arXiv:2303.00718v2 [physics.class-ph] 6 Jun 2023

滑动与黏性接触的电界面条件

J. Rekier,[1,2,*] S. A. Triana,[1] A. Trinh,[3] 和 B. Buffett[2]
[1] *Royal Observatory of Belgium, 3 avenue circulaire, B-1180 Brussels, Belgium*
[2] *Department of Earth and Planetary Science, University of California, Berkeley, CA 94720, USA*
[3] *Lunar and Planetary Lab, University of Arizona Tucson, AZ 85721-0092, USA*
（日期：2023年6月7日）

电磁学的第一原理要求，两种介质交界面处的切向电场必须连续。电场的定义取决于参考系；当界面两侧不处于同一静止参考系时，连续性条件的数学表达式因此存在歧义。我们简要回顾支持各种界面条件选择的论据，并说明理论上最一致的选择如何导致感应实验中的悖论。随后，我们提出两种固体之间以及流体与固体之间滑动接触的模型，并展示如何将界面处薄中间黏性层中由差动运动引发的剪切纳入考量，从而消除这一悖论，同时也消除电界面条件中的歧义。我们还针对磁流体动力学应用，提出了关于应采用何种界面条件的一些指导原则；这些原则尤其适用于数值模拟，因为在此类模拟中，滑动接触被用来近似导电固体与极低黏度流体之间的黏性界面，例如行星内部模拟中的情况。

I. 引言

求解连续介质中的电磁学问题，需要在性质不同的区域之间的界面上施加连续性条件。这些界面条件可由积分形式的麦克斯韦方程组公理化地推导得出 [例如 1, 2]。从同一起点出发，还可以利用散度定理和旋度定理，推导出麦克斯韦方程组的微分局部形式。一些教科书倾向于从微分形式反向推导，尝试通过对界面两侧的麦克斯韦微分方程积分来推导界面条件 [例如 3]。在大多数情况下，这样做完全没有问题；但若界面两侧彼此相对运动，就会产生困难。在形变介质中便会出现这种情况。仔细考察麦克斯韦方程组的“介质形式”可知，界面两侧在各自瞬时静止系中测得的切向电场——等价于单位长度的电动势——必须满足连续性 [4, 另见 5, 6]。这一条件与电弹性应用相关 [7]，也是等离子体物理中常用的条件 [8–10，另见 11]。

最近，Satapathy 和 Hsieh [12] 利用两项电磁轨道炮实验，证实了该条件对于滑动接触的两个固体之间界面的有效性。他们表明，常用的另一种界面条件要求在实验室参考系中测得的切向电场连续，但这种条件无法重现实验数据。这与其他经典实验的结果相矛盾；在那些实验中，后一种条件被证明是有效的[例如 13]。本文旨在探讨这一矛盾。

在第 II 节中，我们以数学形式陈述问题，并简要回顾支持这两种界面条件的论据。我们还将说明，在一个简单的旋转圆柱感应实验中，理论上更一致的边界条件选择会如何导致悖论。在第III节中，我们将介绍一个简单的界面模型，并说明考虑两种介质之间中间黏性层中的剪切作用后，悖论如何消解。最后，在第 IV节中，我们将模型推广到固-流界面的情形，并说明在这种情况下，流体边界层如何自然地发挥中间层的作用。我们将在第 V节中提出与磁流体力学应用和数值模拟相关的一些结论与指南。

II. 理论动机

本节将从理论角度回顾两种介质之间的电边界条件，并通过一个简单示例说明其不同的解释。

* 通讯作者：jeremy.rekier@observatory.be

标签	条件	等价形式	正文中的方程
C.I	$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}]_-^+ = \mathbf{0}$	$\hat{\mathbf{n}} \times [\eta\nabla \times \mathbf{B}]_-^+ = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B})[\mathbf{v}]_-^+$	方程（1）和（4）中，$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} = 0$
C.II	$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_-^+ = \mathbf{0}$	$\hat{\mathbf{n}} \times [\eta\nabla \times \mathbf{B}]_-^+ = \mathbf{0}$	方程（2）和（5）

表 I：本文中使用的界面条件

A. 电边界条件

在界面之间　　在两种介质中，电场 $\mathbf{E}$ 满足以下连接条件 [例如 1, 2]:

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}]_-^+ = \mathbf{0} \,, \tag{1}$$

其中，符号 $[\cdot]_-^+$ 表示括号内的量沿单位法向量 $\hat{\mathbf{n}}$穿过界面时的跃变。只要未指定参考系，方程（1）就存在歧义。事实上，在非相对论极限下，在以速度 $\mathbf{E}'$运动的参考系中测得的电场 $\mathbf{v}$ 与在实验室参考系中测得的电场 $\mathbf{E}$之间的关系为： $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$，其中 $\mathbf{B}$ 为磁场，在两个参考系中的值相同，即 $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$。仔细考察麦克斯韦方程组的积分形式可知，方程（1）实际上应写为 [5, 6,另请参见 11]:

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E}']_-^+ = \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow\ &\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_-^+ = \mathbf{0} \,. \end{aligned} \tag{2}$$

为方便起见，我们在附录 A中给出了上述内容的推导。方程（1）和（2）仅在两种介质彼此相对静止时才等价，即 $[\mathbf{v}]_-^+ = \mathbf{0}$。特别是，当两种介质处于滑动接触时，两者并不相容。在这种情况下，Satapathy 和 Hsieh [12] 最近基于两次电磁轨道炮实验证明了方程（2）的有效性。尽管如此，在大多数应用中，方程（1）似乎更受青睐。一个典型例子是 Herzenberg 和 Lowes 的实验 [13] ，他们研究了均匀磁场穿过旋转圆柱时产生的感应。

在本节余下部分中，我们将通过一个类似于Herzenberg 和 Lowes实验的简单模型，说明方程（1）和（2）之间的差异。为此，我们还需要以下始终成立的条件:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot [\mathbf{B}]_-^+ = 0 \,. \tag{3}$$

改写方程（1）和（2），以避免显式提及电场，也会很有用。根据欧姆定律，$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$，其中 $\mathbf{j}$ 是电流密度， σ 是电导率，再结合磁流体力学应用中相关的麦克斯韦方程组之前的形式的安培`定律 [1]， $\nabla \times \mathbf{B} = \mu\mathbf{j}$，其中 μ 是磁导率，方程（1）可写为:

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\eta\nabla \times \mathbf{B}]_-^+ = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B})[\mathbf{v}]_-^+ - [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B}]_-^+ \,, \tag{4}$$

这里用到了方程（3），并引入了磁扩散率 $\eta \equiv (\sigma\mu)^{-1}$。本文关注（$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{v}$） $= 0$的情形，即将边界视为静止且对速度不可渗透，因此可以舍去式（4）的最后一项。相比之下，方程（2）可简化为:

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\eta\nabla \times \mathbf{B}]_-^+ = \mathbf{0} \,. \tag{5}$$

