arXiv:2303.00726v1 [physics.optics] 1 Mar 2023

非局域超透镜的透射效率极限

Shiyu Li 和 Chia Wei Hsu*

Ming Hsieh Department of Electrical and Computer Engineering, University of Southern California, Los Angeles, California 90089, USA

纳米光子设计能力的快速进步，正使复杂功能成为可能，而这些功能主要受物理界限的制约。透射效率是一项重要考量，但对于大多数系统而言，其最终极限仍然未知。在此，我们提出一种矩阵形式体系，仅依据能量守恒和预期功能，即可为任何无源多通道光学系统的通道平均传输效率设定一个基本上限，而与系统的内部结构和材料组成无关。将这一形式体系应用于具有宽视场的衍射受限非局域超透镜后，我们发现，对于通常采用的入射孔径与输出孔径直径相等的设计，透射效率必然随数值孔径增大而降低。我们还表明，减小入射孔径的尺寸可以提高效率上限。本研究揭示了透射效率的基本极限，并为高效率多通道光学系统的设计提供指导。

I. 引言

在过去十年中，纳米光子设计与制造日益先进。很多时候，限制器件性能的已不再是制造约束或设计巧思，而是基本的物理界限。此外，设计过程通常需要耗时的开发、仿真和优化。预先了解基本的物理界限及其与设计选择之间的关系 [1]，具有不可估量的价值。这种认识能够显著减少在盲目探索上花费的时间，也能指引我们作出更优的设计选择，而这些选择通常并不显而易见。多通道光学系统尤其受到关注。例如，对于超透镜 [2–6]，人们希望来自每个角度的入射波都能以单位效率聚焦到相应的焦斑上。但均匀且完美的效率是否与所需的角度依赖响应相容？基本定律所允许的最高效率是多少？

本文提出一种基于矩阵的形式体系，用于根据任意线性多通道系统的功能性确定其效率的基本界限，并将其应用于超透镜。

超透镜是由超表面制成的紧凑型透镜，在实现更薄、更轻的成像系统方面展现出巨大潜力，其性能可与传统透镜相媲美，甚至超越传统透镜 [2–6]。基于元胞库设计的超透镜聚焦效率有限，而采用更灵活的设计可以克服这一问题 [7, 8]。逆向设计 [7–15], 、光栅平均技术 [16], 以及将分别设计的部分拼接在一起 [17–19]，都是有效的方法。然而，在大数值孔径（NA）下实现高聚焦效率仍然困难，因为所有这类“局域”超表面在大角度下的偏转效率都受到限制 [20, 21]。由于局域超表面具有接近于δ函数的空间脉冲响应，它们对不同入射角提供相同的响应，因此其角视场（FOV）也受到限制 [22]。

具有相邻构建单元之间定制化相互作用的非局域超透镜（即，其空间脉冲响应延伸至狄拉克δ函数之外）能够克服局域超透镜有限的角度多样性，从而在大视场范围内实现衍射极限聚焦 [22–24]。基于双联透镜 [25, 26] 或光阑 [27, 28]的非局域超透镜可在宽视场范围内支持高于 50% 的聚焦效率，但数值孔径低于 0.5。通过逆向设计获得的多层结构已实现数值孔径为= 0.7、视场为 = 80°的衍射极限聚焦，但平均聚焦效率仅约为 25% [29]。然而，尚无关于这些非局域超透镜效率上限的指导。

根据多通道光学系统的期望响应，我们可以写出其将输入与输出相关联的透射矩阵。在此，我们利用透射矩阵的奇异值以及透射能量不得超过输入能量这一事实，严格界定通道平均传输效率。对于入射孔径和输出孔径相等的常用设计，我们发现，非局域超透镜的透射效率上限会随数值孔径增大而降低。我们还发现，减小入射孔径尺寸可以将效率上限提升至接近 1。该方法具有普适性，不仅能够指导超透镜的设计，也能指导其他多通道光学系统的设计。

II. 结果

A. 非局域性

如图1（a）所示，亚波长厚度的局域超透镜（例如具有双曲相位分布的超透镜 [30]）仅能在有限的输入角度范围内表现良好。非局域

* cwhsu@usc.edu

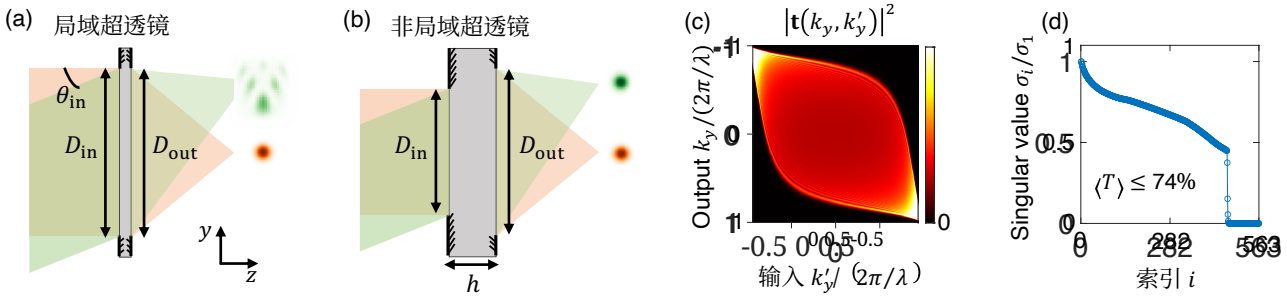

图 1. 非局域超透镜及其透射矩阵。(a) 厚度为亚波长的局域超透镜，其输入孔径与输出孔径尺寸相同， *i.e.*， $D_{\text{in}} = D_{\text{out}}$。只有在狭窄的入射角范围内才能实现衍射极限聚焦。(b) 非局域超透镜，其较大的厚度允许发生非局域耦合，因此可在较宽的角度范围内实现衍射极限聚焦。此处， D_{in} 和 D_{out} 可以不同。(c,d) 理想非局域超透镜的透射矩阵 $|\mathbf{t}(k_y,\ k_y')|^2$ 的振幅平方 (c) 及其归一化奇异值 (d)。该超透镜的直径为 $D_{\text{in}} = D_{\text{out}} = 300\lambda$，数值孔径为 $= 0.8$，视场为 $= 140°$。此处，平均透射效率受式（3）的限制，为$\langle T \rangle \leq 74\%$。

超透镜能够在更宽的视场内实现衍射极限聚焦，但需要最小厚度来提供非局域性 [22, 31]。由于较大的视场需要角度依赖响应（即角度色散），空间局域入射波必须在空角傅里叶变换下传播并穿过超透镜时发生扩展。因此，更大的角度多样性需要更强的非局域性。如补充图 S1 所示，当视场大于某一阈值时，非局域效应变得重要。对于高于该阈值的视场，需要足够的厚度使光传播并产生非局域性，因此输入直径 D_{in} 和输出直径 D_{out} 可以不同，见 [图 1（b）]。与亚波长厚度的局域超透镜相比，不同的孔径尺寸提供了额外的自由度（对于局域超透镜， $D_{\text{in}} = D_{\text{out}}$ 这是内在的）。

B. 透射矩阵与目标响应

虽然本文提出的传输矩阵形式具有普遍性，但为便于具体说明，我们将讨论超透镜。对于平面波入射下的理想（无像差）透镜，可通过匹配焦点处边缘光线与主光线的光程，得到超透镜输出表面上的透射相位分布 $\mathbf{r}(\theta_{\text{in}}) = (y = f\tan\theta_{\text{in}},\ z = f + h)$。在二维情况下，我们得到 [22, 27, 32]

$$\phi_{\text{out}}^{\text{ideal}}(y, z = h, \theta_{\text{in}}) = \psi(\theta_{\text{in}}) - \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{f^2 + (y - f\tan\theta_{\text{in}})^2}, \tag{1}$$

其中， θ_{in} 为入射角； f 和 h 分别为焦距和长度厚度； $\psi(\theta_{\text{in}})$是一个与角度有关但在空间上保持不变的全局相位，不会影响聚焦质量。

