arXiv:2303.00762v1 [quant-ph] 1 Mar 2023

光子介导相互作用中的厄米与非厄米拓扑

Federico Roccati、[1] *Miguel Bello*、[2,3] *Zongping Gong*、[2,3,4] 上田正仁、[5,6,7] *Francesco Ciccarello*、[8,9] *Aur´elia Chenu*、[1] 以及 *Angelo Carollo*[8]✉

[1] *Department of Physics and Materials Science、 University of Luxembourg、 L-1511 Luxembourg*
[2] *Max-Planck-Institut für Quantenoptik、 Hans-Kopfermann-Strasse 1、 Garching 85748、 Germany*
[3] *Munich Center for Quantum Science and Technology、 Schellingstraße 4、 80799 München、 Germany*
[4] *Theoretical Quantum Physics Laboratory、 Cluster for Pioneering Research、 RIKEN、 Wako-shi、 Saitama 351-0198、 Japan*
[5] *Department of Physics、 The University of Tokyo、7-3-1 Hongo、 Bunkyo-ku、 Tokyo 113-0033、 Japan*
[6] *RIKEN Center for Emergent Matter Science (CEMS)、 Wako、 Saitama 351-0198、 Japan*
[7] *Institute for Physics of Intelligence、 The University of Tokyo、7-3-1 Hongo、 Bunkyo-ku、 Tokyo 113-0033、 Japan*
[8] *Università degli Studi di Palermo、 Dipartimento di Fisica e Chimica – Emilio Segrè、 via Archirafi 36、 I-90123 Palermo、 Italy*
[9] *NEST、 Istituto Nanoscienze-CNR、 Piazza S. Silvestro 12、 56127 Pisa、 Italy*

光可以在与共同环境耦合的原子或量子发射体之间介导有效偶极-偶极相互作用。利用这些相互作用来设计所需的有效哈密顿量，可带来重要应用，并推动对多体相的探索。量子技术已足够成熟，能够构建结构复杂、与量子发射体耦合的大型光子晶格。在此背景下，一个根本问题是如何找到通用准则，以设计能够介导原子所需有效哈密顿量的光子环境。在这些准则中，*topological*性质至关重要，因为具有非平庸拓扑的有效原子哈密顿量能够抵御无序和缺陷。在这里，我们找到了支配光子介导哈密顿量（若有）的拓扑性质的通用定理，并以厄米和非厄米拓扑不变量的形式表述，从而揭示了 *system-bathtopological correspondence*。结果取决于发射体数量与谐振器数量的相对关系。对于每个模式都与单个量子发射体耦合的光子晶格，拓扑绝缘体的 Altland-Zirnbauer 分类使我们能够将原子的拓扑与光子浴的拓扑联系起来：我们揭示了 *topological preservation* 和 *reversal* 现象，其结果是，原子拓扑可以与光子拓扑相同或相反，具体取决于光子系统的厄米性以及空间维度的奇偶性。因此，体边对应意味着，在二维厄米拓扑系统中存在群速度与光子边界模相反的原子边界模。如果发射体数量少于光子模式数量，原子系统受到的约束较少，因此无法找到通用的光子-原子拓扑对应。我们用两个反例说明了这一点。

对拓扑相及相关现象的研究，例如受无序保护的边缘态，可追溯至 20 世纪 80 年代量子霍尔效应的发现 [1]。此后，物质拓扑相领域大幅拓展，如今已成为现代凝聚态物理 [2, 3] 和光子学 [4, 5]的前沿主题。这一迅速发展也受到人们追求不受无序影响、且免受环境有害相互作用的量子技术的推动 [6]。目前，非厄米物理框架下的新型拓扑不变量范式正受到广泛研究；非厄米物理是一个蓬勃发展的研究领域，涵盖光子学、凝聚态物理和超冷原子 [7, 8]。

尽管在固态和光子学领域已付出大量努力，量子光学中的拓扑效应研究——尤其是原子-光子相互作用——仍处于起步阶段。一些理论和实验研究利用拓扑保护的光子边缘模作为通道，实现量子发射体之间的单向发射 [9, 10], 激发/量子态转移 [11–14]以及多模纠缠生成 [15]。值得注意的是，有研究预测，在一种光子学 Su–Schrieffer–Heeger (SSH) 模型中，作为量子零维缺陷的原子本身可以引发缀饰束缚态，这些束缚态受到拓扑保护 [16],；其关键性质及其出现条件随后在一般基础上得以推导 [17]。研究人员还在其他典型拓扑模型的光子学模拟体系中，对拓扑缀饰态开展了具体研究，例如 Harper–Hofstadter 模型 [18, 19]和 Haldane 模型 [17, 19] ，以及呈现非厄米拓扑的有损系统 [20, 21]。此外，原子发射特性也被提出可用作光子拓扑相的传感器 [22]。近期大量相关文献的研究动机，源自技术领域的显著进步：如今能够制造具有工程化特性的光子晶格，其形式为大规模周期性排列的耦合腔/谐振器（一维或二维），并能在超冷原子 [23], 、电路量子电动力学 [24–28]和耦合谐振器光波导 [29]等多种实验平台中，使其与一组可控原子/量子发射体实现相干耦合。

在上述背景下，一个关键问题仍未得到解答：对于具有已知拓扑性质的光子浴，与之耦合的原子是否会继承

空间维度 \ 拓扑	厄米	非厄米
1D	$\nu_a = \nu_p$	$\nu_a = -\nu_p$
2D	$\nu_a = -\nu_p$	$\nu_a = \nu_p$
3D	$\nu_a = \nu_p$	$\nu_a = -\nu_p$

表 I。 *Main results of the present work.* 如果系统的自由度与浴的自由度相等，则根据式（$\nu_a = \nu_p$），系统的拓扑相对于浴的拓扑保持不变（$\nu_a = -\nu_p$）或发生反转（$\nu_a = -\nu_p$），具体取决于式（1）。表中仅列出 $\mathbb{Z}$ 相，因为在 $\mathbb{Z}_2$ 情况下，拓扑总是保持不变。红色箭头连接了由厄米-非厄米对应 [33] 联系起来的情形。假定满足共振条件 $\omega_e = \omega_0$（参见正文）。

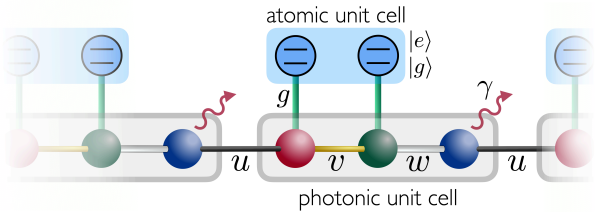

图 1. *Setup.* 耦合到光子晶格的二能级（$|g\rangle$、$|e\rangle$）量子发射体（QEs）。完整的光-原子系统具有平移不变性。为便于说明，图中展示了一个具体的一维示例：每个光子晶胞包含 $N_b = 3$ 个谐振器（红色、绿色和蓝色），以及两个量子发射体。更一般的情形将在正文中讨论。晶胞内耦合为 v 和 w，晶胞间耦合为 u，第三个谐振器（蓝色）是有损的，损耗率为 γ。例如，通过将两个量子发射体分别耦合到每个光子晶胞中的前两个谐振器，即可实现光-原子哈密顿量的平移不变性。这样，原子哈密顿量的晶胞维度为 2（青色）。这一方案可自然应用于超导腔系统，其中传输线充当光子浴，超导量子比特充当二能级原子。

某种非平庸拓扑？如果会，原子的拓扑对称类和相与场的拓扑对称类和相有何关联？

为处理这一普遍问题，我们采用拓扑绝缘体的标准 Altland-Zirnbauer 分类 [30]，并考虑一个与周期性排列的二能级发射体弱耦合的通用光子晶格模型，使整个系统保持平移不变（其晶胞通常大于裸光子场的晶胞）。我们得到了联系光子与原子拓扑不变量的一般结果。因此，基于厄米情形下的体边对应 [31],，我们揭示了开放边界条件下光子与原子边界模之间的关系；在非厄米情形下，还揭示了趋肤模或更一般的体异常动力学之间的关系 [32, 33]。这一系统-浴拓扑对应的主要结果总结于表 I 中。

结果

系统-浴拓扑对应

在深入探讨我们所考虑的具体量子光学装置之前，我们先在一般情形下给出我们的结果。

考虑一个具有自由哈密顿量 $\hat{} H_e = \omega_e \sum_i \hat{s}_i^\dagger \hat{s}_i$ 的多部分量子系统，其中 $\hat{s}_i^{(\dagger)}$ 是第 i 个系统的激发的湮灭（产生）算符。假设该系统与一个浴耦合。我们假设浴哈密顿量守恒粒子数、为二次型且平移不变。那么，在周期性边界条件下，它可写成二次量子化形式 $\hat{} H_p = \sum_{\mathbf{k}} \hat{} B^\dagger{}_{\mathbf{k}} H_p(\mathbf{k}) \hat{} B_{\mathbf{k}}$。这里，$\mathbf{k}$ 是准动量，由于平移不变性，它是一个良好量子数。