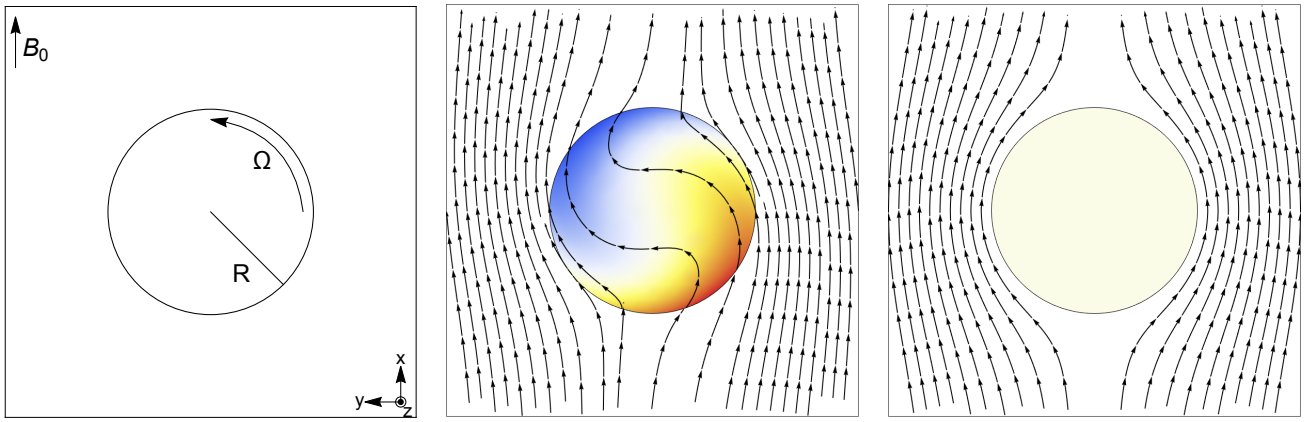
表I 总结了本文中使用的界面条件。

最后，我们还使用以下定义来表示面电流密度 $\mathbf{j}_s$，该定义以磁场 [6] 的切向分量为基础:

$$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{B}/\mu]_-^+ = \mathbf{j}_s \,. \tag{6}$$

B. 悖论：实心圆柱体中的感应

我们关注 Moffatt 提出的简单模型 [5] ，如图 1a [所示，另见 14]。圆柱区域充满区域 $s \in [0, R]$，其中 s（圆柱径向坐标）以角速度 Ω 稳定地绕 z轴旋转。整个体积都受到横向均匀外磁场的作用，$\mathbf{B}_0$, 沿着



(a) 几何　(b) (C.I) 和 $\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{B}]_-^+ = \mathbf{0}$　(c) (C.II) 和 $\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{B}]_-^+ \neq \mathbf{0}$

图 1：（a）旋转圆柱浸没在横向均匀背景磁场中。（b）基于 (C.I) 并假设边界处切向磁场连续时，Rm = 10 的解。流线表示磁场，颜色表示轴向电流密度的归一化值，蓝色和红色分别表示流入和流出页面。（c）同样的情形，但基于 (C.II)，并允许存在表面电流。在这种情况下，对于所有 Rm 值，内部磁场均为零，电流密度仅限于圆柱表面一层薄至趋于零的薄片中。

x方向。为简单起见，我们假设圆柱体与周围空间具有相同的磁扩散率，η。我们求解感应方程：

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \ , \tag{7}$$

假设 $\partial_t \mathbf{B} = \mathbf{0}$（稳态）。此时系统由无量纲磁雷诺数 的值控制，该数定义为 Rm $\equiv \Omega R^2/\eta$。磁场的解可以方便地表示为 $\mathbf{B} = \nabla \times$（$A_z \hat{\mathbf{z}}$）的实部，其中 [详情参见 5。]：

$$A_z = B_0 e^{i\varphi} \begin{cases} c_1 J_1\left((1-i)\sqrt{\frac{\mathrm{Rm}}{2}}\frac{s}{R}\right), & s \leq R \ , \\ c_2 s^{-1} - s, & s > R \ , \end{cases} \tag{8}$$

其中 φ 为圆柱方位角坐标，J_n 表示阶数为 n的贝塞尔函数。两个积分常数 c_1 和 c_2由边界条件确定。方程（3）给出了 c_1 与 c_2之间的一个关系，因此还需要另一个关系。

在所考虑的稳态下，$\mathbf{E} = \mathbf{0}$ 在圆柱体内外均如此，这可由方程（8）结合安培定律和欧姆定律轻易验证。因此，条件（C.I）不对解施加任何约束。在同一稳态下，通常认为界面上的任何表面电流都有充足时间扩散至体积中，因此由方程（6）：$\hat{\mathbf{n}} \times [\mathbf{B}]_-^+ = \mathbf{0}$。由此可得：

$$c_1 = -\frac{2R}{\xi J_0(\xi)} \ , \qquad c_2 = R^2\left(1 - \frac{2J_1(\xi)}{\xi J_0(\xi)}\right) \ , \tag{9}$$

其中我们定义了 $\xi = (1-i)$(磁雷诺数/2)$^{1/2}$。图 1b 展示了磁雷诺数 Rm = 10对应的解。相比之下，条件（C.II）确实对解施加了约束，并由此得到：

$$c_1 = 0 \ , \qquad c_2 = R^2 \ . \tag{10}$$

相应的解如图 1c 所示。最显著的特点是圆柱体内部不存在磁感应，圆柱体表现得像理想导体（将 Rm $\to \infty$ 代入方程 9 取极限即可证实），尽管在推导方程（10）时，我们并未对 Rm 的取值作任何假设。该解还意味着表面电流的存在，将其代回方程（6）即可看出。基于上文所述的同一原因，这一特征在稳态下似乎并不符合物理实际。

(C.II) 无法重现Herzenberg 和 Lowes 实验结果，原因可追溯至这样一个假设：旋转圆柱与其周围介质处于滑动接触状态。在实验中，圆柱体

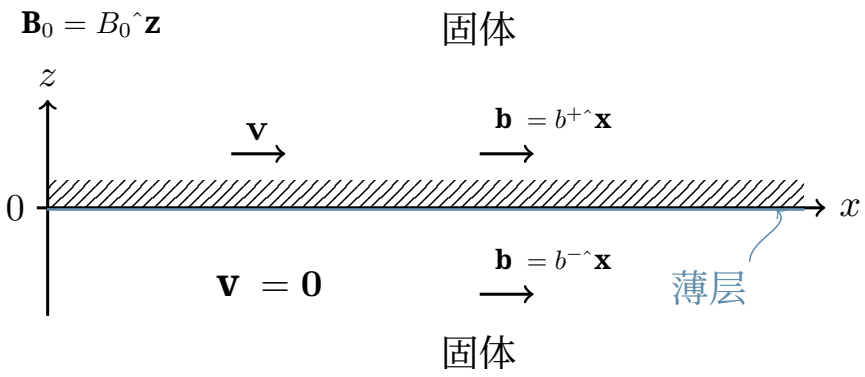


图 2：两个半无限导电固体相互叠置并发生滑动时界面的局部模型。两个固体之间存在薄黏性层（蓝色），这会彻底改变解（见正文）。

通过一层极薄的汞与支撑装置保持电接触，这层汞同时也起润滑剂的作用。由于黏度有限，这一中间层在旋转过程中会产生强烈的剪切。附录第 A3 节给出了存在此类过渡层时适用边界条件的正式推导。下一节将进一步考察界面处剪切所起的作用。

