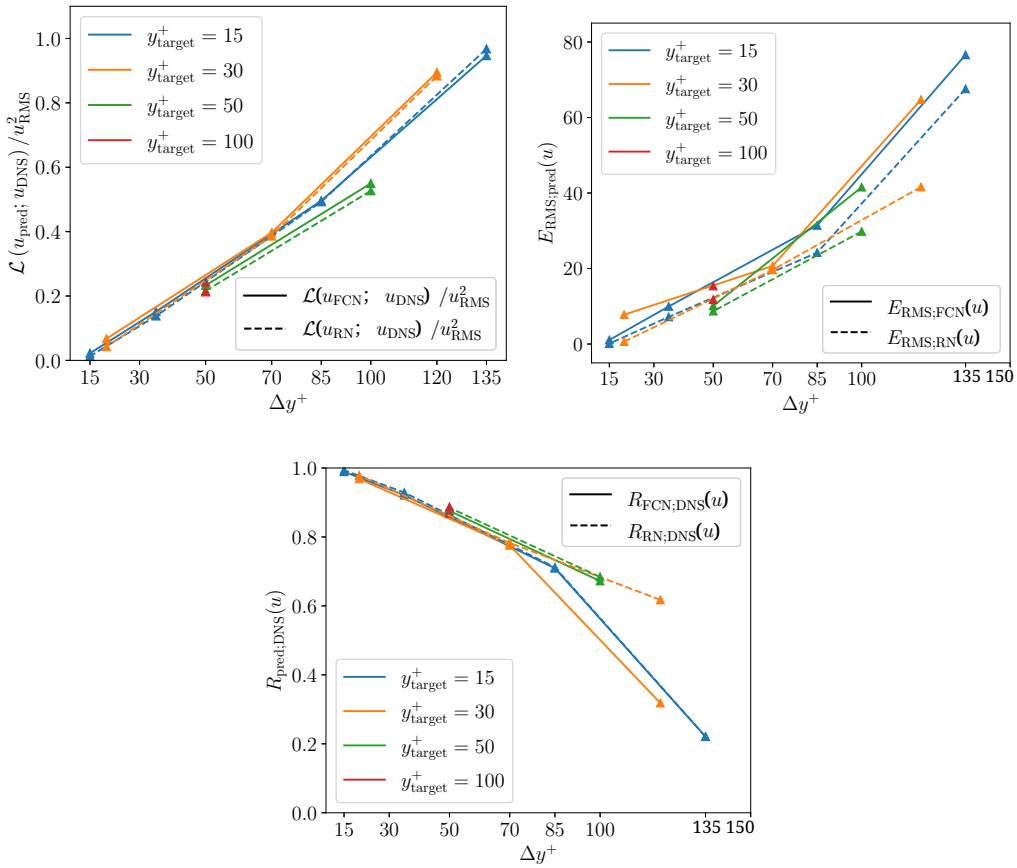

图2：内层预测中，流向速度分量的预测场与直接数值模拟场之间的相关系数，以及相对于分离距离的变化：（左上）以均方根的平方归一化的均方误差；（右上）均方根波动预测的相对误差；（下）预测场与直接数值模拟场之间的相关系数。

反转输入和目标速度场（因此 $y^+_{\text{输入}} < y^+_{\text{target}}$），并训练网络模型来预测远离壁面的流动，同时将近壁速度场作为输入。这些预测称为外层预测，与 Guastoni 等人（2022）所做的预测类似，不同之处在于，输入是在给定壁法向距离处的速度脉动场，而不是壁面剪切应力和壁面压力。内层预测更加复杂，因为必须根据大尺度推断出较小尺度。实际上，由于靠近壁面的输入速度场包含范围很广的小尺度，网络模型在外层预测中的均方误差低于内层预测。外层预测的结果见附录 A。

3.2. 自相似区中的预测

根据前面的结果，我们发现，对于具有较大 Δy^+ 的输入和输出场，网络难以找到非线性传递函数。在较高雷诺数下，尽管流场中的尺度范围更广，但由于可以利用对数层内涡尺度与距壁面距离之间的线性关系，这项任务反而变得简单。为此，我们考虑在 $y^+ = 50$ （$y/h = 0.1$）处进行预测，并使用 $y^+ = 100$（$y/h = 0.2$）处的速度脉动场作为输入，适用于 $Re_\tau = 550$。这些壁法向位置与 Mizuno 和 Jim´enez（2013）针对所研究的 Re_τ 所考虑的边界平面和参考平面相似。需要指出的是，这种线性关系最初是在渐近极限（即雷诺数极高时）提出的，但也用于有限雷诺数情形。图3定性比较了全卷积网络和 R-Net 预测的流向、壁法向及展向速度脉动与直接数值模拟参考数据。我们使用 §2.3 中介绍的性能指标对预测质量进行定量评估，并在表 1、表 2 中汇总了全卷积网络和 R-Net 在 $y^+ = 50$ 处的预测结果。由于训练过程具有随机性，报告的预测误差是对采用不同网络可学习参数初始化得到的 3 个不同模型的结果取平均所得。

表 1：全卷积网络对来自 $y^+ = 100$ 、对应于 $Re_\tau = 550i$ 的 $y^+ = 50$ 处速度脉动场的预测的模型平均误差

参数	u	v	w
$\mathcal{L}(i_{\mathrm{FCN}};\ i_{\mathrm{DNS}})/i^2_{\mathrm{RMS}}$	0.241 ± 0.004	0.425 ± 0.009	0.324 ± 0.007
$E_{\mathrm{RMS;FCN}}(i)$ [%]	12.15 ± 1.33	22.1 ± 3.46	16.91 ± 2.19
$R_{\text{全卷积网络;直接数值模拟}}$	0.871 ± 0.003	0.759 ± 0.006	0.821 ± 0.004

表 2：R-Net 对来自 $y^+ = 100$ 、对应于 $Re_\tau = 550$ 的 $y^+ = 50$ 处速度脉动场预测的模型平均误差

	i		
参数	u	v	w
$\mathcal{L}(i_{\mathrm{RN}};\ i_{\mathrm{DNS}})/i^2_{\mathrm{RMS}}$	0.239 ± 0.003	0.425 ± 0.004	0.322 ± 0.003
$E_{\mathrm{RMS;RN}}\ (i)$ [%]	10.81 ± 1.14	18.4 ± 1.22	14.58 ± 2.44
$R_{\mathrm{RN;\ DNS}}$	0.873 ± 0.002	0.763 ± 0.002	0.824 ± 0.002

