arXiv:2303.00711v2 [physics.flu-dyn] 8 Nov 2023

多孔筛网周围及其内部的三维流动

Olivier C. Marchand†、Sophie Ramananarivo、Camille Duprat 与 Christophe Josserand

流体动力学实验室（LadHyX）、法国国家科学研究中心、 ´巴黎理工学院，法国帕莱索 91120

（收稿日期：xx；修订日期：xx；录用日期：xx）

我们研究了高雷诺数 $Re = \mathcal{O}(10^4)$ 下不同孔隙率的多孔筛网周围及其内部的三维流动。长期以来，这一问题的研究主要集中于二维情形，以及完全或部分横跨通道的筛网。鉴于近年来许多问题涉及三维自由流中的多孔物体，我们提出了一种多孔筛网三维模型。该模型最初基于 Koo 与 James（1973）以及 Steiros 与 Hultmark（2018），考虑了筛网附近的黏性效应，并可据此求得速度、压力分布以及空气动力。我们通过实验测定了由纤维构成的多孔方形筛网的空气动力阻力系数；该筛网浸置于层流气流中，并具有不同的攻角。我们测试了多种纤维直径，以探究孔隙间距对阻力的影响。模型对阻力的预测与实验结果吻合良好。理论和实验结果表明，实度较高时，由纤维构成的均质多孔筛网，其阻力系数可能高于尺寸相同的平板。我们还表明，局部黏性效应十分重要：在实度和气流相同的情况下，阻力系数会显著受到基于纤维直径的雷诺数影响。该模型考虑了三维效应和多孔筛网的形状，可用于多种应用，包括预测雾水收集器的集水效率。

关键词：-

1. 引言

近几十年来，人们对多孔结构周围的流动进行了大量研究，这类流动有许多工程应用。它可用于降落伞问题，以确定阻力和稳定性（Johari 与 Desabrais（2005）；Sarpkaya 与 Lindsey（1990）），也可应用于垂直轴风力涡轮机（Ayati 等（2019））以及风洞中的堵塞修正（Steiros 等（2022））。Laws 与 Livesey（1978）指出，可以在流动中使用筛网来控制速度分布并改变流动方向。在干旱地区，要理解并改进雾水收集器的集水效果，就需要对网附近的流动进行定量描述（Regalado 与 Ritter 2016；Moncuquet 等 2022）。此外，这种定量描述或许能为从物理角度理解

† 通信邮箱：olivier.marchand@ladhyx.polytechnique.fr

使用口罩以减少空气传播病毒（如 SARS-CoV-2）传播时的呼吸流动（Mittal 等 2020；Bourrianne 等 2021），也需要对此进行理解。在这些情况下，流动既可以穿过多孔网或口罩，也可以绕过泄漏处或从中穿过。更一般地说，出于安全考虑，人们可能希望降低暴露于流动中的高挡板或桅杆所承受的作用力，因此，如 Giannoulis 等人（2012）所述，人们对大型多孔结构的兴趣日益增加。在一些建筑中，出于提高能源效率或遮挡部分阳光的考虑，会在距建筑外墙一定距离处增设渗透层。此外，工业领域和发电厂通常会使用防风板来控制风沙污染。在这些情况下，估计围护结构风荷载对建筑师和工程师而言很有参考价值（Pomaranzi 等人（2020））。此外，对流动与纤维阵列相互作用进行建模并预测相应阻力，有助于理解许多海洋生物的滤食机制；这些生物会在水中摆动刚毛阵列以捕获食物颗粒（参见 Hood 等人（2019）；Cheer 与 Koehl（1987））。

筛网在流动阻力方面的主要物理特性是孔隙率和渗透率。对于极薄的多孔筛网，孔隙率可用实度表示，即筛网固体表面积与总表面积之比。渗透率定义为一个参数，用于描述多孔介质中的压力梯度与流动局部速度之间的关系，其大小取决于孔隙的几何形状。孔隙率对多孔筛网两侧压降和阻力的影响已得到大量理论和实验研究，而渗透率的影响则鲜为人知，尤其是对极薄多孔结构而言。不过，近期已有一些关于低雷诺数的研究揭示了渗透率的影响：特别是，Ledda 等人（2018年）表明，渗透率会显著影响尾流特征；Pezzulla 等人（2020年）则证明，筛网的阻力系数取决于渗透率。另一方面，Steiros 与 Hultmark（2018）建立了一个模型，仅以实度为函数来预测二维穿孔板的阻力系数。尽管该模型与实验数据吻合良好，但这种方法并未明确考虑基于孔隙尺度定义的雷诺数；然而，众所周知，筛网附近的流动特性取决于孔隙的具体几何形状，以及筛网的材料和厚度（见第3.7节）。

已有多种方法用于模拟流动。例如，Carvajal 等人（2020）采用三维数值模拟研究雾收集过程中的空气动力学特性，并根据达西定律将网建模为多孔介质；而 de Dios Rivera（2011）则将叠加原理应用于绕过实心板的流动和被迫穿过网的流动，以近似求得筛网上的速度。该问题的难点在于涉及多尺度物理现象：绕筛网流动的特征尺度约为 0.1 至 $1\,m$，而穿过筛网的流动尺度（即孔径）约为 $\mathcal{O}(10^{-3})$ 至 $\mathcal{O}(10^{-6})\,m$；因此，雷诺数的尺度范围从孔隙尺度上的低雷诺数（约为 $\mathcal{O}(10^{-1})$）到网尺度上的较大雷诺数（约为 $\mathcal{O}(10^{6})$）。因此，正如 Shklyar 和 Arbel（2008）所指出的，数值模拟难以解析所有尺度并捕捉整个系统的物理机制。通常采用的方法是将多孔表面建模为一个发生质量和动量传递的虚拟界面。界面处速度和压力的宏观跃迁定律，是根据筛网附近的微观模型推导出来的；在该区域，流体通常由定常斯托克斯方程描述

，这可以通过周期性均匀化理论得到，Ledda 等人（2021）最近将其用于多孔表面。然而，这些方法引入了一些参数，例如多孔表面的渗透率，这些参数难以通过实验测量，尽管可以通过孔隙尺度模拟获得。我们的研究旨在建立一种多孔表面流动模型，该模型仅基于孔隙率、筛网的大尺度几何形状以及孔洞尺度上的雷诺数（而非渗透率），这些量都易于获取。

我们还旨在预测置于层流中的任意形状高架多孔板的阻力系数。我们重点研究由纤维组成的多孔筛网，但该模型经过少量修改即可应用于其他类型的多孔筛网。在实验方面，我们考虑由编织纤维构成的矩形网格，其纤维直径介于 $6.0\ \mu m$ 和 $1.9\ mm$ 之间，典型孔径约为 $10\ \mu m$ 至$1.0\ cm$，并置于速度从 0.5 变化至 $13\ m.s^{-1}$、具有三个取向角的均匀层流中。我们测量阻力系数，并对筛网周围的流动进行粒子图像测速测量。在理论方面，我们重点研究 Taylor（1944）首次提出、并被众多作者（O'Neill（2006））采用的模型，该模型将筛网视为源分布。Koo 与 James（1973）采用了这一方法，并提出了一个用于通道内受两条平行边界约束的筛网的二维数学模型。最近，Steiros 与 Hultmark（2018）部分基于 Koo 与 James（1973）和二维势流，推导出了多孔板的阻力系数。由于其预测结果与实验数据吻合良好，本文提出将 Koo 与 James（1973）的模型扩展至三维自由流，在保留相同主要假设的同时，考虑筛网的形状、三维效应、Steiros 与 Hultmark（2018）所考虑的基底吸力效应，以及黏性效应，即有限孔隙雷诺数。该模型假设存在定常尾流，因此不适用于存在涡脱落的情况。随后，我们按照 Steiros 与 Hultmark（2018）提出的方法推导用于预测阻力系数的方程，并讨论该方法的局限性。首先，所采用的压力跃变基于明确的物理假设，并按照 Taylor（1944）和 Steiros 与 Hultmark（2018）的方法推导得到。其次，为了考虑实验中观察到的黏性效应，我们还将 Brundrett（1993）关于压力跃变的经验定律纳入模型。最后，我们将不同孔隙率以及基于纤维直径的不同雷诺数下的阻力系数预测结果，与实验结果进行比较（分别采用压力跃变的理论定律和经验定律）。据我们所知，只有 Letchford（2001）和 Prandtl & Flachsbart（1932）测量过具有不同攻角的高架板的阻力系数。因此，我们还研究任意攻角下的流动，并将理论预测与两个攻角（$65°$ 和 $43°$）下的实验数据进行比较。最后，给出不同实度下流动偏转比例的测量结果。

2. 实验

我们通过实验测量了一系列多孔平面结构的阻力系数，这些结构由方形网格中规则编织的尼龙纱线以及其他类型的网（如杆状筛网（平行纤维））组成，尺寸为 $L = 10\ cm \times 10\ cm$。多孔筛网的特性及其实际度详见附录 C，表 1 中也给出了汇总。实度 s 定义为筛网固体表面积与其总面积 S_p之比。我们还表征了一种经典外科口罩的阻力系数，其纤维直径等物理特性以及

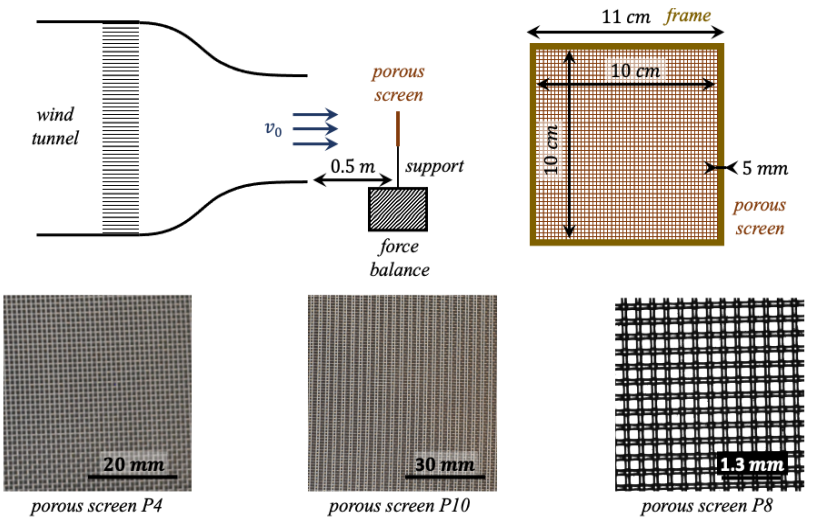


图 1：用于测量阻力系数的实验装置示意图，以及主要由尼龙编织网制成的多孔筛网示例。

实度取自 Monjezi & Jamaati（2021）和 Du 等（2021）（表 1 中的筛网 P9）。该多孔结构由宽度为 $0.5\ cm$ 的方形框架保持为平面构型（即占多孔结构表面积的 2.1%），在风洞产生的层流总截面中仅占很小一部分（7.6%）。遵循 Letchford（2001）的方法，方形框架固定在一根高 $21.5\ cm$ 的支杆上，以避免边界层效应。该装置如图 1 所示。

使用测力天平（SIXAXES，FX2.6，编号 1026，$\pm 5\ N$，灵敏度为 $\pm 0.001\ N$）测量施加于整个系统的力。层流气流由一台具有方形试验段的开口射流风洞产生，试验段宽度为 $40\ cm$。为计算法向入射时的阻力系数，我们采用了 12 种不同的速度，如图 2a 所示；图中绘出了若干筛网的力随速度变化的关系，并通过二次定律拟合数据以获得阻力系数。我们还对倾斜多孔筛网进行了实验，详情将在第 4 节说明；在这种情况下，采用了 8 种不同的速度。两种情况下，速度范围均为 0.5 至 $13\ m.s^{-1}$。因此，我们可以将该问题的（整体）雷诺数定义为

$$\mathrm{Re} = \frac{L_0 v_0}{\nu}, \tag{2.1}$$

其中，v_0 是筛网上游远处流动的均匀速度，L_0 是其典型尺寸，ν 是流体的运动黏度（对于此处所考虑的构型，流体为空气，因此 $\nu = 15.6 \times 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$）。对于尺寸为几十分之一厘米、速度约为每秒一米的筛网，可得 $\mathrm{Re} \approx \mathcal{O}(10^4) \gg 1$。此外，我们还为每个筛网定义了流体绕各根纤维流动的局部雷诺数，记为 Re_d。该雷诺数 Re_d 根据直径 d计算如下：

$$Re_d = \frac{v_0 d}{\nu}. \tag{2.2}$$

我们使用由不同纤维半径和孔径制成的筛网进行测量

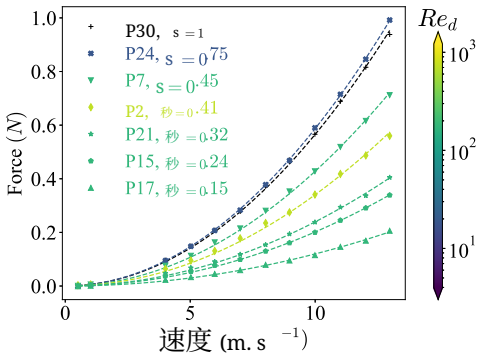
筛网数	Reynolds数 Re_d	实度 s	Drag系数 C_D	筛网数	Reynolds数 Re_d	实度 s	Drag系数 C_D
P1	186	0.58	0.872	P17	173	0.15	0.198
P2	705	0.41	0.566	P18	173	0.28	0.358
P3	1218	0.87	0.957	P19	167	0.52	0.803
P4	167	0.61	0.922	P20	167	0.42	0.632
P5	64	0.56	0.941	P21	167	0.32	0.406
P6	115	0.61	0.935	P22	32	0.65	0.956
P7	173	0.45	0.705	P23	16	0.82	0.951
P8	83	0.70	0.986	P24	19	0.75	0.960
P9	$0.6-12$ 均值 4	0.26	0.976	P25	24	0.70	0.985
P10	173	0.11	0.146	P26	282	0.405	0.560
P11	173	0.37	0.596	P27	38	0.115	0.185
P12	173	0.31	0.453	P28	141	0.114	0.141
P13	173	0.17	0.210	P29	6	0.080	0.281
P14	173	0.24	0.328	P30	282	0.080	0.082
P15	173	0.24	0.336	P31	-	1.00	0.939
P16	173	0.24	0.343				

表 1：多孔筛网特性。雷诺数 Re_d 以纤维直径 d 为特征尺寸，并采用速度 $v_0 = 10\ m.s^{-1}$ 和运动黏度 $\nu = 15.6 \times 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$计算；对于筛网P27、P28和P29，采用的速度为 $v_0 = 5\ m.s^{-1}$。不确定度、纤维直径、材料类型和几何形状详见附录 C。

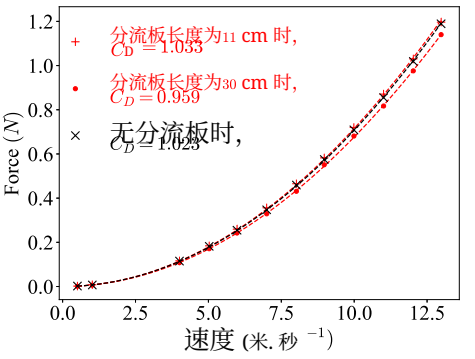
同时保持实度几乎不变，从而能够探究黏度的局部影响，其中 Re_d 范围为0.6至1218。有关风洞的详细信息以及流动特性，请参阅 Du Pontavice（2016年）的学位论文。该系统放置在距离风洞出口约 $50\ cm$ 处，以获得自由流。

温度和湿度数据取自现场气象数据，或取自布置在上游的本地仪器，以减少空气密度值的不确定度。所有不确定度估算均可在附录中查阅。

图 2a 显示了不同雷诺数 Re_d下不同筛网的实测阻力 F_D 随速度 v_0 的变化，其中已扣除附录 C 中详细说明的框架和支杆所产生的贡献。正如预期，阻力与筛网上游的流体速度 v_0 的平方成正比。请注意，在较宽雷诺数范围内发生的涡脱落会显著增大阻力并降低基底压力，这一点可从 Steiros 与 Hultmark（2018年）进行的二维阻力测量中看出。为了评估涡脱落对我们测量结果的影响，我们仿照 Steiros 与 Hultmark（2018年）的做法，在尾流中放置了两块长度不同的分流板。根据 Apelt 与 West（1974年）的研究，对于雷诺数处于 $10^4 < Re < 5 \times 10^4$范围内的情况（与我们的情况相符），使用长度为板长 3 倍的分流板即可抑制涡脱落。在我们的实验中，分流板的高度与测量阻力的实心板相同，但长度为 $11\ cm$和 $30\ cm$，厚度为 $3\ mm$。图 2b 显示了实心



(a) 不同法向多孔筛网。



(b) 有无分流板时的阻力板

图 2：法向入射时不同方形多孔屏的阻力（F_D）（a）。比较尺寸为 $11.0 \times 11.0\ cm^2$ 、厚度为 $3\ mm$ 的实心板（无框架支撑）在有无分流板时的阻力（b）。拟合曲线采用二次定律得到。

板（实度为 1，边长为 $11.0 \times 11.0\ cm^2$、厚度为 $3\ mm$）有无分流板时测得的阻力。可以看到，使用长度为板长 3 倍的分流板后，阻力系数降低了 0.07。随着实度降低，这一差异预计会越来越不显著。我们得出结论，涡脱落对我们的实验结果影响很小。随后，我们可以根据力曲线得出阻力系数 C_D，其定义为