III. 界面处剪切的作用

我们考虑图 2 所示的简单示意模型，它表示两个导电刚性介质之间的界面。整个体积中贯穿着均匀的外加磁场，$\mathbf{B}_0$, 沿界面法线方向，选定该方向为 z轴；上层介质以给定频率沿切向振荡， ω，因此速度可写为 $\mathbf{v} = v\hat{\ }\mathbf{x}$，其中：

$$v = \begin{cases} \mathrm{Re}\left[\tilde{v}e^{-i\omega t}\right] \ , & z \geq 0 \\ 0 \ , & z < 0 \end{cases} . \tag{11}$$

为简单起见，我们假设整个体积内的磁扩散率为常数。我们还只关注界面附近的区域，因此可以安全地将两侧都近似为半无限介质。总磁场写作 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$，其中 $\mathbf{b}$ 是振荡所引起的扰动，必须满足感应方程（7）。我们首先考察不存在薄黏性层（图中蓝色）的情况。

由于对称性，感应场必须与速度方向相同，其大小只能取决于 z。因此我们写作$\mathbf{b} = b\hat{\ }\mathbf{x}$，其中：

$$b = \begin{cases} \mathrm{Re}[\tilde{b}^+ e^{i(\lambda^+ z - \omega t)}], & z \geq 0 \\ \mathrm{Re}[\tilde{b}^- e^{i(\lambda^- z - \omega t)}], & z < 0 \end{cases} . \tag{12}$$

我们得到 λ^+ 和 λ^- ，将上述结果代入感应方程（7），并要求解在$z \to \pm\infty$处满足正则性，可得：

$$\lambda^{\pm} = \pm\frac{1+i}{\delta_*} \ , \tag{13}$$

其中 $\delta_* = \sqrt{2\eta/\omega}$ 是磁皮肤深度。

最后，常数我们对边界条件的选择。$\tilde{b}^+$ 和 $\tilde{b}^-$ 为了尝试理解第IIB节中的悖论，当施加（C.II）时，我们首先考虑这一条件。在当前情况下，这给出了约束：

$$\tilde{b}^+ = -\tilde{b}^- \ . \tag{14}$$

再次可以看到，上述条件严格禁止界面两侧切向磁场的连续性，除非 $b^+ = b^- = 0$这一平凡情况，此时两种介质之间不存在感应。另一方面，(C.I)在此可改写为：

$$[\eta\partial_z b + B_0 v]_-^+ = 0 \ . \tag{15}$$

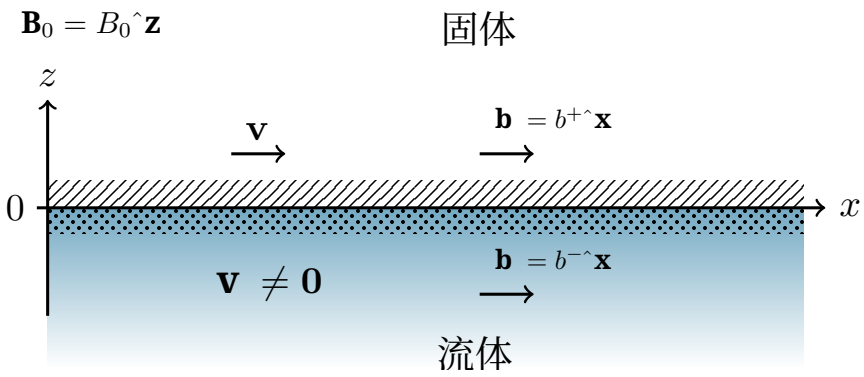


图3：固-流界面的局部模型。流体的有限黏度导致流体区域中出现薄边界层，以虚线区域表示（见正文）。

~ ~该条件与表面电流为零的要求 $b^+ = b^-$相结合，可得两侧的感应场均为非零值：

$$\tilde{b}^{\pm} = (1+i)\frac{B_0\tilde{v}}{4\eta}\delta_* \ . \tag{16}$$

由上可见，(C.I) 与 (C.II) 明显不相容，因为它们会导出截然不同的解。此外，从经验角度来看，前者似乎应优于后者，但这与第一性原理以及使用 (C.I) 的等离子体物理学应用相悖。不过，如果我们考虑一种略有不同的情形，即图2 中的薄蓝色中间黏性层存在，那么就有一种简单的方法可以从物理上说明采用该条件的合理性。我们可以将速度方程（11）中的表达式替换为一个对整个区域都有效的表达式，从而对此进行建模：

$$\mathbf{v} \to \Theta(z)\mathbf{v} \tag{17}$$

其中 $\Theta(z)$ 是满足 $\Theta(z \geq 0) = 1$的 Heaviside分布，而 $\Theta(z < 0) = 0$。代入方程（7），仅保留$\mathbf{v}$ 和$\mathbf{b}$的一次项，并利用恒等式：$d\Theta/dz = \delta(z)$，可得：

$$\partial_t \mathbf{b} = B_0\delta(z)\mathbf{v} + \eta\nabla^2\mathbf{b} \ , \tag{18}$$

其中 $\delta(z)$ 是狄拉克分布。对跨越界面 [见15] 的无穷小线段积分，可得方程（18），从而推出方程（15）。16这一论证表明黏性层在两个固体之间的界面处发挥着重要作用。只要我们能够合理地将该层近似为无限薄，这一论证就成立；但当导电黏性流体具有有限体积时，这一论证便不再适用。下面我们将讨论这种情况。

IV. 固体-流体界面处的剪切层

我们考虑图 3 所示的情形。这与第 III 节讨论的情形类似，但此时底部区域为流体，且具有有限黏度。流体区域中的流动速度 $\mathbf{v}$ 由动量方程控制：

$$\partial_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \frac{1}{\rho\mu}(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \nu\nabla^2\mathbf{v} \ , \tag{19}$$

其中 ν 为运动黏度，P 为压力，ρ 为假定恒定的质量密度。$\mathbf{B}$ 为由感应方程（7）描述的总磁场。与前文相同，我们写作 $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$。磁场扰动采用与方程（12）相同的形式。流体速度形式相似，但仅限于流体区域，因此整个速度场 $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ 可总结如下：

$$v = \begin{cases} \mathrm{Re}\left[\tilde{v}^+ e^{-i\omega t}\right], & z \geq 0 \\ \mathrm{Re}\left[\tilde{v}^- e^{i(\lambda^- z - \omega t)}\right], & z < 0 \end{cases} \ . \tag{20}$$

