arXiv:2303.00771v1 [math.GT] 1 Mar 2023

A 伪阿诺索夫映射族上的法里树结构

Ethan Farber

Abstract. 我们从新的视角审视如何通过后临界有限区间映射生成伪阿诺索夫同胚这一过程。核心思想是在这样一个伪阿诺索夫映射族上实现树结构：由表示其无穷远处的旋转数的有理数所表征的各个系统，是这棵树的顶点，而各条边则编码它们之间的动力学关系。我们还进一步深化了与这些系统相关的一维、二维和三维不变量之间的对应关系。

1. Introduction

本文旨在利用火车轨道理论，探究以下两者之间的关系：(1) 单位区间上的一致扩张连续映射；(2) 带 puncture 球面上的伪阿诺索夫同胚。具体而言，主要研究对象为：

(1) 一个分段线性映射 $f\colon [0,1]\to[0,1]$ 其后临界轨道构成一个基数为 p 的集合，且 f 的斜率始终为 $\pm\lambda$，其中 $\lambda>1$；以及 (2) 一个伪阿诺索夫映射 $\psi\colon S_{0,\ p+1}\to S_{0,\ p+1}$ 其伸缩因子为 $\lambda>1$。

映射 f 是一个后临界有限 λ-扩张映射，而 λ 是 f的伸缩因子。两次使用λ 是有意为之的：两个系统都具有拓扑熵 $\log\lambda$，我们将关注如何通过一种称为加厚的过程，从一个后临界有限 λ-扩张映射 f 构造出一个伸缩因子为 λ的伪阿诺索夫映射 ψ_f。 ψ_f 的奇点与S_0的穿孔相$p+1$重合，具体如下：

- 对于 f的每个 p 后临界点，都有一个带穿孔的 1-尖点奇点；以及
- 一个带穿孔的 $(p-2)$-棱奇点，它必然由 ψ_f 固定，并记为 ∞。

并非总能将给定的后临界有限 λ-扩张映射加厚为伪阿诺索夫映射。在[Far21]中，我们准确刻画了某一类称为之字形映射的区间映射在何时可以实现这一点。令 PA(m) 表示所有具有 $m\geq 2$ 个临界点且经加厚后成为伪阿诺索夫映射的之字形映射集合。通过分析点 $x=1$ 在 $f\in \mathrm{PA}(m)$ 下的轨道，我们定义了一个不变量 $\Phi\colon \mathrm{PA}(m)\to \mathbb{Q}\cap(0,1)$，并证明该不变量双射地参数化了 PA($m$)（参见 [Far21] 中的定理 1 和下文的引理）。

我们的第一个主要结果给出了这种参数化的几何解释。给定一个固定 b棱奇点 q的伪阿诺索夫映射 ψ， ψ 在 q 处的旋转数为 $\mathrm{rot}_q(\psi)=\frac{a}{b}$，当且仅当 ψ 使 q 处的棱逆时针旋转 a 个间隔。

定理 A. 固定 $f\in \mathrm{PA}(m)$。则 $\Phi(f)$ 度量了 ψ_f 在固定奇点 ∞处的局部顺时针旋转：也就是说，

$$\Phi(f)=1-\mathrm{rot}_\infty(\psi_f).$$

E-mail address: farbereth@gmail.com。

Andr´e de Carvalho 曾向我们提出，在他与 Toby Hall 合作、研究如何由单峰映射生成伪阿诺索夫映射的工作背景下，定理 A 可能成立；也就是说，后临界有限 λ-扩张映射只有一个临界点。确实，我们必须提及，我们在 [Far21] 及本文中的技术深受 de Carvalho 和 Hall 在 [dCH04]中的方法启发。我们在第 A 节证明定理3。虽然目前我们尚未发现单峰映射情形下相应命题的证明，但我们推测该命题成立，且适用于类似的证明策略。

进一步说明定理 A 的背景。将区间映射 $f\colon I \to I$ 加厚为伪阿诺索夫映射 $\psi_f\colon S \to S$，需要将 I 嵌入 S，使其成为 ψ_f 的不变轨道 τ。为此，我们在 f 的临界点正向轨道上的每一点，将一个长度为 1 的环添加到 I 上，以表示 f 的某次迭代会在该点转向。我们在每个环内的 S 添加一个穿孔，使其在同调中非平凡。在轨道的术语中，这些环是无穷小边。τ 的其余边（即 I 的子区间）是扩张边，并为 f 和 ψ_f 生成马尔可夫划分。特别地，f 和 ψ_f 都是具有相同转移矩阵的伯努利过程，因此 f 的动力学几乎完全决定了 ψ_f 的动力学。

因此，人们或许可以将一维动力学的技术用于研究由区间映射加厚而成的伪阿诺索夫映射。更具体地说，我们希望利用 f 的不变量来解释 ψ_f的不变量。定理A 是朝这一方向迈出的第一步。事实上，尽管 Φ(f最初是利用 f 在$x = 1$的轨道上的置换作用定义的，但我们看到，它还可以通过 ψ_f的动力学得到一种新的解释。

此外，将动力系统作为更大族中的成员来研究，往往很有成效。区间映射自然形成一些族，这些族由其折叠数据的变化决定。PA(m)中的映射构成这样一个族（参见第2.5节）。如果某个给定族中的区间映射加厚后成为伪阿诺索夫映射，那么自然也可以将这些伪阿诺索夫映射作为一个集合来研究。这一视角为构造伪阿诺索夫映射族的标准方法提供了另一种选择，例如

（1）按照某种模式，沿给定的一组曲线复合德恩扭转；或（2）对伪阿诺索夫映射取分歧覆盖。

事实上，在情形（1）中，所有伪阿诺索夫映射都作用于同一个曲面 S；而在情形（2）中，所有伪阿诺索夫映射都具有相同的伸缩因子。然而，改变生成伪阿诺索夫映射的区间映射的折叠数据，通常会同时改变该伪阿诺索夫映射的伸缩因子，以及其作用曲面上的穿孔数量。

在此背景下，定理A 提出利用 m 来分析由 PA(m) 生成的伪阿诺索夫映射 $\mathbb{Q}\cap(0,1)$。正如我们将看到的，这就是一个特殊图 $\mathcal{F}$ 的顶点集，其边编码了 PA(m) 中成对映射之间的关系。我们将 $\mathcal{F}$ 称为法雷树。为理解其结构，我们将利用映射 $f \in \mathrm{PA}(m)$ 的第二个不变量：数字多项式 $D_f(t)$。数字多项式具有整数系数，并满足 $D_f(\lambda(f)) = 0$。它的系数编码了 $x = 1$ 在 f 下的轨道；由于之字形映射十分简单，这足以确定 f 的完整折叠数据。