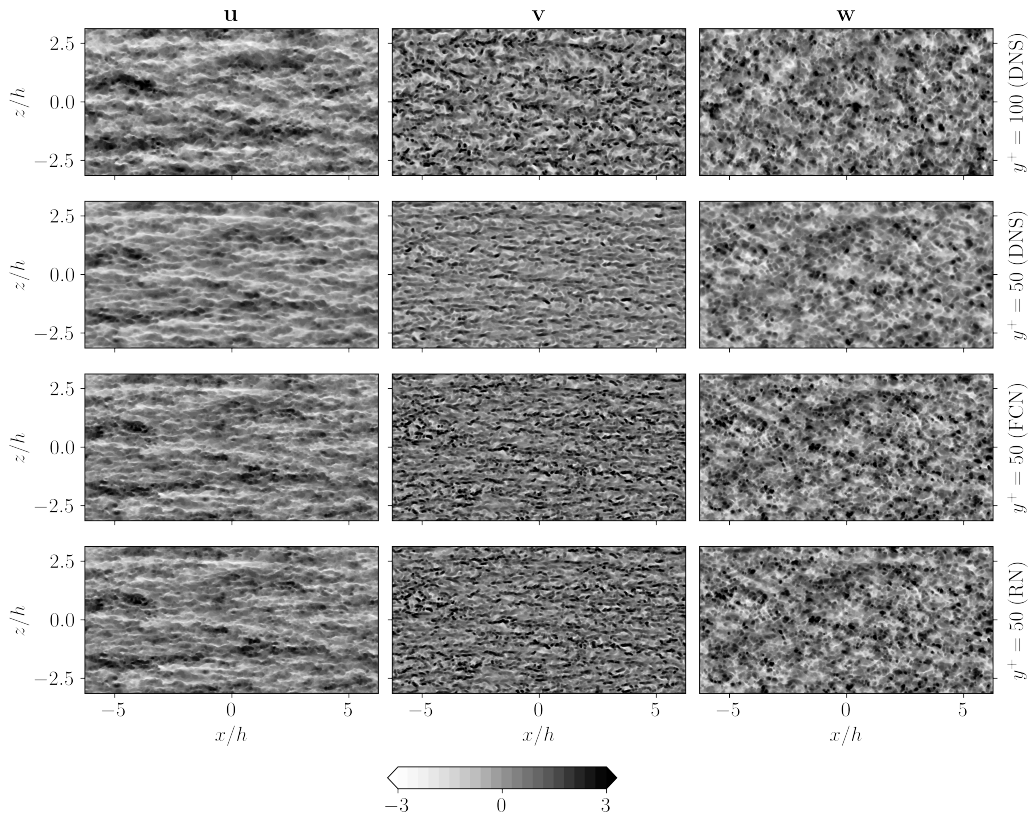

图3: （第一行） $y^+ = 100$处的直接数值模拟速度脉动，（第二行） y^+ =50处的速度脉动，以及（第三行）对应的全卷积网络预测结果；（第四行）R-Net 对 $y^+ = 50$ 处 $Re_\tau = 550$的（左列）流向、（中列）壁法向和（右列）展向速度脉动的预测结果。各场均按对应的均方根值进行缩放。

在 $y^+ = 50$处，FCN 和 R-Net 对流向速度脉动均方根的相对误差约为 10%，与低 Re_τ 情况下的观测结果相近。此外，预测结果与 DNS 速度脉动场在流向上的相关性超过 85%，表1和表2中也可以观察到这一点。请注意，卷积网络并未针对重现流动的统计行为进行显式优化，因此该指标上的结果完全取决于神经网络预测瞬时速度脉动场的能力。从图3可以看出，流向速度中的大尺度结构——

脉动场在 FCN 和 R-Net 的预测中得到了良好呈现。较小尺度结构的预测结果也与 DNS 参考结果相当吻合。另一方面，壁面法向和展向速度脉动场的预测并非如此；与 DNS 对应结果相比，它们显得更加平滑，仿佛经过了低通滤波器处理。图4所示的流向、壁面法向和展向脉动的预乘二维功率谱密度证实了这一定性分析。从谱中可以看出，速度场的能量含量在流向上得到了更准确的再现，尽管三个速度分量的预测在最短波长处都存在能量不足的问题。

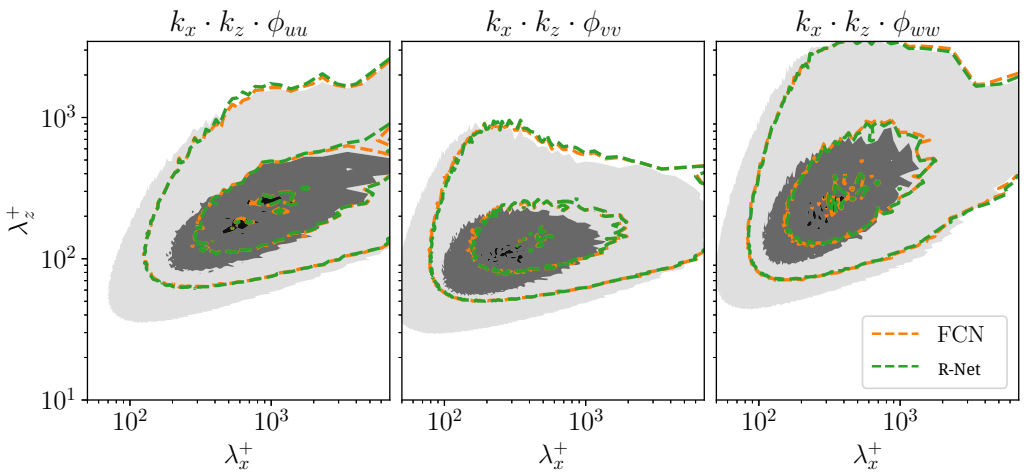

图 4: $Re_\tau = 550$ 处 y^+ =50 的预乘二维功率谱密度。等值线级别分别对应直接数值模拟功率谱密度最大值的 10%、50% 和 90%。阴影等值线表示直接数值模拟数据，虚线等值线表示全卷积网络和 R-Net 的预测。