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v_0^2 S_p}, \tag{2.3}$$

其中，ρ 是流体（空气）的密度，S_p 是筛网的表面积。需要指出的是，此处的表面积 S_p 指筛网的总表面积，而不是沿远场流向 $\boldsymbol{v_0}$ 的投影面积。图 3 展示了方形筛网的阻力系数随实度 s 的变化。阻力系数随实度增加而增大，直至在实度较高时达到恒定值 $C_D \simeq 1$ （对于 $s \leqslant 0.7$）。此外，我们观察到，在实度相同的情况下，Re_d 越小，阻力系数越大；这一效应在实度较低时尤为显著。阻力系数的变化趋势在定性上与以往实验结果一致，尤其是 Prandtl & Flachsbart (1932) 的结果，也与 Steiros & Hultmark（2018）推导的二维模型一致，尽管该模型未考虑 Re_d 的影响。此外，该模型高估了中高 Re_d （$\sim 10^2$）时实验测得的阻力系数，尤其是在实度较高时，这凸显了考虑三维效应的重要性。该模型还低估了 Re_d 较低时的阻力系数，此时必须考虑黏性效应。下文旨在建立一个同时考虑三维效应和黏性效应的模型。随后，我们将使用该模型描述倾斜矩形筛网周围的流动，并预测相应的阻力系数。

为表征实度对流动偏转的影响，我们采用粒子图像测速（PIV）方法测量流场。我们使用一台具有正方形试验段的风洞，试验段宽度为 $22\ cm$，流速恒定为 $2.84 \pm 0.02\ m.s^{-1}$。流体中播撒了直径为 $3.0 \pm 2.0\ \mu m$ 的水微滴。斯托克斯数定义为

$$St = \frac{1}{18}\frac{\rho_p d_p^2 v_0}{\mu L}, \tag{2.4}$$

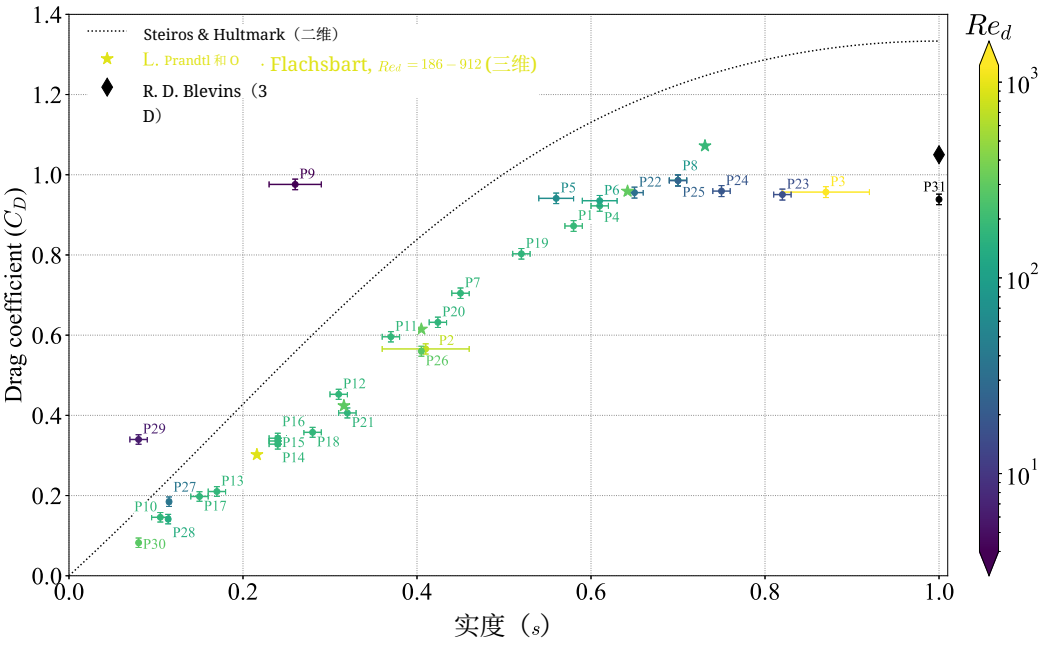


图 3：各种垂直于自由流的方形多孔屏的阻力系数随实度的变化，并与 Steiros 与 Hultmark（2018）的二维模型进行比较。数据点的颜色表示局部雷诺数的大小，颜色标度见右侧。图中还绘出了 Prandtl & Flachsbart (1932) 的数据，以及 Blevins (1992) 在实度为 $s = 1$ 时给出的数值。

其中，ρ_p 和 v_p 分别为颗粒的密度和直径，$\mu = \rho\nu$ 为流体的黏度。斯托克斯数约为 $10^{-3} \ll 1$，因此可认为水滴是流动的被动示踪粒子。我们使用厚度为 $1\ mm$ 的激光片光，在平行于流动的平面内照亮颗粒。激光器（Elforlight LTD. 型号 FCHPG-3000）的波长为 $\lambda = 532\ nm$，最大功率为 $6.0\ W$。我们使用 PHOTRON 高速相机以 $4000\ fps$ 的帧频记录连续图像，并通过 MATLAB （2.62 版）中的 PIVlab 对图像进行分析。

图4展示了在筛网中高处（即筛网中部）与筛网正交的平面内颗粒的轨迹，这些轨迹是将连续2000张图像中各点的最大强度叠加得到的。图中底部为上游区域，顶部为下游区域。我们观察到，随着实度增加，流动绕过筛网时的偏转也随之增大。还可以观察到，随着实度增加，速度会降低，这一点可从亮线长度的变化看出：图4b中的亮线比图4a中的短。此外，在图4c中几乎看不到有颗粒穿过筛网，而一些颗粒似乎在尾流中受到回流作用而混合。



(a) P14, $s = 0.24$。 (b) P6, $s = 0.61$。 (c) P23, $s = 0.82$。

图4：不同实度下，均匀上游流正常流经方形多孔筛网时，筛网周围流动和流线偏差的实验性证据 s 。筛网的俯视图。白色条带（$110\ mm$）对应嵌入框架中的筛网，单独的筛网长度为 $100\ mm$ 。

3. 模型

本节推导描述任意形状和实度的多孔筛网周围及穿过筛网的三维流动的方程。接下来，我们采用经验定律考虑小尺度雷诺数 Re_d （如上文方程2.2中所定义），描述筛网两侧的压力跃变。首先，我们采用 Koo & James（1973）使用的方法；该方法对通道内二维流动的实验结果拟合良好，但在实度较高时除外。正如 Steiros 与 Hultmark（2018）所指出的（见第3.4和3.5节），这种高实度下的偏差可能源于他们的理论未考虑基底压力和涡脱落。我们将该模型扩展至自由流中的三维情形，即流动不受任何边界约束的情形；这是该模型与 Koo & James（1973）的模型之间的主要差异之一。我们还考虑了基底压力的影响。在第3.7节中，我们采用依赖于局部雷诺数 Re_d 的压力跃变经验公式，纳入局部黏性效应；这一做法最早由 Brundrett（1993）提出。我们首先得到适用于任意形状多孔筛网的方程一般形式，然后将方程应用于层流中倾斜矩形板的情形，该情形可以求得解析解。

3.1. 一般形式

钝体周围的流动十分复杂。为了获得流动的解析或半解析描述，一种广泛采用的方法是在尾流之外利用势流理论简化控制方程，同时引入基底压力等自由参数，以考虑尾流中及固体结构附近的黏性和复杂现象（Parkinson & Jandali 1970）。本模型沿用这一思路。如图 5 所示，系统被划分为四个区域，分别对应四种流动状态。假设除穿过多孔结构的流动外，其他区域的流动均为定常、不可压缩且无黏；在多孔结构中，黏性效应不可忽略。

在区域 I 中，我们假设流动为势流，速度记为 $\mathbf{v}_I(x, y, z)$。区域 I 位于结构上游，也位于下游尾流区之外；尾流区由一条边界清晰、附着于多孔表面等值线的流管所包围，如图 5 所示。因此，区域 I 中的速度可由速度势$\phi_I(x, y, z)$导出。采用 Koo & James（1973）使用、最初由 Taylor（1944）提出的方法，我们将筛网建模为强度为 $\Omega(x_s, y_s, z_s)$ 的连续源分布，以此计算流动，其中 (x_s, y_s, z_s) 表示

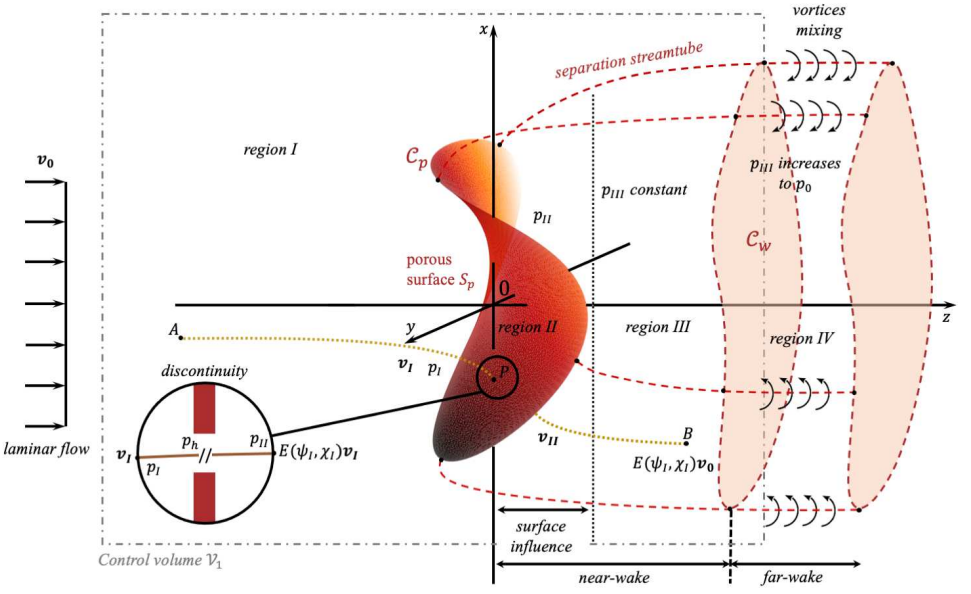


图 5：多孔筛网周围及其内部三维势流模型示意图。虚线表示用作区域之间边界的分离流线。点线表示模型中用于计算区域 I 和 II 内速度的流线。来流为层流，并延伸至整个系统的高度。 $\mathcal{C}_w$ 表示尾流的截面。

表面上的一个点。将源分布产生的势流与均匀层流 $\mathbf{v}_0$ 叠加，即可得到区域 I 中的势流。随后可利用以下关系推导出描述一般三维不可压缩流所需的两个流函数 ψ_I 和 χ_I （关于三维流函数的定义，参见 Yih（1957）：

$$\mathbf{v}_I(x, y, z) = \nabla\psi_I(x, y, z) \wedge \nabla\chi_I(x, y, z). \tag{3.1}$$

区域 II 和区域 III 位于多孔表面的下游近尾流中。这些区域中的流动可能具有旋性，因此我们不能再用速度势来描述流动。在区域 II 中，压力和速度并非常数，因为它们受到表面的影响。然而，在区域 III 中，流动离筛网足够远，流线趋于与均匀流 $\mathbf{v}_0$ 对齐，如图 5 中等值线 $\mathcal{C}_w$ 所示。因此，压力趋近于基底吸力压力p_{III}，该压力先验上不同于（且低于）恒定外部压力 p_0。从数学上讲，该区域位于无穷远处（区域 II 与区域 III 之间没有有限的分界），然而，由于流动迅速与均匀流对齐，我们在图 5 中将近尾流中的一片区域标为区域 III。在二维情形下，沿分离流线压力趋于恒定这一方法已被 Wu（1962）、Parkinson & Jandali（1970）和 Roshko（1954）成功用于自由流线理论，以模拟尾流。在该模型中，由于我们考虑的是三维情形，因此不能采用自由流线理论，但 p_{III} 可以

被认为具有与此类理论中所用的恒定压力相同的作用。区域 II 和区域 III 中的流动通过匹配条件求得，具体说明见下文。

在图 5 中，我们增加了区域 IV，该区域位于远尾迹中，在此处，与外部流动的混合不可忽略。在该区域中，压力应当升高，以再次达到尾迹外部的压力 p_0 。我们假设该区域对多孔筛网附近的流动以及空气动力影响很小，因此不将其纳入模型。因此，在我们的模型中，远尾迹中的压力将保持等于 p_{III}。

3.2. 区域 I 中流动的确定

在区域 I 中，流动为势流，我们根据速度势推导速度。为简单起见，我们设定参考系，使轴 (Oz) 与速度 $\mathbf{v}_0$ 对齐，这样做不失一般性。由于拉普拉斯算子的线性，我们首先只考虑源分布对应的势流 $\phi(x,y,z)$，然后再叠加均匀流对应的势流。位于一般正则曲面 $\mathcal{S}_p$ 上的源分布 Ω 所产生的速度势，是下列方程的解

$$\Delta\phi(x,y,z) = \Omega(x,y,z)\mathbb{1}_{\mathcal{S}_p}, \tag{3.2}$$

其中， $\mathbb{1}_{\mathcal{S}_p}$ 表示与表面 $\mathcal{S}_p$相关的狄拉克函数。对于位于原点的三维点源，拉普拉斯算子的格林函数为

$$\Gamma(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \tag{3.3}$$

因此，若假设 $\boldsymbol{\xi}: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ 是一个一般正则曲面的曲面片 $\mathcal{S}_p$ ，其坐标为

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} x_s(u,v) \\ y_s(u,v) \\ z_s(u,v) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

由两个参数 u和 v参数化，且 $(u,v) \in (U=[a,b]\times[c,d])$，其中 $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$，则对所有满足 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\backslash\mathcal{S}_p$的点，速度势 $\phi(x,y,z)$ 可表示为（Pressley（2010））

$$\phi(x,y,z) = \iint_U \Omega(u,v)\Gamma(x-x_s(u,v), y-y_s(u,v), z-z_s(u,v)) \left\| \frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{3.5}$$

总速度势可写为以下各项之和

$$\phi_I(x,y,z) = v_{0z}z + \phi(x,y,z) \tag{3.6}$$

我们通过 $\mathbf{v_I}(x,y,z) = \mathrm{grad}(\phi_I(x,y,z))$ 得出区域 I 中的速度。请注意，无需对模型进行其他修改，只需更改格林函数，即可研究受限环境中或壁面附近的流动情况。

3.3. 区域 II 和区域 III 中流动的确定

在区域 II 中，流动可能具有旋转性，因此不一定是势流。按照 Koo 与 James（1973）的方法，假设区域 II 中的流线与通过叠加源分布和均匀流 $\mathbf{v}_0$ 的流函数所得到的流线具有相同的形态，即可根据流函数求得该流动。一般而言，可将这两个流函数写成

.....

.....并将区域 II 中的流动表示为区域 I 的流函数的函数。设 ψ_{II} 和 χ_{II} 为区域 II 中的流函数。如上所述， ψ_I 和 χ_I 是根据区域 I 中的流动推导出的流函数，这些函数可视为在整个空间中都有定义。于是，在不失一般性的前提下，我们采用与 Koo & James（1973）提出的方法类似的表达形式，以函数 f 和 g 描述区域 II 中的流动：

$$\psi_{II} = f(\psi_I)\psi_I \quad \text{and} \quad \chi_{II} = g(\chi_I)\chi_I. \tag{3.7}$$

这意味着，在任意一点，区域 II 中的速度 $\mathbf{v}_{II}$ 与由速度势 $\phi_I(x,y,z)$得到的速度 $\mathbf{v}_I$ 共线。实际上，我们得到

$$\mathbf{v}_{II}(x,y,z) = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\psi_I} + f(\psi_I)\right)\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\chi_I} + g(\chi_I)\right)\mathbf{v}_I(x,y,z). \tag{3.8}$$

我们将衰减函数 E 定义为

$$E(\psi_I,\chi_I) = \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\psi_I} + f(\psi_I)\right)\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}\chi_I} + g(\chi_I)\right), \tag{3.9}$$

这是确定区域 II 中流动的关键量。由于 E 仅为流函数的函数，因此沿流线保持恒定，所以只需考虑其在筛网上的值即可完全确定该函数。

除方程 (3.8) 外，流体通过筛网时还必须满足质量流率守恒，这意味着区域 I 和区域 II 之间筛网处的法向速度连续。

$$v_{In}(x_s,y_s,z_s) = v_{IIn}(x_s,y_s,z_s). \tag{3.10}$$

此时，我们的系统中有两个未知量，即衰减函数 E 和源分布 Ω。我们已有一个方程 (3.10)，还需要一个将多孔结构附近的速度和压力联系起来的方程，才能使方程组闭合。为此，如图 5 所示，考虑两条流线：(AP) 和 (PB)，其中点 P从宏观角度视为筛网上的一个表面。沿着这两条流线，均可应用伯努利方程，因此对于 (AP)，我们得到

$$\frac{1}{2}\rho v_I^2(x_A,y_A,z_A) + p_I(x_A,y_A,z_A) = \frac{1}{2}\rho v_I^2(x_s,y_s,z_s) + p_I(x_s,y_s,z_s), \tag{3.11}$$

且对于（PB）

$$\frac{1}{2}\rho v_{II}^2(x_s,y_s,z_s) + p_{II}(x_s,y_s,z_s) = \frac{1}{2}\rho v_{II}^2(x_B,y_B,z_B) + p_{II}(x_B,y_B,z_B). \tag{3.12}$$