矩阵 $H_p(\mathbf{k})$ 是傅里叶空间中的单粒子哈密顿量，其本征值给出浴的能带结构，该结构以能量 ω_0 为中心。最后，$B_{\mathbf{k}} = (\hat{} b_{\mathbf{k},1}, \hat{} b_{\mathbf{k},2}, \ldots)^{\mathrm{T}}$，其中 $\hat{} b_{\mathbf{k},j}$ 是浴在实空间中的湮灭算符 $\hat{} b_{\mathbf{k},j} \propto \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{} b_{\mathbf{r},j}$ 的傅里叶变换。我们考虑由相干激发交换给出的弱系统-浴相互作用，即 $\hat{} H_{\mathrm{int}} = g \sum_i (\hat{s}_i \hat{} b_i^\dagger + \mathrm{H.c.})$。

假设动力学是马尔可夫的，浴的自由度可以被迹掉。当系统的裸频率 ω_e 不属于浴的谱时，这一过程会导出一个有效的缀饰系统哈密顿量 $\hat{} H_a \sim \hat{} H_e + g^2 \hat{} G_p(\omega_e)$，其中后者是浴的预解算符 [34]。

我们的结果关联了裸浴与被浴缀饰的系统的拓扑性质，从而建立了系统-浴拓扑对应。通过设定 $\omega_e = \omega_0$，两个哈密顿量具有相同的对称性。此外，当系统的自由度数量与浴的自由度数量相等时，我们基于 Altland and Zirnbauer 分类 [30]揭示了拓扑保持与反转现象。也就是说，$\hat{} H_{a(p)}$ 的拓扑不变量 $\nu_{a(p)}$ 之间存在如下关系

$$\nu_a = \begin{cases} \nu_p & \text{for } \mathbb{Z}_2 \text{ phases,} \\ \nu_p (-1)^{D+\mathfrak{h}} & \text{for } \mathbb{Z} \text{ phases.} \end{cases} \tag{1}$$

这里，D 表示空间维度；如果 $\hat{} H_p$ 是（非）厄米的，$\mathfrak{h}$ 则为 1（0）。浴的整数拓扑不变量会根据维度和厄米性，由系统保留或反转。而浴的 $\mathbb{Z}_2$ 保护相则总是由系统继承。

这一结果与厄米—非

厄米对应，见参考文献 [33]。因此，厄米拓扑系统的边界模由拓扑不变量 $D+1$表征，可映射到闭流形上的非厄米系统，且拓扑不变量相同。事实上，我们展示了拓扑保持（反转），即 ν，如何发生在 D 维厄米系统以及 $\nu_a = \nu_p (\nu_a = -\nu_p$维的非厄米系统中，见表 $D+1$ I。

量子光学系统与哈密顿量

在通常研究的弱耦合和马尔可夫近似条件下，光子介导原子之间的二阶相互作用，这种相互作用可由有效的多体原子哈密顿量 [16]描述。我们研究该哈密顿量的拓扑性质，并表明这些性质尤其取决于原子频率与平均光子频率之间的失谐（后者通常位于中央光子带隙的中间）。

我们所考虑的系统是上述一般情形的一个具体实例，如图1所示。它由 N_e 个二能级量子发射体（QE）组成，每个发射体均具有基态和激发态，$|g\rangle$ 且 $|e\rangle$由玻尔频率 ω_e分隔。量子发射体局部耦合到一个平移不变光子晶格，该晶格由耦合的单模谐振器构成。晶格的一个晶胞包含 N_b 个谐振器。因此，子晶格的数量通常与光子能带的数量相同。

系统由哈密顿量 $H = $ 建模。$H_e + H_p + H_{\rm int}$. 自由原子哈密顿量为 $H_e = \omega_e \sum_n \sigma_n^\dagger \sigma_n$，其中 $\sigma_n = |g\rangle_n\langle e|$。在周期性边界条件（BCs）下，裸光子哈密顿量可用具有确定准动量$\mathbf{k}$ 的浴模表示为

$$\hat{H}_p = \sum_{\mathbf{k}\in \mathrm{BZ}} \hat{A}^\dagger_{\mathbf{k}} H_p(\mathbf{k}) \hat{A}_{\mathbf{k}} \,, \tag{2}$$

其中，“BZ”表示第一布里渊区，$A^\dagger_{\mathbf{k}} = (a^\dagger_{\mathbf{k}1}, \ldots a^\dagger_{\mathbf{k}N_b})$，$a_{\mathbf{k},s}$ 是场的正则模的玻色湮灭算符，而 $H_p(\mathbf{k})$ 是布洛赫哈密顿量矩阵（见方法）。我们用 ω_0 表示裸谐振器频率，并将 $\omega_0 = 0$ 设为参考能量。总哈密顿量的最后一项描述了量子发射体与场之间在通常的旋波近似下的相互作用，

$$\hat{H}_{\rm int} = g \sum_{n=1}^{N} \sum_{s\in\mathcal{C}} \hat{\sigma}^\dagger_{ns} \hat{a}_{ns} + \ \mathrm{H.c} \,, \tag{3}$$

其中，$\mathcal{C} \subseteq \{1, \ldots, N_b\}$ 是与量子发射体耦合的子晶格集合。这里，$\hat{a}_{ns}$ 是位于第 n个晶胞、属于 s子晶格（$s \in \{1, \ldots, N_b\}$）的谐振器的实空间湮灭算符，而 N是总数个晶胞的数量。式（3）中的原子算符带有两个指标，用以指定其耦合的谐振器。

接下来，我们将考虑一种平移不变的发射体排列，其周期性等于或大于光子晶格的周期。若 ω_e 位于光子带隙中，且耦合常数 g 较小（与 ω_e 和浴能带之间的谱距离相比），则浴会在发射体 [16, 35, 36]之间诱导有效的相干相互作用。在这一弱耦合区域中，原子自由度与光子自由度的混合程度很小，因此只分析原子子系统的拓扑性质是有意义的。

每个谐振腔一个发射体的情形：拓扑保持与反转

在每个谐振腔一个发射体的情形下，整个系统的布洛赫哈密顿量为

$$H(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \omega_e I & gI \\ gI & H_p(\mathbf{k}) \end{bmatrix} , \tag{4}$$

其中 I 是 N_e维单位矩阵。值得注意的是，整个原子-光哈密顿量在拓扑上是平庸的（参见“方法”）。通过标准的二阶微扰理论，可以得到有效原子哈密顿量（参见“方法”），它依赖于浴的预解算符：

$$H_a(\mathbf{k}) = \omega_e + \frac{g^2}{\omega_e - H_p(\mathbf{k})} \,. \tag{5}$$

ˆ实空间形式 H_a 可通过逆傅里叶变换得到。

我们发现，取决于空间维度、对称性，以及光子哈密顿量是否为厄米，该有效系统的拓扑可能保持不变，也可能发生反转，至少对于基本对称性类别而言如此。我们在此给出厄米和非厄米情况下的一般结果，如表 I 所总结，并附上典型示例。

Hermitian case

10种基本对称性类别最初由 Altland and Zirnbauer（AZ）确定 [30]。在此基础上，随后对厄米非相互作用系统（绝缘体和超导体）进行了拓扑分类 [37, 38]。在我们考虑的守恒粒子数哈密顿量中，只有其中五种对称性类别相关 [5], 见表II。该分类基于时间反演对称性（TRS 或 T）、粒子-空穴对称性（PHS 或 C）以及

	对称性			空间维度		
类别	T	C	S	1	2	3
A	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0
AIII	0	0	1	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
AI	+	0	0	0	0	0
BDI	+	+	1	$\mathbb{Z}$	0	0
D	0	+	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0

表 II。 *Periodic table of topological insulators.* 基于时间反演（T）、粒子-空穴（C）和手征（S）对称性的厄米光子拓扑绝缘体阿特兰-齐恩巴赫分类，其中对称性的存在（缺失）分别以 1 或 + （0）表示。 + 符号表示 T（或 C）的平方为 1，$T^2 = 1$ [30] 。黑色箭头突出显示了光子对称性类别与原子对称类之间的非共振跃迁。条目 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{Z}_2$, 0 表示在相应空间维度下，适当拓扑不变量的可能取值。该表改编自参考文献 [31]。

手征对称性（S） [5, 30, 31]。它们对系统布洛赫哈密顿量 $H(\mathbf{k})$ 的具体作用为

$$TH(\mathbf{k})T^{-1} = H(-\mathbf{k}), \tag{6}$$

$$CH(\mathbf{k})C^{-1} = -H(-\mathbf{k}), \tag{7}$$

$$SH(\mathbf{k})S^{-1} = -H(\mathbf{k}). \tag{8}$$

T 和 C 都是反幺正算符，即 $T = U_{\mathrm{TRS}}K$ 和 $C = U_{\mathrm{PHS}}K$，其中 U_{TRS} 和 U_{PHS} 是幺正算符， K 表示复共轭。将这些算符应用于H_a（$\mathbf{k}$），可以证明时间反演对称性始终未被破坏，

$$H_a(\mathbf{k}) \text{ has TRS} \Leftrightarrow H_p(\mathbf{k}) \text{ has TRS} \tag{9}$$