这一结果表明，在更高的 Re_τ 处，全卷积网络能够隐式地利用自相似性来预测重叠区内的速度脉动场。这些初步结果显示，在开发用于大涡模拟的潜在数据驱动壁面模型时，融入有关壁面受限流动的物理知识具有优势。

3.3. 网络性能比较

本文简要比较了全卷积网络与所提出的 R-Net 架构的网络性能，旨在确定这两种网络架构预测更靠近壁面的流动量的能力，从而为选择高效的神经网络来预测壁面量提供依据。总体而言，根据 §3.1–3.2 中讨论的结果可以看出，两种网络架构都能够以相近的精度预测更靠近壁面的速度脉动场。然而，从图2可以看出，当输入与输出之间的分离距离较大时，与全卷积网络所得结果相比，R-Net架构往往能提供质量更好的预测；而当分离距离较小时，其性能与全卷积网络非常相近，有时略胜一筹。此外，与全卷积网络的结果相比，R-Net架构更适合捕捉预测结果中的整体湍动能，使其尽可能接近直接数值模拟的结果。图5所示的对比也印证了这一点：对于 $Re_\tau = 180$，根据 $y^+ = 150$ 处的速度脉动场预测 $y^+ = 30$ 处的速度脉动场时，所得预乘功率谱密度图呈现出相同趋势。

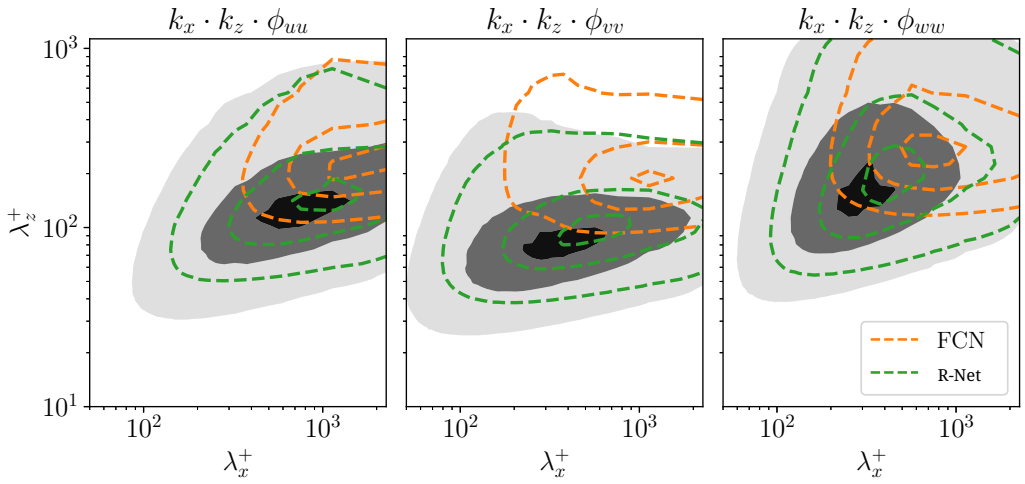

图5： $Re_\tau = 180$ 在 y^+ =30处的预乘二维功率谱密度。等值线级别分别包含直接数值模拟功率谱密度最大值的 10%、50% 和 90%。阴影等值线表示直接数值模拟数据，虚线等值线对应全卷积网络和 R-Net 的预测。

尽管这两种架构都无法捕捉靠近壁面的速度脉动场中的小尺度，但 R-Net 预测的脉动场谱与直接数值模拟所得结果更加吻合。这表明，R-Net架构能够利用跳跃连接，引导网络识别输出中能量最强的尺度。此外，与 FCN架构相比，R-Net中的跳跃连接更好地利用了输入场和输出场大尺度结构之间可能存在的相似性，因此，R-Net架构能够较好地预测预测结果所有分量中能量最强的尺度。

此外还应注意，所提出的 R-Net架构规模比全卷积网络小约 11%，这也表明，与全卷积网络相比，R-Net 能够复用网络上游部分学到的特征，以相近或更高的精度识别输出。此外，根据表1和表2，在预测自相似区内的场时，所获得的精度量级相近。对于更大的分离距离，我们或许还能观察到 R-Net 对应于 Re_τ =550 的场的预测优于全卷积网络；但本研究并未对此进行验证。

3.4. 壁面量的预测

所提出的 R-Net架构用于根据某一 y^+ 平面上的速度脉动场作为输入，预测流向壁面剪切应力、展向壁面剪切应力和壁面压力等壁面量。图6展示了使用 $y^+ = 30$ 处的速度脉动场作为输入时，对应于$Re_\tau = 180$的壁面量定性预测示例。此外，表3报告了在$Re_\tau = 180$处进行不同壁面预测时，§2.3 中介绍的网络性能指标。R-Net架构能够利用 $y^+ = 50$ 处的速度脉动场预测壁面剪切应力和壁面压力，对应均方根量的预测误差低于约 10%。此外，当内尺度化间距大于 80 时（即 在本例中，使用 $y^+ = 100$处的场预测壁面量），我们发现预测质量会大幅下降。另一方面，如果输入场靠近壁面（即 $y^+ \leq 30$），壁面量的预测与直接数值模拟场吻合良好，几乎所有分量中对应均方根量的误差都低于约 2%。图7给出了直接数值模拟场与预测结果之间预乘二维功率谱密度的比较。从图中可以看出，随着输入场的位置远离壁面，网络模型便缺乏预测壁面场中小尺度结构的能力，这与 §3.1 中概述的原因密切相关。

同样，对于 $Re_\tau = 550$处的壁面预测，表4给出了误差指标。图6还给出了一个与 $Re_\tau = 550$对应的壁面量定性预测示例，该预测利用$y^+ = 50$ 处的速度脉动场获得。最后，图9给出了 $Re_\tau = 550$ 处直接数值模拟场与预测结果之间预乘二维功率谱密度的比较。针对 $Re_\tau = 180$ 处壁面预测所得出的观察结果同样适用于$Re_\tau = 550$处的预测。此外，误差幅值与 $Re_\tau = 180$处观察到的误差并无显著差异，尽管由于待预测场中包含的尺度范围更广， $Re_\tau = 550$ 处的误差更高。