考虑波长为 λ 的二维系统中的单色横磁波，其中 $\mathbf{E} = E_x(y, z)\hat{x}$。入射波前 $E_x(y', z = 0)$ 可投影到 N_{in} 个传播平面波上，其输入横向动量为 $k_y' = \{k_y^a\} = (2\pi/\lambda)\sin\theta_{\text{in}}$，并截断至输入孔径的大小，即 例如， $|y'| < D_{\text{in}}/2$，从而得到第 a 个平面波输入的复振幅 α_a。其中， $z = 0$ 是系统的前表面； $|k_y^a| < (2\pi/\lambda)\sin$ (视场/2) 限定在感兴趣的视场范围内， k_y^a 按照奈奎斯特–香农定理以 $2\pi/D_{\text{in}}$ 的间隔离散采样 [33]。类似地，透射波前 $E_x(y, z = h)$ 可表示为 N_{out} 个平面波的叠加，其 $k_y = \{k_y^b\} = (2\pi/\lambda)\sin\theta_{\text{out}}$ 截断至 $|y| < D_{\text{out}}/2$，第 b 个平面波输出的复振幅为 β_b，其中 θ_{out} 为输出角， $|k_y^b| < 2\pi/\lambda$ 以动量间隔 $2\pi/D_{\text{out}}$采样。对于任意线性光学系统，这些振幅通过透射矩阵 t_{ba} 相关联，

$$\beta_b = \sum_{a=1}^{N_{\text{in}}} t_{ba}\alpha_a. \tag{2}$$

我们可以将入射波前和透射波前参数化为列向量 $\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1;\ \cdots;\ \alpha_{N_{\text{in}}}]$ 和 $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1;\ \cdots;\ \beta_{N_{\text{out}}}]$。于是，$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{t}\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\mathbf{t} = \mathbf{t}(k_y,\ k_y') = t(k_y^b,\ k_y^a) = t_{ba}$ 是角度基底下的透射矩阵。

对理想超透镜方程（1）的输出场从 y 到 k_y 进行傅里叶变换，可得到透射矩阵 $\mathbf{t}$。该透射矩阵适用于任何在此视场范围内实现衍射极限聚焦的透镜。对于具有 $D_{\text{in}} = D_{\text{out}} = 300\lambda$、数值孔径 NA $= \sin(\arctan(D_{\text{out}}/(2f))) = 0.8$ 和视场 $= 140°$的超透镜，其透射矩阵 $|\mathbf{t}(k_y, k_y')|^2$ 的振幅平方如图 1（c）所示。关于透射矩阵的更多细节，参见补充材料第2节。值得注意的是，方程（1）没有规定透射矩阵的整体振幅前因子，因此无法仅根据该目标响应直接评估透射效率。

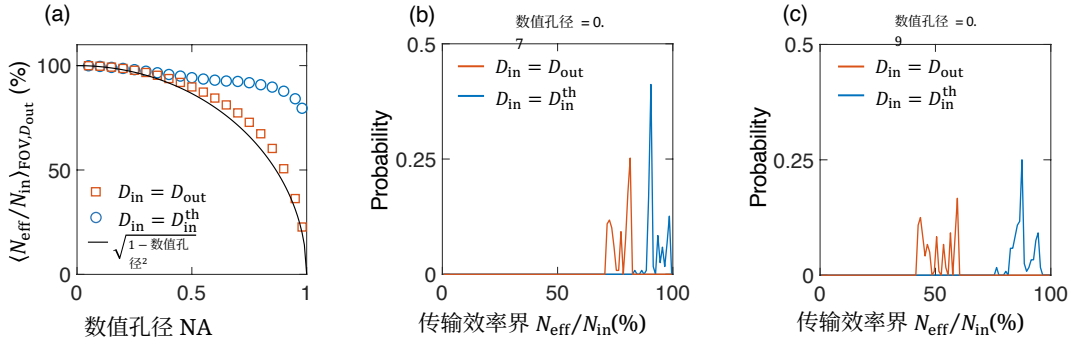

图2. 理想非局域超透镜的透射效率上界 $N_{\rm eff}/N_{\rm in}$，当 $D_{\rm in} = D_{\rm out}$ 且使用$D_{\rm in} = D_{\rm in}^{\rm th}$式（4）时。(a) $N_{\rm eff}/N_{\rm in}$ 对视场和输出直径 $D_{\rm out}$ 取平均后随数值孔径的变化。黑线表示 $\sqrt{1}$ –数值孔径²。(b、c) 不同视场和 $N_{\rm eff}/N_{\rm in}$ 下的分布，当（b）数值孔径 $D_{\rm out}$ 为 = 0.7，以及（c）数值孔径 = 0为.9时。

C. 透射效率上界

当透射矩阵包含整体振幅前因子并经过通量归一化后，在规定视场内对所有输入进行平均得到的总透射效率（对所有透射通量求和）为 $\langle T\rangle = \sum_a T_a/N_{\rm in}$，其中 $T_a = \sum_b |t_{ba}|^2$ 是入射角 $\theta_{\rm in}^a$ 对应的总透射效率，$N_{\rm in}$ 是输入通道的数量（即透射矩阵的列数）。为了在不知道透射矩阵整体振幅前因子的情况下获得 $\langle T\rangle$的上限，我们考虑透射矩阵的奇异值 $\{\sigma_i\}$。通过奇异值分解，透射矩阵可分解为 $\mathbf{t}(k_y, k_y') = \mathbf{U\Sigma V}^\dagger = \sum_i \sigma_i (u_i v_i^\dagger)$，其中每个右奇异列向量 v_i 都是归一化的入射波前，即输入通道的线性叠加。相应的透射波前为 $\sigma_i u_i$，其透射效率为 σ_i^2，归一化的透射波前为列向量 u_i。能量守恒要求透射能量不能超过输入能量，因此对于所有 i都有 $0 \le \sigma_i^2 \le 1$。由于 $\mathrm{tr}(\mathbf{t}^\dagger\mathbf{t}) = \Sigma_a(\mathbf{t}^\dagger\mathbf{t})_{aa} = \sum_b{}_a |t_{ba}|^2$ 等于矩阵 $\mathbf{t}^\dagger\mathbf{t}$ 的特征值 $\lambda_i = \sigma_i^2$ 之和，因此有 $\langle T\rangle = \sum_b{}_a |t_{ba}|^2/N_{\rm in} = \sum_i \sigma_i^2/N_{\rm in}$。此外，$\sum_i \sigma_i^4 \le \sum_i \sigma_i^2$ 由能量守恒可得。因此，我们得到严格不等式

$$\langle T\rangle \equiv \frac{\sum_{b,a}|t_{ba}|^2}{N_{\rm in}} = \frac{N_{\rm eff}}{N_{\rm in}}\frac{\sum_i \sigma_i^4}{\sum_i \sigma_i^2} \le \frac{N_{\rm eff}}{N_{\rm in}}. \qquad (3)$$

这里，$N_{\rm eff} = (\sum_{i=1}\sigma_i^2)^2/\sum_{i=1}\sigma_i^4$是通过逆参与比[34]，表征的高透射通道有效数量，且与透射矩阵整体前因子无关。图1（d）显示了图$\mathbf{t}$（k_y，k_y'）中透射矩阵的归一化奇异值，该矩阵见图1（c），其中 $\langle T\rangle \le N_{\rm eff}/N_{\rm in} \approx 74\%$。

这 $N_{\rm eff}$ 直接源于传输矩阵中编码的所需角度依赖响应，与用于实现该响应的结构设计和材料组成无关。。结合能量守恒，$N_{\rm eff}$ 通过（3）对系统的平均透射率施加了一个基本上限。这一形式体系适用于任何已知所需响应的线性光学系统。

只有足够紧的上界才有用。补充图 S2 展示了全波数值模拟结果[35]，表明式（3）确实为平均透射效 $\langle T\rangle$率提供了相当紧的上界，双曲和二次超透镜便是其中的例子。