我们认为，点 A 和 B 距离筛网足够远，因此可以认为速度和压力取恒定值（对于垂直于气流的平板，参见 Fail 等（1957））。因此，上游有 $\boldsymbol{v}_I(x_A,y_A,z_A) = \boldsymbol{v}_0$和 $p_I(x_A,y_A,z_A) = p_0$；下游则取沿垂直于远场流向的尾流截面上的速度平均值（$\boldsymbol{v}_0$）$\mathbf{v}_{II}(x_B,y_B,z_B) = \lim_{z\to+\infty} \boldsymbol{v}_{II}(x,y,z) = E(\psi_I,\chi_I)\boldsymbol{v}_0$。在本文其余部分中， $E(\psi_I,\chi_I)$记为 $\overline{E}$。Koo 与 James（1973）假设远下游压力恒定 p_0，然而，众所周知，尾流中的压力低于尾流外的压力，这会对空气动力产生影响。因此，Steiros 与 Hultmark（2018）在 B 点引入了基底吸力压力 p_{III}，并假设它如上所述，在区域 III 中距离筛网足够远处保持恒定。因此，我们引入第三个自由参数p_{III}，并将在第 3.5 节通过守恒方程确定其值。注意，由于

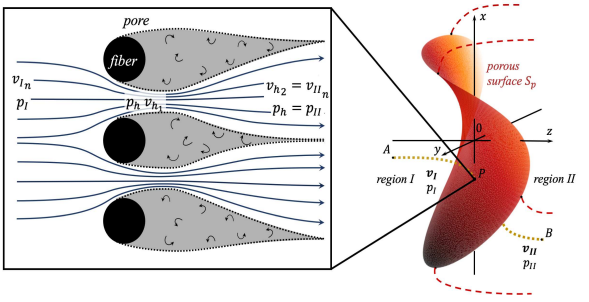


图 6：平行纤维情况下孔隙尺度的流动示意图（左），以及模型中使用的对应虚拟表面（右）。

我们假设压力 p_{III} 保持恒定，因此压力在尾流边界处会发生不连续（如 Koo 与 James（1973）的二维情形模型所示）。将方程（3.11）和（3.12）结合起来，按照筛网上的切向分量和法向分量（分别为 v_{It} 和 v_{In}）对速度进行分解，并利用方程（3.10），可得压力差

$$p_0 - p_{III} = \frac{1}{2}\rho\left(1 - E^2\left(\psi_I, \chi_I\right)\right) v_{It}^2(x_s, y_s, z_s) + \frac{1}{2}\rho\left(\overline{E}^2 - 1\right) v_0^2 + p_I(x_s, y_s, z_s) - p_{II}(x_s, y_s, z_s) \tag{3.13}$$

如果我们能够独立地根据这些方程确定压力差 $p_0 - p_{III}$ 和 $p_I(x_s, y_s, z_s) - p_{II}(x_s, y_s, z_s)$，就可以利用方程 (3.10) 求出衰减函数 E，并利用方程 (3.13) 求出源分布 Ω。为了确定吸力压力 p_{III}，我们将在第 3.5 节采用 Steiros & Hultmark（2018）的方法，利用图 5 所示控制体 V_1 中的动量守恒定律，并考察筛网附近的情况。在讨论这一问题之前，我们将在下面的第 3.4 节重点研究压力跃变 $p_I(x_s, y_s, z_s) - p_{II}(x_s, y_s, z_s)$。

3.4. 筛网两侧的压力跃变

Xu 等（2020）总结了压力跃变与筛网孔隙率之间关系的模型。许多论文对此问题进行了广泛讨论，凸显出建立一般形式的困难。在其模型中，Steiros 与 Hultmark（2018）考虑了两条流线，它们在一个孔洞中穿过筛网，且假定其中的速度和压力均为均匀分布。在流体加速之后紧邻上游处，流动的特征压力记为 p_h，并假定其在物理上对应于孔洞内的均值压力，如图 6 所示。正如包括 Taylor & Davies（1944）和 Wieghardt（1953）在内的多位作者所指出的，紧邻上游处的特征速度应视为流动在孔洞内收缩后的均值速度，记为 v_{h1}；该速度表示通过筛网的平均速度，其表达式为

$$v_{h1} = \frac{v_{In}(x_s, y_s, z_s)}{C(1-s)}, \tag{3.14}$$

其中，C 是考虑孔隙内缩流的收缩系数。速度在孔洞中加速至 v_{h1}，压力降低至 p_h，因此

在此处　此处没有能量损失。沿着这条第一流线，伯努利方程得出

$$p_I(x_s, y_s, z_s) + \frac{1}{2}\rho v_I^2(x_s, y_s, z_s) = p_h + \frac{1}{2}\rho v_{h1}^2. \tag{3.15}$$

紧邻下游处，同时考虑均匀化速度，流动扩展，速度达到以下数值：

$$v_{h2} = v_{II\,n}(x_s, y_s, z_s), \tag{3.16}$$

将其视为孔洞正后方的特征速度。正如 Taylor & Davies（1944）所提出、Steiros 与 Hultmark（2018）所采用的，假设孔洞正后方的压力与孔洞内部相同，即 p_h。这意味着，由于黏性效应，流体加速期间的压力损失无法恢复。沿第二条流线应用伯努利方程可得：

$$p_h + \frac{1}{2}\rho v_{h2}^2 = p_{II}(x_s, y_s, z_s) + \frac{1}{2}\rho v_{II}^2(x_s, y_s, z_s). \tag{3.17}$$

结合方程（3.8）、（3.10）和（3.14）至（3.17），可得：

$$\begin{aligned} p_{II}(x_s, y_s, z_s) - p_I(x_s, y_s, z_s) = &\frac{1}{2}\rho {v_{I}}_t^2(x_s, y_s, z_s)\left(1 - E^2(\psi_I, \chi_I)\right) \\ &+ \frac{1}{2}\rho {v_{I}}_n^2(x_s, y_s, z_s)\theta(s), \end{aligned} \tag{3.18}$$

with

$$\theta(s) = 1 - \frac{1}{C^2(1-s)^2}. \tag{3.19}$$

据我们所知，目前尚无关于纤维构成的筛网缩流的测量，尤其是自由流三维情形下的测量。Simmons & Cowdrey（1945）测量了多孔筛网后方的速度剖面；该筛网由跨越通道截面的织物材料方形网格构成，并假设孔洞内速度均匀 $v_{h1} = v_0$，据此估算缩流。在这些实验中，筛网由直径范围为 0.112 至$0.373\ mm$ 的圆杆制成，排列成方形网格。所用速度为 2.44 至 $10.36\ m.s^{-1}$。因此，局部雷诺数 Re_d 在 18 至 248 之间变化，与我们实验中所用的大多数多孔筛网处于同一数量级。对于实度 $s \approx 0.5$，系数C 应介于 0.9 和 1.0 之间。请注意，根据公式（3.19），如果 $C \neq 1$，极限 $s = 0$ 会导致非零压力差，这表明 C 可能至少在实度较低时取决于实度 s。对于垂直于流动方向的筛网，Steiros 与 Hultmark（2018）忽略了流体在孔洞内可能发生的收缩，即 $C = 1$。为了将三维模型与他们用于阻力系数的二维模型进行比较，我们也取 $C = 1$。这一点将在后文讨论。

将方程 3.18 中得到的压力差 $p_I - p_{II}$ 代入方程，得到 (3.13),

$$p_0 - p_{III} = -\frac{1}{2}\rho v_{I\,n}^2(x_s, y_s, z_s)\theta(s) + \frac{1}{2}\rho\left(\overline{E}^2 - 1\right)v_0^2. \tag{3.20}$$

假设 p_{III} 为常数，则上述方程右侧必须为常数，由此得到条件

$$\mathbf{grad}_{\mathcal{S}_p}\left({v_I}_n^2(x_s, y_s, z_s)\theta(s)\right) = \mathbf{0}, \tag{3.21}$$

其中 $\theta(s)$ 可随非均质多孔表面而变化。因此，在迄今所作假设下，我们要寻找满足此条件的源强 Ω。通过考虑

可变的基底吸力压力 p_{III}，或可变的远尾流速度 $\mathbf{v}_{II}(x_B, y_B, z_B) = E(\psi_I, \chi_I)\boldsymbol{v}_0$，可以放宽对 y_B 取值的某些限制。在这种情况下，问题要困难得多，应采用数值方法求解。此类求解超出了本文的研究范围。

3.5. 阻力系数

在本节中，我们将 Steiros 与 Hultmark（2018）的模型扩展到三维情形，考虑流场中形状和朝向任意的筛网。该模型将给出空气动力的两个表达式，并由此得到一个确定剩余自由参数 p_{III} 的方程。下一节将展示这些方程的应用。

第一个表达式通过使用阻力系数，对筛网表面周围的动量平衡进行描述，得到：

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{2}\rho S_p v_0^3}\left(\iint_{\mathcal{S}_p}(p_I - p_{II})\,\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{n}_s \mathrm{d}S + \rho\iint_{\mathcal{S}_p} v_{In}\boldsymbol{v}_0\cdot(\boldsymbol{v}_I - \boldsymbol{v}_{II})\,\mathrm{d}S\right), \tag{3.22}$$

其中，法向量 $\boldsymbol{n}_s$ 指向区域 II。

阻力系数的第二个表达式由这两个方程、方程（3.12）以及筛网周围控制体内的动量平衡给出。我们考虑图 5 所示的控制体，并假设该控制体足够大，使得平行于 z 轴的块体两侧表面 $\mathcal{S}_x$ 和 $\mathcal{S}_y$ 处的速度等于 $\boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{v}_\epsilon$，其中 $v_\epsilon \ll v_0$。在此近似下，我们计算动量平衡，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_D + \boldsymbol{F}_P = \rho S_w\left(1 - \overline{E(\psi_I,\chi_I)}^2\right)v_{0z}\boldsymbol{v}_0 + S_w\left(p_0 - p_{III}\right)\boldsymbol{e_z}\\ - \rho\boldsymbol{v}_0\iint_{\mathcal{S}_x+\mathcal{S}_y}\boldsymbol{v}_I\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{3.23}$$

其中，$\boldsymbol{F_P}$ 为升力，$\boldsymbol{F_D}$ 为阻力，S_w 为尾流截面面积（与 z 轴正交），E 上方的横线表示所考察表面上的均值。法向量 $\boldsymbol{n}$ 由控制体向外指。将该方程右侧投影到远场流向（$\boldsymbol{v}_0$）上，即可得到阻力的表达式。随后，对同一控制体进行质量平衡，可得

$$\rho v_{0z}S_w = \rho\iint_{\mathcal{S}_x+\mathcal{S}_y}\boldsymbol{v}_I\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S + \rho\overline{E(\psi_I,\chi_I)}v_{0z}S_w. \tag{3.24}$$

该方程使我们能够求出动量守恒方程（3.23）中最后一项的值。此外，通过对筛网进行质量平衡，可确定尾流截面 S_w

$$\rho\iint_{\mathcal{S}_p}\boldsymbol{v}_I\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \rho\overline{E(\psi_I,\chi_I)}v_{0z}S_w \tag{3.25}$$

方程（3.11）、（3.12）和（3.23）至（3.25）足以得到阻力系数的第二个表达式。由此问题得以闭合，并使我们能够求出流动中任意位置的速度和压力。

总之，为了封闭问题，Koo 与 James（1973）将压力跃变方程 $p_I - p_{II}$ 与两条流线的考虑结合起来，就像我们之前处理方程（3.13）时所做的那样，但此处考虑的是 $p_{III} = p_0$。这里，遵循 Steiros 与 Hultmark（2018）的做法，在加入基底吸力效应 $p_0 - p_{III}$后，首先通过动量守恒方程和质量守恒方程（（3.22）至（3.25）），其次通过关于压力损失的筛网效应假设（3.18），使问题得以封闭。

于是，用于确定源强度 Ω 的问题最终方程为

$$\overline{E}\iint_{\mathcal{S}_p}\left(\tilde{v}_{I_t}^2\left(1-E^2\right)+\tilde{v}_{I_n}^2\theta(s)\right)\boldsymbol{n}_s\cdot\boldsymbol{e}_z+2\tilde{v}_{I_n}\left(1-E\right)\tilde{\boldsymbol{v}}_{I_t}\cdot\boldsymbol{e}_z\mathrm{d}S=\left(-\left(1-\overline{E}\right)^2-\tilde{v}_{I_n}^2\theta(s)\right)\iint_{\mathcal{S}_p}\tilde{v}_{I_n}\mathrm{d}S, \tag{3.26}$$

采用无量纲速度 $\tilde{v}=\frac{v}{v_0}$。现在给出 v_{I_n} 和 E的显式表达式。求解 v_{I_n} 属于边界面势问题。v_{I_n} 由速度势 (3.6) 的梯度求得，因此含有一个积分项。该积分项称为密度为 Ω 的调和双层势（Gunter（1967））， 它定义在 $\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{S}_p$的一个子域上。若在表面 $\mathcal{S}_p$ 上计算，该积分项会变得奇异；不过，它可以从两侧连续延拓至该表面，且其值取决于我们从哪一侧趋近该表面。根据区域 I 和 II 的定义，对于 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)\in\mathcal{S}_p$，我们有

$$v_{I_n}(\boldsymbol{m})=v_0\boldsymbol{e_z}\cdot\boldsymbol{n}_s+v_n^-(\boldsymbol{m}), \tag{3.27}$$

and

$$v_{II_n}(\boldsymbol{m})=E\left(\psi_I,\chi_I\right)\left(v_0\boldsymbol{e_z}\cdot\boldsymbol{n}_s+v_n^+(\boldsymbol{m})\right), \tag{3.28}$$

with

$$v_n^{\pm}(\boldsymbol{m})=\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_s}\left(\boldsymbol{m}\pm\epsilon\boldsymbol{n}_s\right), \tag{3.29}$$

其中 ϕ 由方程 (3.5) 定义，且定向外法向导数为:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\boldsymbol{n}_s}\left(\boldsymbol{m}\right)=\mathbf{grad}\left(\phi\left(\boldsymbol{m}\right)\right)\cdot\boldsymbol{n}_s. \tag{3.30}$$

根据一个可在许多书籍中找到的定理，例如 Kress（1999）第 80 页，上述极限的值可以用广义积分表示。对于$\boldsymbol{m}=(x,y,z)\in\mathcal{S}_p$，该表达式为

$$v_n^{\pm}(\boldsymbol{m})=\iint_U\Omega(u,v)\frac{\partial\Gamma}{\partial\boldsymbol{n}_s}\left(\boldsymbol{m}-\boldsymbol{m}_s(u,v)\right)\left\|\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial u}\wedge\frac{\partial\boldsymbol{\xi}}{\partial v}\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\pm\frac{1}{2}\Omega(\boldsymbol{m}), \tag{3.31}$$

其中 $\boldsymbol{m}_s(u,v)=(x_s(u,v)\ y_s(u,v)\ z_s(u,v))$。最后，对表面法向速度应用连续性方程 (3.10)，并代入方程 (3.27) 和 (3.28) 中给出的表达式，可得 E。对于 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)\in\mathcal{S}_p$，我们有

$$E\left(\boldsymbol{m}\right)=\frac{v_0\boldsymbol{e_z}\cdot\boldsymbol{n}_s+v_n^-(\boldsymbol{m})}{v_0\boldsymbol{e_z}\cdot\boldsymbol{n}_s+v_n^+(\boldsymbol{m})}. \tag{3.32}$$

下一节中，我们将在一种基本但极为常见的几何形状下解析求解该问题。

3.6. 自由流中的倾斜矩形筛网应用

对于矩形几何和均质实度，可以较为容易地获得我们模型方程的解析解。因此，我们将三维模型应用于自由层流中一个简单的矩形筛网情况（以 $z=0$ 为中心，如图7所示），以求得流动和阻力系数关于实度的函数关系。在这种情况下，速度势（3.6）变为

$$\phi_I(x,y,z)=v_0z+c-\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{S}_p}\frac{\Omega(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\sqrt{(x-v)^2+(y-u\sin(\beta))^2+(z-u\cos(\beta))^2}} \tag{3.33}$$

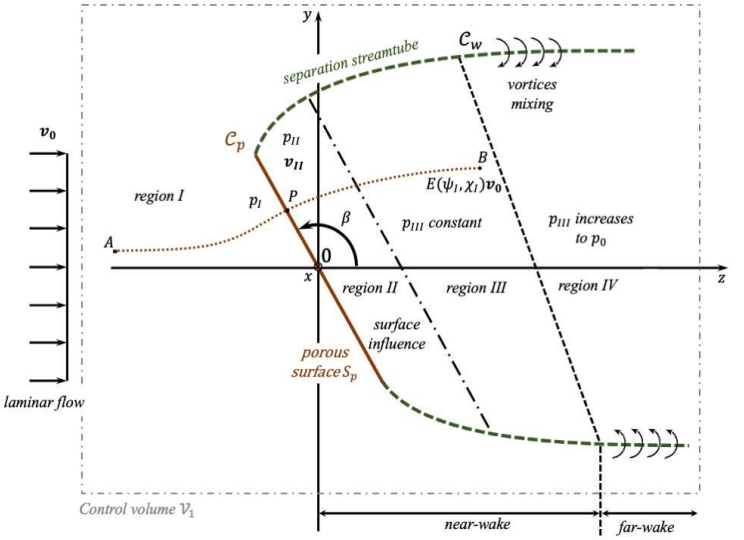


图7：三维自由流中倾斜矩形多孔屏在 (Oyz) 平面上的示意图，倾角为 β。虚线表示分离流线，用作模型中各区域之间的边界。A 点与 B 点之间的点线表示模型中用于计算区域 I 和 III 内速度的流线。来流为层流。