从上述结果可以看出，输入场越接近壁面，预测质量就会显著提高。因此，要根据位于 y^+ =100 处的输入场预测 $Re_\tau = 550$ 处的壁面量，直观的做法是利用自相似性，通过卷积网络预测 $y^+ = 50$ 处的场，进而采用 R-Net架构最终获得壁面量。这种方法

将 $y^+ = 50$ 处的速度脉动用作辅助量，以预测壁面剪切力和壁面压力。不过，这种方法得出的结果也与表4中观察到的结果相似。

表3：与 $Re_\tau = 180$ 输入相对应的 R-Net 壁面量预测的模型平均误差

$y^+_{\text{输入}}$	参数	i		
		u_y	w_y	p
15	$\mathcal{L}\left(i_{\text{RN}};\ i_{\text{DNS}}\right)/i^2_{\text{RMS}}$	0.012 ± 0.002	0.022 ± 0.006	0.099 ± 0.008
	$E_{\text{RMS;RN}}(i)$ [%]	1.60 ± 1.09	2.97 ± 0.95	2.09 ± 0.86
	$R_{\text{RN;\ DNS}}$	0.994 ± 0.001	0.993 ± 0.001	0.949 ± 0.004
30	$\mathcal{L}(i_{\text{RN}};\ i_{\text{DNS}})/i^2_{\text{RMS}}$	0.056 ± 0.001	0.070 ± 0.003	0.107 ± 0.006
	$E_{\text{RMS;RN}}(i)$ [%]	2.62 ± 1.28	2.34 ± 0.92	3.07 ± 2.21
	$R_{\text{RN;\ DNS}}$	0.971 ± 0.001	0.965 ± 0.001	0.945 ± 0.003
50	$\mathcal{L}(i_{\text{RN}};\ i_{\text{DNS}})/i^2_{\text{RMS}}$	0.244 ± 0.013	0.349 ± 0.009	0.272 ± 0.010
	$E_{\text{RMS;RN}}(i)$ [%]	10.31 ± 3.10	14.73 ± 3.30	13.07 ± 3.06
	$R_{\text{RN;\ DNS}}$	0.848 ± 0.004	0.815 ± 0.004	0.853 ± 0.006
100	$\mathcal{L}(i_{\text{RN}};\ i_{\text{DNS}})/i^2_{\text{RMS}}$	0.674 ± 0.003	0.709 ± 0.002	0.620 ± 0.006
	$E_{\text{RMS;RN}}(i)$ [%]	33.31 ± 0.84	43.77 ± 0.86	39.26 ± 2.48
	$R_{\text{RN;\ DNS}}$	0.574 ± 0.002	0.538 ± 0.001	0.616 ± 0.006

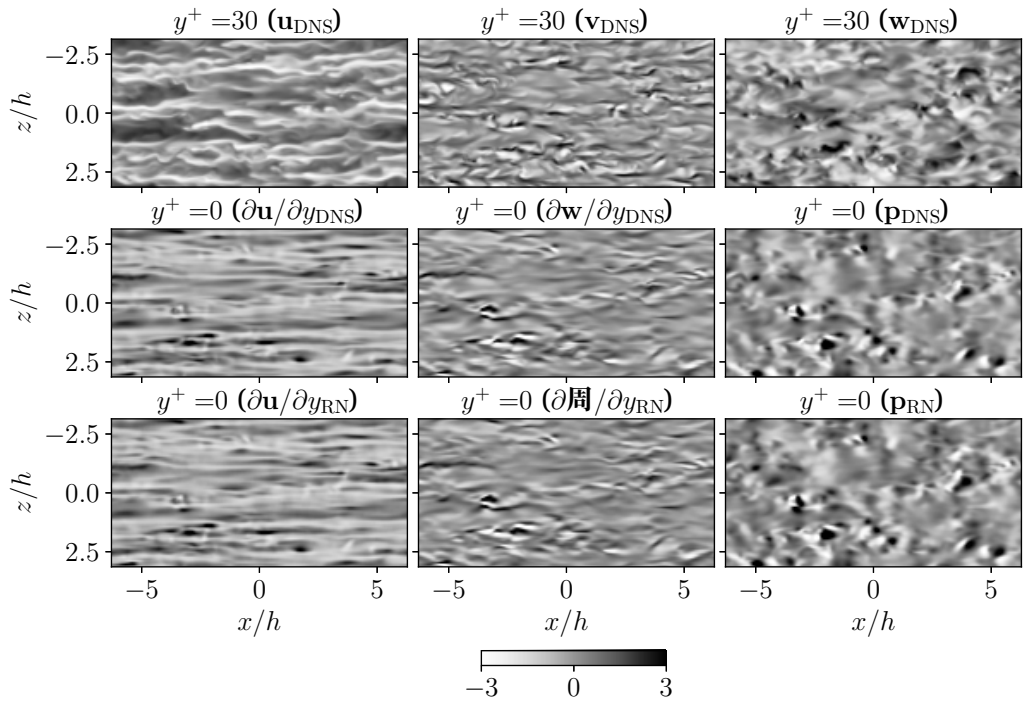

图6： $y^+ = 30$处的直接数值模拟速度脉动（上排）、壁面量（中排），以及 R-Net 对流向壁面剪切力（左列）、展向壁面剪切力（中列）和壁面压力（右列）的相应预测（下排），针对 $Re_\tau = 180$。各场均按相应的均方根值进行缩放。