图 2（a）展示了$N_{\rm eff}/N_{\rm in}$ 无像差非局域超透镜的透射效率上界随数值孔径的变化；这些超透镜的视场大于补充图 S1 所示的阈值。由于视场和输出直 $D_{\rm out}$ 径对 $N_{\rm eff}/N_{\rm in}$ 的影响很小（补充图 S3、S4），因此在图2（a）中，我们对视场和 $D_{\rm out}$取平均，以描绘效率上界随数值孔径的变化。我们发现，采用相等的入射直径和输出直径，即，$D_{\rm in} = D_{\rm out}$，得到的效率上界约按 $\sqrt{1-\text{数值孔径}^2}$下降。无论设计多么复杂或经过怎样的优化，也无论使用何种材料，该上界都适用。

在图 2（b、c）中，我们展示了数值孔径为 = 0.7 和 0.9 时，透射效率上界在不同视场和输出直径下的分布。该上界与文献[29],中的逆向设计结果一致：对于数值孔径为 = 0.7、视场为 = 80° 的非局域超透镜，所实现的平均绝对聚焦效率（仅考虑焦点峰值周围三个半高全宽范围内的透射功率）为 25%。

D. 最优孔径

除了确立传输效率极限之外，了解可以采用何种策略来提高这一传输效率极限将更有帮助。为此，我们考察透射矩阵的奇异值。在图1（d）中，$D_{\rm in} = D_{\rm out} = 300\lambda$ 和

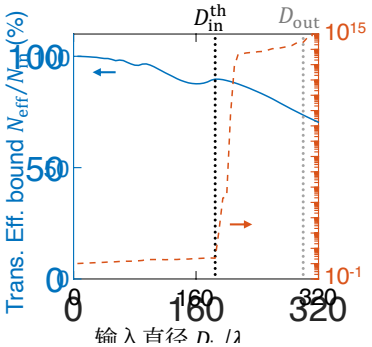

图3。透射效率上界 $N_{\rm eff}/N_{\rm in}$ 和理想传输矩阵的条件数 κ 随入射直径 $D_{\rm in}$的变化关系。黑色和灰色竖直点线分别表示 $D_{\rm in}^{\rm th} = 185\lambda$ 和 $D_{\rm out} = 300\lambda$。透镜参数：输出直径 $D_{\rm out} = 300\lambda$，数值孔径 $= 0.8$，视场 $= 140°$。

数值孔径 $= 0.8$ 时，我们看到存在许多零奇异值。这些零奇异值会降低 $N_{\rm eff}$ 以及透射效率。去除这些零奇异值（即，消除不传输的波前）可以提高透射效率上界 $N_{\rm eff}/N_{\rm in}$。零奇异值对应于透射矩阵各列的一种叠加，该叠加产生零向量，这意味着这些列是线性相关的。因此，我们可以通过减少透射矩阵中的列数来消除零奇异值。由于输入波矢 $|k_y'| <$（$2\pi/\lambda$）sin（视场/2）以动量间距 $2\pi/D_{\rm in}$ 按照奈奎斯特速率进行采样，我们预计，减小 $D_{\rm in}$ 可以降低透射矩阵中的输入列数，从而提高透射效率上界。图3表明这一策略确实有效：减小输入孔径尺寸 $D_{\rm in}$会提高效率上限 $N_{\rm eff}/N_{\rm in}$。

下一个问题是：应当使用多大的最佳输入直径 $D_{\rm in}$？虽然减小 $D_{\rm in}$ 会提高透射效率上界，但同时也会减少能够进入超透镜的光量，这是不理想的。为了取得平衡，我们考察条件数 κ，其定义为最大奇异值与最小奇异值之比。当存在零 σ_i 时，条件数 κ会发散至无穷大（受数值精度限制）。图3 的右轴显示，κ 当输入直径 $D_{\rm in}$ 超过我们标记为$D_{\rm in}^{\rm th}$（黑色点线）的阈值时，会突然上升许多个数量级。当 $D_{\rm in} < D_{\rm in}^{\rm th}$时，$\kappa$ 为数量级一，所有奇异值均具有可比性，不存在零传输波前，因此我们有 $N_{\rm eff} \approx N_{\rm in}$，且透射效率上界接近于一。当$D_{\rm in} > D_{\rm in}^{\rm th}$ 时，近零传输波前开始出现，从而导致透射效率上界快速降低。因此，该阈值$D_{\rm in}^{\rm th}$ 是应采用的最佳输入直径，在保持接近于一的透射效率上界的同时，提供最大的入射通量。

为自动确定$D_{\rm in}^{\rm th}$，我们考察斜率 $\partial\kappa/\partial D_{\rm in}$，它在 $D_{\rm in}^{\rm th}$处从接近零跃升至极大值。补充表S1表明，对于 $\partial\kappa/\partial D_{\rm in}$，不同的阈值取值会产生几乎相同的 $D_{\rm in}^{\rm th}$ 和 $N_{\rm eff}/N_{\rm in}$。请注意，全局相位 ψ（$\theta_{\rm in}$）在（1）中的选择不会影响 $D_{\rm in}^{\rm th}$ 和透射效率上界，如补充图 S5所示。

为了指导未来的设计，了解$D_{\rm in}^{\rm th}$ 如何依赖于各种透镜参数是很有帮助的。图4 绘制了 $D_{\rm in}^{\rm th}$ 随视场、输出直径$D_{\rm out}$和数值孔径变化的曲线。如第 2 节IIA所述，视场非常小的透镜不需要非局域性；对于此类局域超透镜，我们发现 $D_{\rm in}^{\rm th} \approx D_{\rm out}$，这与图1(a)中的示意图一致。随着视场增大并出现非局域性，我们在图4(a)中观察到 $D_{\rm in}^{\rm th}$下降至 $D_{\rm out}$（正如前文讨论所预期的那样），并达到一个取决于数值孔径但与视场无关的恒定值。对于非局域超 $D_{\rm in}^{\rm th}$ 透镜，该值与 $D_{\rm out}$ [图4(b)]成正比。图4(a、b)分别固定了 $D_{\rm out} = 300\lambda$ 和视场 $= 140°$；其他透镜参数也表现出类似的依赖关系（补充材料1中的图 S6-S7）。在图4(c)中，我们通过经验发现，数值孔径依赖性可以很好地描述为

$$D_{\rm in}^{\rm th} = D_{\rm out}\sqrt{1 - {\rm NA}^2}. \qquad (4)$$

这一结果为如何选择非局域高数值孔径超透镜的输入和输出孔径尺寸，以实现高透射率提供了指导。

为展示透射效率上限的提升，我们还在图2(a–c)中展示了输入孔径尺寸 $D_{\rm in}$ 设为最优值 $D_{\rm in}^{\rm th}$（见4）时的透射效率上限。我们发现，采用相同的入射孔径和输出孔径时，透射效率上限 $N_{\rm eff}/N_{\rm in}$ 能够突破 $\sqrt{1-\text{数值孔径}^2}$限制。

III. 讨论

虽然本研究最初旨在探讨高数值孔径非局域超透镜的效率，但我们提出的形式体系具有很强的通用性。给定任意多通道光学系统所需的响应后，我们可以写出其透射矩阵，并应用（3）来确定其透射效率上限。与参考文献 [22, 31], 中提出的厚度界限类似，这里的透射效率上限由功能决定，与设计无关。