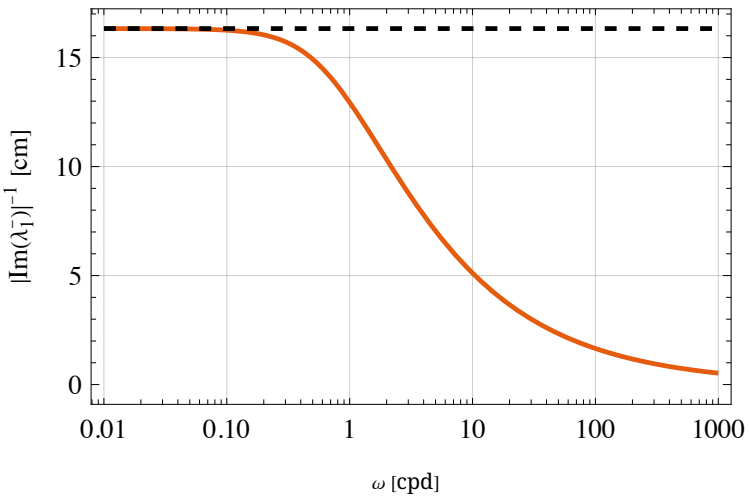


图 4：对于地球上部流体核的典型参数，流体-固体界面处边界层的厚度随频率（每天的周期数）变化。虚线表示对应于哈特曼层厚度 $\delta_H = \sqrt{\nu\eta}/v_A$ 的稳态极限。

对**v** 和**b**进行线性化后，方程（7）和（19）可写成如下矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} v_A\lambda\sqrt{\rho\mu} & \omega + i\lambda^2\eta \\ \omega + i\lambda^2\nu & v_A\lambda/\sqrt{\rho\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = 0 \ . \tag{21}$$

为便于阅读，我们省略了 $\tilde{v}^-$、 b^- 和 λ^- 中的上标，并引入了 $v_A = B_0/\sqrt{\rho\mu}$，它表示流体内部的阿尔芬速度 [16]。式（21）中矩阵的行列式必须等于零。对 λ求解，得到 [另见 17]:

$$\lambda^2 = -\left(\frac{v_A^2}{2\eta\nu} - i\omega\frac{\eta+\nu}{2\eta\nu}\right) \pm \sqrt{\frac{\omega^2}{\eta\nu} - \left(\omega\frac{(\eta+\nu)}{2\eta\nu} + i\frac{v_A^2}{2\eta\nu}\right)^2} \tag{22}$$

这些数值取决于参数。考虑到地球物理学应用，我们采用地核的典型数值： $\rho = 10^4\,\mathrm{kg/m^3}$, $\mu = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, $\eta = 0.5\,\mathrm{m^2/s}$, $\nu = 10^{-6}\,\mathrm{m^2/s}$, and$v_A = 4.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m/s}$。

总共有，对于 λ 有四个解，我们将其参数化为（重新引入上标 ）:

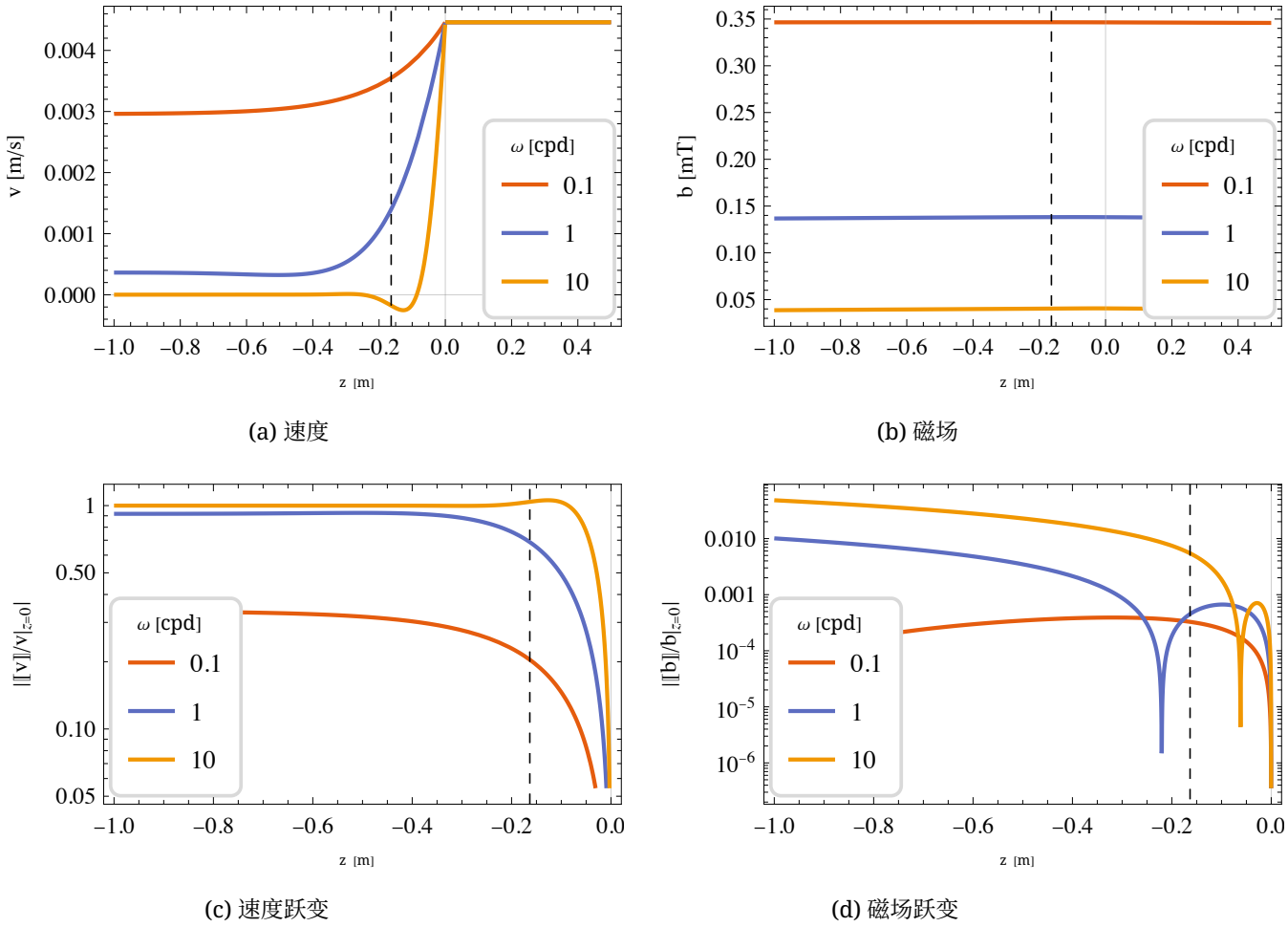
$$\lambda^- = k - i\delta^{-1} \ , \tag{23}$$

其中 k 和 δ 分别是表示波数和衰减长度的实数。我们仅保留满足 $\delta > 0$的解，这确保扰动在 $z \to -\infty$处收敛至零。在剩下的两个解中，一个解的 k 较大而 δ 较小，对应于快速衰减的短波长平面波。另一个解的 k 较小而 δ 较大，对应于缓慢衰减的长波长平面波：

$$\text{边界层:} \qquad \{\tilde{v}_1^-, \tilde{b}_1^-\}, \qquad \lambda_1^- = k_1 - i\delta_1^{-1} \ , \tag{24a}$$

$$\text{行波:} \qquad \{\tilde{v}_2^-, \tilde{b}_2^-\}, \qquad \lambda_2^- = k_2 - i\delta_2^{-1} \ , \tag{24b}$$