通过研究 D_f 如何取决于 $\Phi(f)$ 在 $\mathcal{F}$ 中的位置，我们得到了以下单调性结果。回顾一下，$\lambda(f) = \lambda(\psi_f)$。

定理 B。给定 $f, g \in \mathrm{PA}(m)$，我们有

$$\Phi(f) < \Phi(g) \iff \lambda(\psi_f) < \lambda(\psi_g).$$

由于 f和 ψ_f的拓扑熵均为log $\lambda(\psi_f)$，因此可以将定理B 理解为由 PA(m) 生成的单参数伪阿诺索夫映射族的熵的单调性结果。对于许多自然的区间映射族，都已有熵单调性结果（例如参见 [MT00] 和 [BvS15]）。

定理 B 的证明是一系列关于单调性的论断。关键在于定理 5.4，该定理给出了 $f = \Phi^{-1}(q)$ 的折叠数据随 $q \in \mathcal{F}$ 变化时所遵循的一对变换法则。我们在第 $\mathcal{F}$ 4 节研究，并说明它如何同时刻画 PA(m) 和 $\Pi(m)$。第 5节中，我们将在第 6 节证明定理 B。

折叠理论中的技巧还能帮助我们为 $\lambda(\psi_f)$ 得到尽可能精确的界 .

推论1.1. 设 $f \in$PA(m)。那么，

$$\inf\{\lambda(\psi_f) : f \in \mathrm{PA}(m)\} = \frac{m+1+\sqrt{(m+1)^2-8}}{2}$$

and

$$\sup\{\lambda(\psi_f) : f \in \mathrm{PA}(m)\} = m+1.$$

证明。 给定 $f \in$ PA(m)， $\lambda(f)$ 等于分段线性映射 $f\colon I \to I$ 的斜率的绝对值。 $\lambda(f)$ 的整数部分为 $\lfloor \lambda(f) \rfloor = m$。因此， $\lambda(f)$ 的下界为 m，上界为 $m+1$。

对于 $n \geq 1$，定义映射 $g_n, h_n \in$ PA(m) 如下：

$$g_n = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{and} \quad h_n = \Phi^{-1}\left(\frac{n-1}{n}\right).$$

定理 B 表明，数列 $\{\lambda(g_n)\}_n$ 和 $\{\lambda(h_n)\}_n$ 分别单调递减和单调递增。由于这些数列有界，因此它们收敛。事实上，必有

$$\lambda_0 := \lim_{n\to\infty} \lambda(g_n) = \inf\{\lambda(f) : f \in \mathrm{PA}(m)\}$$

and

$$\lambda_1 := \lim_{n\to\infty} \lambda(h_n) = \sup\{\lambda(f) : f \in \mathrm{PA}(m)\}.$$

映射 g_n 一致地收敛到一个 λ_0-之字形映射 $\mathbf{0}_m$，而映射 h_n 一致地收敛到一个 λ_1-之字形映射 $\mathbf{1}_m$ (参见定义 5.1)。对于 $\mathbf{1}_m$的情形，从 主揉序列（参见定义 2.21）可不难看出， h_n 满足 $\mathbf{1}_m(1) = \lambda_1 - m$ 是 $\mathbf{1}_m$ 在子区间 $[m \cdot \lambda_1^{-1}, 1]$上的一个不动点，在该区间上， $\mathbf{1}_m$ 由线性映射定义

$$\mathbf{1}_m(x) = \lambda_1 x - m \quad \text{for } x \in [m \cdot \lambda_1^{-1}, 1].$$

由此可确定 $\lambda_1 = m+1$。另一方面，从 g_n 的主揉序列可知， $\mathbf{0}_m(1) = \lambda_0 - m$ 是 $\mathbf{0}_m$ 在子区间$[(m-2) \cdot \lambda_0^{-1}, (m-1) \cdot \lambda_0^{-1}]$中的一个不动点。在此子区间上， $\mathbf{0}_m$ 由线性映射定义

$$\mathbf{0}_m(x) = \lambda_0 x - (m-2) \quad \text{for } x \in [(m-2) \cdot \lambda_0^{-1}, (m-1) \cdot \lambda_0^{-1}].$$

因此我们得到

$$\lambda_0 - m = \mathbf{0}_m(\lambda_0 - m) = \lambda_0^2 - m\lambda_0 - (m-2).$$

求解 λ_0 得到

$$\lambda_0 = \frac{m+1+\sqrt{(m+1)^2-8}}{2}.$$

□

正如定理 A 从 $\Phi(f)$ 的视角为第一个不变量 ψ_f提供了一种解释，我们试图运用二维和三维技巧来理解第二个不变量 D_f。这样的理解能让我们立即着手研究与 ψ_f相关的若干拓扑不变量。事实上，我们将看到， D_f 与这些不变量相同或几乎相同。

下述定理的核心思想是，尽管 D_f 最初是通过定义引入的，但它其实是若干个自然地与 f 或 ψ_f相关联的矩阵的特征多项式。

T定理 C. 令 $f \in \mathrm{PA}(m)$并设 $n = |\mathrm{PC}(f)| = 1 + \deg(D_f)$。设 $\lambda = \lambda(f) = \lambda(\psi_f)$。***(1)*** 数字多项式决定了 f的 ***Artin–Mazur ζ***函数：

$$\zeta_f(t) = \frac{1}{\mathcal{R}(D_f(t))} = \frac{1}{\mathcal{R}(\det(tI - W_f))}.$$

(2) 数字多项式等于 f的强马尔可夫多项式：

$$D_f(t) = \chi_M(f;t).$$

（*3*）数字多项式决定了 ψ_f的同调多项式、辛多项式和穿孔多项式，这些多项式由 *Birman-Brinkmann-Kawamuro*（[BBK12]）定义：

$$D_f(t) = h(\psi_f;t) = \begin{cases} s(\psi_f;t) & \textit{if } n \textit{ is odd} \\ s(\psi_f;t)(t+1) & \textit{if } n \textit{ is even.} \end{cases}$$

（*4*）设 $\mathbb{S}$ 是由 ψ_f 的定向双覆盖填充 ψ_f中被穿孔的1棱奇点的提升后得到的曲面。记 $\chi_+(t)$（分别记为 $\chi_-(t)$）为提升 ψ_+（分别为 ψ_-）作用于 $H_1(\mathbb{S};\mathbb{Z})$时的特征多项式。那么

$$D_f(t) = \chi_+(t) \quad \textit{and} \quad D_f(-t) = \chi_-(t).$$

（*5*）设 β_f 是 ψ_f 的任意一个 n-辫子代表元，它由将$\infty \in S_{0,\ n+1}$切开并展开成一个边界圆得到。令 $\mathbb{B}(\beta_f, z)$ 表示 β_f的约化 ***Burau*** 矩阵，并设$\chi(\beta_f;\ t)\ = \det(tI - \mathbb{B}(\beta_f, -1))$。那么

$$\chi(\beta_f;t) = \begin{cases} D_f(t) & \textit{if } \chi(\beta_f;t) \textit{ has } \lambda \textit{ as a root} \\ D_f(-t) & \textit{if } \chi(\beta_f;t) \textit{ has } -\lambda \textit{ as a root.} \end{cases}$$