随后，我们计算筛网处的速度。计算的目标是获得 Ω 关于实度的函数关系，该关系将确定问题中的所有其他变量。

表面上任意位置 (w,t) 处区域 I 内速度的法向分量为

$$v_{I\,n}^{\pm}(w,t) = v_0 \sin(\beta) + \lim_{\epsilon \to 0^{\pm}} \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{S}_p} f_\epsilon(u,v)\Omega(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{3.34}$$

with

$$f_\epsilon(u,v) = \frac{\epsilon \cos(\beta)\sin(\beta)}{\left((t-v)^2 + (w-u)^2 + (2(w-u)+\epsilon)\epsilon\cos(\beta)\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{3.35}$$

计算详情见附录 B。在筛网处，根据接近筛网的方向 $(\epsilon \to 0^{\pm})$，速度法向分量的大小为常数，且等于

$$v_{I\,n}(w,t) = v_n^-(w,t) = v_0 \sin(\beta) - \frac{1}{2}\Omega(w,t), \tag{3.36}$$

$$v_{II\,n}(w,t) = E(\psi_I,\chi_I)v_n^+(w,t) = E(\psi_I,\chi_I)\left(v_0\sin(\beta) + \frac{1}{2}\Omega(w,t)\right). \tag{3.37}$$

此时，对于均匀筛网（表面上 s 为常数），方程 (3.21) 得出 $\mathbf{grad}\,(\Omega(w,t)) = \mathbf{0}$，即源强为常数。

因此，方程（3.10）导出了一个恒定的衰减函数

$$E = \frac{v_0\sin(\beta) - \frac{1}{2}\Omega}{v_0\sin(\beta) + \frac{1}{2}\Omega}. \tag{3.38}$$

如果我们发现法向速度为常数，那么切向速度的情况则并非如此，

切向速度的大小会在屏幕表面上发生变化。表面处速度的切向分量

$$v_{It}(x,w) = \Big(\Omega^2\mathcal{I}_x^2(x,w) + (\Omega\left(\sin\left(\beta\right)\mathcal{I}_y(x,w) + \cos\left(\beta\right)\mathcal{I}_z(x,w)\right) + \cos\left(\beta\right)v_0)^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.39}$$

其中 $\mathcal{I}_x$、 $\mathcal{I}_y$ 和 $\mathcal{I}_z$ 是在附录 A 中计算的以下曲面积分:

$$\mathcal{I}_x(x,w) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{S}_p}\frac{x-v}{\Big((x-v)^2+(w-u)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3.40}$$

$$\mathcal{I}_y(x,w) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{S}_p}\frac{(w-u)\sin\left(\beta\right)}{\Big((x-v)^2+(w-u)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3.41}$$

$$\mathcal{I}_z(x,w) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{S}_p}\frac{(w-u)\cos\left(\beta\right)}{\Big((x-v)^2+(w-u)^2\Big)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{3.42}$$

为简便起见，我们将速度切向分量的大小近似为其均方根。我们注意到，由于在方程 (3.26) 中， v_{I_t} 同时以线性和二次形式出现，因此对于垂直于平均流动方向的表面（$\beta = \frac{\pi}{2}$），该近似变得精确。因此，我们取

$$v_{It} = \left(\Omega^2\gamma_0 + v_0^2\cos^2\left(\beta\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.43}$$

其中， γ_0 可视为形状因子（见附录 A）。方程 (3.18) 变为

$$p_{II} - p_I = \frac{1}{2}\rho\left(v_{I_t}^2\left(1-E^2\right) + v_{I_n}^2\theta(s)\right) \tag{3.44}$$

方程 (3.13) 得出:

$$\begin{aligned} p_{III} - p_0 &= \frac{1}{2}\rho\left(1-E^2\right)\left(v_0^2 - v_{I_t}^2\right) + p_{II} - p_I \\ &= \frac{1}{2}\rho\left(\left(1-E^2\right)v_0^2 + v_{I_n}^2\theta(s)\right) \end{aligned} \tag{3.45}$$

利用方程 (3.23) 至 (3.25)，我们得到阻力大小的第一个表达式 F_D

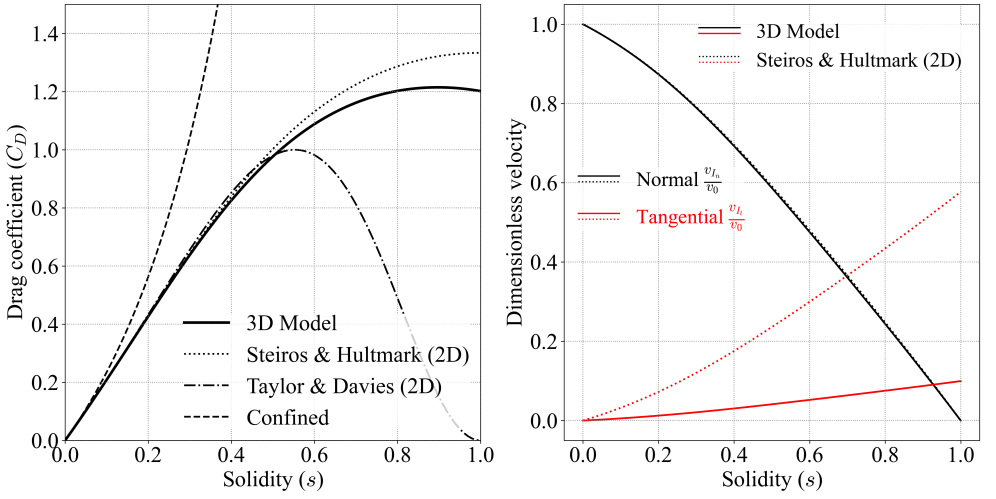
$$F_D = \rho v_0\left(1-E\right)v_n S_p + \frac{1}{v_0}\left(p_0 - p_{III}\right)\frac{v_n}{E}S_p. \tag{3.46}$$

The 阻力的第二个表达式 F_D 由方程 (3.22 得出)

$$F_D = \left(p_I - p_{II}\right)\sin\left(\beta\right)S_p + \rho v_n v_0\cos(\beta)\left(1-E\right)S_p. \tag{3.47}$$

注意，对于与自由流正交的矩形筛网，方程 (3.47) 的第二项为零，因为 $\beta = \frac{\pi}{2}$，因此我们得到的阻力系数与压力差 $p_I - p_{II}$ 成正比。现在，令 $\omega = \frac{\Omega}{v_0}$，并结合方程 (3.46) 和 (3.47)，可得以下方程，我们需要求解该方程以确定源强的值

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8}\omega^4\theta(s) + \omega^2\sin^2\left(\beta\right)\Big(8\gamma_0 + \theta(s) - 2\Big) - \\ 4\omega\sin\left(\beta\right) - 2\sin^4\left(\beta\right)\theta(s) = 0 \end{aligned} \tag{3.48}$$



(a) 理论阻力系数。 (b) 筛网上的理论速度。

图 8：采用三维模型对垂直于流动方向的方形均匀筛网进行计算，得到阻力系数和表面速度随实度变化的理论预测（$\beta = \frac{\pi}{2}$），并与不同的二维模型进行比较。实线是本文提出的三维模型所得结果，该模型采用了与 Steiros & Hultmark（2018）相同的筛网两侧压力跃变定律（但考虑了几何三维效应）。(a) 阻力系数。(b) 法向速度和切向速度的均方根，分别如方程 (3.36) 和 (3.43) 所定义。

图 8 (a) 绘出了 $\beta = \frac{\pi}{2}$ 时，方形多孔板以法向入射时的解。在低实度下，我们的方形板模型与 Steiros & Hultmark（2018）和 Taylor & Davies（1944）的预测接近。当实度高于 $s = 0.4$ 时，阻力系数与 Steiros & Hultmark（2018）的预测略有不同，且这种差异随实度增加而增大。因此，高实度下三维效应十分重要。

在高实度（$s \lesssim 1$）下，曲线趋近于实心平板的阻力系数。在我们的模型中，该值预测为 1.2，接近全局雷诺数为 $Re \approx 10^4$ 时的实验测量值：根据 Blevins（1992）约为 1.05，根据 Hoerner（1965）对各种阻力测量结果的综合为 1.17，而我们的实验中为 0.939。

我们的模型通过参数γ_0考虑多孔表面的形状。对于矩形筛网，γ_0中考虑的纵横比会影响结果，详见附录 A。根据 Hoerner（1965），对于垂直于流动方向的平板，随着纵横比减小，阻力系数会缓慢增加，直至纵横比约为 0.1。超过这一点后，阻力系数的增幅会更加明显，直到无限薄板的阻力系数达到 $C_D = 2.0$（根据 Blevins（1992），为 1.90）。在我们的模型中，我们确实观察到，随着纵横比减小，阻力会增加（见附录 A）：方形板的阻力系数为 $C_D = 1.2$（$\gamma_0 = 0.0998$），纵横比为 1/10 的矩形板为 1.29（$\gamma_0 = 0884$），无限薄板则为 $C_D = 1.33$。无限薄板的这一数值低于实验值，即根据 Blevins（1992）和 Hoerner（1965），实验值为 $C_D \approx 2.0$。这种差异可能是

在这种纵横比极高的情况下，涡脱落可能是造成这一差异的原因；正如 Steiros & Hultmark（2018）所指出的，当前的尾流模型并未考虑涡脱落。

在图 8(b) 中，我们比较了二维和三维情况下的法向速度和切向速度。两种情况下，切向速度均取整个表面上的均方根；在三维情况下，其定义见方程 (3.43)。两种情况下，法向速度在表面上也均为常数；在三维情况下，其定义见方程 (3.36)。虽然二维和三维情况下的法向速度相同，但我们清楚地看到，三维效应会影响切向速度。

最后需要指出的是，如果在方程 (3.19) 中不忽略流动收缩，则阻力系数会高于图 8a 中绘制的曲线，因此，与图 3 中的数据相比，我们仍会高估阻力。

尽管考虑三维效应后，模型对 C_D 高实度情况的预测有所改善，但对于中、低实度情况，当前模型的预测并未改善。此外，该模型的预测仍与实验结果存在差异。具体而言，实验中观察到的阻力系数随局部雷诺数的变化仍未得到体现。事实上，用于估算压力跃变 $p_I - p_{II}$ 的关系式（方程 (3.18)）并未明确考虑黏度，正如我们将在下一小节中讨论的那样。

最后，我们的理论预测与实验值之间的差异也可能是由于势流理论在描述钝体周围复杂流动方面存在局限性，正如我们稍后将讨论的那样。不过，我们预计这些局限性只会在实度很高时显现，在低实度和中等实度下则可以忽略不计。

3.7. P 孔隙局部几何形状与黏性效应对压力跃变的影响 ts

如上所述，在 Steiros & Hultmark（2018）提出的压力跃变方程（3.18）及方程（3.19）中，我们没有考虑压降对局部雷诺数 Re_d 的依赖性。该局部雷诺数是在筛网孔隙尺度上计算的（因此远小于 Re）；我们也没有考虑孔洞几何形状及其他可能的依赖因素，例如筛网材料与流体之间的能量传递。例如，Ando 等人（2022年）指出，由于流动诱导变形，一层柔性纤维的渗透率可能高于同样一层刚性纤维。此外，正如 Schubauer 等（1950）所示，筛网相对于层流上游自由流的角度会影响压降。Kalugin 等人（2021年）还解释说，对于倾斜穿孔板，孔洞内的流动结构取决于：（1）板上孔洞与前缘之间的距离；（2）板的攻角。攻角较小时，由于流动难以偏离其原有方向（该方向大致平行于板表面），有效孔面积可能会显著减小。所有这些研究都表明，目前还难以为任意多孔筛网建立通用的压力损失公式。因此，在下文中，我们采用另一种基于经验定律的方法，以检验这种方法是否足以准确估算阻力。

大量实验研究表明，在筛网附近，压降可以合理地认为与垂直于筛网的速度的平方成正比，其比例系数为阻力系数 k，Taylor & Davies（1944）的研究尤其如此。最近，Ito & Garry（1998）研究了低阻力系数下流体绕过并穿过纱网的二维情形，而 Eckert & Pfl¨uger（1942）则研究了纱网横跨整个截面的情形下的阻力系数

通道。在这些情形下，压降可写为：

$$\Delta p = \frac{1}{2} k \rho v_{I_n}^2(x_s, y_s, z_s), \tag{3.49}$$

阻力系数 k 取决于孔洞几何形状、筛网材料，以及基于孔洞尺度定义的雷诺数（有时 k 与所谓的损失系数或摩擦系数直接相关）。对此的研究大多针对筛网完全横跨通道且流体法向入射或斜向入射的情况（Reynolds（1969）、Schubauer 等（1950））。注意，在方程（3.18）中，$\theta(s)$ 可解释为阻力系数；方程（3.18）中出现切向速度，是因为在我们的情形下，流体可以绕过多孔结构。

为确定多孔筛网阻力系数的依赖关系，Pinker 与 Herbert（1967）指出，阻力系数 k 可以合理地视为实度函数 $G(s)$ 与雷诺数函数 $f(Re_n)$ 的乘积；该雷诺数 $Re_n = Re_d \frac{v_{I_n}}{v_0}$基于孔洞尺度和来流速度，在我们的表述中对应于 v_{I_n}。在针对实度拟合 G 的若干表达式中，Pinker 与 Herbert（1967）发现 $G(s) = -\theta(s)$ 与其数据吻合最佳。

由于压降还取决于表面的倾角，因此实际上我们必须考虑函数 $f(Re_n, \beta)$，正如 Schubauer 等（1950）最先提出的那样。由于我们的多孔筛网几何形状任意，β 应视为筛网表面相对于远上游层流自由流方向的局部倾角特征。$\beta = 0$ 表示表面与流动平行 $\boldsymbol{v}_0$。因此，我们提出以下压力跃变关系：

$$\begin{aligned} p_{II}(x_s, y_s, z_s) - p_I(x_s, y_s, z_s) = & \frac{1}{2}\rho v_{I_t}^2(x_s, y_s, z_s)\left(1 - E^2(\psi_I, \chi_I)\right) \\ & + \frac{1}{2}\rho v_{I_n}^2(x_s, y_s, z_s)\theta(s) f(Re_n, \beta). \end{aligned} \tag{3.50}$$

因此，f 的表达式预计需要通过实验确定。据我们所知，目前尚无适用于所有类型筛网的、描述微观层面孔洞内压降的一般物理表述，也没有针对任意多孔筛网形状的 f 解析表达式的一般性证明。因此，对于特定多孔结构，预计需要进行一些修正，例如考虑孔洞的几何形状。对于由纤维组成、且纤维与上游流动之间的攻角为 β 的筛网，以及对于 $10^{-4} < Re_n < 10^4$，Brundrett（1993）给出了 f 的以下经验表达式：

$$f(Re_n, \beta) = \sin^2(\beta)\left(\frac{c_1}{Re_n \sin(\beta)} + \frac{c_2}{\ln(Re_n \sin(\beta) + 1.25)} + c_3 \ln(Re_n \sin(\beta))\right), \tag{3.51}$$

其中，c_1、c_2 和 c_3 为实常数。Brundrett（1993）取 $c_1 \approx 7.125$、$c_2 \approx 0.88$、$c_3 \approx 0.055$，使其数据与金属丝网的实验数据拟合良好。Bailey 等（2003）取 $c_1 \approx 18$、$c_2 \approx 0.75$和 $c_3 \approx 0.055$，也发现其数据拟合良好。在本文接下来的各节中，我们取不同数值$c_1 \approx 11$、$c_2 \approx 0.8$ 和 $c_3 \approx 0.055$的几何平均值。当 Re_n 较大时，函数 f 表现为雷诺数 Re_n的对数函数；而当 Re_n较小时，f 的变化则显著得多（与雷诺数 Re_n成反比）。因此，我们预计，对于本文所考虑的典型流速和网孔尺寸，以及雾水收集和口罩等应用，黏性效应都很重要。在该模型中，方程 3.51，

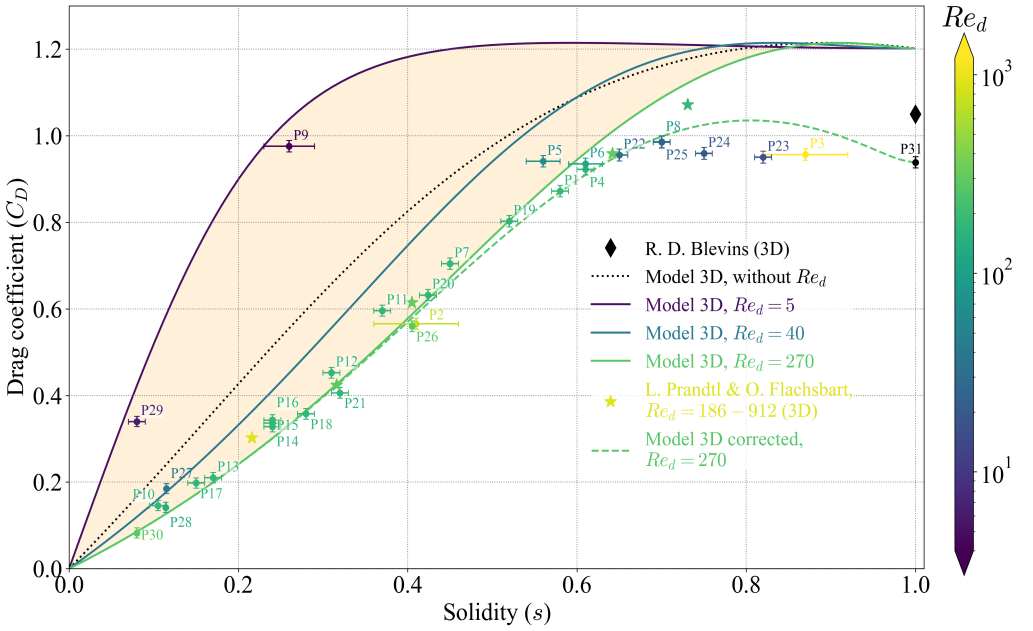


图9：对于不同的 Re_d，垂直于自由流的各种方形多孔屏的阻力系数随实度的变化，以及与三维模型的比较。实线由本文建立的三维模型（方程（3.52）的解）得到。黑色点线曲线是方程（3.48）的解，因此未考虑 Re_d。绿色斜线曲线采用第5节所述模型的修正（5.5），并使用 $C_D^0 = 0.939$ 得到。