非局域超表面开拓了广泛的应用领域，并能实现传统局域超表面无法实现的定制化角度依赖响应 [24]。本研究给出的效率上限为这一快速发展的领域提供了宝贵的指导。

致谢

感谢 X. Gao 富有帮助的讨论。本工作得到美国国家科学基金会 CA-

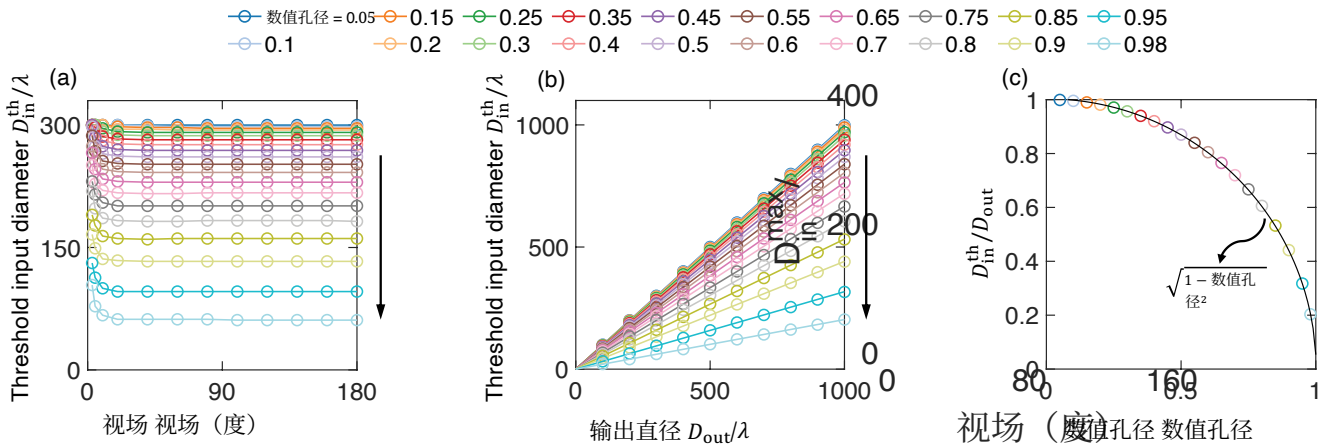

图4. 阈值输入直径$D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}$随透镜参数的变化。(a) 当$D_{\mathrm{out}} = 300\lambda$时，$D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}$随视场的变化。(b) 当视场为 $= 140°$时，$D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}$随输出直径 D_{out} 的变化。符号表示根据理想透射矩阵计算得到的$D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}$，实线表示线性拟合。(c) 非局域超透镜在不同视场下的平均$D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}/D_{\mathrm{out}}$随数值孔径的变化。黑色实线为 $\sqrt{1-数值孔径^2}$。

REER奖（ECCS-2146021）和索尼研究奖计划的支持。**披露：** 作者声明不存在利益冲突。**数据可用性：** 评估本研究结论所需的所有数据均已在论文和补充文件中提供。

[1] P. Chao、B. Strekha、R. Kuate Defo、S. Molesky 和 A. W. Rodriguez，《电磁学中的物理极限》，Nature Reviews Physics **4**, 543 (2022)。[2] P. Lalanne 和 P. Chavel，《可见光波长下的超透镜：过去、现在与展望》，Laser Photonics Reviews **11**, 1600295 (2017)。[3] M. Khorasaninejad 和 F. Capasso，《超透镜：多功能光子元件》，Science **358**, eaam8100 (2017)。[4] H. Liang、A. Martins、B.-H. V. Borges、J. Zhou、E. R. Martins、J. Li 和 T. F. Krauss，《高性能超透镜：数值孔径、像差、色差及其权衡》，Optica **6**, 1461 (2019)。[5] M. Pan、Y. Fu、M. Zheng、H. Chen、Y. Zang、H. Duan、Q. Li、M. Qiu 和 Y. Hu，《用于小型化成像系统的介质金属透镜：进展与挑战》，Light. Sci. Appl. **11**, 195 (2022)。[6] A. Arbabi 和 A. Faraon，《光学超透镜的进展》，Nat. Photonics **17**, 16 (2023)。[7] H. Chung 和 O. D. Miller，《通过逆向设计实现高数值孔径消色差超透镜》，Optics Express **28**, 6945 (2020)。[8] K. Schab、L. Jelinek、M. Capek 和 M. Gustafsson，《聚焦效率的上限》，Opt. Express **30**, 45705 (2022)。[9] D. Sell、J. Yang、S. Doshay 和 J. A. Fan，《具有高效率、多波长功能的周期性介质超表面》，Advanced Optical Materials **5**, 1700645 (2017)。[10] R. Pestourie、C. P´erez-Arancibia、Z. Lin、W. Shin、F. Capasso 和 S. G. Johnson，《大面积超表面的逆向设计》，Optics Express **26**, 33732 (2018)。[11] H. Liang、Q. Lin、X. Xie、Q. Sun、Y. Wang、L. Zhou、L. Liu、X. Yu、J. Zhou、T. F. Krauss，*et al.*，超高可见光波长下的数值孔径超透镜，Nano Lett. **18**，4460（2018）。[12] M. Mansouree 和 A. Arbabi，使用伴随灵敏度技术进行大规模超表面设计，载于 *2018 Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO)*（2018）第 FF1F.7 页。[13] T. Phan、D. Sell、E. W. Wang、S. Doshay、K. Edee、J. Yang 和 J. A. Fan，高效率、大面积拓扑优化超表面，Light Science Applica- tions **8**，48（2019）。[14] K.-F. Lin、C.-C. Hsieh、S.-C. Hsin 和 W.-F. Hsieh，基于超薄圆柱介质超透镜实现高数值孔径近红外成像，Applied Optics **58**，8914（2019）。[15] Z.-P. Zhuang、R. Chen、Z.-B. Fan、X.-N. Pang 和 J.-W. Dong，亚衍射聚焦超透镜中的高聚焦效率，Nanophotonics **8**，1279（2019）。[16] A. Arbabi、E. Arbabi、M. Mansouree、S. Han、S. M. Kamali、Y. Horie 和 A. Faraon，使用光栅平均技术提高高数值孔径超表面的效率，Sci. Rep. **10**，7124（2020）。[17] S. J. Byrnes、A. Lenef、F. Aieta 和 F. Capasso，面向可见光设计大尺寸、高效率、高数值孔径透射式超透镜，Optics Express **24**，5110 2016( )。[18] R. Paniagua-Dominguez、Y. F. Yu、E. Khaidarov、S. Choi、V. Leong、R. M. Bakker、X. Liang、Y. H. Fu、V. Valuckas、L. A. Krivitsky、*et al.*，近乎为一的数值孔径超透镜，Nano Lett. **18**，2124（2018）。[19] M. Kang、Y. Ra'di、D. Farfan 和 A. Al`u，利用混合超透镜实现大数值孔径高效聚焦，Physical Review Applied **13**，044016（2020）。

[20] N. M. Estakhri 和 A. Alu，利用梯度超表面进行波前变换, Physical Review X **6**，041008（2016）。[21] V. S. Asadchy、M. Albooyeh、S. N. Tcvetkova、A. D´ıaz-Rubio、Y. Ra'di 和 S. Tretyakov，利用空间色散超表面实现对反射和折射的完美控制，Physical Review B **94**，075142（2016）。[22] S. Li 和 C. W. Hsu，非局域广视场超透镜的厚度界限，Light Sci. Appl. **11**，338（2022）。[23] A. Overvig 和 A. Al`u，衍射型非局域超表面，Laser Photonics Reviews **16**，2100633（2022）。[24] K. Shastri 和 F. Monticone，非局域平面光学，Nat. Photonics **17**，36（2023）。[25] A. Arbabi、E. Arbabi、S. M. Kamali、Y. Horie、S. Han 和 A. Faraon，基于经过单色像差校正的广角超表面双合透镜的微型平面光学相机，Nature Commun. **7**，13682（2016）。[26] B. Groever、W. T. Chen 和 F. Capasso，可见光区域的超透镜双合透镜，Nano Lett. **17**，4902（2017）。[27] M. Y. Shalaginov、S. An、F. Yang、P. Su、D. Lyzwa、A. M. Agarwal、H. Zhang、J. Hu 和 T. Gu，单元衍射极限鱼眼金属透镜，Nano Lett. **20**，7429（2020）。[28] C.-Y. Fan、C.-P. Lin 和 G.-D. J. Su，六边形排列的超大角度高效率超透镜, Sci. Rep. **10**, 15677 (2020). [29] Z. Lin, C. Roques-Carmes, R. E. Christiansen, M. Solja˘ci´c, and S. G. Johnson, 用于设计无色差和无角像差超紧凑单片金属透镜的计算逆向设计，Applied Physics Let- ters **118**, 041104 (2021). [30] F. Aieta, P. Genevet, M. A. Kats, N. Yu, R. Blanchard, Z. Gaburro, and F. Capasso, 基于等离激元超表面的电信波长无像差超薄平面透镜和轴锥镜，Nano Lett. **12**, 4932 (2012). [31] D. A. Miller, 光学为何需要厚度，Science **379**, 41 2023( ). [32] A. Kalvach and Z. Szab´o, 适用于宽入射角范围的无像差平面透镜设计，J. Opt. Soc. Am. B **33**, A66 (2016). [33] H. Landau, 采样、数据传输与奈奎斯特速率, Proceedings of the IEEE **55**, 1701 (1967). [34] C. W. Hsu, S. F. Liew, A. Goetschy, H. Cao, and A. Dou- glas Stone, 无序介质中波聚焦的相关性增强控制，Nat. Phys. **13**, 497 (2017). [35] H.-C. Lin, Z. Wang, and C. W. Hsu, 使用增强部分因子分解的快速多源纳米光子学仿真，Nat. Comput. Sci. **2**, 815 (2022).