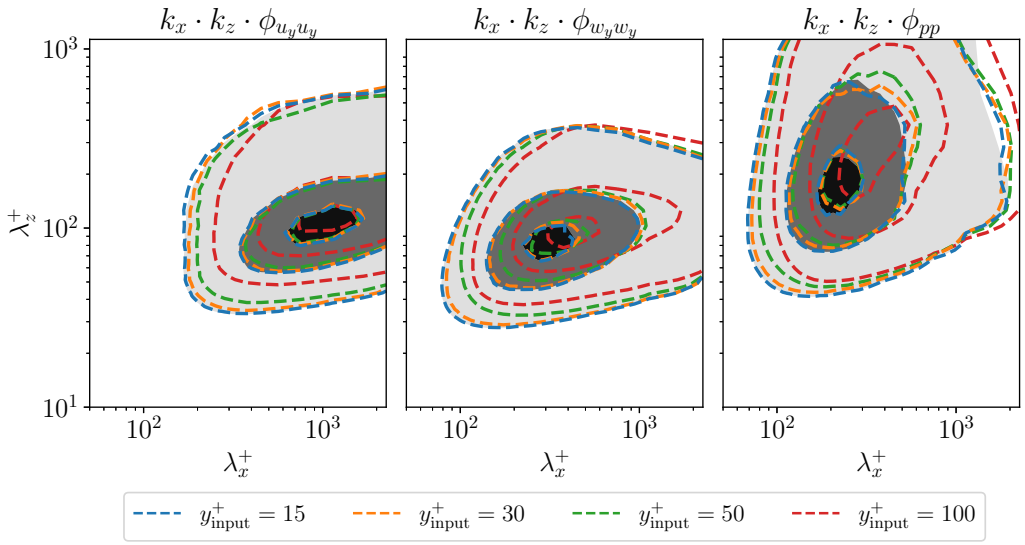

图7： $Re_\tau = 180$处壁面量的预乘二维功率谱密度。等值线级别分别对应最大直接数值模拟功率谱密度的10%、50%和90%。阴影等值线表示直接数值模拟数据，虚线等值线表示R-Net的预测；输入位于不同壁法向位置的结果以等值线颜色区分。

表4：对应于 $Re_\tau = 550$输入的 R-Net 壁面量预测中的模型平均误差

$y^+_{\text{输入}}$	参数	i		
		u_y	w_y	p
15	$\mathcal{L}(i_{\text{RN}};\ i_{\text{DNS}})/i^2_{\text{RMS}}$	0.013 ± 0.0003	0.016 ± 0.0013	0.137 ± 0.013
	$E_{\text{RMS;RN}}(i)$ [%]	0.89 ± 0.68	1.51 ± 1.12	3.07 ± 1.97
	$R_{\text{RN;\ DNS}}$	0.993 ± 0.0002	0.992 ± 0.0003	0.922 ± 0.0068
30	$\mathcal{L}(i_{\text{RN}};\ i_{\text{DNS}})/i^2_{\text{RMS}}$	0.074 ± 0.0001	0.088 ± 0.0032	0.133 ± 0.0002
	$E_{\text{RMS;RN}}(i)$ [%]	3.90 ± 0.44	2.91 ± 2.24	2.92 ± 2.23
	$R_{\text{RN;\ DNS}}$	0.962 ± 0.0001	0.956 ± 0.0002	0.931 ± 0.0008
50	$\mathcal{L}(i_{\text{RN}};\ i_{\text{DNS}})/i^2_{\text{RMS}}$	0.257 ± 0.0031	0.316 ± 0.0045	0.228 ± 0.0042
	$E_{\text{RMS;RN}}(i)$ [%]	10.35 ± 1.53	13.07 ± 1.62	8.68 ± 0.24
	$R_{\text{RN;\ DNS}}$	0.865 ± 0.0020	0.827 ± 0.0032	0.879 ± 0.0023
100	$\mathcal{L}(i_{\text{RN}};\ i_{\text{DNS}})/i^2_{\text{RMS}}$	0.837 ± 0.0035	0.906 ± 0.0202	0.736 ± 0.0893
	$E_{\text{RMS;RN}}(i)$ [%]	43.86 ± 3.17	58.08 ± 4.77	25.07 ± 9.53
	$R_{\text{RN;\ DNS}}$	0.431 ± 0.0112	0.323 ± 0.0321	0.558 ± 0.0411

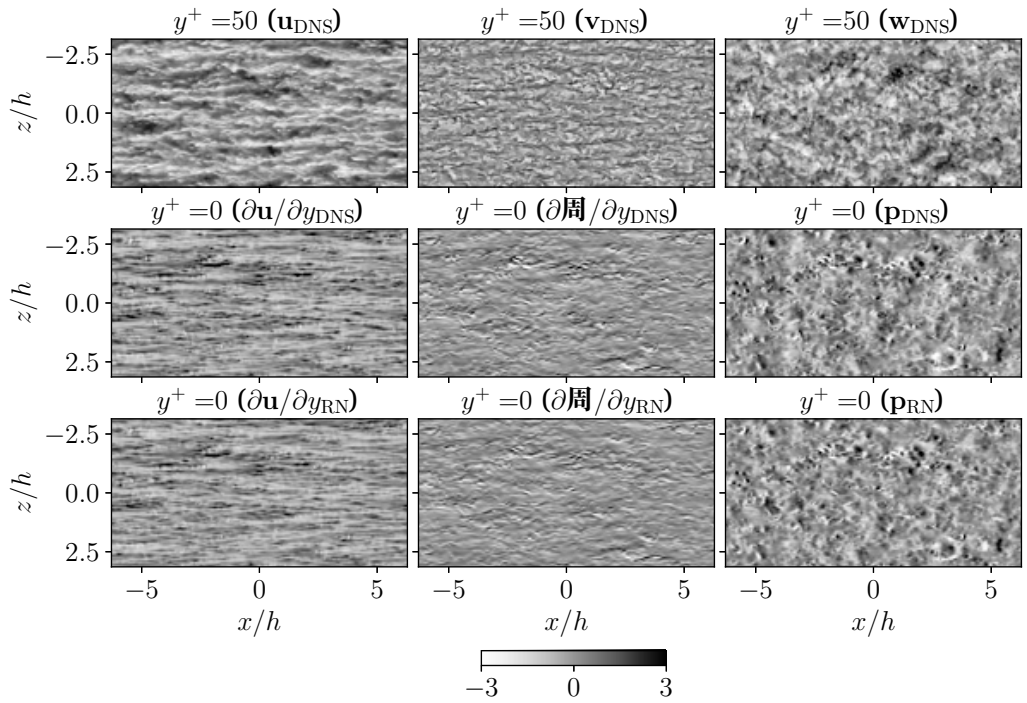

图 8：第一行是 $y^+ = 50$ 处直接数值模拟的速度脉动，中间一行是壁面量，最后一行是 R-Net 对流向壁面剪切力（左列）、展向壁面剪切力（中列）和壁面压力（右列）的相应预测，适用于 $Re_\tau = 550$。各场均按相应的均方根值进行缩放。