此外，将 β_f 与全扭转 Δ_n^2 复合会使变量 t的符号取反。

注意到，由于 $D_f(t)$ 是互反的，即 $\mathcal{R}(D_f(t)) = D_f(t)$，陈述（1）意味着 t

$$\zeta_f(t) = \frac{1}{D_f(t)}.$$

我们指出，任何由一个后临界有限 λ-扩张体加厚而成的伪阿诺索夫映射，都定义在带 puncture 球面上，且至多有一个具有 3 个或更多棱的奇点。在即将与 Karl Winsor 合作发表的论文中，我们证明其逆命题：每个这样的伪阿诺索夫映射都是由一个后临界有限 λ-扩张体 f 加厚而成。在这一更一般的情形下，数字多项式

被强马尔可夫多项式 $\chi_M(f;t$取代，它就是与 f关联的最小马尔可夫划分的特征多项式。对证明定理 C 稍作修改，即可得到关于 ψ_f 的相关不变量的类似结论。

我们将在第 8 节结束时，在证明定理 C （第7节）之后，简要讨论这些想法及其他相关思考。

致谢。首先，作者衷心感谢他的导师 Kathryn Lindsey，感谢她始终敏锐的洞见、反馈与鼓励。作者对 Andr´e de Carvalho 和 Toby Hall 深表感激；他们富有创意且严谨的工作，是作者数月间一次又一次回访的源泉。Chenxi Wu 为作者提供了无数次有益的交流。

最后，作者对波士顿学院研究生们给予的同志情谊、同理心与关怀有多么依赖，怎么强调都不为过。我们仍然没有合同。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 5 3. 定理 A 的证明 13 4. 法雷树 15 5. 作为 PA(m) 和 Π(m) 模型的法雷树 17 6. 熵的单调性 23 7. 数字多项式作为其他不变量 27 8. 未来方向 37 参考文献 38

2. Preliminaries

本节回顾证明定理所需的关键定义和背景知识 [Far21] A的 。相关细节请参阅 [Far 21] 的第 2、3、5、6 和 7 节。熟悉相关内容的读者可以跳过本节。

2.1. 集合 PA(m)。

除非另有说明，本文中我们用 I表示闭单位区间。假设所有映射 f : $I \to I$ 都是连续的，且只有有限个临界点，即不存在任何使 f 为单射的邻域的点。临界点的像称为临界值 。

定义 2.1. 取 $\lambda > 1$。若分段线性映射 f: $I \to I$的每个线性分支的斜率均为 $\pm\lambda$，则称其为一致 λ-扩张映射。此时称 f 具有常斜率 λ。

注 2.2. Misiurewicz 和 Szlenk [MS80]证明了任意一致 λ-扩张映射 f 的拓扑熵为

$$\mathrm{h}(f) = \log \lambda.$$

定义 2.3. 一个 λ-之字形映射 （或简称之字形映射 ，或在 λ 已明确时称为之字形 ）是一个一致的 λ-扩张映射 $f : I \to I$ ，其临界点恰好是这些数

$$k_i = i \cdot \lambda^{-1}, \quad \text{for } i = 1, \ldots, \lfloor \lambda \rfloor.$$

注意，之字形映射 f满足 $f(0) \in \{0,1\}$。若 f满足 $f(0) = 0$，则称其为正的；若满足 $f(0) = 1$，则称其为负的。

注意，λ之字形映射 f的临界点数量为 $m = \lfloor \lambda \rfloor$。因此，当 $\lambda \geq 2$时，f的临界值恰好是 0 和 1。在全文中，固定 $m \geq 2$ 就等同于固定底层之字形映射的临界点数量，这是正确描述组合结构所必需的。

定义 2.4。 f的一个后临界点 $I \to I$是形如 $f^n(k)$的点，其中 $n \geq 1$，且k 为一个临界点。 f 的后临界集 是 f的所有后临界点组成的集合，记为 PC(f)。如果 PC(f) 是有限集，则称 f 为后临界有限或PCF。

2.2. **伪阿诺索夫映射、火车轨道与加厚**。 令 $S = S_{g,\ p}$ 为一个亏格为 g 、带有 p 个标记点的闭连通曲面，我们通常将这些标记点视为穿孔。假设 $6g - 6 + 2p > 0$。

定义 2.5。 伪阿诺索夫映射 是一个同胚 $\psi : S \to S$，满足存在：(1) S 上的两组横截奇异测度叶状结构（$\mathcal{F}^s,\ \mu^s$）和（$\mathcal{F}^u,\ \mu^u$）；(2) 一个实数 $\lambda > 1$，使得：

- $\psi \cdot (\mathcal{F}^s, \mu^s) = (\mathcal{F}^s, \lambda^{-1}\mu^s)$, and
- $\psi \cdot (\mathcal{F}^u, \mu^u) = (\mathcal{F}^u, \lambda\mu^u)$.

也就是说，ψ 同时保持 $\mathcal{F}^s$ 和 $\mathcal{F}^u$不变，同时将前者的横截测度缩放为 λ^{-1}，将后者的横截测度缩放为 λ。

若点 $s \in S$ 处有 $k = k$条 $\mathcal{F}^u$ 的半叶在 s汇聚，则称点 $s \in S$ 为 k棱点 。若 $k \neq 2$, 则称 s为 ψ的 k棱奇点 。有时，2-棱点被视为退化奇点。 ψ只有有限多个（非退化）奇点，而欧拉-庞加莱公式对这些奇点处的棱数施加了如下限制：

$$2\chi\left(\overline{S}\right) = \sum_s 2 - k(s). \tag{1}$$

这里的求和遍历 ψ的所有奇点。注意，只有1-棱奇点会对上述求和产生正贡献。出于技术原因，这些奇点只出现在 S的穿孔处。

我们将 $\mathcal{F}^s$ 和 $\mathcal{F}^u$ 分别称为 稳定和 不稳定叶状结构，它们属于 ψ。这种命名约定源于 ψ 在空间 $\mathcal{PMF}$ 上的作用；该空间是 S的射影测度叶状结构空间： $\mathcal{F}^s$ 和 $\mathcal{F}^u$ 是 ψ的两个不动点，其中前者是唯一的吸引点，后者是唯一的排斥点。更多内容请参见 [Thu88] 。