arXiv:2303.00726v1 [physics.optics] 1 Mar 2023

非局域超透镜的透射效率极限：补充文件

本文档为《非局域超透镜的透射效率极限》提供补充信息，共分为七个部分。第 1 节说明如何判断超透镜是局域还是非局域。第 2 节详细介绍如何构建理想超透镜的透射矩阵。第 3 节将效率上限 N_{eff}/N_{in} 与全波仿真得到的实际超透镜透射效率进行比较。第 4 节提供不同透镜参数下 N_{eff}/N_{in} 的完整数据。第 5 节表明，条件数的斜率 $\partial\kappa/\partial D_{in}$是确定阈值输入直径 D_{in}^{th}的稳健参数。在第 6 节中，我们表明 D_{in}^{th} 和透射效率上界 N_{eff}/N_{in} 与全局相位函数 $\psi(\theta_{in})$无关。在第 7 节中，我们提供 D_{in}^{th} 随透镜参数变化的完整数据图。

目录

1 超透镜的非局域性 12 **理想超透镜的透射矩阵 2**3 **双曲超透镜和二次超透镜的透射效率 3**4 **透射效率上限对透镜参数的依赖关系 4**5 **阈值输入直径的 $\partial\kappa/\partial D_{in}$ 4**6 **$\psi(\theta_{in})$依赖关系 4**7 **关于阈值输入直径的综合数据 6**

1. 超透镜的非局域性

当超透镜在较大的入射角范围内实现衍射极限聚焦时，其响应必须随角度变化，因此需要具备非局域性。反之，如果角度范围较小，响应无需随角度变化，局域超透镜即可满足要求。因此，我们预期存在一个阈值视场（FOV），将局域超透镜与非局域超透镜区分开来。

假设超透镜的入射侧和透射侧均为自由空间。为实现衍射极限聚焦，理想透镜需要使从焦斑位置$(y = f\tan\theta_{in}, z = h + f)$到透镜表面$(y, z = h)$的边缘光线与主光线的光程相匹配，因此理想超透镜后表面的相位分布为

$$\phi_{out}^{ideal}(y, z = h, \theta_{in}) = \psi(\theta_{in}) - \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{f^2 + (y - f\tan\theta_{in})^2}, \tag{S1}$$

其中，h、θ_{in} 和f 分别为透镜厚度、入射角和焦距。超透镜提供的相移为

$$\Delta\phi_{ideal}(y, \theta_{in}) = \phi_{out}^{ideal}(y, \theta_{in}) - \phi_{in}(y, \theta_{in}), \tag{S2}$$

其中，$\phi_{in}(y, \theta_{in}) = k_y^{in} y = (2\pi/\lambda)\sin\theta_{in} y$ 是入射光的相位分布。

式 $\psi(\theta_{in})$ 在式（S1）中是一个与角度相关但空间不变的全局相位，不会影响聚焦性能。一种合理的选择是在本文的所有计算中采用的全局相位 $\psi(\theta_{in})$为

$$\psi(\theta_{in}) = \frac{2\pi}{\lambda}\left\langle\sqrt{f^2 + (y - f\tan\theta_{in})^2} + y\sin\theta_{in}\right\rangle_y \equiv \psi_0(\theta_{in}), \tag{S3}$$

其中，$\langle\cdots\rangle_y$ 表示在输出孔径内对y 求平均即，$|y| < D_{out}/2$。采用这种 $\psi_0(\theta_{in})$后，不同入射角下y 方向的相移平均值 $\langle\Delta\phi_{ideal}(y, \theta_{in})\rangle_y$相同，从而使超透镜所需厚度最小 [1]。我们将在第6 节证明，本研究所讨论的透射效率上界与 $\psi(\theta_{in})$的选择无关。

局域双曲超透镜在正入射 $\theta_{in} = 0°$时可实现衍射极限聚焦，并具有与角度无关的相移分布 [2, 3]

$$\Delta\phi_{hyp}(y) = \Delta\phi_{ideal}(y, \theta_{in} = 0°) = \psi_0(\theta_{in} = 0°) - \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{f^2 + y^2}. \tag{S4}$$

偏离法向入射角时，$\Delta\phi_{hyp}(y) \neq \Delta\phi_{ideal}(y, \theta_{in})$，因此双曲超透镜不再实现理想聚焦。

给定透镜参数（视场、数值孔径和 D_{out}），我们希望确定它能否通过局域超透镜实现，还是必须考虑非局域性。为此，我们评估

$$\max_{y,\theta_{\text{in}}} |\Delta\phi_{\text{ideal}}(y,\theta_{\text{in}}) - \Delta\phi_{\text{hyp}}(y)| \tag{S5}$$

在所有位置 $|y| < D_{\text{out}}/2$，且在所有入射角下均满足 $|\theta_{\text{in}}| < \text{FOV}/2$。如果式（S5）$< \pi$成立，则我们认为局域双曲超透镜已足够，并将该超透镜归类为局域型；否则，将其归类为非局域型。

图 S1(a) 展示了当视场 $\in (0°, 180°)$ 和数值孔径 NA $\in (0,1)$取不同值且 $D_{\text{out}} = 300\lambda$时，理想超透镜属于局域型还是非局域型。当视场很小时，无论 NA 如何，所有透镜均为局域型；这正是正文图4(a)中视场很小时 $D_{\text{in}}^{\text{th}} \approx D_{\text{out}}$ 的原因。超过阈值视场后，透镜将变为非局域型，此时 $D_{\text{in}}^{\text{th}} < D_{\text{out}}$。阈值视场和 $D_{\text{in}}^{\text{th}}$ 均取决于 NA。图S1(b) 进一步展示了不同 D_{out} 和 NA 对应的阈值视场。

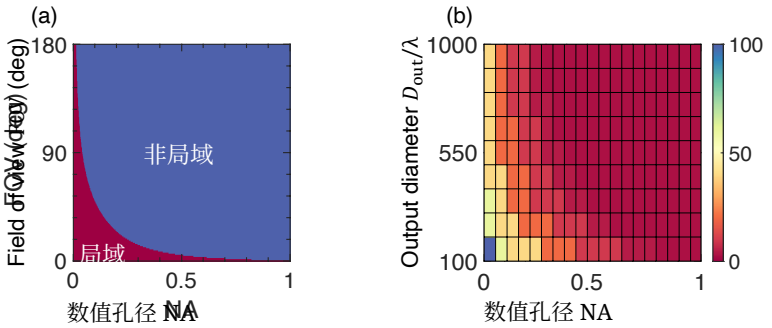

图 S1. (a) 局域超透镜或非局域超透镜的判定；$D_{\text{out}} = 300\lambda$。(b) 对于不同输出直径$D_{\text{out}}$ 和数值孔径，区分局域超透镜与非局域超透镜的阈值视场。

2. 理想超透镜的透射矩阵

根据正文中的式 (2)，透射矩阵将入射波前与出射波前联系起来，如下所示$\beta_b = \sum_a t_{ba}\alpha_a$。

我们用截断平面波的通量正交基 $\{f_a\}$表示输入波前，

$$f_a(y,z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D_{\text{in}}}}\frac{1}{\sqrt{k_z^a}} e^{i[k_y^a y + k_z^a z)]} & \text{for } |y| < \frac{D_{\text{in}}}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{S6}$$

其中 $\{k_y^a\} = \left\{a(2\pi/D_{\text{in}}) \text{ 满足 } a \in \mathbb{Z}, \text{ 且 } |k_y^a| < (2\pi/\lambda)\sin(\text{视场}/2)\right\}$，以及 $(k_y^a)^2 + (k_z^a)^2 = (2\pi/\lambda)^2$。