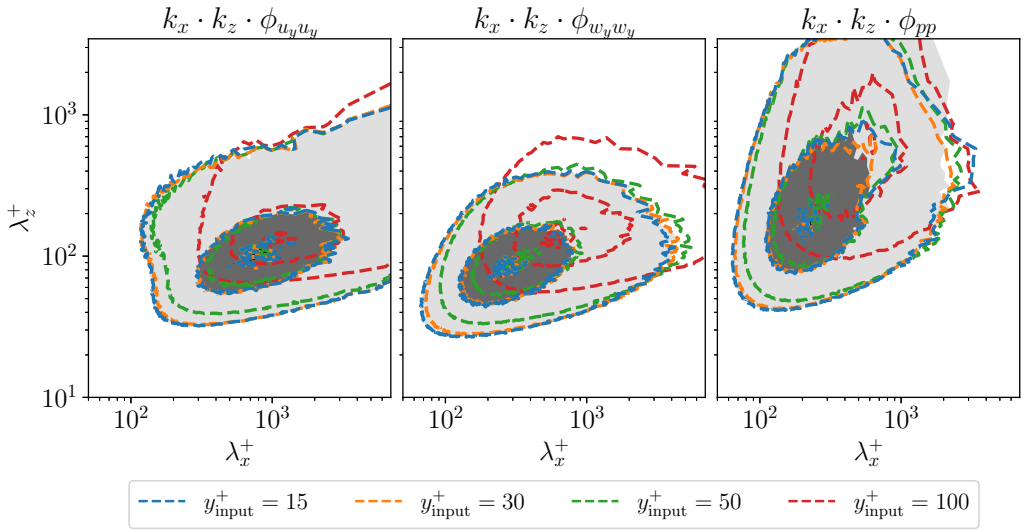

图9： $Re_\tau = 550$处壁面量的预乘二维功率谱密度。等值线级别包含直接数值模拟功率谱密度最大值的10%、50%和90%。阴影等值线表示直接数值模拟数据；虚线等值线表示 R-Net 的预测，输入位于不同壁法向位置，其差异由等值线的颜色区分。

ter

4. 结论

本研究评估了利用全卷积网络和 R-Net，根据远离壁面的速度脉动场预测更靠近壁面的速度脉动场的可行性。我们进行了若干次预测，以了解其实现方式以及较低 Re_τ 下的预测质量。输入脉动场与目标脉动场之间的分离距离对均方误差的影响呈现非线性特征；此外，预测脉动场的 y^+ 位置也会影响均方误差。结果还表明，全卷积网络能够预测相距较短的速度脉动场之间的非线性传递函数。

此外，为了测试网络预测更靠近壁面、且具有更宽尺度范围的场的能力，我们还考虑了更高的 Re_τ （550）。在高雷诺数下，自相似假设

可应用于对数层中的卷积网络。R-Net架构使用 $y^+ = 100$ 对应于 $Re_\tau = 550$的脉动场，来预测 y^+ =50处的速度脉动场；与较低雷诺数的 $Re_\tau = 180$ 情形相比，其瞬时预测效果更好，这是因为对应于 $y/h \approx 0.27$ 和 0。55处的速度脉动场并不处于自相似区。对于 $Re_\tau = 550$, 脉动强度的预测也较为准确；与直接数值模拟统计量相比，流向均方根脉动的误差约为 10%。此外，对预测结果进行谱分析表明，输入流场中存在的长度尺度所对应的能量含量得到了良好预测。不过需要注意的是，较小尺度上的能量难以重现，因为输入场未提供相关信息。

本研究结果表明，网络模型能够有效利用流动重叠区的自相似性，预测更高 Re_τ 处的速度脉动场。需要注意的是，神经网络架构并未显式强制这种相似性，但网络可以利用这一物理特性获得更好的预测结果。此外，本研究还进一步利用靠近壁面的某一壁法向距离处的速度脉动场，预测壁面剪切应力分量和壁面压力。采用 $y^+ = 50$ 处的速度脉动场作为输入时，所提出的 R-Net架构能够在 $Re_\tau = 180$ 和 550 处预测壁面量，且相应脉动强度的误差低于 15%。输入场越靠近壁面，预测精度越高。这些结果为在大涡模拟中开发数据驱动壁面模型、利用此类神经网络模型提供了令人鼓舞的起点。为提高网络模型预测结果的精度，可考虑采用 U-Net 架构重建壁面附近的小尺度特征，这也是未来工作的一个可行方向。不过，需要指出的是，这仅是对这些模型预测能力的概念验证；若要在后验测试中实施此类策略，则需要将这些方法与大涡模拟求解器相结合。

5. 致谢

作者感谢瑞典电子科学研究中心（SeRC）、ERC 项目编号“ 2021-CoG-101043998，DEEPCON-

TROL”向 RV 以及 Knut and Alice Wallenberg（KAW）基金会提供的资助。作者感谢 Alejandro G¨uemes 博士、Andrea Ianiro 教授和 Stefano Discetti 教授就本研究项目提出的宝贵见解并展开讨论。分析使用了瑞典国家计算基础设施（SNIC）在 PDC 提供的资源。本文所表达的观点和意见仅代表作者本人，并不一定反映欧盟或欧洲研究理事会的立场。欧盟及其资助机构均不对这些观点和意见承担责任。

附录 A。外层预测

与 §3.1 中讨论的内层预测不同，外层预测是指利用靠近壁面的流场作为输入，预测远离壁面的速度脉动场。使用在 $Re_\tau = 180$处的 DNS模拟中不同壁法向位置得到的速度场，共进行了 10 次预测。这里，分离距离定义为：$\Delta y^+ = y^+_{\text{target}} - y^+_{\text{输入}}$。最靠近壁面的输入速度脉动场位于 $y^+ = 15$，相应的目标场位于 $y^+ = 30$。外层预测的结果绘制于图 A.10。与图2所示的内层预测结果相比，外层预测的效果明显更好；预测流向脉动强度误差随分离距离变化的斜率也有所不同。此外，对于内层预测，较大的分离距离下均方误差明显趋于饱和，而本研究中的外层预测则未观察到这种饱和现象。对于给定的分离距离，与内层预测的情况相反，外层预测对更靠近壁面的目标场预测得更准确。