对于带隙中的任意原子频率，粒子-空穴对称性（PHS）以及由此产生的手征对称性 [31], 都可能被破坏。事实上

$$H_a(\mathbf{k}) \text{ has PHS} \Leftrightarrow H_p(\mathbf{k}) \text{ has PHS} \tag{10}$$

只有当 $\omega_e = 0$，手征对称性也同样如此。反之，在不存在光子对称性的情况下，原子层面不会产生新的对称性。

方程（9）和（10）表明，在共振条件下（$\omega_e = 0$）， H_a 和 H_p 属于同一对称性类别；离开共振时，从 H_p 到 H_a会发生以下对称性类别转变：AIII $\to$ A、BDI$\to$ AI 和 D $\to$ A，见表 II。在同一对称性类别内，拓扑上不同的相由拓扑不变量的不同取值来表征（例如 Zak 相、陈数、Chern-Simons 不变量）；我们通常将其记为 ν_l，其中 $l = p,\ a$ 分别指光子子系统和原子子系统。根据体边对应， ν_l 给出了具有开放边界条件的系统中的边缘模数量；拓扑不变量为零的相即为平庸相 [31]。

为确保继承粒子-空穴对称性和手征对称性，我们聚焦于情形 $\omega_e = 0$，使得 $H_a(\mathbf{k}) = -g^2 H_p(\mathbf{k})^{-1}$ 其中 $H_a(\mathbf{k})$ 和 $H_p(\mathbf{k})$ 均在 0 处开隙。

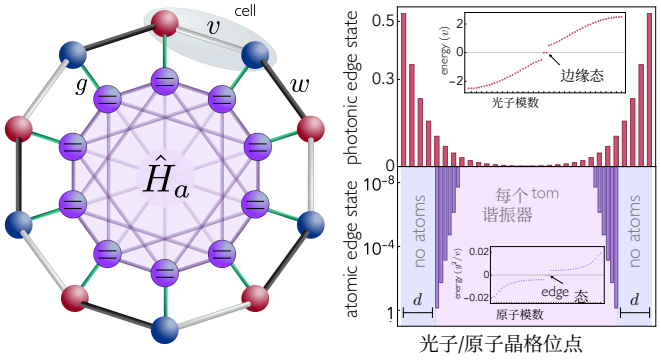

图 2. *Hermitian topological preservation.* 左：具有交错耦合 v 和 w 的光子 SSH 晶格。每个量子发射体都以耦合强度 g 与每个谐振器耦合。由量子发射体介导的哈密顿量 $\hat{H}_a$ 的形式以紫色示意。移除量子发射体后，原子系统具有开放边界条件，而光子晶格仍保持平移不变。右：具有 $N = 60$ 个谐振器的光子边缘态波函数的绝对值（上），以及与具有 N 个谐振器（上）、 $d = 8$ 个格点的周期性 SSH 晶格耦合的、具有 $N_e = 44$ 个发射体的原子边缘态波函数的绝对值（下）。原子边缘态的权重主要集中在第一个和最后一个格点上，且非零（注意这里使用了对数刻度）。其余格点上的非零振幅是有限尺寸效应。插图显示了开放边界条件下光子（原子）能谱，单位分别为 v （g^2/v）。参数值： $w = 1.5v$、$g = 0.1v$、$\omega_e = 0$ 。

对于每个谐振腔一个发射体的情形，我们的主要结果是：在任意空间维度下，厄米拓扑均得以保持（$\nu_a = \nu_p$），适用于 $\mathbb{Z}_2$ 相；而在奇数维度下（尤其是一维和三维），也适用于 $\mathbb{Z}$ 相（见方法部分的证明）。偶数维度下的 $\mathbb{Z}$ 相则会发生拓扑反转（$\nu_a = -\nu_p$）。这种拓扑反转尤其会基于体边对应产生可直接观测的后果（我们将在后文讨论）。

拓扑保持——作为厄米拓扑保持的一个最简示例，我们考虑量子发射体耦合到 SSH 晶格的情形，见图 2，其哈密顿量为

$$\hat{H}_p = \sum_n v\,\hat{a}^\dagger_{n,1}\hat{a}_{n,2} + w\,\hat{a}^\dagger_{n,2}\hat{a}_{n+1,1} + \text{H.c.} \tag{11}$$

该模型属于 BDI 类，具有 $\mathbb{Z}$ 相 [16]。在共振条件下，量子发射体之间的有效哈密顿量保留手征对称性，因此，根据我们的结果，它具有与底层光子晶格相同的拓扑性质。这可以通过体边对应加以验证。事实上，通过引入原子边界条件（可通过在更大的周期性光子 SSH 晶格中考虑有限量子发射体阵列来实现），原子部分在非平庸相中支持拓扑边缘态——尽管介导相互作用具有很高的连通性。

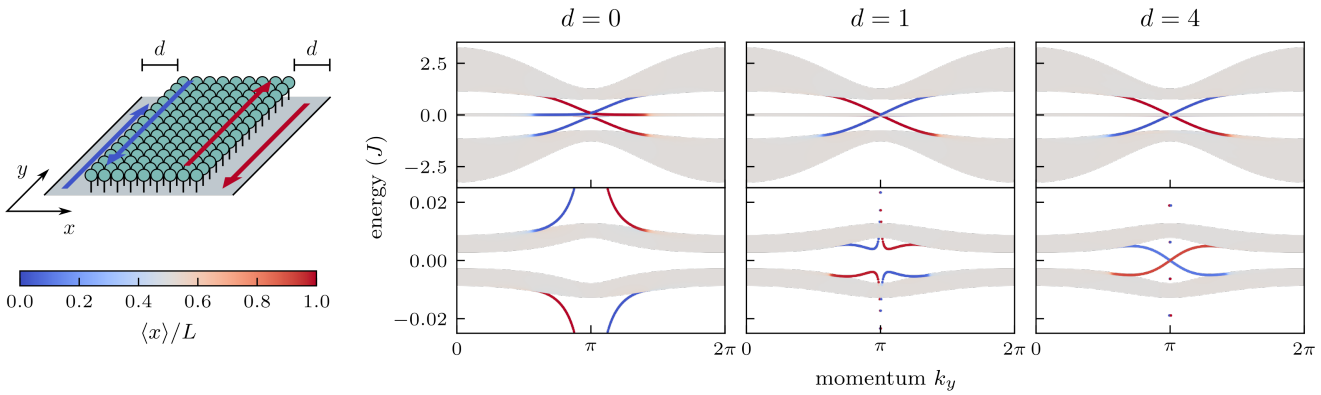

图 3. *Hermitian topological reversal.* 左上：展示厄米拓扑反转的装置示意图。量子发射体（绿色球体）耦合到 QWZ 二维光子晶格（灰色平面），见式 (12)。仅沿 x 方向施加光子开放边界条件。参数 d 表示外侧条带的厚度（以光子晶胞为单位），用于分隔光子边界和原子边界。它可用于在充满发射体的系统情形（$d = 0$）与沿 x 方向、在固定 y （$d \gg 0$）下，由谐振器周期性阵列中的有限量子发射体阵列构成的情形之间进行插值。右：量子发射体耦合到 QWZ 浴构成的完整系统的能谱，沿 x （y）方向采用开放（周期性）边界条件。每个发射体均耦合到一个浴格点，但浴边缘处有两条宽度为 d （晶胞）的条带除外。顶排图突出显示光子能谱；原子模的能量非常接近零（放大图见底排；注意能量尺度不同）。颜色根据图例（左下）表示沿 x 方向的局域化程度。灰色能量对应的态是离域态，红色（蓝色）能量对应的态则局域在右（左）边界。完整光物质系统的平庸性显而易见：在共振频率附近的能隙中没有边缘态（最左图，$d = 0$）。当 d 较大时，拓扑反转的影响十分明显（最右图）：例如，考察右边界（红色）的边界模，光子模与原子模的群速度方向相反。蓝色模也同样如此。参数值：沿 x 方向有 $L = 50$ 个晶胞，$u = 1.2$、$\omega_e = 0$ 和 $g = 0.1J$。在下方图中，$d = 1$ 和 $d = 4$ 两种情形下可见的孤立点，源于数值计算中沿 y 方向对（实际上连续的）动量进行离散化；这些点对应光子边缘态。

拓扑反转——厄米拓扑反转发生在二维中。为展示其影响，我们考虑与二维陈绝缘体耦合的量子发射体，该绝缘体由 Qi-Wu-Zhang（QWZ）模型描述 [39]（A 类）。该模型的布洛赫哈密顿量 $H_p(\mathbf{k})$ 表示为

$$H_{\mathrm{QWZ}}(\mathbf{k}) = J\sin(k_x)\sigma_x + J\sin(k_y)\sigma_y + J[u + \cos(k_x) + \cos(k_y)]\sigma_z\,, \quad (12)$$

其中 $\sigma_\alpha\,(\alpha \in \{x, y, z\})$ 为泡利矩阵。仅沿 x 方向施加开边界条件时，只要满足 y，该系统就支持手性光子边界模，沿 $|u| < 2$以相反方向传播。拓扑反转（见表 I）预言光子和原子的陈数相反，因此原子边界模中的激子会以与对应光子模相反的速度传播。考虑沿 x 方向排列的有限量子发射体阵列时，确实如此，参见图3。当量子发射体集合位于光子体深处时，每个光子边界模在同一边界上都有一个手性相反的对应原子模。