假设 ψ 是保向的。除奇点外，可以认为ψ 在局部坐标中的作用是一个导数为

$$D\psi = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

这里，第一个坐标沿着 $\mathcal{F}^u$的方向，第二个坐标沿着 $\mathcal{F}^s$的方向。数值 $\lambda > 1$称为 ψ的伸缩因子或膨胀率，是一个基本不变量。事实上， λ 是次数至多为 $6g - 6 + 2p$的代数整数，并且 ψ 的拓扑熵为 h(ψ) $= \log \lambda$。

任何伪阿诺索夫映射 ψ 及其不变量叶状结构，都可以通过研究它在嵌入于 S中的特定图上的作用来重构，这些图称为火车轨道。

定义 2.6. 轨道是一个光滑嵌入于 S 中的图 τ，并满足以下性质：

(1) 对于 τ 的每个顶点 v，每条光滑路径 $p\colon [-1,1]\to\tau$，只要满足 $p(0)=v$，在 v 处就有相同的切线。这一相切条件会在相邻的入边之间形成尖点，这些入边在 v 处具有相同的单位切向量。(2) $S\setminus\tau$ 的每个连通分支要么是 (a) 一个边界上至少有三个尖点的无穿孔圆盘，要么是 (b) 一个边界上至少有一个尖点的单穿孔圆盘。

如果像 $\psi(\tau)$ 在一种受限意义下与 τ 同伦，那么我们称 τ 是 ψ 的不变轨道；将 ψ 与该同伦拼接起来，便得到一个图映射 $f\colon \tau\to\tau$。我们称 f 为火车轨道映射，它可用于重建 ψ，以及叶状结构 $\mathcal{F}^s$ 和 $\mathcal{F}^u$。事实上，τ 的边构成了 f 的一维马尔可夫划分。τ 的扩张边子集，即那些满足对较大的 n，$f^n(e)=\tau$ 的边 e，构成了由矩形组成的 ψ 的二维马尔可夫划分。更多内容请参见 [BH95] 。

注释 2.7。若 τ 是 ψ的不变轨道，则$S\setminus\tau$的补分支分量决定了 ψ的奇点数据。具体而言，ψ 恰好有一个 k棱奇点，对应于每个具有 k 个尖点的分量。类型为 2a 的分量对应于无穿孔奇点，而类型为 2b 的分量对应于穿孔奇点。

$f:\tau\to\tau$的动力学从而决定了 $\psi\colon\ S\to S$的动力学，除去一个零测集。我们感兴趣的是从合适的图映射 f产生伪阿诺索夫映射 ψ，并联系这两种不同体系中的不变量。

In [dC05]Andr´e de Carvalho发展了一种将后临界有限区间映射 f “加厚”的方法，以构造一个称为广义伪阿诺索夫映射的二维系统。通过这一加厚过程，可以找到一个最小的光滑分支一维子流形 $\tau\subseteq S^2$，称为广义不变轨道；它在伪同痕意义下关于加厚后的映射保持不变。当 τ 是一个有限图时，该加厚过程会输出一个伪阿诺索夫映射 $\psi_f\colon\ S^2\to S^2$。在这种情况下，τ 是经典意义下的轨道，可以看作是在后临界集 f的每个点处以环作为装饰的起始区间 I。每个环所在的 I 一侧具有重要意义，并为“ τ 何时可能是有限的”这一问题赋予了组合性质。重要的是，表示 ψ_f 的 τ 上的火车轨道映射本质上就是 f，因此 f的动力学决定了 ψ_f的动力学。

在 [Far21]第 3 节中，作者证明了加厚之字形映射 $f\colon\ I\to I$ 并得到有限个 τ的方式本质上只有一种，也就是说，这种方式有可能产生伪阿诺索夫映射。如果该过程确实能从 f产生伪阿诺索夫映射，那么我们称f 为伪阿诺索夫型，并将该伪阿诺索夫映射记为 ψ_f。

定义 2.8。固定 $m\geq 2$。我们将 PA(m) 定义为由伪阿诺索夫型之字形 f 组成的集合，满足

(1) f 有 m 个临界点，且 (2) $|\mathrm{PC}(f)|\geq 4$。我们还定义 $\Pi(m)=\{\psi_f\colon\ f\in \mathrm{PA}(m)\}$。

注释 2.9。映射 $f\in$PA(m) 可由其斜率 λ区分，因此也可由其拓扑熵 log λ区分。由于 ψ_f 与 f具有相同的熵，因此映射 $f\mapsto\psi_f$是从 PA(m) 到 $\Pi(m)$ 的双射。

2.3. **置换 $\rho_m(n,k)$ 和映射 Φ**。本小节的讨论紧接着 [Far21] 第6节中的讨论展开。我们将定义置换 $\rho_m(n,k)$，它们精确描述映射 $f\in$PA(m) 的置换类型（参见下文定理 2.16 ）。

定义 2.10。设 f 是一个之字形映射，其 $x=1$ 的轨道具有最小周期 n。按递增顺序排列该轨道：$x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1$。则 f 的置换类型为置换 $\rho(f) \in \mathfrak{S}_n$，满足 $f(x_i) = x_{\rho(f)(i)}$。

注 2.11. 如果 f 是伪阿诺索夫型的之字形，那么 PC(f) 与伪阿诺索夫映射 ψ_f的不变叶状结构的单尖点奇异点之间存在一一对应关系。由于 ψ_f 置换这些奇点，f 必然置换 PC(f) 的元素，因此 $x=1$ 是周期性的。

现在我们将描述 $f \in$PA(m)的置换类型。根据 m的以下三种情形，它们的形式略有不同：

(1) $m \geq 4$为偶数，此时 $\rho(f) = \rho_e(n,\ k)$，其中 n和 k为某些值；(2) $m \geq 3$为奇数，此时 $\rho(f) = \rho_o(n,\ k)$；或(3) $m=2$，此时 $\rho(f) = \rho_2(n,\ k)$。

参见下文的定理 2.16。

定义 2.12。给定 $n \geq 3$ 和 $2 \leq k \leq n-1$，定义 $\rho_e(n,\ k) \in \mathfrak{S}_n$ 为满足以下条件的置换

$$\rho_e(n,k)(i) = \begin{cases} n & \text{if } i = 1 \\ i + (n-k) & \text{if } 2 \leq i \leq k-1 \\ i - (k-1) & \text{if } k \leq i \leq n \end{cases}$$

当 $k=2$ 时，我们将此定义理解为

$$\begin{aligned} \rho_e(n,2)(i) &= i - 1 \pmod{n} \\ &= i + (n-1) \pmod{n}. \end{aligned}$$