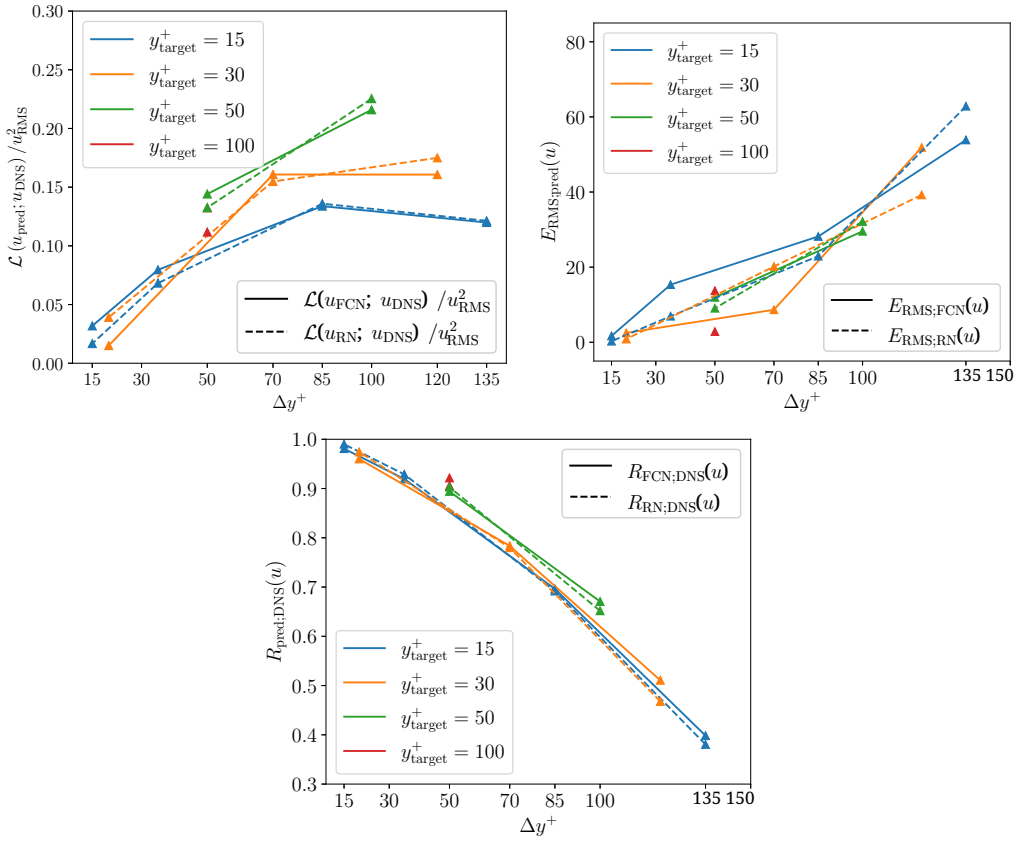

图 A.10：对于外层预测，随分离距离变化的流向速度分量的（左上）均方误差（以均方根的平方归一化）、（右上）均方根波动预测的相对误差，以及（下）预测场与直接数值模拟场之间的相关系数。

参考文献

Atzori, M., Torres, P., Vidal, A., Clainche, S., Hoyas, S., Vinuesa, R., 2022. 简化城市流动的高分辨率大涡模拟。预印本，arXiv:2207.07210。

Bae, H., Koumoutsakos, P., 2022. 面向湍流壁面模型的科学多智能体强化学习。《自然·通讯》13, 1443。

Bae, H., Lozano-Duran, A., Bose, S., Moin, P., 2018年。《壁面受限流动大涡模拟中的湍流强度》。《Physical Review Fluids》3, 014610。

¨Bobke, A., Vinuesa, R., Orl¨u, R., Schlatter, P., 2017年。《逆压梯度湍流边界层中的历史效应与近平衡》。《Journal of Fluid Mechanics》820, 667–692。

Borrelli, G., Guastoni, L., Eivazi, H., Schlatter, P., Vinuesa, R., 2022年。通过深度学习预测湍流通道的时间动力学。《International Journal of Heat and Fluid Flow》96, 109010。

Bose, S., Moin, P., 2014。用于壁面建模大涡模拟的动态滑移边界条件。《Physics of Fluids》26, 015104。

Bose, S., Park, G., 2018年。复杂湍流的壁面建模大涡模拟。《流体力学年度评论》50, 535–561。

Brunton, S., Noack, B., Koumoutsakos, P., 2020年。流体力学中的机器学习。《流体力学年度评论》52, 477–508。

Chevalier, M., Schlatter, P., Lundbladh, A., Henningson, D., 2007年。SIMSON：用于不可压缩边界层流动的伪谱求解器。技术报告。TRITA-MEK 2007:07。KTH Mechanics，斯德哥尔摩，瑞典。

Choi, H., Moin, P., 2012年。大涡模拟的网格点要求：重新审视Chapman估计。《Physics of Fluids》24, 011702。

Duraisamy, K., Iaccarino, G., Xiao, H., 2019。数据时代的湍流建模。流体力学年度评论 51, 357–377。

Eivazi, H., Guastoni, L., Schlatter, P., Azizpour, H., Vinuesa, R., 2021。循环神经网络与基于Koopman的框架在湍流低阶模型中的时间预测。《International Journal of Heat and Fluid Flow》90, 108816。

Eivazi, H., Le Clainche, S., Hoyas, S., Vinuesa, R., 2022年. 从湍流中提取正交且简约的非线性模态. 专家系统与应用 202, 117038. Fukami, K., Nabae, Y., Kawai, K., Fukagata, K., 2019. 使用机器学习的合成湍流入口生成器. 《Physical Review Fluids》4, 064603. Guastoni, L., Balasubramanian, A., G¨uemes, A., Ianiro, A., Discetti, S., Schlatter, P., Azizpour, H., Vinuesa, R., 2022年. 利用深度全卷积神经网络对湍流边界层进行