Non-Hermitian case

当哈密顿量允许为非厄米时，基本对称性类别的数量会从 10 个（AZ 类）增加到 38 个（Bernard-LeClair 类） [40, 41]。这里我们仅关注后者中的一个子类，它自然地推广了前者。一个关键区别在于，复共轭不再等同于转置。方程（6）-（8）的适当非厄米对应形式给出了非厄米 AZ 类的对称性约束： [41]

$$U_{\mathrm{TRS}}H^*(\mathbf{k})U_{\mathrm{TRS}}^{-1} = H(-\mathbf{k}), \quad (13)$$
$$U_{\mathrm{PHS}}H^{\mathrm{T}}(\mathbf{k})U_{\mathrm{PHS}}^{-1} = -H(-\mathbf{k}), \quad (14)$$
$$SH^\dagger(\mathbf{k})S^{-1} = -H(\mathbf{k}). \quad (15)$$

这些类别还有一个对偶，称为非厄米 AZ† [41]，其对称性约束为

$$U_{\mathrm{TRS}}H^{\mathrm{T}}(\mathbf{k})U_{\mathrm{TRS}}^{-1} = H(-\mathbf{k}), \quad (16)$$
$$U_{\mathrm{PHS}}H^*(\mathbf{k})U_{\mathrm{PHS}}^{-1} = -H(-\mathbf{k}), \quad (17)$$
$$SH^\dagger(\mathbf{k})S^{-1} = -H(\mathbf{k}). \quad (18)$$

正如文献 [33], 所强调的，D 维厄米 AZ 类的拓扑分类与相应的非厄米 AZ（AZ†）类的拓扑分类相一致

在 $D+1$（$D-1$）维中。我们在此揭示的拓扑保持与拓扑反转与这种厄米-非厄米对应完全一致（见方法）。

在每个谐振器对应一个发射体的情况下，我们关于非厄米 AZ（AZ†）类别的主要结论是，非厄米拓扑总是得到保留，除了Z 奇数维中的相（证明见方法）。这里我们讨论两个分别阐释非厄米拓扑反转与保留的设置。

拓扑反转——这对于一维系统尤为重要，例如参考文献 [20, 42]中所研究的系统。在一维中，以非平凡绕数为特征的点隙谱 ν 是非厄米皮肤效应的拓扑起源 [32]。一般而言， ν 的符号可以与趋肤态聚集的边界相关联。请注意，还存在更复杂的对称性保护版本，例如由时间反演对称性保护的$\mathbb{Z}_2$ 皮肤效应† ，参考文献 [32]对此进行了讨论。这提供了一个谱绕数总是为零、但具有非平凡$\mathbb{Z}_2$ 数的例子，该数表明存在一对局域于两个边界的趋肤模。然而，非零绕数是非互易模型的典型特征，通常作为时间反演对称性破缺与耗散共同作用的结果出现 [43]。

拓扑反转意味着一侧边缘的光子皮肤态对应于另一侧边缘的原子皮肤态。因此，通过将量子发射体局域耦合到非互易晶格的所有格点，量子发射体本身构成一个反转的非互易系统。

与文献 [21], 类似，我们考虑一个光子Hatano-Nelson一维阵列，其右向耦合 $J_R = J(1+\delta)$和左向耦合$J_L = J(1-\delta)$具有非互易性，且具有均匀的局域耗散$\gamma = 2\delta J$，

$$\hat{H}_p = \sum_n J_R \hat{a}^\dagger_{n+1}\hat{a}_n + J_L \hat{a}^\dagger_n \hat{a}_{n+1} - i\gamma a^\dagger_n \hat{a}_n \qquad (19)$$

其中量子发射体耦合到所有模式。由于每个晶胞中只有一个谐振器，我们省略了子晶格指标。在开放边界条件下，当 $\delta > 0$时，光子趋肤模累积于右侧。原子周期系统具有反转的拓扑（绕数相反），因此其趋肤模累积于左侧（见图4）。

拓扑保持——在非厄米情形下，拓扑也可能得到保持。作为一个简单的例子，我们考虑二维中具有手征对称性的非厄米光子浴。从厄米-非厄米对应 [33]，的角度来看，这种系统模拟了三维手征拓扑绝缘体的无隙表面态 [45]。因此，它可以用基准能量以上狄拉克锥的净手性荷来表征；在我们的设定中，这恰好就是ω_e，并且受手征对称性约束而纯虚。我们聚焦于参考文献 [33]中研究的模型：

$$H_p(\mathbf{k}) = J\sin(k_x)\sigma_x + J\sin(k_y)\sigma_y + iJ(2\cos(k_x) + \cos(k_y) - 3)\,, \qquad (20)$$

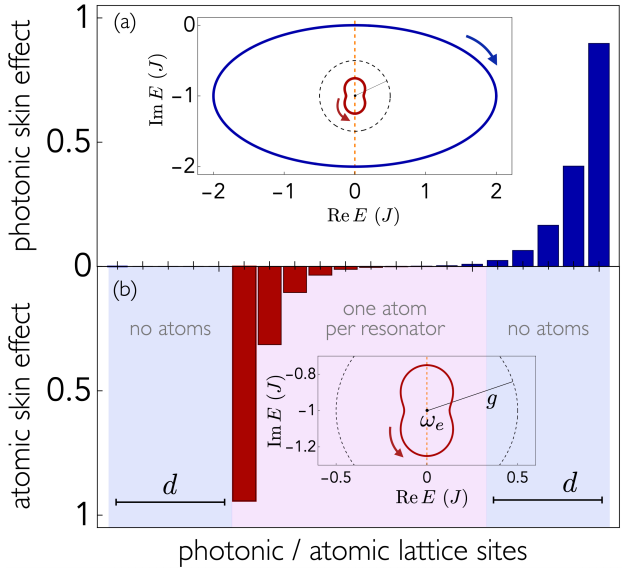

图4。 *Non-Hermitian topological reversal.* (a) 在裸光子Hatano-Nelson模型中，式（19），包含 $N = 20$ 个谐振器时，光子皮肤态累积于右侧边缘。(b) 将发射体耦合到同一光子晶格后，在周期性边界条件下，原子皮肤态累积于左侧边缘。两幅图均显示了所有趋肤模的归一化平均值 $|\psi_i\rangle$，$\sum_i |\langle n|\psi_i\rangle|^2$ $|n\rangle$ ，其中为晶格位点。通过移除 $2d = 10$ 个量子发射体（外侧紫色条带），同时保持光子结构周期性，从而施加原子开放边界条件并诱发皮肤效应。上方插图显示了周期性边界条件下以 J为单位的光子（蓝色）和原子（红色）复谱。下方插图是上方插图的放大图。我们发现绕数相反，印证了拓扑反转。竖直的橙色虚线表示 $\mathrm{Re}\,E = \mathrm{Re}\,\omega_e$。以 ω_e 为圆心的黑色虚线圆表示原子-光子相互作用的强度 g （即半径）。特别标出这一点，是因为一维系统中的反转可以用相对于该圆的圆反演来描述 [44]。参数： $\delta = 0.5$， $g = 0.5J$， $\omega_e = -iJ$。

其复谱如图5左图所示。取 ω_e 为 $-iJ$时，拓扑数为 1，因为 ω_e以上只有一个手性荷为正的狄拉克锥。相应的发射体哈密顿量可由式（5）得到。其能谱如图5右图所示。同样的推理表明，发射体哈密顿量的拓扑数也为 1，这意味着拓扑得以保持。

发射体少于谐振器的情况：拓扑对应失效

现在考虑量子发射体耦合到光子晶格的平移不变系统的最一般情形。晶胞内的相互作用哈密顿量可写为

$$\hat{H}_{\mathrm{int},n} = g\,\hat{\mathcal{S}}^\dagger_n\,\Pi\,\hat{\mathcal{A}}_n + \mathrm{H.c.} \qquad (21)$$

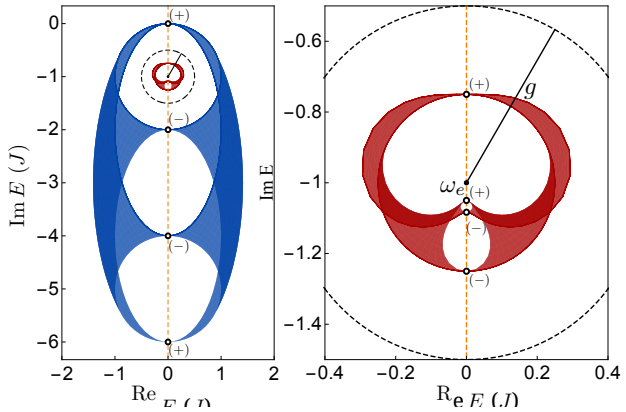

图5。 *Non-Hermitian topological preservation.* 二维手征对称非厄米光子晶格的能谱（20）（蓝色）以及根据式（5）得到的耦合发射体能谱（红色）。右图是左图的局部放大图。圆点表示具有（+）或（−）手性荷的狄拉克锥。根据式（5），每个位于 ω_e 上方（下方）的光子狄拉克锥，都会映射为位于 ω_e 上方（下方）且具有相同手性荷的原子狄拉克锥。拓扑保持源于 ω_e 上方的总手性荷给出了拓扑数。深色阴影区域在 $\mathbf{k}$ 遍历布里渊区时会被扫过两次。此处 $\omega_e = -iJ$ 且 $g = 0.5J$。