考虑来自视场内固定角度 θ_{in}^a 的入射平面波。这里，$E_x^a(y,z=0) = f_a(y,z=0)$，对应于透射矩阵的一列，因此 $\beta_b = t_{ba}$。为了将光完美聚焦到焦斑，超透镜输出表面（$z = h$）上的场分布应与焦斑处点源辐射场的共轭成正比。因此，

$$E_x^a(y,z=h) = \begin{cases} A(\theta_{\text{in}}^a)\frac{e^{i\phi_{\text{out}}^{\text{ideal}}(y,\theta_{\text{in}}^a)}}{[f^2+(y-f\tan\theta_{\text{in}}^a)^2]^{1/4}} & \text{for } |y| < \frac{D_{\text{out}}}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{S7}$$

超透镜后表面上的点(y、$z = h$) 与焦斑($y = f\tan\theta_{\text{in}}$、$z = h + f$) 之间的距离为$r = \sqrt{f^2 + (y - f\tan\theta_{\text{in}})^2}$。振幅因子 $1/\sqrt{r}$源自二维点源辐射场的衰减率。我们将这一理想输出展开为一组通量正交的截断平面波，

$$g_b(y,z) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{D_{\text{out}}}}\frac{1}{\sqrt{k_z^b}} e^{i[k_y^b y + k_z^b (z-h)]} & \text{for } |y| < \frac{D_{\text{out}}}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{S8}$$

其中 $\{k_y^b\} = \left\{b(2\pi/D_{\text{out}}), \text{使得 } b \in \mathbb{Z} \text{且 } |k_y^b| < 2\pi/\lambda\right\}$ 且 $(k_y^b)^2 + (k_z^b)^2 = (2\pi/\lambda)^2$。投影到此基底上，我们得到 $E_x(y,z = h) = \sum_b \beta_b g_b(y,z = h)$，其中

$$t_{ba} = \beta_b = \sqrt{\frac{k_z^b}{D_{\text{out}}}} \int_{-\frac{D_{\text{out}}}{2}}^{\frac{D_{\text{out}}}{2}} E_x^a(y,z=h) e^{-ik_y^b y} dy. \tag{S9}$$

实际上，我们可以将对 y 在公式（S9）中的连续积分近似为离散求和。根据奈奎斯特–香农采样定理，选取采样间距$\Delta y = \lambda/2$ [4]。离散化后的公式（S9）可以使用快速傅里叶变换高效求解：

$$t_{ba} \approx \Delta y \sqrt{\frac{k_z^b}{D_{\text{out}}}} e^{-ik_y^b(-\frac{D_{\text{out}}}{2}+\frac{\Delta y}{2})} \sum_{n=0}^{N-1} E_x^a(y_n, z=h) e^{-i\frac{2\pi}{N}bn}, \tag{S10}$$

其中 $y \in [-D_{\text{out}}/2, D_{\text{out}}/2]$ 被离散化为 $\{y_n \equiv -\frac{D_{\text{out}}}{2} + \frac{\Delta y}{2} + n\Delta y\}$，而 $N \equiv D_{\text{out}}/\Delta y \in \mathbb{Z}$ 是 $\{y_n\}$的长度。

式（S7）包含一个振幅因子$A(\theta_{\text{in}}^a)$，它可能取决于入射角。这意味着，透射矩阵的每一列都包含一个未确定的振幅前因子。虽然本文中的平均透射效率上限$N_{\text{eff}}/N_{\text{in}}$ 与全局振幅前因子无关，但我们确实需要指定各列之间的相对振幅。在这里，我们选择$A(\theta_{\text{in}}^a)$，使得在视场内的所有入射角下，$\sum_b |t_{ba}|^2$ 均相同。原因有二。首先，通常希望焦功率不随入射角变化，从而避免图像中出现渐晕；焦功率与透射通量 $\sum_b |t_{ba}|^2$ 乘以斯特列尔比成正比（对于理想透镜，斯特列尔比为 1）。其次，本文关注的是透射效率的上界，因此我们希望找到尽可能大的N_{eff}。较大的N_{eff} 意味着所有可能的输入都具有相近的总透射量，因此使 $\sum_b |t_{ba}|^2$ 不随入射角变化可以增大N_{eff}。

3. 双曲和二次超透镜的透射效率

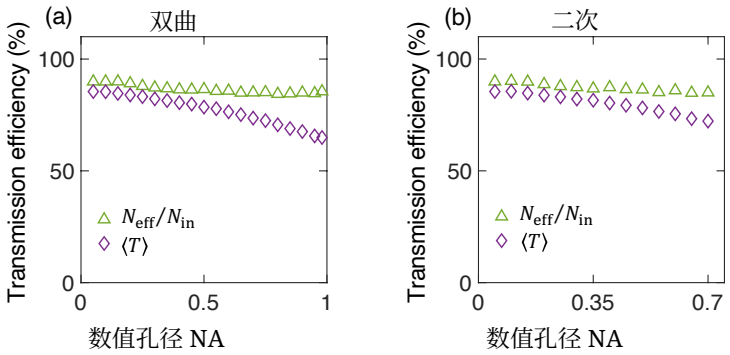

图 S2. 透射效率 e. 具有 (a) 双曲相位偏移轮廓和 (b) 二次相移分布的二维超透镜透镜参数：直径 $D = 100\,\mu\text{m}$，$\lambda = 532\text{nm}$。

作为验证，我们在此将透射效率上界 $N_{\text{eff}}/N_{\text{in}}$ 与实际超透镜的透射效率进行比较。

我们设计了具有双曲 [方程（S4）]和二次 [5–7] 相移分布

$$\Delta\phi_{\text{qua}}(y) = -\frac{2\pi}{\lambda}\frac{y^2}{2f}, \tag{S11}$$

工作波长为 $\lambda = 532$ nm，由厚度为 $h = 0.6\,\mu$m、宽度在 45 nm 到 200 nm 之间变化的脊结构组成。每个晶胞包含一个二氧化钛脊结构，其折射率为 $n_{\text{ridge}} = 2.43$，位于折射率为$n_{\text{sub}} = 1.46$ 的二氧化硅基底上。晶胞尺寸固定为 240 nm。我们使用开源软件 MESTI [8, 9] 进行全波仿真，计算其透射矩阵。仿真区域以每波长 40 个像素进行离散化。

入射角为 θ_{in}^a 时的透射效率 T_a 为

$$T_a = \sum_b |t_{ba}|^2 \tag{S12}$$

对于通量归一化透射矩阵 t_{ba}。这里我们考虑对入射角 $|\theta_{\text{in}}^a| < 45°$ 取平均后的透射率（即$\langle T \rangle = \sum_{b,a} |t_{ba}|^2/N_{\text{in}}$），并将其与效率上限 $N_{\text{eff}}/N_{\text{in}}$ 进行比较。

图S2 绘出了$N_{\text{eff}}/N_{\text{in}}$ 和 $\langle T \rangle$ 随数值孔径的变化关系，其中透镜直径固定为$D = 100\,\mu$m，适用于双曲和二次超透镜。事实上，$\langle T \rangle$ 始终小于$N_{\text{eff}}/N_{\text{in}}$。请注意，由于二次超透镜的最大有效数值孔径为 $1/\sqrt{2} = 0$，71 [7]因此其数值孔径范围限制为 < 00.71。

4。透射效率上界对透镜参数的依赖关系

图S3 绘出了透射效率上界$N_{\mathrm{eff}}/N_{\mathrm{in}}$ 随视场以及D_{out} 的变化关系，其中$D_{\mathrm{in}} = D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}$ 和$D_{\mathrm{in}} = D_{\mathrm{out}}$分别变化，并对其他透镜参数取平均。我们发现，视场和D_{out} 对效率上限的影响都非常小。