非侵入式传感. 预印本，arXiv:2208.06024. Guastoni, L., G¨ue mes, A., Ianiro, A., Discetti, S., Schlatter, P., Azizpour, H., Vinuesa, R., 2021. 基于壁面量预测壁面湍流的卷积网络模型. 《Journal of Fluid Mechanics》928, A27. Guastoni, L., Rabault, J., Schlatter, P., Azizpour, H., Vinuesa, R., 2023年. 湍流槽道流中的深度强化学习减阻. 预印本，arXiv:2301.09889. He, K., Zhang, X., Ren, S., Sun, J., 2016. 用于图像识别的深度残差学习，载于 IEEE计算机视觉与模式识别会议论文集. 第770–778页。´Hoyas, S., Oberlack, M., Alc´antara-Avila, F., Kraheberger, S., Laux, J., 2022年. 高摩擦雷诺数下的壁面湍流. 《Physical Review Fluids》7, 014602. Inoue, M., Mathis, R., Marusic, I., Pullin, D., 2012年. 将预测壁面模型与大涡模拟相结合，研究平板湍流边界层的内层强度. 《Physics of Fluids》24, 075102. Ioffe, S., Szegedy, C., 2015. 批归一化：通过减少内部协变量偏移加速深度网络训练，载于《机器学习研究论文集》，法国里尔. 第448–456页。Jim´e nez, J., 2018年. 机器辅助湍流理论. 《Journal of Fluid Mechanics》854, R1. Kawai, S., Larsson, J., 2012年. 大涡模拟中的壁面建模：长度尺度、网格分辨率与精度. 《Physics of Fluids》24, 015105. Larsson, J., Kawai, S., Bodart, J., Bermejo-Moreno, I., 2016. 采用模型化壁面应力的大涡模拟：近期进展与未来方向. 《机械工程评论》3, 15–00418. LeCun, Y., Bottou, L., Bengio, Y., Haffner, P., 1998. 应用于文档识别的基于梯度的学习，载于 IEEE论文集. 第2278–2324页。Li, S., Yang, X., Jin, G., He, G., 2021. 粗糙壁面湍流槽道流的壁面解析大涡模拟. 《理论与应用力学快报》11, 100228.

´Mart´ınez-S´anchez, A., Lazpita, E., Corrochano, A., Le Clainche, S., Hoyas, S., Vinuesa, R., 2023. 简化城市流动中拱形涡的数据驱动评估。《International Journal of Heat and Fluid Flow》100, 109101. Mizuno, Y., Jim´enez, J., 2013. 无壁面壁面湍流。《Journal of Fluid Mechanics》723, 429–455. Moriya, N., Fukami, K., Nabae, Y., Morimoto, M., Nakamura, T., Fukagata, K., 2021. 在湍流槽道流的大涡模拟中嵌入机器学习虚拟壁面速度。预印本，arXiv:2106.09271. Park, G., Moin, P., 2014. 一种改进的动态非平衡壁面模型，用于大涡模拟。《Physics of Fluids》26, 37–48. Piomelli, U., Balaras, E., 2002. 大涡模拟的壁层模型。流体力学年度评论34, 349–374. Pozuelo, R., Li, Q., Schlatter, P., Vinuesa, R., 2022. 具有近似恒定 $\beta \simeq 1.4$ up to$Re_\theta \simeq 8700$ 的逆压梯度湍流边界层。《Journal of Fluid Mechanics》939, A34. Rabault, J., Kuchta, M., Jensen, A., R´eglade, U., Cerardi, N., 2019. 通过深度强化学习训练的人工神经网络发现主动流动控制策略。《Journal of Fluid Mechanics》865, 281–302. Ronneberger, O., Fischer, P., Brox, T., 2015. U-Net：用于生物医学图像分割的卷积网络，施普林格。载于 MICCAI（编者：Navab, N.等）。第234–241页。Sasaki, K., Vinuesa, R., Cavalieri, A., Schlatter, P., Henningson, D., 2019. 壁面湍流流动预测的传递函数。《Journal of Fluid Mechanics》864, 708–745. Schlatter, P., Li, Q., Brethouwer, G., Johansson, A., Henningson, D., 2010. 空间演化湍流边界层的模拟，雷诺数最高达 $Re_\theta = 4300$。《International Journal of Heat and Fluid Flow》31, 251–261. Schumann, U., 1975. 平面槽道和环形通道内湍流有限差分模拟的亚格子尺度模型。《Journal of Computational Physics》18, 376–404.

Sillero, J., Jim´enez, J., Moser, R., 2014. 雷诺数最高达 $\delta^+ \approx 2000$的湍流边界层和通道流两点统计。《Physics of Fluids》26, 105109. Srinivasan, P., Guastoni, L., Azizpour, H., Schlatter, P., Vinuesa, R., 2019. 使用深度神经网络预测湍流剪切流。《Physical Review Fluids》4, 054603. Tamaki, Y., Kawai, S., 2022. $Re_c = 10^7$下近失速翼型流动的壁面解析大涡模拟。《AIAA Journal》, 1–14. Vadrot, A., Yang, X., Abkar, M., 2022. 大涡模拟机器学习壁面模型综述。预印本, arXiv:2211.03614. Vinuesa, R., Brunton, S., 2022. 利用机器学习增强计算流体力学。《Nature Computational Science》2, 358–366. Vinuesa, R., Lehmkuhl, O., Lozano-Dur´an, A., Rabault, J., 2022. 机翼流动控制及通过深度强化学习发现新方法。《Fluids》7, 62. Vinuesa, R., Negi, P., Atzori, M., Hanifi, A., Henningson, D., Schlatter, P., 2018 年. 雷诺数高达 Re_c =1,000,000的翼型截面周围湍流边界层。《International Journal of Heat and Fluid Flow》72, 86–99. Wang, M., Moin, P., 2002. 复杂湍流的大涡模拟动态壁面建模。《Physics of Fluids》14, 2043–2051. Yang, X., Sadique, J., Mittal, R., Meneveau, C., 2015. 壁面湍流大涡模拟的积分壁面模型。《Physics of Fluids》27, 025112. Yang, X., Zafar, S., Wang, J., Xiao, H., 2019. 基于物理信息神经网络的预测型大涡模拟壁面建模。《Physical Review Fluids》4, 034602. Yousif, M., Zhang, M., Yu, L., Vinuesa, R., Lim, H., 2023. 一种用于空间发展湍流边界层的基于 Transformer 的合成入口生成器。《Journal of Fluid Mechanics》957, A6. Zhou, Z., He, G., Yang, X., 2021. 基于神经网络的壁面模型，用于周期性山丘上湍流的大涡模拟。《Physical Review Fluids》6, 054610.