其中 $\hat{}H_{\rm int} = \sum_n \hat{}H_{{\rm int},\,n}$，$\hat{}\mathcal{A}_n^{\rm T} = (\hat{a}_{n1},\ \ldots,\ \hat{a}_{nN_s})$，$\hat{}\mathcal{S}_n^{\rm T} = (\hat{}\sigma_{n1},\ \ldots,\ \hat{}\sigma_{nN_b})$，参见式（3）。投影算符 $\Pi = {\rm diag}(p_1,\ \ldots,\ p_{N_b})$，$p_i \in \{0,1\}$ 的秩指定了每个晶胞中的量子发射体数量。在前一部分中，我们有 $\Pi = \mathbb{1}_{N_b}$。

一般情况下，布洛赫原子哈密顿量写作

$$H_a(\mathbf{k}) = \Pi\left(\omega_e + \frac{g^2}{\omega_e - H_p(\mathbf{k})}\right)\Pi\,, \tag{22}$$

其中只有由 Π 选出的非零区块是相关的。值得注意的是，当发射体“超晶格”的晶格常数大于光子浴的晶格常数时，只需适当扩大浴晶胞，即可使用相同的有效哈密顿量表达式。

通过考察具体设置，我们得出结论：无法像在每个谐振腔一个发射体的情形中那样作出一般性陈述。特别是，我们表明，一维厄米拓扑光子晶格根据发射体的排列方式，可以诱导非拓扑相互作用和拓扑相互作用。最后，我们展示了非厄米非拓扑光子晶格如何在原子层面介导非厄米拓扑。这些反例支持了我们的主张。

Violation of Hermitian topological preservation

考虑一个布洛赫哈密顿量为

$$H_p(k) = [v + w\cos k]\sigma_x + w\sin k[\cos(2\theta)\sigma_y + \sin(2\theta)\sigma_z]\,, \tag{23}$$

其中 $v,\ w > 0$、$\theta \in [0, \pi/4]$。对于 $\theta = 0$，该双带模型对应于 SSH 晶格；对于 $\theta = \pi/4$ [17]，则对应于 Creutz梯子的特定构型。更具体地说，$H_p(k) = U_\theta^\dagger H_{\rm SSH}(k)U_\theta$，其中 $U_\theta = \cos\theta\mathbb{1}_2 + i\sin\theta\sigma_x$ 是对晶胞模施加的酉变换。对于任意 θ、$U_{\rm TRS} = \cos(2\theta)\mathbb{1}_2 - i\sin(2\theta)\sigma_x$，它都属于 BDI 对称类；$U_{\rm PHS} = \sigma_z$ 和 $U_{\rm CH} = U_{\rm PHS}U^*$ 时间反演对称性分别是实现反幺正时间反演对称性和粒子-空穴对称性的幺正算符，而后者实现幺正手征对称性 [5, 31]。

原始的双格点光子晶胞（$\hat{}a_{n,\,1}$，$\hat{}a_{n,\,2}$）可以通过重新标记（$\hat{}a_{n,\,1}$，$\hat{}a_{n,\,2}$、$\hat{}a_{n+1,\,1}$，$\hat{}a_{n+1,\,2}$）$\to$（$\hat{}a_{n,\,1}$，$\hat{}a_{n,\,2}$、$\hat{}a_{n,\,3}$、$\hat{}a_{n,\,4}$）形式上扩展为四格点晶胞。随后，只需将两个量子发射体耦合到扩展光子晶胞中的两个谐振器，即可得到一个双能带原子哈密顿量。实现这种耦合只有两种不等价的方式。我们设定 $\omega_e = 0$，以保持手征对称性。

i) 元胞上 情形对应于将量子发射体耦合到子晶格 1 和 2 中的谐振器，即 $\Pi = {\rm diag}(1,1,0,0)$。由于 $[\Pi, U_s] = 0$，对于 $s \in$ {时间反演对称性、粒子-空穴对称性、CH}，原子子系统继承了光子子系统的所有对称性。除了属于同一对称性类别外，原子系统和光子系统还具有相同的拓扑，这与每个谐振腔一个发射体的情形相同。实际上，通过突出显示布洛赫光子哈密顿量 $H_{\rm SSH}(k; v, w)$ 对参数的依赖关系，可以看出 $H_a(k) \propto [H_{\rm SSH}(k; v^2, -w^2)]^{-1}$。因此，原子系统和光子系统具有相同的绕数 [46]。$\hat{}$ 请注意，只需分析 SSH 情形（$\theta = 0$）中得到的 H_a，因为其他情形（$\theta \neq 0$）在幺正变换下等价。

ii) 破胞 情形对应于将量子发射体耦合到子晶格 2 和 3 上的谐振器，即 $\Pi = {\rm diag}(0,1,1,0)$。原子哈密顿量具有粒子-空穴对称性，对于任意 θ，均有 $U_{\rm PHS} = -\sigma_z$，但不再具有时间反演对称性和手征对称性，除非满足 $\theta = 0$。对于 SSH 光子晶格（$\theta = 0$），当光子哈密顿量不具拓扑性时，介导哈密顿量具有拓扑性，反之亦然。事实上，$H_a(k) \propto [H_{\rm SSH}(k; w^2,\ -v^2)]^{-1}$，因此，当原子绕数非零（为零）时，光子绕数为零（非零）。这类似于重新定义胞内/胞间耦合振幅后拓扑性质的变化。对于 $0 < \theta < \pi/4$，介导哈密顿量属于 D对称性类别，仅具有粒子-空穴对称性；而对于 $\theta = \pi/4$，无论 $v,\ w$ 取何值，介导原子哈密顿量都无能隙，其能隙为 $\Delta = 2g^2 w\cos(2\theta)/(v^2 + w^2)$。因此，在这些情形下，比较光子与原子的拓扑性质毫无意义。

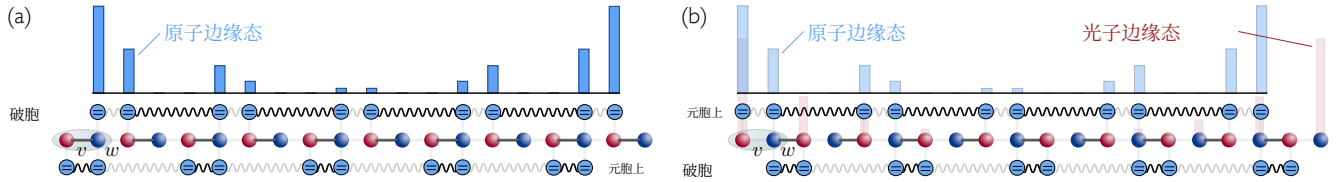

图 6. *Violation of the Hermitian topological preservation.* (a) 实空间中的光子晶格如式（23）所示，在非拓扑相 $v > w$下采用开放边界条件。量子发射体分别以元胞上和破胞构型耦合到光子晶格下方和上方。在前一种构型中，原子系统继承光子晶格的全部对称性和拓扑性质。在后一种构型中，即使光子晶格没有拓扑性质，也会出现一对拓扑保护的原子边缘态（青色仅显示其中一个）。对于 $\theta = 0$，原子系统具有手征对称性，属于 BDI 对称类，其拓扑数为绕数。波浪线表示量子发射体之间的介导耦合，线条粗细代表耦合强度。在几乎完全二聚化的极限（$v \gg w$）下，元胞上构型中的原子系统遵循光子二聚化，而破胞构型中的原子系统则不遵循，这促使边缘态的出现。(b) 与 (a) 相同，但采用拓扑光子晶格；元胞上和破胞构型分别位于光子晶格上方和下方。此时，元胞上构型中的光子边缘态（红色阴影）伴随着原子边缘态（青色阴影）。边缘态的参数值： $\omega_e = 0, \theta = 0$ (不同的 θ 不会显著影响其轮廓)， $w/v = 4/5$ 用于 (a)， $v/w = 2/5\,[4/5]$ 用于 (b) 中光子 [原子] 模。

Violation of non-Hermitian topological reversal

与厄米情形一样，当发射体数量少于谐振器数量时，我们通常无法断言拓扑反转或拓扑保持。构造反例的一种通用方法是，将两个拓扑数相反的拓扑光子晶格堆叠起来，并仅以每个谐振器对应一个发射体的方式，将其中一个晶格耦合到发射体。尽管整个光子浴是平庸的，发射体哈密顿量仍会因相对于其相互作用的子晶格发生拓扑反转或拓扑保持而呈现非平庸拓扑。即使开启两个光子晶格之间的耦合，只要耦合不强到使发射体哈密顿量变为无能隙，非平庸的发射体拓扑就会保留下来。请注意，这一方法也适用于厄米系统。