其中 $\delta_1 \ll \delta_2$ 和 $k_1 \gg k_2$。在第一个解中， δ_1 对应于图 3中虚线区域所示的边界层厚度。图 4 显示了其厚度随以每天周期数（cpd）表示的频率变化的关系。在稳态极限下，其厚度最大，等于哈特曼层厚度 $\delta_H = \sqrt{\nu\eta}/v_A$ （虚线）。与固体界面类似，常数 $\tilde{v}_1^-$、 $\tilde{b}_1^-$、 $\tilde{v}_2^-$和 $\tilde{b}_2^-$，以及上部固体区域的 $\tilde{b}^+$，均由 边界条件决定。 b_1^-和 b_2^-的值与 $\tilde{v}_1^-$和 $\tilde{v}_2^-$通过方程（21）相关，因此只需要三个约束条件。其中一个条件要求速度在界面两侧连续（无滑移）。这使得切向电场的条件明确无歧义，后者作为第二个约束条件。最后，我们假设界面处的切向磁场连续（无表面电流）。在我们的简单模型中，



(a) 速度　(b) 磁场

(c) 速度跃变　(d) 磁场跃变

图 5：上排：三个不同频率（单位为周周期）的速度和磁场扰动随深度的变化。下排：速度和磁场的相对跃变。黑色虚线表示稳态极限下哈特曼层的深度（见图 4）。

这三个约束条件可写为：

$$\text{无滑移:} \qquad \tilde{v}_1^- + \tilde{v}_2^- = \tilde{v}^+ \,, \tag{25a}$$

$$\text{电流连续性，（C.I）和（C.II）等价:} \qquad \lambda_1^- \tilde{b}_1^- + \lambda_2^- \tilde{b}_2^- = \lambda^+ \tilde{b}^+ \,, \tag{25b}$$

$$\text{磁场连续性:} \qquad \tilde{b}_1^- + \tilde{b}_2^- = \tilde{b}^+ \,. \tag{25c}$$

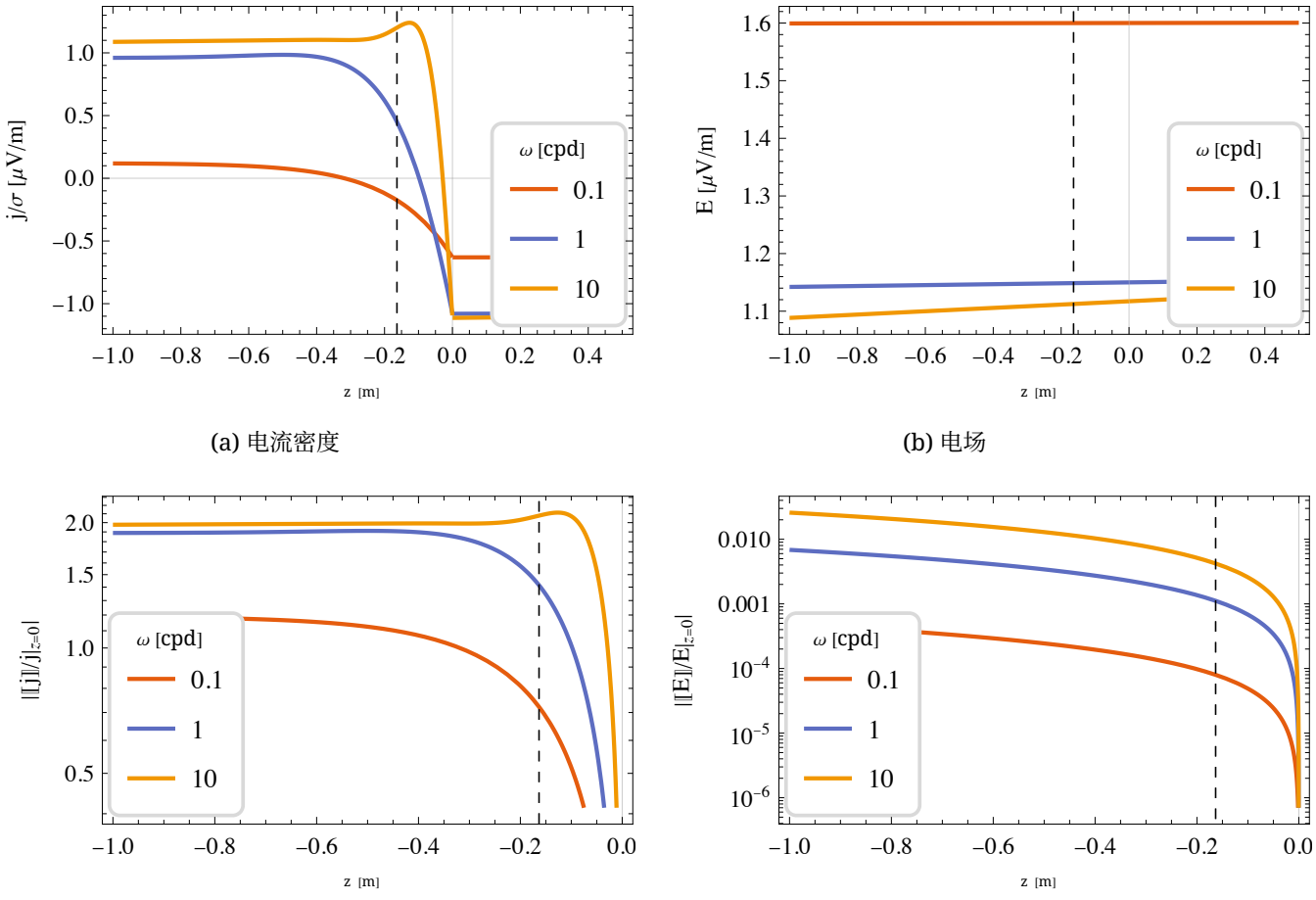
设定 $\tilde{v}^+$ 的值后，解便完全确定。为简单起见，我们取 $\tilde{v}^+ = v_A$，这与地球进动 [18] 所引起的地核和地幔之间的相对速度吻合良好。

图 5 上排展示了三个不同频率下，速度和磁场的大小随深度的变化。每幅图中的竖直虚线表示稳态极限下哈特曼层的宽度（见图 4）。虽然边界层的影响在速度剖面上清晰可见，但在磁场扰动中几乎无法察觉。这正是 $\eta \gg \nu$（例如地核中）[19, 20]这类流体的预期表现。在这种情况下，边界层正下方的流速会迅速趋近于流体主体中的速度——即所谓的 **自由流**——此处即为 $v = 0$。为了更好地量化边界层内的变化，我们引入以下记号 [另见 21, 22]：

$$[[b]] \equiv b|_{z=0} - b \,, \tag{26}$$

对于 v同样如此，以及其他量。 v 和 b 的跃变如图5 的底行所示，作为深度的函数给出其绝对值，并以这些场在界面处的值进行归一化。

最后，我们可以利用这个简单的玩具模型，探究 (C.I) 和 (C.II) 中哪一个更能代表界面附近电场的行为。图 6 上排显示了电流密度除以电导率后的大小



(a) 电流密度　(b) 电场

(c) 电流密度跃变　(d) 电场跃变

图 6：上排：界面附近的电流密度与电导率之比，以及电场。下排：电流密度和电场的相对跃变。黑色虚线表示稳态极限下哈特曼层的深度（见图 4）。

以及电场 $\mathbf{j}/\sigma = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_0$, 和电场 $\mathbf{E}$ 随深度的变化，图中给出了三个不同的频率值。下排显示了这些量的跃变相对于其在界面处取值的比值。可以看到，电流密度在边界层内变化很大，而电场几乎保持不变。我们可以将其用数学形式表示为：