注 2.13。下面的观察对于定理 A 的证明至关重要。从 $\rho_e(n,\ k)$ 的循环分解中删除符号 1 后，可得到一个新的置换 $\tilde{\rho} \in \mathfrak{S}_{n-1}$。将所有标签都减 1 后，可以看出此置换是模 $n-k$ $n-1$ 的旋转：

$$\tilde{\rho}(i) = i + (n-k) \pmod{n-1}$$

特别地，我们看到

$$\rho_e(n,k) \text{ is an } n\text{-cycle} \iff \tilde{\rho} \text{ is an } (n-1)\text{-cycle} \iff \gcd(n-k, n-1) = 1.$$

这就是定义映射 Φ： PA(m) $\to \mathbb{Q} \cap (0,\ 1)$ 的动机（参见下文的定义2.17 ）。

定义 2.14. 给定 $n \geq 3$ 和 $2 \leq k \leq n-1$，定义 $\rho_o(n,k) \in \mathfrak{S}_{n+1}$ 为满足以下条件的置换

$$\rho_o(n,k)(i) = \begin{cases} n & \text{if } i = 0 \\ 0 & \text{if } i = 1 \\ i + (n-k) & \text{if } 2 \leq i \leq k-1 \\ i - (k-1) & \text{if } k \leq i \leq n \end{cases}$$

换句话说，$\rho_o(n,\ k)$ 是通过在置换 $\rho_e(n,\ k)$ 下 n 的轨道中，在 1 和 n 之间插入符号 0 而得到的作用于 $n+1$ 个字母的置换。

定义 2.15。设 $n \geq 3$。对于 $2 \leq k \leq n-1$，令

$$\kappa(n,k) = (1,2,\ldots,k-1)(k)\cdots(n) \in \mathfrak{S}_n$$

并定义

$$\rho_2(n,k) = [\kappa(n,k)]^{-1} \circ \rho_e(n,k) \circ \kappa(n,k).$$

当未指定 m 时，我们记作 $\rho_m(n,\ k)$：因此，

$$\rho_m(n,k) = \begin{cases} \rho_e(n,k) & \text{if } m \geq 4 \text{ even} \\ \rho_o(n,k) & \text{if } m \geq 3 \text{ odd} \\ \rho_2(n,k) & \text{if } m = 2. \end{cases}$$

由备注 2.13 可知，对于任意 $m \geq 2$,

$$\rho_m(n,k) \text{ is a transitive permutation} \iff \gcd(n-k, n-1) = 1.$$

以下定理概述了 第 5 节和第 6 节Far21]

定理 2.16. 设 $f\colon I \to I$ 是一个带有 $\lfloor \lambda \rfloor = m \geq 2$ 的 λ-之字形映射。若 $f \in \mathrm{PA}(m)$，则$\rho(f) = \rho_m(n,k)$ 对某些满足以下条件的 n, k

$$\gcd(n-k, n-1) = 1.$$

此外，对于每个这样的 $\rho_m(n,k)$，都存在唯一的 $f \in \mathrm{PA}(m)$，使得 $\rho(f) = \rho_m(n,k)$。

我们引入记号 $\mathcal{F} = \mathbb{Q} \cap (0,1)$。

定义 2.17. 固定 $m \geq 2$。定义 $\Phi : \mathrm{PA}(m) \to \mathcal{F}$ 为映射

$$\Phi(f) = \frac{n-k}{n-1} \quad \text{if } \rho(f) = \rho_m(n,k).$$

注意， Φ 总是输出最简分数。

我们现在可以陈述下面这一基本事实，该事实在 [Far21]中作为定理 2 出现。

引理 1. 对于每个 $m \geq 2$，映射 $\Phi : \mathrm{PA}(m) \to \mathcal{F}$ 都是双射。

本文的一个核心目标是论证，$\mathrm{PA}(m)$ 实际上遵循一个特殊图 $\mathcal{F}$ 的组合结构，其顶点集为 $\mathcal{F}$。我们称这个图为法雷树。更多内容请参见第4 节。

2.4. 数字多项式 D_f。令 $f \in \mathrm{PA}(m)$，其中 $m \geq 2$ 为偶数，并记 $\Phi(f) = \frac{a}{b}$。点 $x = 1$ 在 f 下严格周期为 $b+1$。将该轨道中的元素记为 $x_i = f^i(1)$，其中 $i = 0,\ \ldots\ldots,\ b+1$。由于 f 是一个 λ-之字形映射， x_i 满足一组线性关系：

$$x_i = a_i \pm \lambda x_{i-1}, \qquad \text{for } i = 1,\ldots,b+1$$

其中指标按 $b+1$ 取模，且每个 a_i 都是满足 $|a_i| \leq m$的整数。事实上，在 [Far21]的第7节中，作者证明了更进一步的限制

$$x_i = \begin{cases} \lambda x_{i-1} - m \text{ or } \lambda x_{i-1} - (m-2) & \text{if } 1 \leq i \leq b-1 \\ m - \lambda x_{i-1} & \text{if } i = b \\ 2 - \lambda x_{i-1} & \text{if } i = b+1. \end{cases} \tag{2}$$

由于 $x_0 = x_{b+1} = 1$，将这些关系合并并对 0 求解，可得到关于 λ 的首一整系数多项式关系，其形式为

$$0 = D_f(\lambda) = \lambda^{b+1} + 1 - \sum_{i=1}^{b} c_i \lambda^{b+1-i}. \tag{3}$$

可以验证， c_i 是满足下列条件的整数

$$c_i = \begin{cases} \lambda x_{i-1} - x_i & \text{if } 1 \leq i \leq b-1 \\ \lambda x_{i-1} + x_i & \text{if } i = b \end{cases}. \tag{4}$$

若 m 为奇数且 $\Phi(f) = \frac{a}{b}$，则 $-x = 1$ 是周期为 $b+2$ 的周期点。沿用之前的记号，相应的限制条件类似:

$$x_i = \begin{cases} \lambda x_{i-1} - m \text{ or } \lambda x_{i-1} - (m-2) & \text{if } 1 \leq i \leq b-1 \\ m - \lambda x_{i-1} & \text{if } i = b \\ \lambda x_{i-1} - 1 & \text{if } i = b+1 \\ 1 - \lambda x_{i-1} & \text{if } i = b+2. \end{cases} \tag{5}$$

将这些关系合并并对 0 求解，可得到方程

$$0 = \lambda D_f(\lambda),$$

其中 $D_f(\lambda)$ 与 (3) 中的形式相同，且 c_i 满足 (4)。

在这两种情况下，我们作出如下定义。

定义 2.18。 多项式 $D_f(t) \in \mathbb{Z}[t]$ 是 f的数字多项式。

根据定义， λ 是 D_f的根节点。较不明显的是， D_f 是一个与 f自然相关的矩阵的特征多项式，该矩阵称为强马尔可夫矩阵。这一事实对于定理C的证明至关重要。参见第7.1 节和第7.3节。