作为一个简单的（反）例子，我们构造了一个谱绕数为零的一维非厄米光子浴，然而它却能为发射体哈密顿量诱导出非零的谱绕数。该光子浴由两条具有相反手征性、沿相反方向单向传输的 Hatano-Nelson 链以及厄米链间跃迁组成。发射体仅与其中一条链耦合，例如向左传输的链。于是，我们可以写出光子布洛赫哈密顿量和投影算符

$$H_p(k) = \begin{bmatrix} \kappa(e^{ik} - i) & J \\ J & \kappa(e^{-ik} - i) \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

我们假设 $J < \kappa$ 使得 $H_p\,(k)$ 相对于 $\omega_e = -i\kappa$是开隙的。将上述表达式（24）代入式（22），我们得到

$$H_a(k) = -\frac{g^2\kappa}{\kappa^2 - J^2} e^{-ik} - i\kappa, \quad (25)$$

结果表明，相对于基准能量，其特征在于非零谱绕数 $\nu_a = -1$ ω_e [47]。为了直观展示该模型中非厄米拓扑反转的这种失效，我们考虑了在开放边界条件下的有限系统，并切除边界附近的一些发射体。如图7所示，我们发现发射体阵列中出现了皮肤效应，尽管光子浴并未表现出皮肤效应。

讨论

我们研究了光子晶格的拓扑性质与周期性排列、并与其耦合的原子所产生的光子介导的偶极-偶极哈密顿量的拓扑性质之间的关系。

对于拓扑光子晶格，在厄米和非厄米两种情况下，我们都进行了完整刻画，其中每个模式均与单个量子发射体耦合。在保持光子对称性的共振条件下，原子系统可能具有相同或相反的拓扑，这取决于空间维度以及光子哈密顿量是否为厄米的。

在我们提出的一般分类中，拓扑反转尤为突出。在厄米系统中，这种效应预示着原子边界模的存在，其激发的传播手性与底层二维晶格中光子激发的手性相反。相较之下，在一维非厄米系统中，我们的分析为理解非互易光子浴介导的相反非互易相互作用提供了一个通用框架 [20, 42]。

我们也考虑了完全平移不变装置的情况，不过其中发射体的数量少于谐振器。较少的原子自由度意味着约束较弱，因此不存在普遍的光子-原子拓扑对应关系。为支持这一论点，我们讨论了两种

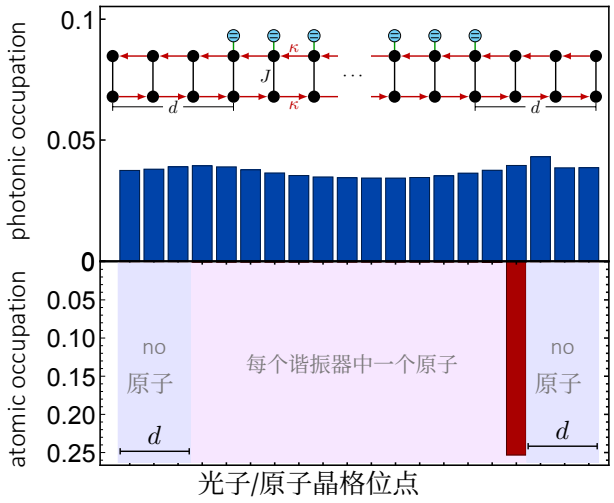

图 7。 *Violation of the non-Hermitian topological reversal.* 光子浴由两条具有相反手征性的耦合单向 Hatano-Nelson 链构成，共有 $2N$ 个格点。在开放边界条件下，除最左端和最右端的 d 个格点外，只有上方链中的谐振器与发射体耦合。请注意，插图中省略了由虚数位移 $-i\kappa$ 表征的背景损耗。不存在光子皮肤效应（上图），但会出现原子趋肤效应（下图）。两幅图均展示了 $|\langle n|\psi_i\rangle|^2$，其中 n 为原子或光子格点，$\cdots$ 为对所有归一化右本征态 $|\psi_i\rangle$的平均。在光子部分，我们进一步将同一晶胞中的每对格点相加，即具有相同水平位置的格点。此处参数选取为 $N = 20$、$d = 3$、$J = 0.5\kappa$ 和 $g = 0.1\kappa$。

这种对应关系遭到破坏的情况。

方法

光子哈密顿量

实空间中的光子哈密顿量可写为

$$\hat{H}_p = \sum_{n,m=1}^{N_c} \sum_{s,s'=1}^{N_b} \langle \mathbf{r}_n, s| \hat{H}_p |\mathbf{r}_{n+m}, s'\rangle \, \hat{a}_{ns}^\dagger \hat{a}_{n+m,s'}, \quad (26)$$

其中，N_c 是晶胞的数量，$|\mathbf{r}_n, s\rangle = \hat{a}_{ns}^\dagger |\text{vac}\rangle$，完备关系为 $\mathbb{1}_p = \sum_{n,s} |\mathbf{r}_n, s\rangle\langle \mathbf{r}_n, s|$。平移不变性要求耦合与元胞位置无关，$\langle \mathbf{r}_n, s| \hat{H}_p |\mathbf{r}_{n+m}, s'\rangle = \langle \mathbf{r}_0, s| \hat{H}_p |\mathbf{r}_m, s'\rangle$。

假设采用周期性边界条件，并使用完备关系 $\mathbb{1}_p = \sum_{\mathbf{k}\,s} |\mathbf{k}\,s\rangle\langle \mathbf{k}\,s|$，其中 $|\mathbf{k}\,s\rangle = \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}s}|\text{vac}\rangle$，以及重叠 $\langle \mathbf{r}_n, s|\mathbf{k}\,s'\rangle = \delta_{ss'} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}/\sqrt{N_c}$，可得

$$\hat{a}_{ns} = \frac{1}{\sqrt{N_c}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \hat{a}_{\mathbf{k}s}\,. \quad (27)$$

由此得到周期晶格的光子哈密顿量：

$$\hat{H}_p = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s,s'=1}^{N_b} \langle \mathbf{r}_0, s| \hat{H}_p |\mathbf{r}_n, s'\rangle \, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s'}\,. \quad (28)$$

引入矢量算符 $\hat{A}^\dagger_{\mathbf{k}} = (\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}1}, \ldots, \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}N_b})$，并将矩阵元记为

$$[H_p(\mathbf{k})]_{ss'} = \sum_n \langle \mathbf{r}_0, s| \hat{H}_p |\mathbf{r}_n, s'\rangle \, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n}\,, \quad (29)$$

它可改写为正文中给出的形式，参见式（2）。

有效介导哈密顿量

设原子频率 ω_e 与光子连续谱相距 Δ。如果原子-光子耦合 g 较弱，使得 $g/\Delta \ll 1$，那么便可以绝热消去光子浴，并推导出一个有效的光子介导的原子哈密顿量 $\hat{H}_a$ [48, 49]。

对于每个谐振器中有一个发射体的情况，其显式表达式为

$$\hat{H}_a = \hat{H}_e + \sum_{nm} \sum_{ss'} h_{ns,ms'} \hat{\sigma}_{ns}^\dagger \hat{\sigma}_{ms'} \quad (30)$$

其中

$$h_{ns,ms'} = g^2 \langle \mathbf{r}_m, s'| \hat{G}_p(\omega_e) |\mathbf{r}_n, s\rangle \quad (31)$$

其中 $\hat{G}_p(z) = (z - \hat{H}_p)^{-1}$ 是裸光子哈密顿量的格林函数，而 $|\mathbf{r}_m, s\rangle$ 表示光子晶格第 m 个晶胞中第 s 个谐振器内有一个激发的状态。原子算符中的双重索引分别指定发射体所耦合到的位置：晶胞 (n, m) 和子晶格 (s, s')。

由于 $\hat{H}_p$ 具有平移不变性，因此其预解算符 [34] 也具有平移不变性，并且

$$\langle \mathbf{r}_m| \hat{G}_p(\omega_e) |\mathbf{r}_n\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}\in \text{BZ}} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n)}}{\omega_e - H_p(\mathbf{k})} \quad (32)$$

其中 $\langle \mathbf{r}_m| \hat{G}_p(\omega_e) |\mathbf{r}_n\rangle$ 是子晶格空间中的 $N_b \times N_b$ 矩阵。因此，原子哈密顿量可写成布洛赫形式：

$$\hat{H}_a = \sum_{\mathbf{k}\in \text{BZ}} \hat{S}^\dagger_{\mathbf{k}} H_a(\mathbf{k}) \hat{S}_{\mathbf{k}} \quad (33)$$

其中 $\hat{S}^\dagger_{\mathbf{k}} = (\hat{\sigma}^\dagger_{\mathbf{k}1}, \ldots, \hat{\sigma}^\dagger_{\mathbf{k}N_b})$，$H_a(\mathbf{k})$ 是式（5）中的布洛赫哈密顿量，并且

$$\hat{\sigma}_{\mathbf{k}s} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_n} \hat{\sigma}_{ns} \quad (34)$$