第一项对应层流贡献，第二项对应湍流摩擦，最后一项则适用于雷诺数较大的情况（Brundrett 1993年）。

因此，对于所有网格雷诺数 Re_d，我们使用针对 ω 的新隐式关系计算 $Re_n = Re_d \frac{v_{In}}{v_0} = Re_d(\sin(\beta) - \frac{1}{2}\omega)$：

$$-\frac{1}{8}\omega^4\theta(s)f(Re_n,\beta) + \omega^2\sin^2(\beta)\Big(8\gamma_0 + \theta(s)f(Re_n,\beta) - 2\Big) - 4\omega\sin(\beta) - 2\sin^4(\beta)\theta(s)f(Re_n,\beta) = 0. \tag{3.52}$$

应当强调的是，这一考虑了孔隙尺度局部雷诺数的表达式仍然是经验性的，而 Steiros 和 Hulmark 的表达式则基于源自 Taylor 和 Davies（1944）的明确物理假设，但忽略了黏度对流动的影响。因此，在本文其余部分，我们将保留并比较这两个公式（（3.48）和（3.52））。

对于较高实度，且两个雷诺数 Re 和 Re_d处于一定范围内时，项 $\theta(s)f(Re_n,\beta)$ 应表现为多孔介质 Darcy-Forchheimer方程中的惯性项。对于由方形纤维网格组成的多孔筛网，采用 Wang等人（2021）的方法计算得到的 Darcy-Forchheimer方程惯性项，在 $s \approx 0.9$ 时，其数值与 $\theta(s)$ 相当接近。对于极薄的多孔表面，正如 Teitel（2010）所述，Darcy 方程和 Darcy-Forshheimer方程中涉及的多孔介质渗透率概念，未必总适用于筛网中的压力损失

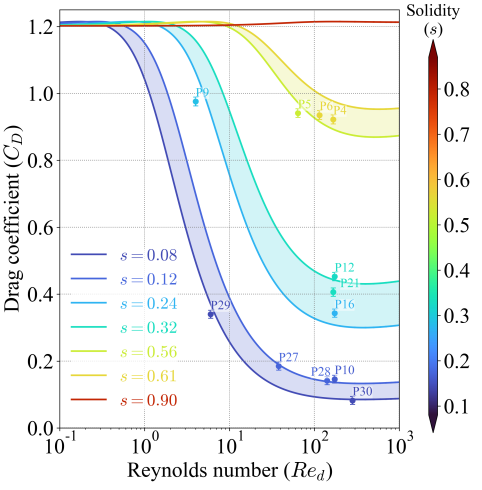


图10：阻力系数随雷诺数 Re_d 的变化，针对三个不同的窄实度范围： $s = 0.1 \pm 0.02$、 $s = 0.28 \pm 0.04$、 $s = 0.585 \pm 0.025$。圆点表示实验测量值，实线表示我们的模型结果（方程（3.52），其中考虑了网格雷诺数 Re_d 的影响）。

这取决于流动状态。根据 Brundrett（1993）和 Bailey 等（2003），表达式(3.51)似乎在更宽的流动状态范围内有效。

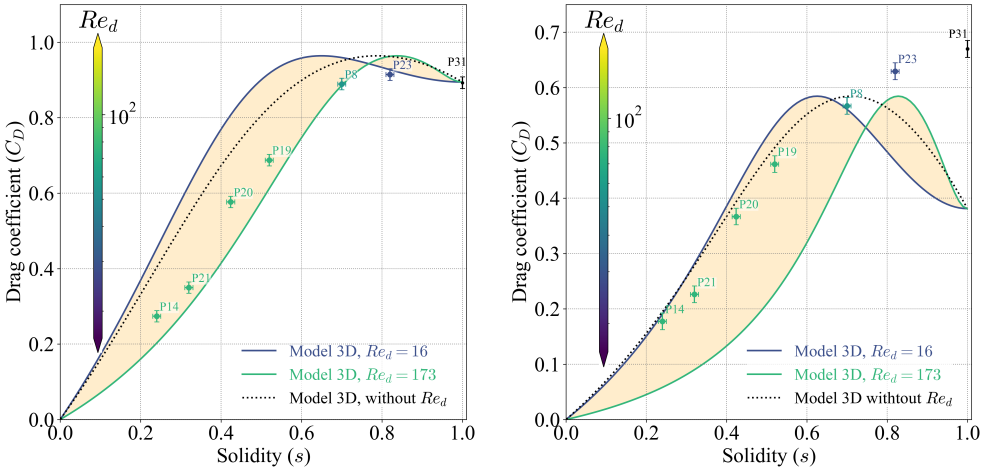
4. 结果

4.1. 三维效应和黏性效应对阻力系数的影响

如前所述，我们的实验表明，局部雷诺数对阻力系数有显著影响。现在，我们在图9中将实验结果与三维模型的预测进行比较；该模型通过函数f（Re_n， β）纳入了局部黏性效应。对于所有网格雷诺数 Re_d，曲线的总体趋势都相同：在低实度下，阻力系数近似线性增加，随后曲线趋于平缓并达到平台值。这一趋势可由采用 Steiros & Hultmark（2018）提出的方法推导出的三维模型很好地描述，即不包含 f（Re_n， β）（方程（3.48））。然而，初始线性部分的斜率强烈依赖于 Re_d：它先随网格雷诺数 Re_d 增大而减小，随后在超过某一临界雷诺数后增大。这种非单调性与函数 f 的非单调性直接相关。

使用我们的模型以及 Brundrett（1993）的经验公式代入方程（3.50），我们发现，对于不同的雷诺数，实度为 $s \leqslant 0.6$ 时，模型与我们的数据拟合良好。这表明三维效应和黏性效应都很重要，它们通过局部雷诺数 Re_d 体现出来。特别是，对于给定的实度，随着 Re_d 增大，阻力系数会显著降低，如图 10 所示。

我们确实观察到网格雷诺数会产生显著影响，而且这种影响也取决于实度。随着 Re_d 增大，阻力系数会降低，这一趋势可由经验公式（方程（3.52））很好地描述。de Bray（1957年）研究穿孔板时也观察到了这一现象。在 Re_d 较低时，所有曲线都趋向于实心平板的阻力系数值，即流体不会穿过筛网，而是大部分绕流而过。随后我们注意到，在中间



(a) $\beta = 65°$处的阻力系数。 (b) $\beta = 43°$处的阻力系数。

图 11：使用方程 (3.48)，比较三维模型与我们的实验对不同多孔方形筛网在两个倾斜角度下的阻力系数预测结果：(a) $\beta = 65°$ (b) $\beta = 43°$ 。黑色虚点线表示通过方程 (3.52) 得到的理论结果。

值范围内，Re_d 会迅速变化（$5 < Re_d < 50$ 取决于实度），最终在 Re_d 较高时趋于一个常数值。实度越高，阻力的这种降低幅度越小。正如预期的那样，当实度较高（$s = 0.9$）时，Re_d 不会产生影响，因为穿过筛网的流动很弱。采用 Brundrett（1993）或 Bailey 等（2003）给出的常数 c_1、c_2 和 c_3 的数值，得到的阻力系数相近。事实上，对于所有实度以及中等雷诺数 $Re_d = \mathcal{O}$（200）而言（这对应于我们测试的大多数筛网），两者之间的差异很小（$1 \leqslant \frac{C_D\ (Bailey)}{C_D\ (Brundrett)} \leqslant 1.05$）；而且雷诺数 Re_d 越高，差异越小。然而，在雷诺数较低时，$Re_d = \mathcal{O}$（5），差异则较大。

为进一步检验模型的有效性，我们制作了实度相同、但孔径和数量不同的筛网，同时保持 Re_d 不变（参见表 1 中的 $s = 0.24$（P14、P15 和 P16）及 $s = 0.7$ （P8 和 P25）），但仍采用周期性分布。正如模型所预期的，在测量不确定度范围内，阻力系数没有任何差异，这表明对于这些规则筛网，摩擦系数仅取决于 s 和 Re_d。

4.2. 小攻角下的阻力系数

随后，我们改变筛网在流动中的取向角度 β。图 11 中将实验结果与模型在两个角度 $\beta = 65°$ 和 $\beta = 43°$ 下的预测进行了比较。与法向入射的板类似，阻力系数随实度增大而增大。在 $\beta = 65°$ 时，我们的模型与实验数据吻合良好（图 11a）。然而，当取向进一步偏离法向入射时，模型会低估阻力（$\beta = 43°$图 11b）。对于由纤维构成的倾斜多孔筛网，攻角减小时，有效实度应增大。采用这一有效实度后，我们的数据将更接近图 11b 中的绿色曲线（$Re_d = 173$）。最后，我们观察到，线性部分的斜率和 $s = 1$ 处的最终值均取决于角度；角度减小时，阻力系数也随之降低。

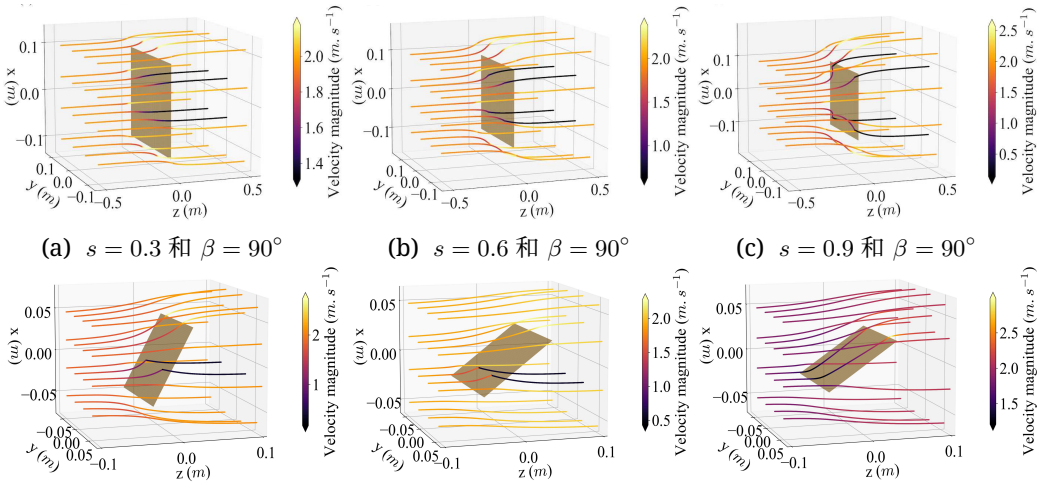


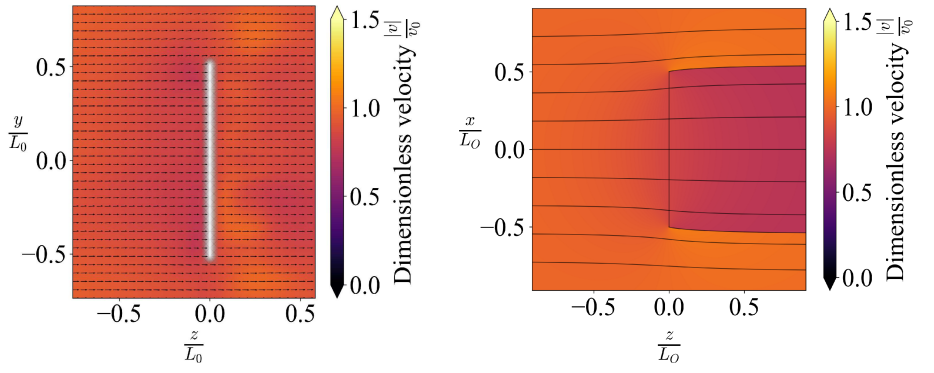
图 12：对于不同实度的方形筛网，在 $v_0 = 2.0\ m.s^{-1}$ 法向和倾斜于流动方向的情况下，使用三维模型获得的流线和速度大小，以及方程 3.18 中定义的压力跃变（因此不依赖于网格 Reynolds 数 Re_d）。

此外，我们的模型预测，在高实度下阻力系数会达到最大值，如图 3（或图 9）所示，这一现象在图 11 中更加明显。对于垂直于流动方向的方形筛网，若干多孔筛网的阻力系数确实（平均而言）高于实心屏（例如 P3、P5、P8、P9、P22、P23、P24 和 P25）。然而，由于不确定度以及筛网支撑框架产生的干扰阻力（见附录 C），这一差异并不足以得出明确结论。在角度为 $43°$的倾斜板实验测量中，我们没有观察到这种最大值现象。不过，当角度为 $65°$ 时，筛网 $P23$ 的阻力系数平均而言高于实心屏。也有可能是我们的实验处于无法出现阻力系数这种非单调变化的流动状态。

4.3. 流动可视化

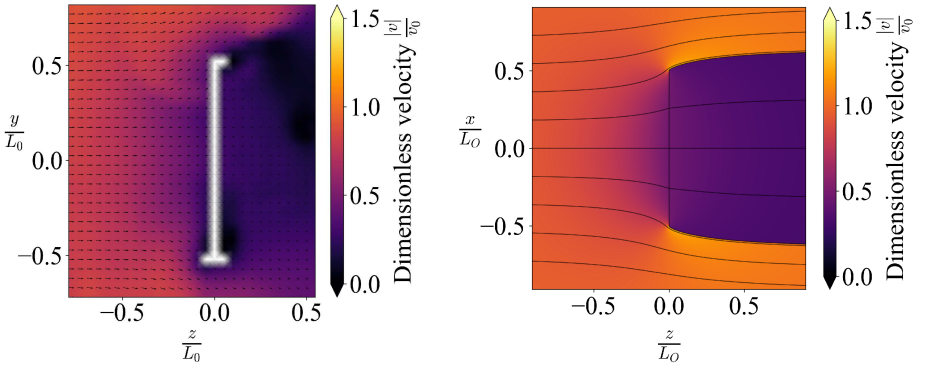
通过使用我们的模型绘制筛网周围及穿过筛网的流动流线和速度大小（图 12），我们可以进一步了解这些行为。对于垂直于流动方向的筛网，我们观察到，随着实度增加，更多流体绕过筛网流动，并且筛网前方的流动显著减速，这与所测得的阻力系数增加（图 12a–12c）一致。当取向角偏离法向入射而增大时，流线的偏转程度减小，速度略有升高（图 12d–12e）。对于图 12f 中实心板这一极端情况，两条流线沿板发生偏转；流动首先减速，随后再次加速，当流体质点离开板并重新卷入周围流动时，速度在板上方达到峰值。然而，尽管该模型的渐近行为可能为整体流动和空气动力提供一些指示，但正如下一节所讨论的，预计它超出了模型的假设范围。

通过在图13中绘制筛网对称面上的PIV测量结果（如第2节所述）以及理论



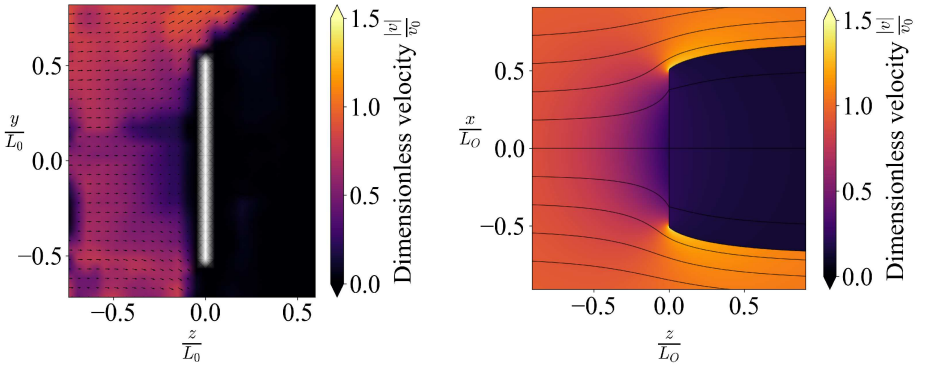
(a) P14, $s = 0.24$，实验的。

(b) P14, $s = 0.24$，理论的。



(c) P6, $s = 0.61$，实验的。

(d) P6, $s = 0.61$，理论的。



(e) P23, $s = 0.82$，实验的。

(f) P23, $s = 0.82$，理论的。

图13：对于三种不同实度（低、中等和高），在（z, x）平面上使用 $y = 0$ 预测速度场时，三维理论模型与我们的实验结果的比较。理论速度场采用理论的压力跃变定律（方程（3.18）和（3.19））获得。速度的不确定性估计约为 $0.1\ m.s^{-1}$。

预测结果，可以进一步开展这项分析。为简单起见，理论预测采用压力跃变方程（3.18）（因此未考虑网格雷诺数 Re_d 效应）。随着实度增大，可以观察到筛网后方速度的衰减更明显，绕筛网的流动偏差更大，且筛网上游出现了一个低速区域。