图中绘出了透射效率上界的一些代表性结果。S4。

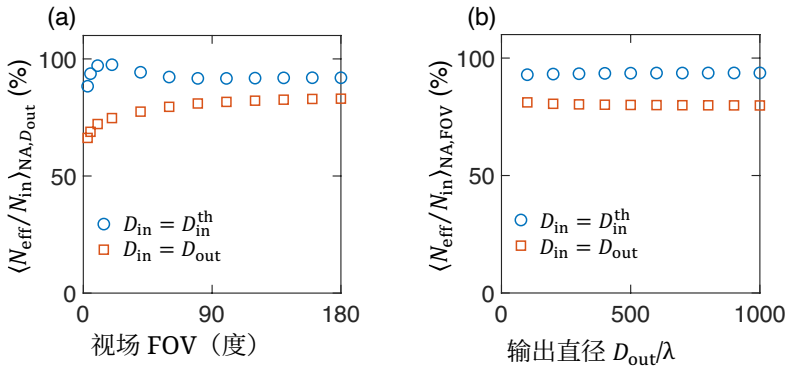

图 S3。非局域超透镜的透射效率上界$N_{\mathrm{eff}}/N_{\mathrm{in}}$：(a) 对数值孔径和输出直径$D_{\mathrm{out}}$ 取平均后，作为视场的函数；(b) 对数值孔径和视场取平均后，作为输出直径D_{out}的函数，其中$D_{\mathrm{in}} = D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}$ 且$D_{\mathrm{in}} = D_{\mathrm{out}}$。

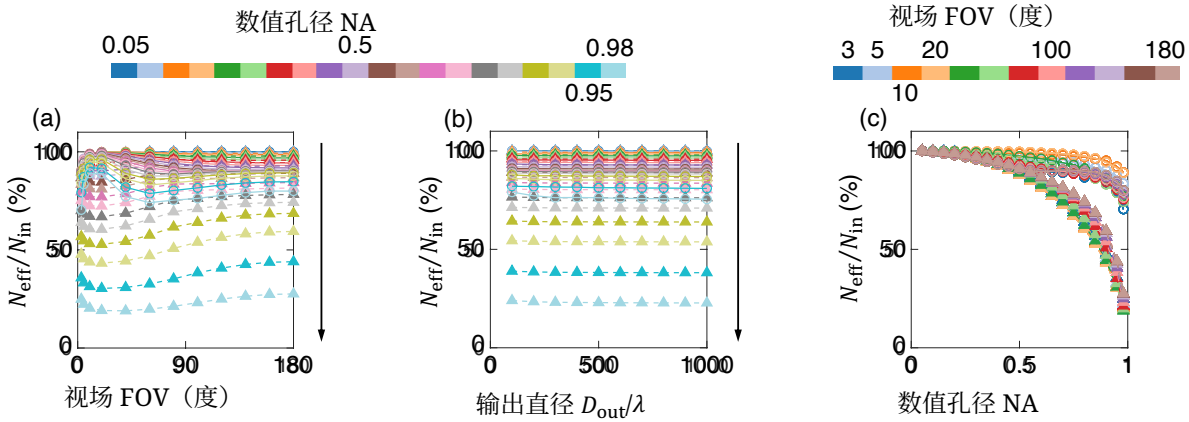

图 S4。非局域超透镜的透射效率上界$N_{\mathrm{eff}}/N_{\mathrm{in}}$：(a) 当$D_{\mathrm{out}} = 300\lambda$时，作为视场的函数；(b) 当视场为 $= 80°$ 时，作为输出直径D_{out} 的函数；(c) 当$D_{\mathrm{out}} = 300\lambda$时，作为数值孔径的函数。空心圆和实心三角形分别表示$D_{\mathrm{in}} = D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}$ 和$D_{\mathrm{in}} = D_{\mathrm{out}}$时的上界。

5. 根据 $\partial\kappa/\partial$DIN 确定阈值输入直径 $\partial\kappa/\partial D_{\mathrm{IN}}$

表S1 展示了由$(\partial\kappa/\partial D_{\mathrm{in}})|_{D_{\mathrm{in}}=D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}} = 0.04/\lambda$、$0.4/\lambda$或 $4/\lambda$确定的高透射率阈值输入直径$D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}$，以及在$D_{\mathrm{out}} = 300\lambda$时$D_{\mathrm{in}} = D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}$ 处对应的透射效率上界$N_{\mathrm{eff}}/N_{\mathrm{in}}$。可以看出，结果对所用的阈值不敏感，这表明 $\partial\kappa/\partial D_{\mathrm{in}}$ 是一个稳健的阈值指标。正文中我们采用$(\partial\kappa/\partial D_{\mathrm{in}})|_{D_{\mathrm{in}}=D_{\mathrm{in}}^{\mathrm{th}}} = 0.4/\lambda$，不过采用其他数值也会得到类似结果。

6. $\psi(\theta_{\mathrm{IN}})$依赖关系

入射角相关但空间不变的全局相位 $\psi(\theta_{\mathrm{in}})$ 在式（S1）中不会影响聚焦质量，因此可以任意选择。式（$\psi(\theta_{\mathrm{in}}) = \psi_0(\theta_{\mathrm{in}})$ S3）中的S3被选定为使超透镜所需厚度最小 [1]。另一种常见的选择是

$$\psi(\theta_{\mathrm{in}}) = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{f^2 + (f\tan\theta_{\mathrm{in}})^2} \equiv \psi_c(\theta_{\mathrm{in}}), \tag{S13}$$

表 S 1. 阈值输入直径 $D_{\text{in}}^{\text{th}}$ 及透射效率上界 $N\text{eff}/N_{\text{in}}$ 在 $D_{\text{out}} = 300\lambda$

	$\partial\kappa/\partial D_{\text{in}} = 0.04/\lambda$		$\partial\kappa/\partial D_{\text{in}} = 0.4/\lambda$		$\partial\kappa/\partial D_{\text{in}} = 4/\lambda$	
	$D_{\text{in}}^{\text{th}}$	$N\text{eff}/N_{\text{in}}$	$D_{\text{in}}^{\text{th}}$	$N\text{eff}/N_{\text{in}}$	$D_{\text{in}}^{\text{th}}$	$N\text{eff}/N_{\text{in}}$
数值孔径 $= 0.2$，视场 $= 10^\circ$	294λ	100%	300λ	98.7%	300λ	98.7%
数值孔径 $= 0.5$，视场 $= 10^\circ$	260λ	99.8%	265λ	98.8%	274λ	95.9%
数值孔径 $= 0.9$，视场 $= 10^\circ$	133λ	96.0%	136λ	95.0%	146λ	89.3%
数值孔径 $= 0.2$，视场 $= 80^\circ$	293λ	98.4%	294λ	98.7%	296λ	99.0%
数值孔径 $= 0.5$，视场 $= 80^\circ$	260λ	92.8%	261λ	93.0%	264λ	93.4%
数值孔径 $= 0.9$，视场 $= 80^\circ$	133λ	84.2%	133λ	84.2%	136λ	84.6%
数值孔径 $= 0.2$，视场 $= 160^\circ$	292λ	97.3%	294λ	97.9%	296λ	98.3%
数值孔径 $= 0.5$，视场 $= 160^\circ$	260λ	90.6%	261λ	90.8%	264λ	91.1%
数值孔径 $= 0.9$，视场 $= 160^\circ$	132λ	87.4%	133λ	87.7%	136λ	88.0%

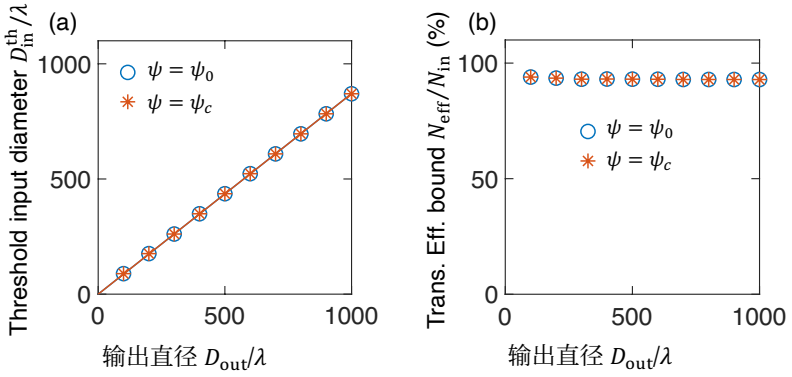

图 S5. 当采用不同的 $\psi(\theta_{\text{in}})$ 时，阈值输入直径 $D_{\text{in}}^{\text{th}}$ 与传输效率上限 $N\text{eff}/N_{\text{in}}$ 随输出直径 D_{out} 的变化关系，其中 $D_{\text{in}} = D_{\text{in}}^{\text{th}}$。透镜参数：NA = 0.7，视场 = 80°。