其中，$\mathbf{r}_n$ 是实空间中的原子算符位置 [21]。

在发射体数量少于谐振器数量的情况下，若仍以保持平移不变性的方式排列，则可以重复上述论证，只需稍作修改：式（ s 和 s' 31）中的指标仅属于与量子发射体耦合的子晶格，即投影算符 $p_1 = 1$ 中的 $\Pi = \mathrm{diag}(p_1, \ldots, p_{N_b})$。这直接导致在式（ Π 32）中插入投影算符 Π ，从而得到正文中的式（22）。

完整原子-光哈密顿量的平庸性

这里我们证明，式（4）中的整个原子-光哈密顿量在拓扑上是平庸的。其能谱和本征态可以解析地计算如下。假设$U_{\mathbf{k}}$ 是对角化 $H_p(\mathbf{k})$ 的酉算符，则有 $U^{\dagger}{}_{\mathbf{k}} H_p(\mathbf{k}) U_{\mathbf{k}} = \mathrm{diag}\,(\omega_1(\mathbf{k})\ \omega_2(\mathbf{k}) \ldots, \omega_N(\mathbf{k})) \equiv \Lambda(\mathbf{k})$。于是，

$$(I_2 \otimes U_{\mathbf{k}})^{\dagger} H(\mathbf{k}) (I_2 \otimes U_{\mathbf{k}}) = \begin{bmatrix} \omega_e I & gI \\ gI & \Lambda(\mathbf{k}) \end{bmatrix} . \tag{35}$$

因此，对于裸浴的每一条能带 $\omega_j(\mathbf{k})$，都有两条能带

$$\omega_{\pm,j} = \frac{\omega_e + \omega_j(\mathbf{k})}{2} \pm \sqrt{\frac{[\omega_e - \omega_j(\mathbf{k})]^2}{4} + g^2} , \tag{36}$$

它们是下列算符的本征值

$$H_j(\mathbf{k}) = \frac{\omega_e + \omega_j(\mathbf{k})}{2} I + \frac{\omega_e - \omega_j(\mathbf{k})}{2} \sigma_z + g\sigma_x . \tag{37}$$

相应的本征矢为$|v_{\pm,\ j}(\mathbf{k})\rangle \otimes |u_j(\mathbf{k})\rangle$，其中 $|u_j(\mathbf{k})\rangle$ 是 $H_p(\mathbf{k})$的本征态，对应本征值 $\omega_j(\mathbf{k})$；而$|v_{\pm,\ j}(\mathbf{k})\rangle$ 是$H_j(\mathbf{k})$的本征态，对应本征值$\omega_{\pm,\ j}(\mathbf{k})$。注意，无论 ω_e 取何值，只要它位于裸浴能谱的某个能隙中，其上方和下方的能谱各占一半，$\omega_{-,\ j} < \omega_e < \omega_{+,\ j}$ 对所有 j 均成立。若现在考虑 ω_e 以下的能带并计算拓扑不变量，则可以改为考虑拓扑等价哈密顿量

$$H = I - 2P(\mathbf{k}) , \tag{38}$$

其中 $P(\mathbf{k}) = \sum_j |u_j(\mathbf{k})\rangle\langle u_j(\mathbf{k})| \otimes |-\rangle\langle -| = I \otimes |-\rangle\langle -|$，为常数 $|-\rangle$，因此 $dH = 0$，所以 $\mathrm{Ch}_n = 0$，参见方程（47）。

对于奇数维的手征系统，浴的布洛赫哈密顿量可写为

$$H_p(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & Q_p(\mathbf{k}) \\ Q_p^{\dagger}(\mathbf{k}) & 0 \end{bmatrix} , \tag{39}$$

其中 $Q_p(\mathbf{k})$是一个合适的矩阵。于是，含发射体的浴的布洛赫哈密顿量（$\omega_e = 0$）也可以写成相同的块反对角形式，其中

$$Q(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} Q_p(\mathbf{k}) & gI \\ gI & 0 \end{bmatrix} . \tag{40}$$

注意，其逆矩阵为

$$Q(\mathbf{k})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & g^{-1} I \\ g^{-1} I & -g^{-2} Q_p(\mathbf{k}) \end{bmatrix} . \tag{41}$$

因此，

$$Q^{-1} dQ = \sum_j \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g^{-1} \partial_j Q & 0 \end{bmatrix} dk_j . \tag{42}$$

因此，$\mathrm{Tr}\left[(Q^{-1}dQ)^{2n+1}\right] = 0$，所以 $\nu_{2n+1} = 0$，参见方程（46）。

最后，我们给出一种替代证明，说明整个系统是平庸的，而无需引用任何拓扑不变量公式。注意，方程（4）可以连续变形为

$$H_1 = (\omega_e \sigma_0 + g\sigma_x) \otimes I , \tag{43}$$

其中 σ_0 为二阶单位矩阵，通过线性插值

$$H_\lambda(\mathbf{k}) = (1-\lambda) H(\mathbf{k}) + \lambda H_1, \quad \lambda \in [0,1]. \tag{44}$$

可以验证，$\det(H_\lambda(\mathbf{k}) - \omega_e \sigma_0 \otimes I) = \det\left(-g^2 I\right) \neq 0$，因此在变形过程中，哈密顿量在$\omega_e$ 附近始终保持开隙。注意，任何时间反演对称性都会得到保留；若粒子-空穴（手征）对称性扩展为 $(-C) \oplus C$ $((-S) \oplus S)$，它也会得到保留。由于 H_1 与$\mathbf{k}$ 无关，因此显然是平庸的。由此我们得出， $H(\mathbf{k})$与 H_1连续相连，也同样是平庸的。请注意，上述证明同样适用于厄米系统和非厄米系统。此外，适当扩展的手征对称性要求在发射体一侧带有负号，这一事实说明，整个系统的平庸性并不与手征对称系统中的拓扑保持相矛盾。

拓扑保持与拓扑反转的证明

这里我们对单发射体-单谐振器配置下，哪些基本对称性类别（厄米 AZ、非厄米 AZ 或非厄米 AZ†）会呈现拓扑反转或拓扑保持进行一般性分析。与正文相同，为确保粒子-空穴对称性和手征对称性得以继承，我们聚焦于 $\omega_e = 0$的情形，使得 $H_a(\mathbf{k}) = -g^2 H_p(\mathbf{k})^{-1}$，且 $H_a(\mathbf{k})$ 与 $H_p(\mathbf{k})$ 在 0 附近均开隙。我们注意到，对于非厄米情形，两个布洛赫哈密顿量都必须在 ω_e 附近具有点隙，且其虚部为负，从而它们的谱在复能量平面上都位于实轴下方。这只是在虚轴方向上的刚性平移，不会影响以下讨论。

一个显而易见的观察是，从$H_p(\mathbf{k})$到 $H_a(\mathbf{k})$的映射是可逆的。这立即意味着，在取出

$H_a(\mathbf{k})$ 和 $H_p(\mathbf{k})$的拓扑等价类后，我们得到分类群上的一个自同构。回顾一下，非平庸的厄米 AZ 类由 $\mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{Z}$ 分类，[1] 非厄米 AZ（AZ†）类也是如此，因此只需考虑 $\mathbb{Z}_2$ 或 $\mathbb{Z}$ （关于加法）上的自同构。对于前一种情况（$\mathbb{Z}_2$），唯一的自同构是恒等映射，这意味着所有 $\mathbb{Z}_2$ 相都表现出拓扑保持。对于后一种情况（$\mathbb{Z}$），自同构只有两种可能：恒等映射和求逆（$n \mapsto -n$），分别对应拓扑保持和拓扑反转。我们强调，上述结果适用于厄米和非厄米系统。因此，剩下的问题是区分表现出拓扑反转的$\mathbb{Z}$ 相与表现出拓扑保持的相。

我们首先关注厄米情形。利用能带展平（$H \to \mathrm{sgn}H$）技术 [38]，，我们知道，从 $H_p(\mathbf{k})$到 $H_a(\mathbf{k})$的映射，在拓扑等价类层面可简化为一次简单的求逆（$H \to -H$）。如果空间维度为奇数，则所有 Z 相都具有手征对称性，因此布洛赫哈密顿量具有如下形式

$$H(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} 0 & Q(\mathbf{k}) \\ Q(\mathbf{k})^\dagger & 0 \end{bmatrix}. \tag{45}$$

整数拓扑数是由下式给出的绕数

$$\nu \propto \int_{\mathrm{BZ}} \mathrm{Tr}\big(Q^{-1}dQ\big)^D. \tag{46}$$

显然，这个拓扑不变量不会因反演 $H \to -H$ （从而得到 $Q \to -Q$）而改变。另一方面，在偶数空间维度中，拓扑数就是陈数，它由展平后的布洛赫哈密顿量 $H(\mathbf{k})$ 决定，具体为

$$\mathrm{Ch} \propto \int_{\mathrm{BZ}} \mathrm{Tr}\big(H(dH)^D\big). \tag{47}$$