2.5. 折叠理论简介。 让我们回顾一下折叠理论中的几个基本定义。暂时设 $f : I \to I$ 是任意一个后临界有限分段单调映射，其临界点有限，记为 $k_1, \ldots, k_m$。我们引入记号

$$I_0 = [0, k_1), \quad I_m = (k_m, 1], \text{ and } I_j = (k_j, k_{j+1}) \text{ for } j = 1, \ldots, m-1.$$

这些是 f 的单调区间。将 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_m = \{0, k_1, 1, k_2, 2, \ldots, k_m, m\}$ 作为由 $2m+1$ 个字母组成的字母表。

定义 2.19。 对于任意 $x \in I$， x 的地址 为

$$A(x) = \begin{cases} j & \text{if } x \in I_j \\ k_j & \text{if } x = k_j \end{cases}$$

x 的轨道编码是序列

$$\mathrm{It}_f(x) = (A(x), A(f(x)), A(f^2(x)), \ldots).$$

给定一个临界点 k_j，其像 $f(k_j)$ 是一个临界值。 f的折叠序列就是这些临界值的轨道编码：

$$\mathcal{K}_j(f) = \mathrm{It}_f(f(k_j)) \quad \text{for } j = 1, \ldots, m.$$

f 的折叠数据是向量

$$\mathcal{K}_f = (\mathcal{K}_1(f), \ldots, \mathcal{K}_m(f)).$$

备注 2.20。 在 $f \in \mathrm{PA}(m)$ 的情形下，折叠数据 $\mathcal{K}_f$ 具有非常特殊的形式。根据 Far21] 的推论 5.6 和定义 5.8，我们知道 $f(0) = 0$ 当 m 为偶数时为 $f(0) = 1$，当 m 为奇数时为 f。由于 m 的唯一临界值是 0 和 1，我们还可以进一步说明：如果 m 为偶数，则

$$\mathcal{K}_j(f) = \begin{cases} \mathrm{It}_f(1) & \text{if } j \text{ is odd} \\ 0^\infty & \text{if } j \text{ is even,} \end{cases}$$

而如果 m 为奇数，则有

$$\mathcal{K}_j(f) = \begin{cases} 0 \cdot \mathrm{It}_f(1) & \text{if } j \text{ is odd} \\ \mathrm{It}_f(1) & \text{if } j \text{ is even.} \end{cases}$$

在每种情况下， $\mathcal{K}_f$ 都完全由 Itf(1) 决定；由于 $f \in$PA(m)，它是严格周期的。因此，我们作如下定义。

长度至少为 l 的词 $A =$(${A_0}$， ${A_1}$，.....) 的第 l 个前缀 是子词

$$\mathrm{Pre}_l(A) = (A_0, \ldots, A_{l-1}).$$

定义2.21。 设 $f \in$PA(m)，并记 $\Phi(f) = \frac{a}{b}$。 f 的主揉序列$\nu(f)$是 Itf(1) 的第一个周期：

$$\nu(f) = \mathrm{Pre}_{b(m)}(\mathrm{It}_f(1)),$$

其中

$$b(m) = \text{the minimal period of 1 under } f = \begin{cases} b+1 & \text{if } m \text{ is even} \\ b+2 & \text{if } m \text{ is odd.} \end{cases}$$

与 Itf(1) 一样，序列 $\nu(f)$ 以 0 为起始索引：对于 $0 \le i \le b(m)$,

$$\nu_i(f) = (\mathrm{It}_f(1))_i = A(f^i(x)).$$

下一个命题可由方程（2）和（5）直接得出，并将 D_f 的系数与 ν（f）的各项联系起来。

命题2.22。 设 $f \in \mathrm{PA}(m)$ 的数字多项式为

$$D_f(t) = t^{b+1} + 1 - \sum_{i=1}^{b} c_i t^{b+1-i}.$$

那么， f 的主揉序列为

$$\nu_i(f) = \begin{cases} c_{i+1} & \text{if } 0 \le i \le b-2 \\ m-1 & \text{if } i = b-1 \\ k_1 & \text{if } i = b \\ 0 & \text{if } m \text{ is odd and } i = b+1. \end{cases} \tag{6}$$

下一条结果说明如何计算 D_f 的系数，而无需依赖 $\nu(f)$。这是 [Far21], 中的定理 3，将在第 5 节和第 6 节的工作中发挥重要作用。

引理 2。 设 $f \in \mathrm{PA}(m)$ 满足 $\Phi(f) = \frac{a}{b}$。定义 $L\colon [0,b] \to \mathbb{R}$ 为 $L(t) = \frac{a}{b} \cdot t$。那么

$$D_f(t) = t^{b+1} + 1 - \sum_{i=1}^{b} c_i t^{b+1-i},$$

其中， c_i 满足

$$c_i = \begin{cases} m & \text{if } L(t) \in \mathbb{N} \text{ for some } t \in [i-1, i] \\ m-2 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{7}$$

特别地， $c_i = c_{b-i}$，因此 D_f 是自反的：也就是说，

$$D_f(t) = t^{b+1} D_f(t^{-1}).$$

前面的两个结论给出了主揉序列的一个简单描述。我们沿用原有记号。

推论2.23. $f \in \mathrm{PA}(m)$ 的主揉序列满足

$$\nu_i(f) = \begin{cases} m & \text{if } 0 \le i \le b-2 \text{ and } L(t) \in \mathbb{N} \text{ for some } t \in [i, i+1] \\ m-2 & \text{if } 0 \le i \le b-2 \text{ and } L(t) \notin \mathbb{N} \text{ for some } t \in [i, i+1] \\ m-1 & \text{if } i = b-1 \\ k_1 & \text{if } i = b \\ 0 & \text{if } m \text{ is odd and } i = b+1. \end{cases} \tag{8}$$

正如这些结论所示， $f \in$PA(m)的以下不变量彼此决定 :

(1) 分数 $\Phi(f) = \frac{a}{b}$，(2)多项式 $D_f(t)$,

以及 (3) 主揉序列 $\nu(f)$。

3. The proof of Theorem A

正如我们在第 2.3节所见，将 Φ 赋予区间映射$f \in \mathrm{PA}(m)$ 一个位于 $\mathcal{F} = \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ 中的分数的定义并不直观。在本节中，我们将证明， $\Phi(f)$ 可从伪阿诺索夫映射的角度得到解释 ψ_f。