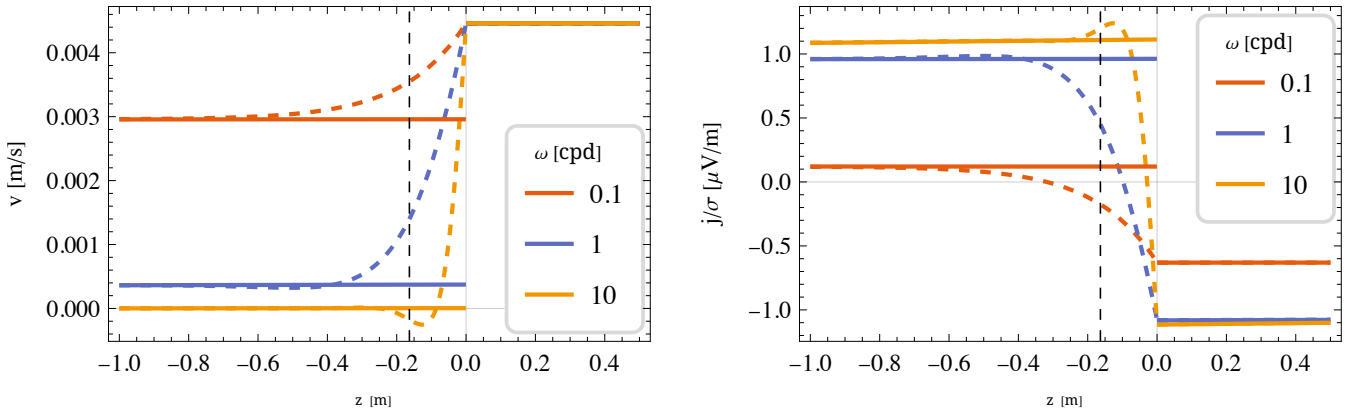
$$[[\eta \partial_z b + B_0 v]] \approx 0 \,, \tag{27}$$

该式在边界层内成立。方程（27）类似于第 15 节推导的方程（III ），后者针对黏性固-固界面，我们发现其与（C.I）等价。从这个角度看，后者可以被视为方程（27）在边界层无限薄时的极限情形。这一结果证明，在固-流界面处，（C.I）是有效的，前提是将其理解为一种条件：它将固体层内部的场值与自由流顶部（即薄边界层正下方）的场值联系起来。

正如我们在第 III节所论证的，条件（C.I）会自动考虑界面处的黏性剪切及其对场的影响。稍微调整上述模型，将界面处速度场的连续性（无滑移）条件替换为速度梯度条件，即可验证这对固-流界面也同样成立： $[\partial_z v]^{\pm} = 0$, 这相当于要求剪切应力在界面两侧连续。由于这里假设上层介质完全刚性，流体中的黏性应力必须在边界处消失——这就是所谓的无应力条件。更具体地说，这相当于将方程（25a）和（25b）替换为：

无应力：
$$\lambda_1^- \tilde{v}_1^- + \lambda_2^- \tilde{v}_2^- = 0 \,, \tag{28a}$$

电场连续性（C.I）：
$$\eta(\lambda_1^- \tilde{b}_1^- + \lambda_2^- \tilde{b}_2^- - \lambda^+ \tilde{b}^+) = iB_0(v_1^- + v_2^- - v^+) \,, \tag{28b}$$



(a) 速度

(b) 电流密度

图 7：采用边界条件方程（28a）和（28b）（实线）时，固-流界面附近的速度和电流密度，与第 IV 节的精确解（虚线）进行比较。

其中，只有在无滑移假设下，方程（28b）才简化为方程（25b）。图7 展示了 u的解，以及$\mathbf{j}/\sigma$ 的大小。虚线曲线对应于第IV 节给出的精确解，以供比较。我们看到，尽管模型中去除了剪切，但仅凭条件（C.I），精确解在边界层之外很快就与近似解等效。近似磁场和电场与图5b和6b所示的精确分布无法区分，因此这里不再重复展示。

V. 结论

两种介质界面处电场切向部分的连续性条件取决于问题的具体情况。当两侧处于真正的滑动接触时，理论和实验方面的考量都表明，应优先采用（C.II），而不是（C.I）。我们已说明，只要两种介质之间存在中间黏性层，（C.I）便适用。对于固-流界面，该层对应于流体边界层。因此，地球物理学和等离子体物理学应用（仅举几例）在各自采用（C.I）和（C.II）时都有充分依据；前者采用（C.I）时，通常隐含地假定存在边界层。

在实际的流体动力学计算中，这类边界层极小的厚度可能给建模带来挑战。在处理地球流体核心时尤其如此；在这种情况下，有时可以假设自由流一直延伸到界面，从而将界面处流动速度的突跃近似为真正的不连续性，以完全消除边界层。对于这种情况，我们在第IV 节中已表明，使用（C.I）可以保证：如果物理解的边界层足够薄（图7），近似解将接近物理解，尽管从理论角度来看，使用（C.I）并非严格自洽。

总之，为了决定在特定应用中应使用哪一种条件，首先应评估所考察界面处黏性层的存在及其厚度。这一评估及其对地球流体核心磁流体力学实际研究的影响，将在未来的工作中 प्रस्तुत。

致谢

J. R. 和 S.T. 对 Veronique Dehant 和 Tim Van Hoolst 的鼓励与支持，以及 Felix Gerick 富有启发性的讨论，表示衷心感谢。他们还感谢欧洲研究委员会（ERC）根据欧盟地平线2020研究与创新计划提供的资助（协同资助协议编号：855677 GRACEFUL）。J.R. 感谢加州大学伯克利分校地球与行星科学系在本项工作开展期间给予的热情接待。我们还要感谢匿名审稿人提出的意见，这些意见帮助改进了原始稿件中的部分论证。

附录A：电边界条件的推导

1. 法拉第感应定律

法拉第电磁感应定律将穿过（开放）曲面 $\mathcal{S}$ 的磁通量变化率与作用于该曲面的电动势联系起来；后者定义为沿包围轮廓线 $\mathcal{C}$ 的单位电荷所受洛伦兹力 积分：

$$-\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{S}(t)}\mathbf{B}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS=\oint_{\mathcal{C}(t)}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\hat{\boldsymbol{t}}dl\ , \tag{A.1}$$

其中，$\hat{\boldsymbol{n}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{t}}$ 分别表示垂直于 $\mathcal{S}$ 和与 $\mathcal{C}$相切的单位向量。一般而言，这两个区域可能随时间变化，这一点已反映在上述记号中。因此，不能简单地交换式（A.1）中积分与时间导数的顺序。相反，根据 雷诺输运定理 [（参见 例如 23]）：

$$-\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{S}(t)}\mathbf{B}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS=-\int_{\mathcal{S}(t)}\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+(\nabla\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{v}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS+\oint_{\mathcal{C}(t)}(\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\hat{\boldsymbol{t}}dl\ . \tag{A.2}$$