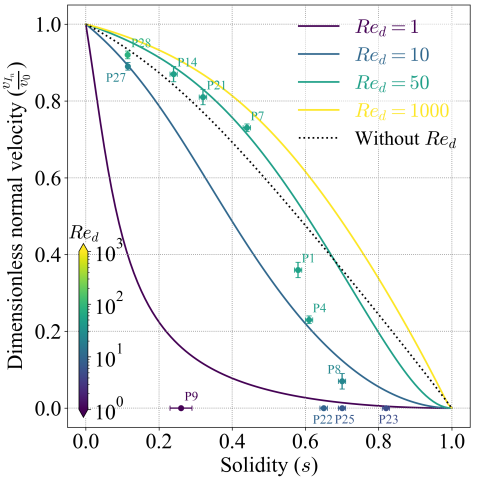


图14：使用方程 (3.52) 得到的无量纲法向速度 $\frac{v_{I_n}}{v_0}$（实线），以及使用方程 (3.48) 得到的无量纲法向速度（黑色虚线）。圆点表示使用热线风速仪获得的实验测量值。

筛网数	P1	P4	P7	P8	P9	P14	P19	P21	P22	P23	P25	P27	P28	P32	雷诺数
Re_d	53	47	49	24	0.16 – 3.5										均值 0.75 49 47 47 9.1 5.0 6.7 22 80 80

表2：以纤维直径 d 为特征尺寸，并采用速度 $v_0 = 2.84\ m.s^{-1}$ 和运动黏度 $\nu = 15.6 \times 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$计算的雷诺数 Re_d。

我们注意到，即使在尾流下游存在速度衰减的情况下，理论预测的速度大小也与测得的速度吻合良好。我们还观察到，模型很好地捕捉到了上游的速度衰减。然而，在高实度下，实验中的尾流宽度似乎比模型中的更大，这也可能是由于实验中网周围的框架更厚。事实上，如图4中的流线所示，框架边缘附着着涡旋，可能会影响法向速度和尾流形状。

穿过筛网的来流比例由无量纲法向速度 $\frac{v_{I_n}}{v_0}$直接给出。图14中，我们绘出了这一比值 $\frac{v_{I_n}}{v_0}$随实度 s 变化的关系，涵盖不同的网格，即表2所列的不同 Re_d。速度使用 Dantec Dynamics 的恒温风速仪测量（MiniCTA，配备探针55P11，钨丝直径为 $5\ \mu m$、长度为 $1.25\ mm$，精度为 $0.01\ m.s^{-1}$，最低速度为 $0.20\ m.s^{-1}$）。在网格雷诺数较高、实度较低时，模型与数据吻合良好。然而，我们观察到 Re_d 对法向速度有显著影响：尤其是在网格雷诺数 Re_d 较小时，法向速度的下降速度比模型预测的更快。对于实度较高的情况，模型也高估了法向速度。对于雾水收集中常用的筛网（$Re_d = \mathcal{O}(100)$），计入 Re_d 时的法向速度最多可比未计入 Re_d 时高21%

（根据我们的理论结果，这适用于 $0.25 < s < 0.75$），因此不可忽略。这些数据与PIV测量结果一致。

5. 讨论：大实度下的渐近行为

尽管该模型是为多孔表面构建的，但研究实度趋近于 1 时的渐近行为仍然很有意义。在这一极限情况下，可以探讨对表面采用多孔介质描述是否仍然有效。

当筛网的实度趋近于 1 时，我们可以得到阻力系数的表达式。取方程（3.52），除以趋近于 $+\infty$when$s \to 1$的 $\theta(s)$，可得

$$\left(\omega^2 - 4\sin^2(\beta)\right)^2 = 0. \tag{5.1}$$

因此（排除 ω 为负的情况，因为这不符合本文所研究的流动类型），我们得到

$$\omega = 2\sin(\beta), \tag{5.2}$$

由此得到预期的 $v_{In} = 0$。将该值代入阻力系数的表达式，可得

$$C_D = 2\sin^3(\beta)\Big(1 - 4\gamma_0\Big). \tag{5.3}$$

请注意，正如预期的那样，实度为 1 时的阻力系数并不取决于通过表达式 $\theta(s)f(Re_n, \beta)$（方程 (3.50) 中）对筛网两侧压力损失所作的假设。

我们测量了实度为 1 的方形板的阻力系数随攻角的变化，并将结果绘于图15。如图所示，预测值 (5.3) 与阻力系数的实验值之间存在差距，尤其是在低攻角时。造成这一差距的原因可能有多种。首先，对于实心板，若假设采用无滑移边界条件，则表面上的速度切向分量为零，并在边界层内逐渐增大。而在这里，该速度分量并非为零，而是取一个与区域 I 内沿流线的压头守恒相对应的值。此外，压力差 $p_I - p_{II}$ 显然未必总能通过模型的假设得到准确确定，尤其是在攻角较低（或形状特殊）时，可能会发生边界层分离并形成分离泡，从而显著影响表面周围的压力分布（Crompton & Barrett (2000)）。

从工程角度出发，根据伯努利方程，可以通过修正表面上的速度切向分量，将势流模型对压力分布的高估或低估纳入计算。事实上，我们可以对参数 γ_0 引入修正 σ，使模型中表面处的速度切向分量可解释为边界层中的均匀化切向速度，该速度受到表面实心部分产生的摩擦效应，以及边界层分离导致的吸力增减的影响。该值应取决于实度（因为众所周知，实度降低会使实心板后方的回流泡分离，也会导致边界层分离现象）、表面的形状以及倾角 β。对于置于自由流中的倾斜矩形板，这一考虑可通过以下方式表示：

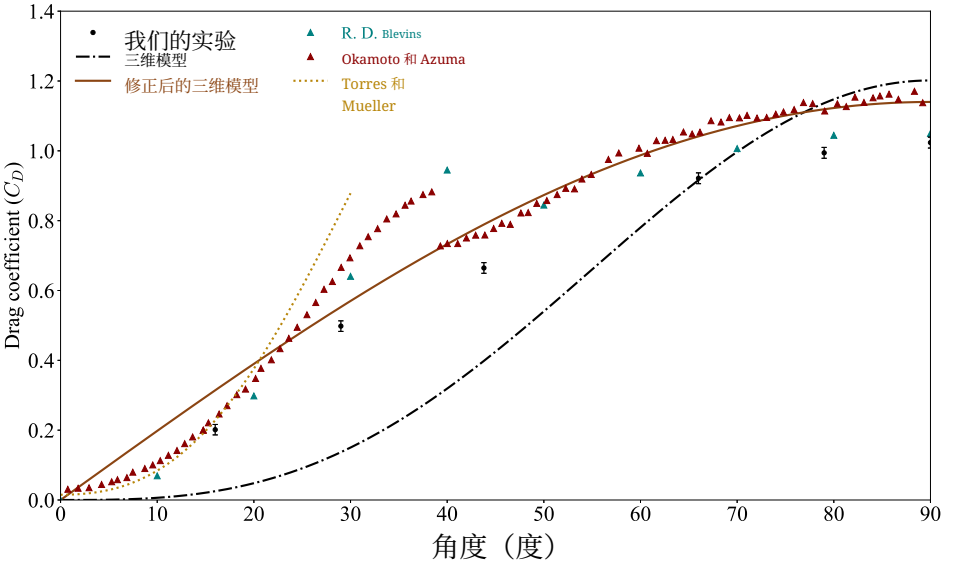


图15：比较三维模型对不同倾斜角下自由流中方形板阻力系数的预测值与实验测量值。补充了 Blevins (1992)、Okamoto & Azuma (2011)、Torres & Mueller (2004) 的数据。实线所示的修正是使用方程 5.5 和 $C_D^0 = 1.14$ 得出的，其中 $C_D^0 = 1.14$ 对应于 Torres & Mueller (2004) 中攻角为 $90°$ 时的阻力系数。

令切向速度满足以下表达式：

$$v_{I_t}^2 = \left(\omega^2 \gamma_0 \sigma(s,\beta) + \cos^2(\beta)\right) v_0^2. \tag{5.4}$$

而非方程 (3.43)。尽管可以通过比较模型与不同实度和角度下的实验，直接确定 σ，但我们发现，取 $s = 1$ 时的 σ 值便足以改进模型。如图15所示，对 β 的依赖关系较为复杂，尤其是在较小攻角下，约 $\beta = 40°$ 处观察到不连续性。选择 $\sigma(\beta)$，以确保阻力系数（方程 5.4）等于 $\beta \approx \frac{\pi}{2}$ 的实验值，从而得到：

$$\sigma(\beta) = \frac{1}{4\gamma_0}\left(1 - \frac{C_D^0}{2\sin^2(\beta)}\right), \tag{5.5}$$

其中，C_D^0 为攻角为90度时实心屏的阻力系数。使用来自Okamoto & Azuma (2011)的 C_D^0 在 $90°$ 处的数据，通过修正（5.5）得到的修正后的阻力系数绘制于图15中（修正后的三维模型曲线）。如图3和图11所示，对于三种不同的 β（对于这些图，所使用的阻力系数为来自我们的实验数据的 $C_D^0 = 0.939$在 $s = 1$ 处和 $\beta = 90°$），这种重新标度无需增加独立参数，即可显著改善我们的模型在其他实度下的预测结果。

值得注意的是，这种重新标度没有严格的物理表述，但能够使我们拟合图15所示随攻角变化的阻力系数。

在此阶段，模型未考虑表面的表面摩擦阻力效应，因为这类效应通常很小，因此可以忽略。事实上，可以根据以下内容估算表面摩擦阻力系数：

基于Blasius边界层近似，并使用模型参数（假设特征长度为 l，特征速度为 v_{It}），可得：

$$C_f = 0.664 \cos(\beta) s \sqrt{\frac{\nu}{l v_{It}}}. \tag{5.6}$$

根据我们的实验 $v_{It} = v_0 \approx 0.1\ m.s^{-1}$、 $s = 1$、 $l = 0.1\ m$ 和 $\beta = 0$，我们得到约为 $C_f \approx 0.01$。这与 Torres& Mueller（2004）的实验观察结果非常一致；他们发现，对于包括纵横比介于 0.5 至 2 的矩形板在内的不同形状平板，平均表面摩擦阻力为 0.015。

最后，未来研究中或许值得通过引入张量而非函数 σ 来建立一个更完整的模型，以便针对非均质多孔表面（例如定向纤维），根据方向明确表面摩擦的影响。

6. 结论

我们通过实验和理论研究了多孔筛网周围及穿过多孔筛网的流动。我们的三维模型可视为对 Koo 与 James（1973）模型的扩展，并结合了 Steiros 与 Hultmark（2018）的尾流模型。在最简单的表述中，该模型仅使用三类信息：第一是实度，第二是筛网的宏观几何形状，第三是基于纤维直径的雷诺数。该局部雷诺数 Re_d 以及三维效应会对流动和空气动力产生可能显著的影响。我们对由纤维组成的 30 多种多孔筛网进行了实验，以测量阻力。对于方形多孔屏，无论是法向放置还是具有较大攻角，模型与实验所得的阻力系数均表现出良好的一致性；仅在实度非常高时存在例外，但即便如此，其预测结果相比先前模型仍有所改善。我们从理论和实验两方面表明，对于实度相同的筛网，基于纤维直径的局部雷诺数越低，阻力系数越高。此外，在我们模型的支持下，我们的实验表明，高实度或局部雷诺数极低的多孔筛网，其阻力系数可能高于实心屏。对于包括穿孔板在内的其他类型筛网，一旦已知其跨越筛网的压力跃变定律，便可将其直接纳入模型。

如果已知实度等于 1 时筛网的阻力系数（通常很容易获得），那么我们就可以确定参数 σ 的取值；对于极高实度情况，该参数有助于提高模型的准确性。然而，对于低实度，σ 对模型几乎没有影响，因此可以将其设为 1。我们的模型也可能适用于非均匀多孔筛网。事实上，de Bray（1957年）发现，对于高实度的穿孔方形板，阻力系数取决于孔洞分布，即外围孔洞的阻力系数略高于内部孔洞。值得强调的是，在我们的模型中，应该可以实现具有非均匀实度的这种表面，从而尝试再现阻力系数上的这种差异。不过，这一考虑超出了本文的范围，将在后续研究中加以探讨。

我们注意到，该模型可能应用于风洞堵塞修正（Steiros 等（2022））和涡轮机建模（Ayati 等（2019））。根据 Steiros 等（2022），与其他模型相比，采用与本文所用模型类似的多孔板势模型，能够提高中等和高实度条件下的堵塞修正精度。然而，这些模型是二维的（Steiros 等

（2022）；Ayati 等（2019）），而涡轮机可能具有圆形三维结构。我们的理论和实验结果表明，与二维模型相比，使用三维模型可提高中等和高实度条件下阻力的精度（见图8a和图3）。此外，我们的实验结果表明，在高实度条件下，二维和三维模型都可能显著高估筛网上的法向速度 v_{I_n}。我们针对不同数量级的局部雷诺数 Re_d 所得的结果强调了考虑孔隙尺度特定几何形状的重要性；该几何形状可能导致与采用方程（3.18）中传统压力跃变定律所得结果之间出现显著差异。

后续研究应重点关注：（1）首先，研究具有曲率的更复杂形状。一种直接的建模方法是采用多个小矩形板，如广为人知的面板法（相应地调整速度势 ϕ）；（2）其次，研究多孔筛网周围的压力和速度分布，因为关于自由三维流动的数据极少，甚至可能完全没有。我们再次强调，我们的模型假设存在定常尾流，因此不适用于在某一雷诺数范围内、实度较高时发生涡脱落的情况。

利益声明。作者报告称不存在利益冲突。

附录 A.

本附录包含在层流中，倾斜角度为 β （相对于 z 轴）的矩形筛网速度计算详情。

Usi沿用第 2 节中的符号，区域 I 中的速度势 is

$$\begin{aligned}\phi_I(x,y,z) &= v_0 z + c + \phi(x,y,z)\\ &= v_0 z + c - \frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{S}_p} \frac{\Omega(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}{\sqrt{(x-v)^2+(y-u\sin(\beta))^2+(z-u\cos(\beta))^2}}.\end{aligned} \tag{A 1}$$

A.1. 速度法向分量

由速度势可推导出区域 I 中的速度:

$$\mathbf{v_I}(x,y,z) = \left(v_0 + \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z)\right)\mathbf{e_z} + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{e_y} + \frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y,z)\mathbf{e_x}. \tag{A 2}$$

与表面夹角为 β 的法向量为

$$\mathbf{e_n} = -\cos(\beta)\mathbf{e_y} + \sin(\beta)\mathbf{e_z}. \tag{A 3}$$

因此，速度在表面法向上的分量为

$$\mathbf{v_{In}}(x,y,z) = \left(\sin(\beta)\left(v_0 + \frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z)\right) - \cos(\beta)\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z)\right)\mathbf{e_n}, \tag{A 4}$$

with

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{S}_p} \frac{(z-u\cos(\beta))\Omega(u,v)}{((x-v)^2+(y-u\sin(\beta))^2+(z-u\cos(\beta))^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{A 5}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{S}_p} \frac{(y-u\sin(\beta))\Omega(u,v)}{((x-v)^2+(y-u\sin(\beta))^2+(z-u\cos(\beta))^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{A 6}$$

因此，法向速度大小为

$$v_{In}(x,y,z) = \sin(\beta)v_0 - \frac{1}{4\pi}I(x,y,z), \tag{A 7}$$

with

$$I(x,y,z) = \iint_{\mathcal{S}_p} \frac{(\sin(\beta)z-\cos(\beta)y)\Omega(u,v)}{((x-v)^2+(y-u\sin(\beta))^2+(z-u\cos(\beta))^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{A 8}$$

当在表面上计算该分量时，积分在计算位置处变得奇异。我们必须计算这一奇异性的值。为简化计算，我们引入两个参数:

$$\begin{aligned}h &= y\sin(\beta) + z\cos(\beta),\\ t &= y\cos(\beta) - z\sin(\beta).\end{aligned} \tag{A 9}$$

因此，反过来可得

$$\begin{aligned}y &= h\sin(\beta) + t\cos(\beta),\\ z &= h\cos(\beta) - t\sin(\beta).\end{aligned} \tag{A 10}$$

˜用新的参数表示 I 积分 I，且不包含源强 Ω

假设其连续。我们得到

$$\begin{aligned}\tilde{I}(x,h,t) = & -\int_{v_a}^{v_b}\int_{u_a}^{u_b}\frac{t}{((x-v)^2+t^2+(h-u)^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ & = F_{u_a,v_a}(x,h,t) - F_{u_b,v_a}(x,h,t) - F_{u_a,v_b}(x,h,t) + F_{u_b,v_b}(x,h,t),\end{aligned} \tag{A 11}$$

with

$$F_{u_a,v_a}(x,h,t) = \arctan\left(\frac{(h-u_a)(v_a-x)}{t\sqrt{(x-v_a)^2+t^2+(h-u_a)^2}}\right). \tag{A 12}$$

现在可以引入

$$\begin{aligned} y &= w\sin(\beta), \\ z &= (w+\epsilon)\cos(\beta). \end{aligned} \tag{A 13}$$

参数变为

$$\begin{aligned} h &= w, \\ t &= -\epsilon\cos(\beta)\sin(\beta). \end{aligned} \tag{A 14}$$

在表面 $\epsilon \to 0^{\pm}$ ($\pm$ 取决于我们接近~表面的方向，即上游或下游)，记 I 为采用新参数 w的积分 I，我们有

$$v_{In}(x,w) = v_n^-, \tag{A 15}$$

$$v_{IIn}(x,w) = Ev_n^+, \tag{A 16}$$

with

$$v_n^{\pm} = \sin(\beta)v_0 - \frac{1}{4\pi}\lim_{\epsilon\to 0^{\pm}}\tilde{\tilde{I}}(x,w). \tag{A 17}$$