定理 A。 假设 $f \in \mathrm{PA}(m)$。那么

$$\Phi(f) = 1 - \mathrm{rot}_\infty(\psi_f).$$

在开始证明之前，我们先约定一些记号。

在 [Far21] 中，作者仿照 伽罗瓦提升 的 f，遵循 W. Thurston 在 [Thu14]中的例子，构造了该分段仿射映射 f_G： $I \times \mathbb{R} \to I \times \mathbb{R}$ 其定义如下:

$$f_G(x, y) = \left(f_j(x), \tilde{f}_j(y)\right) \text{ if } x \in I_j.$$

˜这里， $f_j(x) = a_j \pm \lambda x$ 是在子区间 I_j上定义 f 的线性映射。映射 f_j 是通过在 f_j的公式中将所有 λ 替换为 λ^{-1} 得到的。当 f 是一个之字形映射时，常数 a_j 全都是整数，因此我们有 $\tilde{f}_j(y) = a_j \pm \lambda^{-1} y$。

伽罗瓦提升保留了一个自然子集 $\Lambda_f \subseteq I \times \mathbb{R}$，称为极限集。该集合是有限个具有水平边和垂直边的欧氏矩形 R_j 组成的连通并集，使得矩形 R_j 在 x坐标上的投影为

$$\pi(R_j) = I_j \subseteq I.$$

f_G 在每个矩形 R_j 上的作用由分段仿射映射给出；适当识别边界 $\partial\Lambda_f$ 上的线段后，我们得到伪阿诺索夫映射 ψ_f在 S^2上的作用。矩形 R_j 在商空间中构成 ψ_f 的马尔可夫划分。水平边界 $\partial_H\Lambda_f$上有唯一的排斥轨道，而在商空间中，该轨道粘合为由 ψ_f固定的点 ∞ 。该轨道的最小周期等于 ψ_f 在 ∞处不变叶状结构的棱数。

定理 A 的证明如下进行。我们只考虑 f 的临界点数满足 $m \geq 4$ 且为偶数的情形。其余两种情形完全类似。

(1) 证明轨道 $\partial_H\Lambda_f$ 在 下水平边界 $\partial_H^L\Lambda_f$的每个连通分支上恰好有一个元素。(2) 研究 $\partial_H^L\Lambda_f$ 的边的识别，以确定 ∞周围棱的逆时针排列。(3) 证明 ψ_f 对棱的作用是置换 $\tilde{\rho}(f)$ 的逆置换（参见注 2.13）。

证明。 在集合 PC($I = [0, 1]$) f处切开区间 $\setminus \{k_1\}$（参见定义 2.4），得到划分

$$I = \bigcup_{i=1}^{n-1} J_i.$$

每个马尔可夫矩形 R_j 都有一个水平边界

$$\partial_H R_j = \partial_H^U R_j \sqcup \partial_H^L R_j,$$

其中 $\partial_H^L R_j$是 R_j的下水平边界，也就是 $\partial_H R_j$中高度较低的连通分支。 Λ_f 的下水平边界是以下集合的并

$$\partial_H^L \Lambda_f = \bigcup_{j=1}^{n} \partial_H^L R_j.$$

根据作者在 [法21], 的连通分支恰好是以下集合

$$\widetilde{J}_i = \pi^{-1}(J_i) \cap \partial_H^L \Lambda_f, \text{ for } i = 1, \ldots, n-1.$$

对于每个 i，映射 $f_G^{-1} : \widetilde{J}_i \to f_G^{-1}(\widetilde{J}_i)$ 是一个仿射压缩映射，其缩放因子为 λ^{-1}；事实上，它是到其像上的一个同胚。此外，我们有

$$f_G^{-1}(\widetilde{J}_i) \subseteq \widetilde{J}_{\widetilde{\rho}(f)^{-1}(i)} = \widetilde{J}_{i-(n-k)}, \tag{9}$$

其中 $\Phi(f) = \frac{n-k}{n-1}$和 $\widetilde{\rho}(f)$ 是备注 2.13中的置换。这里我们将指标 $i-(n-k)$ 视为模 $n-1$。

现在可知，$f_G^{-(n-1)}$ 将每个 $\widetilde{J}_i$ 映到自身，从而蕴含存在一个吸引不动点 $p_i \in J_i$。集合 $\{p_1, \ldots, p_{n-1}\}$ 必然是 f_G 在 $\partial_H \Lambda_f$ 上的唯一排斥轨道。因此，我们找到了商映射下奇点 $\infty \in S^2$的原像，该商映射将 $\partial\Lambda_f$的线段识别在一起。剩下的问题是理解点 p_i 的邻域如何粘合在一起。

我们的下一个目标是理解 $\sim_\pi(\partial J_i) \cap \subseteq$ PC(f)，且 $\pi(p_i) \notin$ PC(f)。因此，在 p_i 处切割 J_i，分别得到左、右子区间 $\widetilde{J}_i^l$ 和 $\widetilde{J}_i^r$。

我们断言，对于每个指标 $i = 1, \ldots, n-2$，边的识别将 $\widetilde{J}_i^r$与 $\widetilde{J}_{i+1}^l$通过一个反向等距变换粘合起来。一旦证明了这一点，定理的结论便随之成立。事实上，$\mathbb{R}^2$ 上的标准定向诱导出S^2上的定向，而绕 $\infty \in S^2$ 的正向转动提升为绕点 p_i的一系列逆时针半周转。每次这样的半周转都会经过从对应的 p_i发出的垂直线 s_i，并且 s_i 向下映射为 ψ_f 在 ∞处的收缩叶状结构的一条棱。方程（9）意味着

$$f_G(p_i) = p_{i+(n-k)},$$

但由于 $\widetilde{J}_i^r$与 $\widetilde{J}_{i+1}^l$ 粘合在一起，我们要求 $n-1-(n-k) = k-1$ 逆时针半周转，才能从 s_i到达 $s_{i+(n-k)}$。由此可知，ψ_f使 ∞处的棱正向点击 $k-1$次，因此

$$\mathrm{rot}_\infty(\psi_f) = \frac{k-1}{n-1} = 1 - \frac{n-k}{n-1} = 1 - \Phi(f).$$

接下来要证明 $\widetilde{J}_i^r$通过一个反向等距变换与 $\widetilde{J}_{i+1}^l$ 粘合。这是一个标准论证，也是更广泛现象的一部分，例如 [BH95], Bestvina和Handel关于轨道的奠基性论文第 3.4 节中就描述了这一现象。在我们的情形中，首先注意到 $\partial_H^U \Lambda_f$ 中与 Λ_f 内投影到 $k_1 \in I$ 的唯一周期点相邻的线段，正是以这种方式粘合的。应用 f_G 会将这种粘合方式传递到 $\partial_H^L \Lambda_f$的所有线段上。□