代回式（A.1），并利用 $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$，可得：

$$-\int_{\mathcal{S}(t)}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS=\oint_{\mathcal{C}(t)}\mathbf{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}dl\ . \tag{A.3}$$

此处必须强调，式（A.2）仅在 **B 和 v 在整个曲面上均为可微函数时才成立，** $\mathcal{S}$。此外，如果同一曲面上的电场 $\mathbf{E}$连续，则可使用 斯托克斯定理，其在当前情形下的形式为：

$$\oint_{\mathcal{C}(t)}\mathbf{E}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}dl=\int_{\mathcal{S}(t)}\nabla\times\mathbf{E}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS\ . \tag{A.4}$$

结合式（A.3）和（A.4），最终得到：

$$\int_{\mathcal{S}(t)}\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\nabla\times\mathbf{E}\right)\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS=\mathbf{0}\ . \tag{A.5}$$

上述关系必须对任意曲面 $\mathcal{S}(t)$ 都成立，这意味着：

$$\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\ , \tag{A.6}$$

它是麦克斯韦方程组的局部（微分）形式。重要的是，上述推导表明，式（A.6）与参考系无关。这也解释了为什么在上述方程中用 $\mathbf{E}$ 替换为 $\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}$是不一致的。这样做会忽略由面元运动引起的效应；这一效应在式（A.6）中是隐含的，而在式（A.1）中则是明确的。因此，通常后者更适合用于推导边界条件。

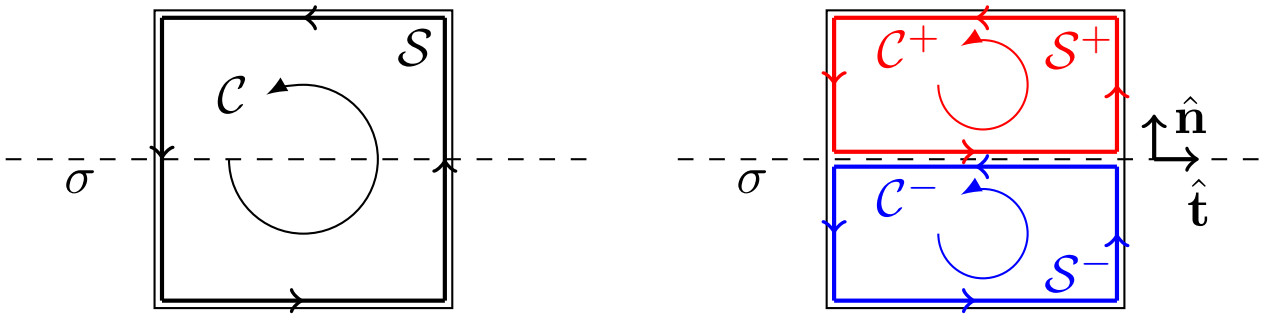
2. 电边界条件

在上一节中，我们假设三个向量 $\mathbf{v}$、$\mathbf{B}$和$\mathbf{E}$ 在整个区域内连续。现在，我们通过考察图 8a所示的情形，来看看情况并非如此时会发生什么：曲面 $\mathcal{S}$垂直穿过两个空间区域之间的界面，其交线以虚线表示，记为 σ；其单位法向量和切向量分别为 $\hat{\mathbf{n}}$ 和 $\hat{\mathbf{t}}$，请勿将它们与之前引入的“虚设”向量变量 $\hat{\boldsymbol{n}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{t}}$混淆。如果 $\mathbf{v}$、$\mathbf{B}$和$\mathbf{E}$ 在曲面两侧分段连续，我们可以像图 8b 中那样，将曲面 $\mathcal{S}$ 分成两部分，分别为 $\mathcal{S}^+$ 和 $\mathcal{S}^-$，使得 $\mathcal{S}=\mathcal{S}^+\cup\mathcal{S}^-$ 并满足以下性质：

$$\int_{\mathcal{S}}\mathbf{A}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS=\int_{\mathcal{S}^+}\mathbf{A}^+\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS+\int_{\mathcal{S}^-}\mathbf{A}^+\cdot\hat{\boldsymbol{n}}dS\ , \tag{A.7}$$

这对任意在 $\mathcal{S}^+$ 和 $\mathcal{S}^-$ 上分段连续的向量 $\mathbf{A}$都成立，其值分别形式化地记为 $\mathbf{A}^+$和 $\mathbf{A}^-$。合并轮廓积分 [24]时，我们需要稍微谨慎一些：

$$\oint_{\mathcal{C}}\mathbf{A}\cdot\hat{\boldsymbol{t}}dl=\oint_{\mathcal{C}^+}\mathbf{A}^+\cdot\hat{\boldsymbol{t}}dl+\oint_{\mathcal{C}^-}\mathbf{A}^-\cdot\hat{\boldsymbol{t}}dl-\int_{\sigma}[\mathbf{A}]_-^+\cdot\hat{\mathbf{t}}dl\ , \tag{A.8}$$



(a) (b)

图 8：（a）电路轮廓线 $\mathcal{C}$围成曲面 $\mathcal{S}$，沿直线 σ垂直地与两个空间区域之间的不连续面相交。（b）如果在 σ 处指定适当的连接条件，则总可以将 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{S}$各分解为两部分（见正文）。

其中，在最后一项中，我们将$\boldsymbol{t}$ 替换为其常值$\mathbf{t}$，如图 8b所示，并使用了正文中引入的以下记号：

$$[\mathbf{A}]_-^+ \equiv (\mathbf{A}^+ - \mathbf{A}^-)|_\sigma \ . \tag{A.9}$$

在 $\mathbf{A}$ 在整个区域内连续这一特殊情况下，两个值 $\mathbf{A}^+$ 和 $\mathbf{A}^-$在 σ 处收敛于同一个极限，方程（A.8）中的最后一项为零。

将方程（A.7）和（A.8）代入法拉第定律方程（A.1），然后可以重复上一节的步骤，将界面两侧的轮廓积分化为曲面积分，再利用方程（A.7）将其合并为一个积分。最终结果为：

$$\int_{\mathcal{S}(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS = \int_\sigma [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_-^+ \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \ . \tag{A.10}$$

方程（A.10）必须有效，无论 无论我们选择哪一个曲面， $\mathcal{S}$。特别地，取极限 $\mathcal{S} \to 0$，我们必须有：

$$[\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]_-^+ \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0 \ , \tag{A.11}$$

这等价于 (C.II)。

3. 含过渡层的电边界条件

现在我们转向图 9 所示的情形。除了两个区域 $\mathcal{S}^+$ 和 $\mathcal{S}^-$之外，还存在一个宽度为 δ、横截面为 $\mathcal{S}^\delta$的中间区域，该区域由轮廓线 $\mathcal{C}^\delta$围成，其中所有场的值都在 $\mathcal{S}^+$ 和 $\mathcal{S}^-$ 之间平滑过渡，因此场处处连续。于是我们可以写成 $\mathcal{S} = \mathcal{S}^+ \cup \mathcal{S}^\delta \cup \mathcal{S}^-$，并类比方程（A.7）和（A.8），得到：