与绕数不同，陈数也会随着哈密顿量的反演而反号。

现在我们转向非厄米情形。这里，能带展平的对应操作是幺正化 [47]

$$H \to V = H\left(\sqrt{H^\dagger H}\right)^{-1}, \tag{48}$$

由此，光子到原子映射可简化为$V \to -V^\dagger$。如正文所述，奇数维中的拓扑数是式（46）给出的绕数，并且总会发生拓扑反转。在偶数维中，任何$\mathbb{Z}$ 拓扑相都具有手征对称性 S （参见式（15））。因此，整数拓扑数由47式中 iSV [41]的陈数给出；可以验证，该量是厄米且展平的（即平方后为单位矩阵）。经过操作 $V \to -V^\dagger$后，这个量会发生幺正共轭：

$$iSV \to -iSV^\dagger = iVS = S^{-1}(iSV)S, \tag{49}$$

保持陈数不变。

总之，对于厄米 AZ 类，拓扑反转仅发生在偶数维的 Z 相中。对于非厄米 AZ（AZ†）类，拓扑反转仅发生在奇数维的 Z 相中。

致谢—— 本研究部分由卢森堡国家研究基金（FNR, Attract 资助项目 15382998）资助。M. B. 和 Z. G. 感谢 MCQST 提供的经费支持。Z. G. 获得了马克斯·普朗克—哈佛量子光学研究中心（MPHQ）的资助。F. C. 感谢意大利大学与研究部（MUR）通过 PRIN 项目（项目编号：2017SRN-BRK QUSHIP）提供的支持。我们感谢 Diego Porras 和 Pablo Mart´ınez-Azcona 的有益讨论。

[1] K. von Klitzing、T. Chakraborty、P. Kim、V. Madhavan、X. Dai、J. McIver、Y. Tokura、L. Savary、D. Smirnova、A. M. Rey、C. Felser、J. Gooth 和 X. Qi, 《自然评论：物理》**2**，397（2020年）。[2] M. Z. Hasan 和 C. L. Kane, 《现代物理评论》**82**，3045（2010年）。[3] X.-L. Qi 和 S.-C. Zhang, 《现代物理评论》**83**，1057（2011年）。[4] L. Lu、J. D. Joannopoulos 和 M. Solja˘ci´c, 《自然·光子学》**8**，821（2014年）。

[5] T. Ozawa, H. M. Price, A. Amo, N. Goldman, M. Hafezi, L. Lu, M. C. Rechtsman, D. Schuster, J. Simon, O. Zilberberg, and I. Carusotto, 《现代物理评论》91，015006（2019年）。[6] C. Nayak, S. H. Simon, A. Stern, M. Freedman, and S. Das Sarma, 《现代物理评论》80，1083（2008）。[7] Y. Ashida, Z. Gong, and M. Ueda, Advances in Physics 69, 249（2020）。[8] E. J. Bergholtz, J. C. Budich, and F. K. Kunst, 《现代物理评论》93，015005（2021年）。[9] S. Barik, A. Karasahin, C. Flower, T. Cai, H. Miyake, W. DeGottardi, M. Hafezi, and E. Waks, 《科学》359，666（2018年）。[10] M. J. Mehrabad, A. P. Foster, R. Dost, E. Clarke, P. K. Patil, A. M. Fox, M. S. Skolnick, and L. R. Wilson, Optica 7，1690（2020）。[11] F. Ciccarello, 《物理评论A》83，043802（2011年）。

[1]在文献中，某些类别的拓扑分类通常表示为 2Z，这意味着绕数或陈数只能是偶数。不过，由于 2Z 与 Z 同构，也采用 Z 这一约定。

[12] N. Y. Yao, C. R. Laumann, A. V. Gorshkov, H. Weimer, L. Jiang, J. I. Cirac, P. Zoller, and M. D. Lukin, 《自然·通讯》4, 1585（2013年）。[13] G. M. Almeida, F. Ciccarello, T. J. Apollaro, and A. M. Souza, 《物理评论A》93，032310（2016年）。[14] M.-A. Lemonde, V. Peano, P. Rabl, and D. G. Angelakis, 《新物理学杂志》21，113030（2019年）。[15] C. Vega, D. Porras, and A. Gonz´ález-Tudela，arXiv预印本arXiv:2207.02090（2022年）。[16] M. Bello, G. Platero, J. I. Cirac, and A. Gonz´ález- Tudela, 《科学进展》5，eaaw0297（2019年）。[17] L. Leonforte, A. Carollo, and F. Ciccarello, 《物理评论快报》126，063601（2021年）。[18] D. De Bernardis, Z.-P. Cian, I. Carusotto, M. Hafezi, and P. Rabl, 《物理评论快报》126，103603（2021年）。[19] M. Bello and J. I. Cirac, 《物理评论B》107，054301（2023年）。[20] Z. Gong, M. Bello, D. Malz, and F. K. Kunst, 《物理评论快报》129，223601（2022年）。[21] Z. Gong, M. Bello, D. Malz, and F. K. Kunst, 《物理评论A》106，053517（2022年）。[22] C. Vega, M. Bello, D. Porras, and A. Gonz´ález-Tudela, 《物理评论A》104，053522（2021年）。[23] L. Krinner, M. Stewart, A. Pazmi¨no, J. Kwon, and D. Schneble, 《自然》559，589（2018年）。[24] Y. Liu and A. A. Houck, 《自然物理学》13，48（2017年）。[25] N. M. Sundaresan, Y. Liu, D. Sadri, L. J. Szocs, D. L. Underwood, M. Malekakhlagh, H. E. T¨ureci, and A. A. Houck, 《物理评论X》5，21035（2015年），arXiv:1502.02660。[26] E. Kim, X. Zhang, V. S. Ferreira, J. Banker, J. K. Iverson, A. Sipahigil, M. Bello, A. Gonz´ález-Tudela, M. Mirhosseini, and O. Painter, 《物理评论X》11，011015（2021年）。[27] M. Scigliuzzo, G. Calaj`o, F. Ciccarello, D. Perez Lozano, A. Bengtsson, P. Scarlino, A. Wallraff, D. Chang, P. Dels- ing, and S. Gasparinetti, 《物理评论X》12，031036（2022年）。[28] J. C. Owens, M. G. Panetta, B. Saxberg, G. Roberts, S. Chakram, R. Ma, A. Vrajitoarea, J. Simon, and D. I. Schuster, 《自然物理学》18, 1048（2022年）。[29] J.-S. Tang, W. Nie, L. Tang, M. Chen, X. Su, Y. Lu, F. Nori, and K. Xia, 《物理评论快报》128, 203602（2022年）。

[30] A. Altland 和 M. R. Zirnbauer, 《物理评论B》55, 1142 (1997). [31] C.-K. Chiu、J. C. Y. Teo、A. P. Schnyder 和 S. Ryu, 《现代物理评论》88, 035005 (2016). [32] N. Okuma、K. Kawabata、K. Shiozaki 和 M. Sato, 《物理评论快报》124, 086801 (2020). [33] J. Y. Lee、J. Ahn、H. Zhou 和 A. Vishwanath, 《物理评论快报》123, 206404 (2019). [34] E. N. Economou, *Green's Functions in Quantum Physics*, 施普林格固态科学丛书，第7卷（施普林格柏林海德堡，柏林，海德堡，2006）。[35] A. Gonz´alez-Tudela、C.-L. Hung、D. E. Chang、J. I. Cirac 和 H. Kimble, Nature Photonics 9, 320 (2015). [36] J. S. Douglas、H. Habibian、C. L. Hung、A. V. Gorshkov、H. J. Kimble 和 D. E. Chang, Nature Photonics 9, 326 (2015). [37] A. P. Schnyder、S. Ryu、A. Furusaki 和 A. W. W. Ludwig, 《物理评论B》78, 195125 (2008). [38] A. Kitaev, 《美国物理联合会会议论文集》1134, 22 (2009). [39] X.-L. Qi、Y.-S. Wu 和 S.-C. Zhang, 《物理评论B》74, 085308 2006( ). [40] D. Bernard 和 A. LeClair，载于 *Statistical Field Theories*, A. Cappelli 和 G. Mussardo 编（施普林格，Dordrecht，2002），第207–214页。[41] K. Kawabata、K. Shiozaki、M. Ueda 和 M. Sato, 《物理评论X》9, 041015 (2019). [42] F. Roccati、S. Lorenzo、G. Calaj`o、G. M. Palma、A. Car- ollo 和 F. Ciccarello, Optica 9, 565 (2022). [43] A. A. Clerk, 《SciPost物理讲义》44 (2022). [44] H. Schwerdtfeger，载于 *Geometry of Complex Numbers*（多伦多大学出版社，2020）。[45] P. Hosur、S. Ryu 和 A. Vishwanath, 《物理评论B》81, 045120 2010( ). [46] J. K. Asb´oth、L. Oroszl´any 和 A. P´alyi, 物理学讲义919, 166 (2016). [47] Z. Gong、Y. Ashida、K. Kawabata、K. Takasan、S. Hi- gashikawa 和 M. Ueda, 《物理评论X》8, 031079 (2018). [48] C. Cohen-Tannoudji、J. Dupont-Roc、G. Grynberg 和 P. Thickstun, *Atom-photon interactions: basic processes and applications* 1992, 2004（Wiley在线图书馆）。[49] E. S´anchez-Burillo、D. Porras 和 A. Gonz´alez-Tudela, 《物理评论A》102, 013709 (2020).