无论积分上下限的常数取何值，我们都有以下极限

$$\lim_{\epsilon\to 0^{\pm}}\tilde{\tilde{I}}(x,w) = \pm 2\pi\Omega(x,w). \tag{A 18}$$

因此，多孔表面上位置 (x,w) 处的速度法向分量为

$$v_{In}(x,w) = \sin(\beta)v_0 - \frac{1}{2}\Omega(x,w), \tag{A 19}$$

and

$$v_{IIn}(x,w) = E\left(\sin(\beta)v_0 + \frac{1}{2}\Omega(x,w)\right). \tag{A 20}$$

A.2. 速度切向分量

我们将多孔表面上的切向量定义为

$$\mathbf{t} = \mathbf{t_1} + \mathbf{t_2}, \tag{A 21}$$

with

$$\mathbf{t_1} = \mathbf{e_x}, \tag{A 22}$$

$$\mathbf{t_2} = \sin(\beta)\mathbf{e_y} + \cos(\beta)\mathbf{e_z}. \tag{A 23}$$

因此，区域 I 中速度切向分量的大小为

$$\begin{aligned} v_{It}(x,y,z) &= \|(\mathbf{v_I}.\mathbf{t_1})\mathbf{t_1} + (\mathbf{v_I}.\mathbf{t_2})\mathbf{t_2}\| \\ &= \left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\sin(\beta)\frac{\partial\phi}{\partial y} + \cos(\beta)\left(v_0 + \frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{A 24}$$

若考虑源强为常数 Ω，则可写出表面上坐标为 (x,w)、且 w 按 A 13 定义的点处的切向速度:

$$v_{It}(x,w) = \left(\Omega^2\mathcal{I}_x^2(x,w) + (\Omega(\sin(\beta)\mathcal{I}_y(x,w) + \cos(\beta)\mathcal{I}_z(x,w)) + \cos(\beta)v_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{A 25}$$

为简便起见，我们采用表面上速度切向分量大小的均方根。于是

$$\begin{aligned} v_{It} &= \frac{1}{\sqrt{S_p}}\left(\iint_{\mathcal{S}_p} v_{It}^2(x,w)\mathrm{d}x\mathrm{d}w\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\Omega^2\gamma(\beta) + \Omega\alpha(\beta)v_0 + v_0^2\cos^2(\beta)\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{A 26}$$

with

$$\gamma(\beta) = \frac{1}{S_p}\iint_{\mathcal{S}_p} \mathcal{I}_x^2(x,w) + (\sin(\beta)\mathcal{I}_y(x,w) + \cos(\beta)\mathcal{I}_z(x,w))^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}w, \tag{A 27}$$

and

$$\alpha(\beta) = \frac{1}{S_p}\iint_{\mathcal{S}_p} 2\cos(\beta)(\sin(\beta)\mathcal{I}_y(x,w) + \cos(\beta)\mathcal{I}_z(x,w))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}w, \tag{A 28}$$

其中包含以下积分:

$$\mathcal{I}_x(x,w) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{S}_p} \frac{x-v}{\left((x-v)^2 + (w-u)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{A 29}$$

$$\mathcal{I}_y(x,w) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{S}_p} \frac{(w-u)\sin(\beta)}{\left((x-v)^2 + (w-u)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{A 30}$$

$$\mathcal{I}_z(x,w) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{S}_p} \frac{(w-u)\cos(\beta)}{\left((x-v)^2 + (w-u)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v. \tag{A 31}$$

计算这些积分并无特别困难，只需定义函数 $F_{a,\ b}$：$(x,w)\mapsto F_{a,\ b}(x,w)$，以及 $G_{a,\ b}$：$(x,w)\mapsto G_{a,\ b}(x,w)$，其中 $|a|\geqslant|x|$, $|b|\geqslant|w|$,

$$F_{a,b}(x,w) = \frac{1}{4\pi}\ln\left(\sqrt{(x-a)^2 + (w-b)^2} + w - b\right), \tag{A 32}$$

and

$$G_{a,b}(x,w) = \frac{1}{4\pi}\ln\left(\sqrt{(x-a)^2 + (w-b)^2} + x - a\right), \tag{A 33}$$

那么，如果我们对矩形区域 $[v_a,v_b]\times[u_a,u_b]$ 进行积分，就有

$$\mathcal{I}_x(x,w) = F_{v_a,u_a}(x,w) - F_{v_a,u_b}(x,w) - F_{v_b,u_a}(x,w) + F_{v_b,u_b}(x,w), \tag{A 34}$$

Aspect ratio	l_1	l_2	γ_0
1	0.1	0.1	0.0998
2	0.1	0.2	0.0977
4	0.1	0.4	0.0934
8	0.1	0.8	0.0894
10	0.1	1.0	0.0884
20	0.1	2.0	0.0861

表3：不同纵横比矩形板的形状参数。

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_y(x,w) = \sin(\beta)\,(&G_{v_a,u_a}(x,w) - G_{v_a,u_b}(x,w)\\ &-G_{v_b,u_a}(x,w) + G_{v_b,u_b}(x,w))\,,\end{aligned} \tag{A 35}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_z(x,w) = \cos(\beta)\,(&G_{v_a,u_a}(x,w) - G_{v_a,u_b}(x,w)\\ &-G_{v_b,u_a}(x,w) + G_{v_b,u_b}(x,w))\,,\end{aligned} \tag{A 36}$$

这些表达式也可以再次在矩形区域 $[v_a, v_b] \times [u_a, u_b]$上积分。对于垂直于自由流 vo的筛网， $\beta = \frac{\pi}{2}$ 切向速度则减小为

$$v_{It} = \Omega\sqrt{\gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \tag{A 37}$$

A.3. *Valu*不同纵横比矩形筛网的形状参数

从方程 (A 27) 和 (A28) 出发，我们可以改写 $\gamma(\beta)$ 和 $\alpha(\beta)$ 的表达式，以分离形状项和倾斜项。对于矩形板这一特定情形，这些表达式可以简化为

$$\gamma(\beta) = \gamma_0, \tag{A 38}$$

and

$$\alpha(\beta) = 2\alpha_0 \cos(\beta), \tag{A 39}$$

with

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(x,w) &= -\frac{1}{4\pi}\iint_{\mathcal{S}_p} \frac{w-u}{\left((x-v)^2 + (w-u)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\ &= G_{v_a,u_a}(x,w) - G_{v_a,u_b}(x,w) - G_{v_b,u_a}(x,w) + G_{v_b,u_b}(x,w).\end{aligned} \tag{A 40}$$

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{1}{S_p}\iint_{\mathcal{S}_p} \mathcal{I}_x^2(x,w) + \mathcal{J}^2(x,w)\mathrm{d}x\mathrm{d}w,\\ \alpha_0 &= \frac{1}{S_p}\iint_{\mathcal{S}_p} \mathcal{J}(x,w)\mathrm{d}x\mathrm{d}w.\end{aligned} \tag{A 41}$$

基于对称性， $\alpha_0 = 0$。因此，倾斜于流动中的矩形板表面的速度切向分量实际上为

$$v_{It} = \left(\Omega^2\gamma_0 + v_0^2\cos^2(\beta)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{A 42}$$

我们计算了表3中参数 γ_0 在不同纵横比（$v_b = -v_a = \frac{l_1}{2}$和 $u_b = -u_a = \frac{l_2}{2}$）下的取值。

附录 B。

本附录详细说明了矩形筛网相对于 z轴以角度 β 倾斜于层流自由流时，源强 Ω 的计算过程。我们从以下方程开始。

压力差表示为

$$p_{II} - p_I = \frac{1}{2}\rho\left(v_{It}^2\left(1-E^2\right) + v_{In}^2\theta(s)f(Re_n,\beta)\right), \tag{B 1}$$

$$p_{III} - p_0 = \frac{1}{2}\rho\left(\left(1-E^2\right)v_0^2 + v_{In}^2\theta(s)f(Re_n,\beta)\right). \tag{B 2}$$

阻力表示为

$$F_D = \rho v_0\left(1-E\right)v_n S_p + \frac{1}{v_0}\left(p_0 - p_{III}\right)\frac{v_n}{E}S_p, \tag{B 3}$$

$$F_D = \left(p_I - p_{II}\right)\sin\left(\beta\right)S_p + \rho v_n v_0\cos^2(\beta)\left(1-E\right)S_p. \tag{B 4}$$

在这些表达式中，筛网表面的速度的法向分量和切向分量为

$$v_{In} = \sin\left(\beta\right)v_0 - \frac{1}{2}\Omega, \tag{B 5}$$

$$v_{It} = \left(\Omega^2\gamma_0 + v_0^2\cos^2\left(\beta\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{B 6}$$

然后，记作 $\omega = \frac{\Omega}{v_0}$，速度为

$$\frac{v_{In}}{v_0} = \sin\left(\beta\right) - \frac{1}{2}\omega, \tag{B 7}$$

$$\frac{v_{It}}{v_0} = \left(\omega^2\gamma_0 + \cos^2\left(\beta\right)\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{B 8}$$

衰减系数 E 为

$$E = \frac{\sin\left(\beta\right) - \frac{1}{2}\omega}{\sin\left(\beta\right) + \frac{1}{2}\omega}. \tag{B 9}$$

对于压力差，我们得到

$$\frac{p_{II} - p_I}{\frac{1}{2}\rho v_0^2} = \left(\omega^2\gamma_0 + \cos^2\left(\beta\right)\right)\frac{2\omega\sin\left(\beta\right)}{\left(\sin\left(\beta\right) + \frac{1}{2}\omega\right)^2} + \left(\sin\left(\beta\right) - \frac{1}{2}\omega\right)^2\theta(s)f(Re_n,\beta), \tag{B 10}$$

$$\frac{p_{III} - p_0}{\frac{1}{2}\rho v_0^2} = \frac{2x\sin\left(\beta\right)}{\left(\sin\left(\beta\right) + \frac{1}{2}x\right)^2} + \left(\sin\left(\beta\right) - \frac{1}{2}x\right)^2\theta(s)f(Re,\beta). \tag{B 11}$$

阻力的第一个表达式为

$$\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v_0^2 S_p} = \frac{2\omega\left(\sin\left(\beta\right) - \frac{1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\beta\right) + \frac{1}{2}\omega} + \left(\sin\left(\beta\right) + \frac{1}{2}\omega\right)\frac{p_0 - p_{III}}{\frac{1}{2}\rho v_0^2}. \tag{B 12}$$

阻力的第二个表达式为

$$\frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v_0^2 S_p} = \frac{p_I - p_{II}}{\frac{1}{2}\rho v_0^2}\sin\left(\beta\right) + \cos^2(\beta)\frac{2\omega\left(\sin\left(\beta\right) - \frac{1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\beta\right) + \frac{1}{2}\omega}. \tag{B 13}$$

阻力系数的两个表达式为

$$C_D = \frac{-\omega^2}{\sin(\beta) + \frac{1}{2}\omega} - \left(\sin(\beta) + \frac{1}{2}x\right)\left(\sin(\beta) - \frac{1}{2}x\right)^2 \theta(s) f(Re_n, \beta), \tag{B 14}$$

$$\begin{aligned} C_D = \cos^2(\beta)\frac{2x\left(\sin(\beta) - \frac{1}{2}\omega\right)}{\sin(\beta) + \frac{1}{2}x} - \sin(\beta)\left(\sin(\beta) - \frac{1}{2}\omega\right)^2 \theta(s) f(Re_n, \beta) \\ - \left(\omega^2\gamma_0 + \cos^2(\beta)\right)\frac{2\omega\sin^2(\beta)}{\left(\sin(\beta) + \frac{1}{2}\omega\right)^2}. \end{aligned} \tag{B 15}$$

结合表达式 (B 14) 和 (B 15)，我们得到方程

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8}\omega^4\theta(s) f(Re_n, \beta) + \omega^2\sin^2(\beta)\Big(8\gamma_0 + \theta(s) f(Re_n, \beta) - 2\Big) - \\ 4\omega\sin(\beta) - 2\sin^4(\beta)\theta(s) f(Re_n, \beta) = 0. \end{aligned} \tag{B 16}$$

注意　对于垂直于自由流的矩形筛网，该方程简化为 :

$$-\frac{1}{8}\omega^4\theta(s) f(Re_n, \beta) + \omega^2\left(8\gamma_0 + \theta(s) f(Re_n, \beta) - 2\right) - 4\omega - 2\theta(s) f(Re_n, \beta) = 0. \tag{B 17}$$

如果矩形筛网的长度 L （或宽度 D）无限长，那么我们可以证明:

$$\lim_{L\to\infty} \gamma_0 = \frac{1}{12}, \tag{B 18}$$

接下来，我们讨论 Steiros 与 Hultmark（2018）研究的二维情形。

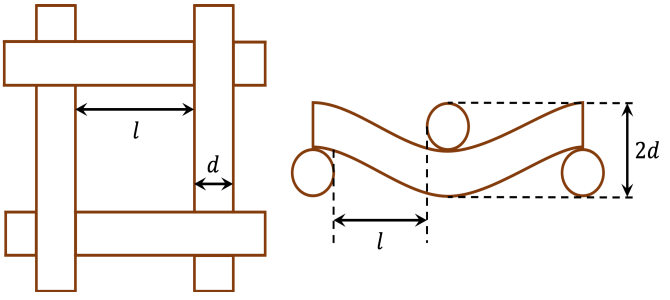


图16：纤维网示意图。

附录 C。

本附录介绍实验数据及其处理的详细信息。

C.1. 筛网样品

表4列出了测量中使用的不同多孔筛网的特性。它们主要是方形金属丝网筛，如图16所示。此外，还使用了另外5种筛网来测试该模型的稳健性。

C.2. 耦合阻力修正

由于支杆和框架支撑着多孔结构，要从由测量力组成的原始数据中获取多孔结构的阻力系数，测量力记为 F_{t+m}，因此必须将各部分的贡献分离。

在分析数据时，我们采用最简单的假设，即耦合可以忽略。因此，多孔筛网的阻力等于整个系统（支杆、框架和多孔筛网）的阻力，减去支杆和框架（未安装多孔筛网时，在一系列测量开始前测得）的阻力。为了证明这一假设合理，我们针对假定的最坏情况（即实度等于 1）估算了耦合阻力（由框架与筛网之间的干扰产生的附加项）。

据我们所知，这种耦合是非线性的，目前没有通用方法。我们采用的方法详述如下，该方法基于图17所示的有框架和无框架情况下的不同测量。由于支杆形状细长，且其与筛网的连接方式，我们可以合理地假设支杆的阻力 F_m 与系统其余部分的阻力 F_t 相加（所得结果记为 F_{t+m}）。对于框架，预计其与多孔结构之间的耦合影响更为显著。我们测量了单独支杆的阻力 F_m，并从 F_{t+m} 中减去该值。我们测量了支杆与框架的阻力 F_{m+c}，从而得到框架的阻力 $F_c = F_{m+c} - F_m$。多孔筛网的阻力记为 F_p，耦合项记为 ΔF。测得的框架与多孔筛网的总力 F_t 可写为

$$F_t = F_c + F_p + \Delta F. \tag{C 1}$$

为确定耦合（或干扰）项 ΔF，我们准确知道多孔结构在两个实度下的阻力：第一种实度为 $s = 0$ where$F_p = 0$，第二种实度为 $s = 1$；对于后一种情况，我们可以轻松确定不带框架时的阻力，因为可以使用表面积和厚度相同的实心板。

筛网编号	纤维直径 d (毫米)	Reynolds数 Re_d	实度 s	Note
P1	0.29 ± 0.01	186	0.58 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P2	1.1 ± 0.5	705	0.41 ± 0.05	规则网
P3	1.9 ± 1.0	1218	0.87 ± 0.05	规则网
P4	0.26 ± 0.01	167	0.61 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P5	0.10 ± 0.01	64	0.56 ± 0.02	方形编织网，尼龙纤维
P6	0.18 ± 0.02	115	0.61 ± 0.02	方形编织网，金属纤维
P7	0.27 ± 0.01	173	0.45 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P8	0.13 ± 0.01	83	0.70 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P9	$0.0009 - 0.019$ 均值 0.006 ± 0.003	$0.6 - 12$ 4	0.26 ± 0.03	外科口罩， 根据物理特性 Monjezi & Jamaati（2021） 和 Du *et al.* (2021)
P10	0.27 ± 0.01	173	0.11 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P11	0.27 ± 0.01	173	0.37 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P12	0.27 ± 0.01	173	0.31 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P13	0.27 ± 0.01	173	0.17 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P14	0.27 ± 0.01	173	0.24 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P15	0.27 ± 0.01	173	0.24 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P16	0.27 ± 0.01	173	0.24 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P17	0.27 ± 0.01	173	0.15 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P18	0.27 ± 0.01	173	0.28 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P19	0.26 ± 0.01	167	0.52 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P20	0.26 ± 0.01	167	0.42 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P21	0.26 ± 0.01	167	0.32 ± 0.01	方形编织网，尼龙纤维
P22	0.050 ± 0.002	32	0.65	方形编织网，均质， 聚酰胺纤维
P23	0.025 ± 0.002	16	0.82	方形编织网，均质， 聚酰胺纤维
P24	0.030 ± 0.002	19	0.75	方形编织网，均质， 聚酰胺纤维
P25	0.037 ± 0.002	24	0.70	方形编织网，均质， 聚酰胺纤维
P26	0.44 ± 0.01	282	0.405 ± 0.002	平行尼龙纤维
P27	0.12 ± 0.01	38	0.115 ± 0.002	平行尼龙纤维
P28	0.44 ± 0.01	141	0.114 ± 0.002	平行尼龙纤维
P29	0.02 ± 0.002	6	0.080 ± 0.002	平行铜纤维
P30	0.44 ± 0.01	282	0.080 ± 0.001	平行尼龙纤维
P31	-	-	1.00	平板，厚度 $0.1\ mm$