这使得 $\Delta\phi_{\text{ideal}}(y=0,\theta_{\text{in}}) = \phi_{\text{out}}^{\text{ideal}}(y=0,\theta_{\text{in}}) - \phi_{\text{in}}(y=0,\theta_{\text{in}}) = 0$。

如图 S5所示，对于两种全局相位选择，$D_{\text{in}}^{\text{th}}$ 处的阈值输入直径和$N_{\text{eff}}/N_{\text{in}}$ 处的透射效率上界相同，其中$D_{\text{in}} = D_{\text{in}}^{\text{th}}$。

7. 阈值输入直径的全面数据

正文中的图 4(a,b)分别绘出了输出直径为 $D_{\text{in}}^{\text{th}}$ 时，$D_{\text{out}} = 300\lambda$ 和视场 $= 140°$下阈值输入直径随数值孔径变化的情况。图 S6–S7 绘出了 $D_{\text{in}}^{\text{th}}$ 对应其他 D_{out} 和其他视场时的情况。

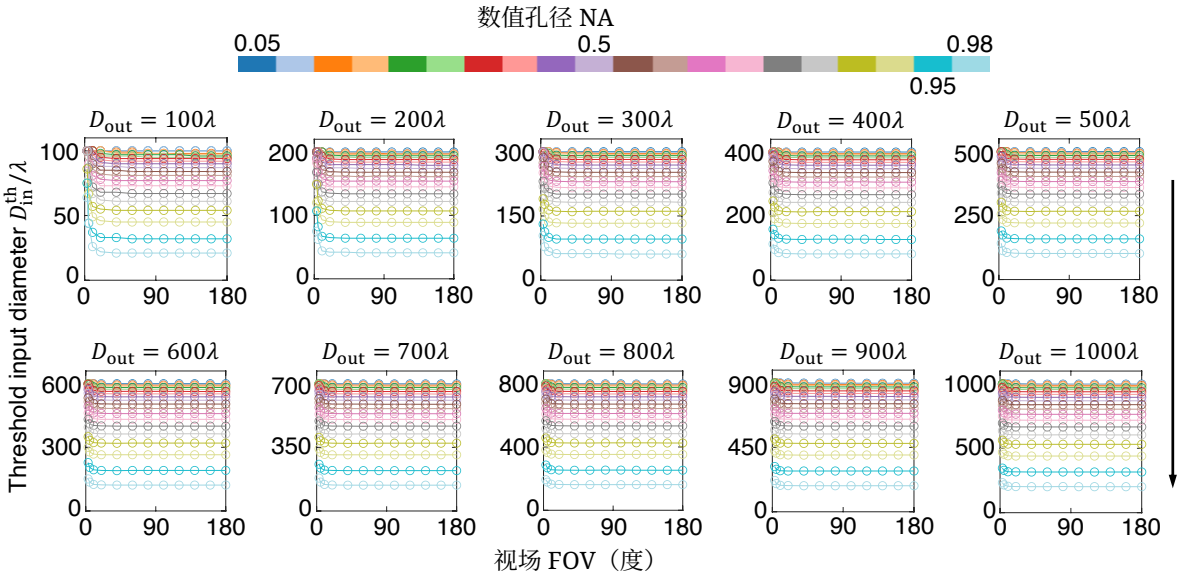

图 S6。 阈值输入直径$D_{\text{in}}^{\text{th}}$ 随不同透镜直径D_{out} 和数值孔径下视场的变化情况。

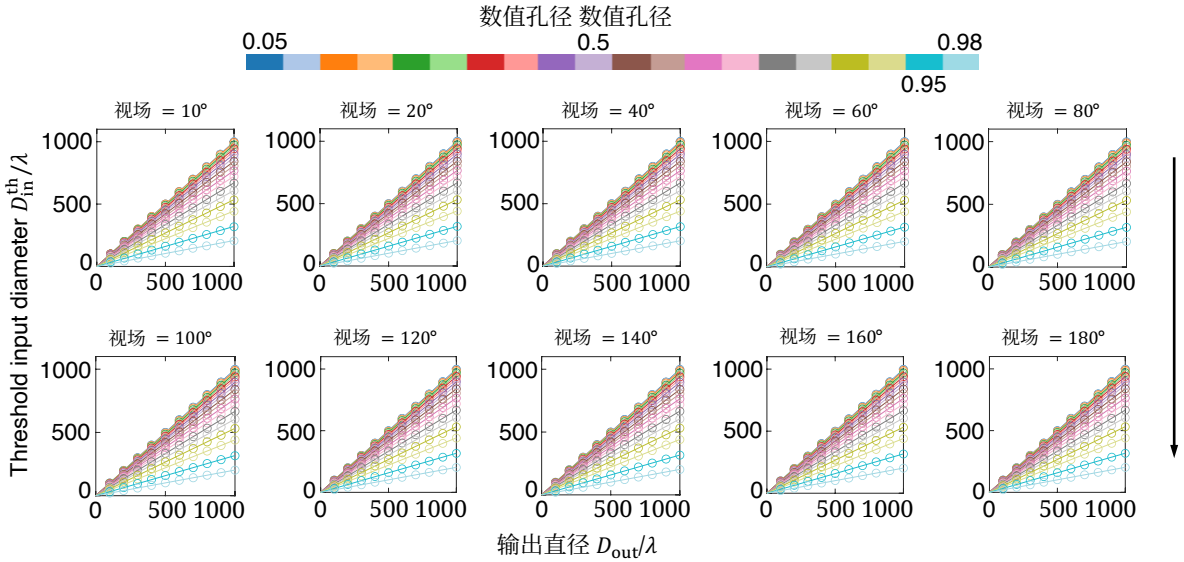

图 S7。T 不同视场和数值孔径下，作为输出直径 D_{out} 函数的阈值输入直径 $D_{\text{in}}^{\text{th}}$.

参考文献

1. S. Li 和 C. W. Hs u, “非局域宽视场超透镜的厚度界限,” Light. Sci. Appl. **11**, 338 (2022).

2. E. Hecht, “第5.2章：透镜,” 载于光学，第*5*版，(Pearson Education Limited, 2017). 3. F. Aieta, P. Genevet, M. A. Kats, N. Yu, R. Blanchard, Z. Gaburro, and F. Capasso, “基于等离激元超表面的电信波长无像差超薄平面透镜和轴锥镜,” Nano Lett.**12**, 4932–4936 (2012). 4. H. Landau, “采样、数据传输与奈奎斯特速率,” Proc. IEEE**55**, 1701–1706 (1967). 5. M. Pu, X. Li, Y. Guo, X. Ma, and X. Luo, “具有有序旋转的纳米孔径：对称变换与广角平面透镜成像,” Opt. Express**25**, 31471–31477 (2017). 6. A. Martins, K. Li, J. Li, H. Liang, D. Conteduca, B.-H. V. Borges, T. F. Krauss, and E. R. Martins, “关于视场可任意宽的超透镜,” ACS Photonics**7**, 2073–2079 (2020). 7. E. Lassalle, T. W. Mass, D. Eschimese, A. V. Baranikov, E. Khaidarov, S. Li, R. Paniagua-Dominguez, andA.I. Kuznetsov, “大视场二次超透镜的成像特性及其在指纹检测中的应用,” ACS Photonics**8**, 1457–1468 (2021).8. H.-C. Lin, Z. Wang, and C. W. Hsu, “MESTI,” https://github.com/complexphoton/MESTI.m. 9. H.-C. Lin, Z. Wang, and C. W. Hsu, “利用增广部分因式分解进行快速多源纳米光子学仿真,” Nat. Comput. Sci.**2**, 815–822 (2022).