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{A} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS = \int_{\mathcal{S}^+} \mathbf{A}^+ \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS + \int_{\mathcal{S}^-} \mathbf{A}^+ \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS + \int_{\mathcal{S}^\delta} \mathbf{A}^\delta \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS \ , \tag{A.12}$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} \cdot \hat{\boldsymbol{t}} dl = \oint_{\mathcal{C}^+} \mathbf{A}^+ \cdot \hat{\boldsymbol{t}} dl + \oint_{\mathcal{C}^-} \mathbf{A}^- \cdot \hat{\boldsymbol{t}} dl + \oint_{\mathcal{C}^\delta} \mathbf{A}^\delta \cdot \hat{\boldsymbol{t}} dl \ . \tag{A.13}$$

注意，方程（A.13）中没有与方程（A.8）最后一项类似的边界项，因为我们假设 $\mathbf{A}$处处连续。将上述结果代入法拉第定律方程（A.1），我们可以在三个区域中使用雷诺兹定理，并结合方程（A.12），得到：

$$-\int_{\mathcal{S}(t)} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS = \oint_{\mathcal{C}^+(t)} \mathbf{E}^+ \cdot \hat{\boldsymbol{t}} dl + \oint_{\mathcal{C}^-(t)} \mathbf{E}^- \cdot \hat{\boldsymbol{t}} dl + \oint_{\mathcal{C}^\delta(t)} \mathbf{E}^\delta \cdot \hat{\boldsymbol{t}} dl \ . \tag{A.14}$$

如果此时假设中间过渡区域非常薄，对应于极限 $\delta \to 0$，则式（A.14）的最后一项趋于零。接下来，为了合并右侧剩余的两个轮廓积分，

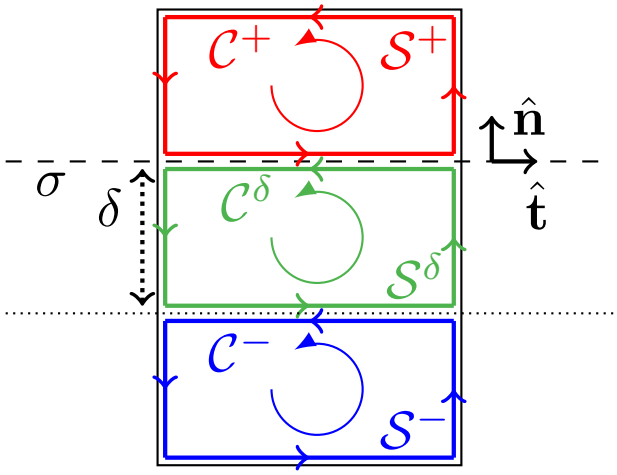


图9：类似于图8b，但带有厚度为 δ、横截面为 $\mathcal{S}^\delta$、由轮廓线 $\mathcal{C}^\delta$包围的中间过渡层。

我们必须使用式（A.8）中的公式，以考虑 $\mathbf{E}$ 在两个区域交界面处可能存在的不连续性。在极限 $\delta \to 0$下，该交界面位于 σ。利用斯托克斯定理，可得：

$$\int_{\mathcal{S}(t)} \left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} \right) \cdot \hat{\boldsymbol{n}} dS = \int_{\sigma} [\mathbf{E}]_-^+ \cdot \hat{\mathbf{t}} dl \ , \tag{A.15}$$

其中，我们再次将 $\hat{\boldsymbol{t}}$ 替换为其常数值 $\hat{\mathbf{t}}$。类比于方程（A.10），我们看到方程（A.15）意味着：

$$[\mathbf{E}]_-^+ \cdot \hat{\mathbf{t}} = 0 \ , \tag{A.16}$$

这等价于 (C.I)。

---

[1] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 第3版（Wiley，纽约，1999年）。[2] D. J. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 第4版（Pearson，波士顿，2013年）。[3] R. P. Feynman, *The Feynman Lectures on Physics: Mainly Electromagnetism and Matter. Vol. 2*（Addison-Wesley，1977年）。[4] M. Lax 和 D. F. Nelson，介质形式的麦克斯韦方程组，《物理评论B》13，1777（1976年）。[5] H. K. Moffatt, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*（剑桥大学出版社，1978年）。[6] A. C. Eringen 和 G. A. Maugin, *Electrodynamics of Continua. 1: Foundations and Solid Media*（Springer，纽约、海德堡，1990年）。[7] D. F. Nelson 和 M. Lax，热释电材料中的线性弹性与压电性，《物理评论B》13，1785（1976年）。[8] I. B. Bernstein、E. A. Frieman、M. D. Kruskal、R. M. Kulsrud 和 S. Chandrasekhar，流体磁稳定性问题的能量原理，《伦敦皇家学会会报》。A辑，数学与物理科学244，17（1958年）。[9] B. Lehnert, *Plasma Boundary Conditions in an External Magnetic Field*，技术报告 TRITA-ALF-1997-02（聚变等离子体物理阿尔文实验室，斯德哥尔摩，瑞典，1997年）。[10] D. D. Schnack, *Lectures in Magnetohydrodynamic*，《物理学讲义》第780卷（Springer，柏林、海德堡，2009年）。[11] K. S. Thorne 和 R. D. Blandford, *Modern Classical Physics: Optics Fluids Plasmas Elasticity Relativity and Statistical*，，，，，*Physics* 2017（普林斯顿大学出版社，普林斯顿，）。[12] S. Satapathy 和 K. Hsieh，麦克斯韦方程组的跃变条件及其后果，《AIP Advances》3，012120（2013年）。[13] A. Herzenberg 和 F. J. Lowes，旋转导体中的电磁感应，《伦敦皇家学会哲学汇刊》。A辑，数学与物理科学，249，78（1957年）。[14] P. A. Davidson, *An Introduction to Magnetohydrodynamics*，第1版（剑桥大学出版社，2001年）。[15] B. A. Buffett，由地球受迫章动推导出的磁能和地幔电导率约束，《地球物理研究杂志》97，19581（1992年）。[16] H. Alfv´en，电磁流体动力学波的存在，《自然》150，405（1942年）。[17] N. Schaeffer、D. Jault、P. Cardin 和 M. Drouard，关于阿尔芬波的反射及其对地核建模的影响：*Reflection of Alfvén waves*，《国际地球物理学杂志》191，508（2012年）。

[18] A. Tilgner，《地核的旋转动力学》，载于 *Treatise on Geophysics*（爱思唯尔，2015年），第183–212页。[19] K. Stewartson，《物体在导电流体中的运动》，《现代物理评论》**32**，855（1960年）。[20] K. Stewartson，《非导电物体在完全导电流体中的运动》，《流体力学杂志》**8**，82（1960年）。[21] P. H. Roberts 和 S. Scott，《关于长期变化的分析》，《地磁与地电学杂志》**17**，137（1965年）。[22] D. J. Acheson 和 R. Hide，《旋转流体的磁流体力学》，《物理学进展报告》**36**，159（1973年）。[23] R. Aris，*Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*，《多佛数学丛书》（多佛出版社，1990年）。[24] A. Eringen，*Mechanics of Continua*（R. E. Krieger 出版公司，1980年）。