表4：多孔筛网特性。雷诺数 Re_d 根据速度 $v_0 = 10\ m.s^{-1}$ 和运动黏度 $\nu = 15.6 \times 10^{-6}\ m^2.s^{-1}$计算，但筛网P27、P28和P29的速度为 $v_0 = 5\ m.s^{-1}$。

请注意，耦合值并不独立于实度：实际上，若假设二者呈单调关系，则实度越低，耦合值也越低，直至实度为零时耦合值降至零。这两点可以帮助我们估算耦合值。

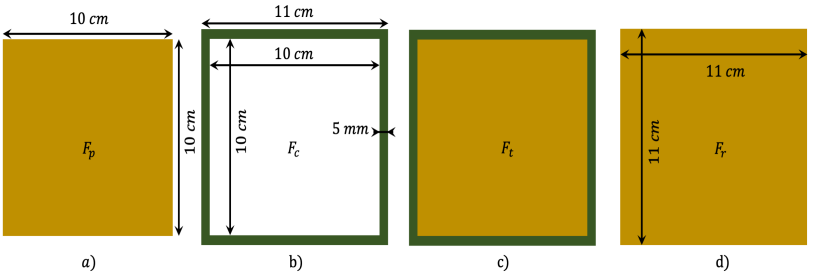


图17：筛网（深金色）和框架支撑（绿色）示意图。

实验	v_0 $(m.s^{-1})$	F_p (N)	F_c (N)	$F_t(N)$	F_r (N)	.....的估计 ΔF (N)	$F_t - F_c$ (N)
筛网位于 90°	0.51	0.002	0.002	0.004	0.003	0.000	0.002
	1.02	0.008	0.003	0.011	0.010	0.000	0.008
	4.00	0.101	0.022	0.118	0.122	-0.005	0.096
	5.03	0.159	0.036	0.185	0.191	-0.010	0.149
	5.98	0.221	0.052	0.260	0.272	-0.013	0.208
	7.00	0.301	0.072	0.350	0.370	-0.023	0.278
	8.02	0.398	0.095	0.467	0.490	-0.026	0.372
	8.97	0.495	0.118	0.588	0.606	-0.025	0.470
	9.99	0.620	0.144	0.710	0.750	-0.054	0.566
	11.01	0.753	0.173	0.862	0.919	-0.064	0.689
	12.03	0.897	0.208	1.024	1.092	-0.081	0.816
	12.98	1.042	0.240	1.178	1.262	-0.104	0.938
阻力系数 C_D	-	0.993	-	0.973	0.986	-	0.939

表5：不同速度下平板（实度$s = 1$）的耦合阻力数值汇总。所有数值的不确定度约为 $0.020\ N$。测量 F_p 和 F_r 时，使用了厚度为 $4.0\ mm$ 的实心平板，其厚度与用于测量 F_c 和F_t的框架厚度相同。阻力系数根据图17所示尺寸计算，流体密度则根据不同实验期间测得的温度、压力和湿度估算。

框架在系统两侧的厚度为 $0.2\ mm$ 。因此，为了量化这种挤出对阻力的影响，我们测量了实度为 $s = 1$ 时图17-d）中平板（示意图d）的阻力 F_r ，以及图17-c）中由框架和多孔筛网构成的系统的阻力 F_t ；两者边缘宽度相同。

我们注意到，采用恒定的耦合（干扰）阻力项对数据进行修正不会改变曲线形状。采用线性耦合进行修正只会产生轻微影响。事实上，尽管使用框架来拉伸纺织物似乎会低估

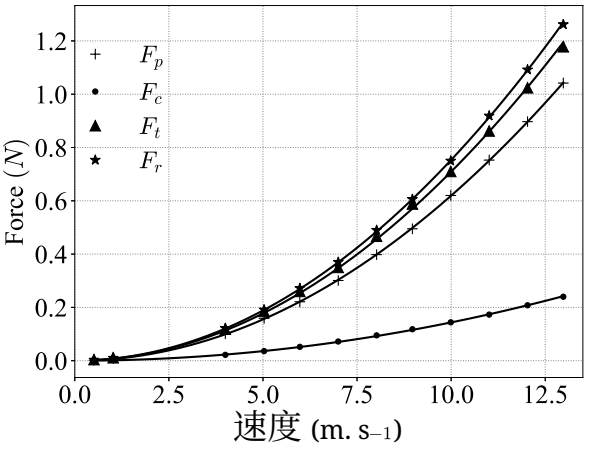


图 18：图17所示板和框架的阻力。数值和阻力系数见表5。数据采用关于速度 v_0 的二次定律进行拟合。表面垂直于平均远场流动方向 $\boldsymbol{v}_0$。

阻力系数，但在最不利情况下，直接测量的筛网（0.993）与在扣除其阻力后通过框架测量的筛网（0.939）之间的阻力系数差异，接近下一节计算出的不确定度量级。即使我们在所有数据中加入针对实度为 1 所估算的耦合阻力，这也不会改变我们的结论。因此，忽略干扰阻力是合理的，只需从总阻力中扣除框架阻力即可。

C.3. 阻力系数的确定

为确定阻力系数，我们采用最小二乘法对校正数据进行非线性回归。模型函数为

$$F_{p_i} = f(v_i, C_D) = \frac{1}{2}\rho S_p C_D v_i^2, \tag{C 2}$$

其中， C_D 为可调参数。我们将残差平方和 S 最小化

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - f(v_i, C_D)\right)^2 . \tag{C 3}$$

这导致

$$C_D = \frac{2}{\rho S} \frac{\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} v_i^2}{\sum_{i=1}^{n} v_i^4}. \tag{C 4}$$

C.4. 测量不确定度

接下来，我们估算物理量的测量不确定度 u。为简化起见，我们假设参数 ρ、F_{p_i}、v_i 和 S（对于 $i \in [\![1, n]\!]$）相互独立，且各自的不确定度相较于其数值都很小。我们

忽略 估算速度的不确定度，然后可以通过以下方式计算不确定度 h

$$u^2(C_D) = \frac{4}{\rho^2 S^2 \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^4\right)^2} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} F_{p_i} v_i^2\right)^2 \left(\frac{u^2(\rho)}{\rho^2} + \frac{u^2(S)}{S^2}\right) + \sum_{i=1}^{n} v_i^4 u^2(F_{p_i}) \right). \tag{C 5}$$

我们假设所有数据的力不确定度相同。这一假设得到了我们对几种多孔筛网进行的多次重复测量的支持；我们取所得力不确定度偏差的均值。

C.4.1. 实度不确定度

使用显微镜拍摄多孔筛网的图像，并以一百个网孔的尺度确定其网孔实度。通过多次图像分析估算实度及其相关不确定度。不确定度估算为 ± 0.02。

C.4.2. 参数和阻力的不确定度

阻力的不确定度来源于测力天平的误差。通过对不同多孔筛网重复进行多次测量，我们估计阻力不确定度约为 $\pm 0.02N$。空气密度的不确定度为$\pm 0.005\ kg.m^{-3}$。最后，筛网表面的不确定度估计为$\pm 4 \times 10^{-6}\ m^2$。

REFERENCES

Ando, Suguru, Nishikawa, Mitsuru, Kaneda, Masayuki & Suga, Kazuhiko 2022采用三维双向流固耦合方案，对流动诱导多孔纤维介质变形过程中的过滤过程进行数值模拟。 *Chemical Engineering Science* **252**, 117500。Apelt, C. J. & West, G. S. 1974 尾流分流板对 $10^4 < re < 5 \times 10^4$范围内钝体流动的影响。第2部分。 *J. Fluid Mech.* **71**, 145–160。Ayati, Anis A., Steiros, Konstantinos, Miller, Mark A., Duvvuri, Subrahmanyam &Hultmark, Marcus 2019 适用于任意转子载荷的垂直轴风力涡轮机双多流管模型。 *Wind Energy Science* **4** (4), 653–662。Bailey, B. J., Montero, J. I., Parra, J. Pérez, Robertson, A. P., Baeza, E. &Kamaruddin, R. 2003 有防虫网和无防虫网的温室通风装置的气流阻力。 *Biosystems Engineering* **86** (2), 217–229。Blevins, Robert D. 1992 *Applied fluid dynamics handbook*。马拉巴尔，伦敦：Krieger Publishing Company。Bourrianne, P., Xue, N., Nunes, J., Abkarian, M. & Stone, H. A. 2021 量化口罩对呼气流的影响。 *Physical Review Fluids* **6** (11), 110511。de Bray, B. G. 1957 垂直于气流的穿孔方形平板低速风洞试验：阻力和速度脉动测量。

Ministry of Supply Aeronautical , , *Research Council* 323 *current paper* ()。Brundrett, E. 1993 *J.* 对不可压缩 *Fluids Eng.* **115** 2 流穿过筛网时压降的预测。()。Carvajal, Danilo, Silva-Llanca, Luis, Larraguibel, Dante & González, Bastián 2020通过三维数值模拟研究雾水收集器的空气动力学雾收集效率。 *Atmospheric Research* **245**, 105–123。Cheer, A. Y. L. & Koehl, M. A. R. 1987 桨状器官与梳状器官：流体流经小型生物带刚毛附肢的过程。 *Journal of Theoretical Biology* **129**, 17–39。Crompton, M. J. & Barrett, R. V. 2000 研究平板入射时尖锐前缘后方形成的分离泡

Proceedings of the Institution 。*of Mechanical Engineers Part G: Journal of Aerospace Engineering* **214** 3 157 176 , (), –。 de Dios Rivera, Juan 2011 *Atmospheric* 雾收集器的空气 *Research* **102** 335 342 动力学收集效率。, –。Du, Wenjia, Iacoviello, Francesco, Fernandez, Tacson, Loureiro, Rui, Brett,Daniel J. L. & Shearing Paul R. 2021 用于新冠病毒防护的面罩微观结构分析与基于图像的建模。 *Communications Materials* **2** (69), 217–229。Eckert, B. & Pflüger, F. 1942 商用圆丝网的阻力系数。*Technical Memorandum*, *National Advisory Committee for Aeronautics* (1003)。Fail, R., Lawford, J. A. & Eyre, R. C. W. 1957 垂直于气流的平板尾流特征低速实验。 *Reports and Memoranda of the Aeronautical Research Council* 3120 ()。Giannoulis, A., Stathopoulos, T., Briassoulis, D. & Mistriotis, A. 2012 不同渗透性竖直面板上的风荷载。 *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **107 108**, 1 16 ––。Gunter, N. M. 1967 *Potential Theory and Its Application to Basic Problems of Mathematical* 。纽约: *Physics* Frederick Ungar。Hoerner, S. F. 1965 *Fluid dynamic drag*。作者自费出版。Hood, Kaitlyn, Jammalamadaka, M. S. Suryateja & Hosoi, A. E. 2019 具毛附肢的海洋甲壳类动物：流体动力边界层在感知和摄食中的作用。 *Physical Review Fluids* **4**, 114102。Ito, A. & Garry, K. P. 1998 二维纱网入射时周围的压力测量。 *Journal of Fluids and Structures* **12**, 171–181。Johari, Hamid & Desabrais, Kenneth J. 2005 降落伞伞衣近尾流中的涡脱落。 *J. Fluid Mech.* **536**, 185–207。Kalugin, V. T., Epikhin, A. S., Chernukha, P. A. & Kalugina, M. D. 2021 穿孔对平板空气动力学特性及其周围涡流场的影响。*IOP Conference Series: Materials Science and Engineering* **1191**。Koo, J.-K. & James David F. 1973 *J. Fluid Mech.* 。流体绕过及穿 **60** 513 538 过筛网的流动。, –。Kress, Rainer 1999 *Linear integral equations*。纽约: Springer, 《应用数学科学》, 第82卷。Laws, E. M. & Livesey, J. L. 1978 流体穿过筛网的流动。 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **10**, 247–266。Ledda, Pier Giuseppe, Boujo, E., Camarri, S., Gallaire, F. & Zampogna, G. A. 2021微结构膜的基于均质化的设计：流体绕过可渗透壳体时的尾流。 *J. Fluid Mech.* **927**。Ledda, P. G., Siconolfi, L., Viola, F., Gallaire, F. & Camarri, S. 2018 抑制多孔矩形柱后方的冯·卡门涡街。 *Physical Review Fluids* **3**。Letchford, C. W. 2001 矩形标牌和围挡上的风荷载。 *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **89** 135 151 , –。Mittal, R., Ni 19 *Journal of fluid Mechanics* , R. & Seo, **894** J.-H. 2020 新冠病毒的流动物理特性。。Moncuquet, A., Mitranescu, A., Marchand, O. C., Ramananarivo, S. & Duprat, C. 2022 利用竖直纤维收集雾：实验室与原位研究相结合。*Atmospheric Research* **277**, 106312。Monjezi, Mojdeh & Jamaati, Hamidreza 2021 面罩规格对呼吸功和颗粒过滤效率的影响。 *Medical Engineering and Physics* **98**, 36 43–。Okamoto, M. & Azuma, A. 2011 不同平面形状机翼在低雷诺数下的空气动力学特性。 *AIAA Journal* **49** (6)。O'Neill, F. G. 2006 流体穿过及绕过筛网和纱网的源模型。 *Ocean Engineering* **33** 1884 1895 , –。Parkinson, G. V. & Jandali, T. 1970 钝体势流的尾流源模型。*J. Fluid Mech.* **40**, 577–594。Pezzulla, M., Strong, E. F., Gallaire, F. & Reis, P. M. 2020 多孔柔性条带在低雷诺数和中等雷诺数流动中的变形。 *Physical Review Fluids* **5**。

Pinker, R. A. & Herbert, M. V. 1967 方形网眼金属丝网中可压缩流的压力损失。 *Journal of Mechanical Engineering Science* **9** (1), 11–23. Pomaranzi, G., Daniotti, N., Schito, P., Rosa, L. & Zasso, A. 2020 多孔双层表皮系统对围护结构荷载影响的实验评估。 *Journal* Pontavice, *of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **196**

Emmanuel Du 2016 风筝推进：起飞与翱翔。博士论文，巴黎-萨克雷大学。Prandtl, L. & Flachsbart, O. 1932 丝绸网过滤器、圆丝网和方孔编织网的阻力。 *Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt zu Göttingen* . Pressley,

Andrew 2010 *Elementary differential geometry*. 伦敦：Springer。Regalado, Carlos M. & Ritter, Axel 2016 最优雾水收集器的设计：理论分析。 *Atmospheric Research* **178-179**, 45–54. Reynolds, A. J. 1969 纱网屏引起的流动偏转。 *Journal Mechanical Engineering Science* **11** 65 ( ). Roshko,

A. 1954 自由流线理论的新速端曲线。 *Technical Note National Advisory* , ( ). Sarpkaya, *Committee for Aeronautics* 3168

Turgut & Lindsey, Paul J. 1990 多孔弯曲壳体周围的非定常流。*Journal of Aircraft* **28** (8).

Schubauer, G. B., Spangenberg, W. G. & Klebanoff, P. S. 1950 阻尼网的空气动力学特性。 *National Advisory Committee for Aeronautics Collection* 2001 ( ). Shklyar,

A. & Arbel, A. 2008 采用瞬态SST和k-ϵ 湍流模型对流过筛网的湍流进行数值模拟。 *Acta Hortic.* **802**, 61–66. Simmons, M. A. & Cowdrey, C. F. 1945 多孔筛网所受空气动力的测量。 *Reports and Memoranda, National Advisory Committee for Aeronautics* (2276). Steiros, K., Bempedelis, N. & Cicolin, M. M. 2022 高实度涡轮机的解析堵塞修正模型。 *J. Fluid Mech.* **948** (A57). Steiros, K. & Hultmark M. 2018 *J. Fluid Mech.* , 任意孔隙率平板的阻力。 , – . Taylor, G. I. 1944 高孔隙率材料平板的空气阻力。 **853** 1 11 *Reports and Memoranda of the Aeronautical Research Council* 2236 ( ). Taylor,

G. I. & Davies, R. M. 1944 多孔薄板的空气动力学。 *Reports and Memoranda of the Aeronautical Research Council* 2237 ( ).Teitel,

Meir 2010 利用计算流体力学模拟确定编织网的压降。 *Biosystems Engineering* **105**, 172–179. Torres, Gabriel E. & Mueller, Thomas J. 2004 低雷诺数下低展弦比机翼的空气动力学。 *AIAA Journal* **42** (5).Wang, Ye, Yang, Guang, Huang, Yiye, Huang, Yonghua, Zhuan, Rui & Wu, Jingyi 2021考虑孔隙结构影响的金属丝网流过筛网压降解析模型。 *Chemical Engineering Science* **229**. Wieghardt, K. E. G. 1953 论筛网阻力。 *Aeronautical Quarterly* **4**, 186–192. Wu, T. Yao-Tsu 1962 自由流线流动理论的尾流模型。第一部分：斜平板后充分发展和部分发展尾流及空腔流。 *J. Fluid Mech.* **13**, 161 192– .Xu, Mao, Patruno, Luca, Lo, Yuan-Lung & de Miranda, Stefano 2020 关于采用压力跃变方法模拟多孔结构周围分离外部流：前向台阶。 *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **207** . Yih,

C.-S. 1957 三维流中的流函数。 *La Houille Blanche* **43**, 439–450.