4. The Farey tree

本节介绍法雷树并讨论其相关性质。关于从连分数角度进行的论述，我们推荐 [Khi97]。若要进一步阅读法雷树本身，请参阅 [Hat22]。

4.1. **法里和**。 所有分数 $q = \frac{a}{b}$ 均为最简形式，除非另有说明。

定义 4.1。 两个分数 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 的法里和 是分数

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} := \frac{a+c}{b+d},$$

右侧的分数不一定是最简形式。事实上，即使$\frac{a}{b}$和 $\frac{c}{d}$是最简形式，它们的法里和也未必是最简形式。不过，如果 $|ad-bc| = 1$，不难证明 $\frac{a+c}{b+d}$ 是最简形式。为此，我们引入以下非标准术语。

定义 4.2。 如果 $|ad-bc| = 1$，我们就称两个分数 $\frac{a}{b}$ 和 $\frac{c}{d}$ 相容 。类似地，如果两个有理数 p, q 有相容的分数表示，我们就称它们相容 。

请注意，若两个分数相容，则它们必定是最简形式。从现在起，我们只考虑相容分数的法里和。

接下来的两个命题是关于算术的练习。

命题 4.3. 设 p, q 是相容有理数，且满足 $p < q$。则 $p < p \oplus q < q$。

从现在起，写作 $p \oplus q$ 时，我们将默认 $p < q$。

命题 4.4. 设 p, q 是相容有理数。则 p 与 $p \oplus q$相容，且$p \oplus q$ 与 q相容。

4.2. **构造法雷树**。 现在我们可以构造法雷树 $\mathcal{F}$了。我们通过归纳法进行构造，每次逐步建立一个新层级 $\mathcal{F}_n$ 。

令 $\mathcal{F}_1 = \{\frac{1}{2}\}$ 为 $\mathcal{F}$ 的根。假设已经构造出 $\mathcal{F}$ 的前 $n-1$ 层。这些层中的顶点是 $\mathbb{Q} \cap (0,\ 1)$ 的元素：按照 $\mathbb{R}$ 上通常的线性顺序排列，并分别在最左端和最右端加入 $\frac{0}{1}$ 和 $\frac{1}{1}$。要构造$\mathcal{F}_n$，将每个元素 $q \in \mathcal{F}_{n-1}$ 与它的两个相邻元素分别取法里和。由此得到 q 的左、右子节点 q_L，q_R ，而所有$q \in \mathcal{F}_{n-1}$ 的这些子节点的并集定义为 $\mathcal{F}_n$。此外，我们还从每个 q 向它的两个子节点 q_L 和 q_R 添加有向边。

定义 4.5。 法雷树 是有向图 $\mathcal{F}$，其顶点为 $\bigcup_{n\geq 1} \mathcal{F}_n$，边恰好是上述过程中描述的那些边。

注 4.6。 **</style}文献中的一些资料将 称为斯特恩-布罗科树**，而将“法雷树”这一名称专用于一个更大的树，其顶点为 $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$。

4.3. **法雷树的性质**。 有理数在 $\mathcal{F}$ 中的位置与其连分数展开密切相关。事实上，可以利用连分数理论构造 $\mathcal{F}$ 并证明以下经典论述。更多细节参见 [Hat22] 。

命题 4.7。 $\mathcal{F}$ 的顶点集恰为 $\mathbb{Q} \cap (0,1)$。此外，对于每个顶点 r，恰存在一对相容有理数 p、q，使得 $p \oplus q = r$。

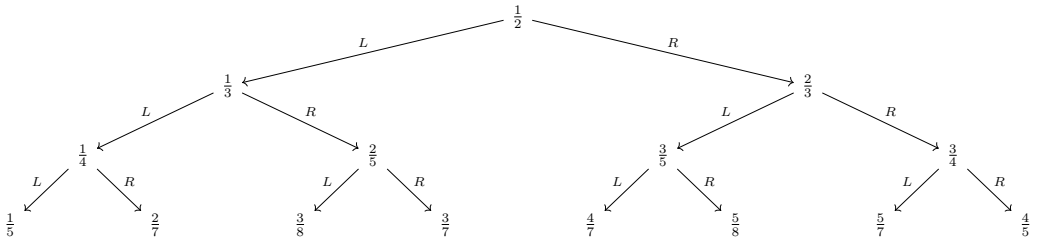


FIGURE 1. 法雷树的前四层，包含边。

因此，我们稍微滥用记号，用 $\mathcal{F}$ 表示 $\mathbb{Q} \cap (0,\ 1)$。我们还将用到更大的集合

$$\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}.$$

定义 4.8。给定 $p,\ q \in \mathcal{F}$，我们称 p 是 q 的**祖先**，如果从 $\frac{1}{2}$ 到 q 的有向路径包含 p。我们也称 q 是 p 的**后代**。

定义 4.9. 设 $q \in \mathcal{F}_n$。q 的**左子节点**是 q 在 $\mathcal{F}_{n+1}$ 中的唯一后代 q_L，满足 $q_L < q$。类似地，**右子节点**是 q 在 $\mathcal{F}_{n+1}$ 中的唯一后代 q_R，满足 $q < q_R$。q 的**左-** 和**右父项**是满足 $q^L \oplus q^R = q$ 的唯一元素 $q^L, q^R \in \mathcal{F}$。

注记 4.10. 父节点和子节点的术语起初可能会让人产生误解。确实，

$$(q_L)^R = q = (q_R)^L \text{ for all } q \in \mathcal{F}.$$

另一方面，$(q^L)_R$ 和 $(q^R)_L$ 中只有一个会等于 q，因为每个 $q \neq \frac{1}{2}$ 只有一条入边。该对中的另一个将是 q 的祖先。

命题 4.11. 固定 $q \in \mathcal{F}$。若 $r \in \mathcal{F}$ 满足 $q^L < r < q^R$，则 r 是 q 的后代。特别地，r 的分母至少与 q 的分母一样大。

证明。若 $r = q$，则无需证明。因此，假设 $r \neq q$。设 $q \in \mathcal{F}_n$。根据 $\mathcal{F}$ 的构造，q 在集合 $\bigcup_{k \leq n} \mathcal{F}_k$ 中与其父节点 q^L 和 q^R 直接相邻。特别地，介于 q 和 q^L 之间的有理数 r，只有在对 q 和 q^L 取中项后才会出现在 $\mathcal{F}$ 中，因此 r 是 q 的后代。同理，若 $r \in \mathcal{F}$ 介于 q 和 q^R 之间，那么它只有在对 q 和 q^R 取中项后才会出现，因此它再次成为 q 的后代。□

命题 4.12. 设 $q \in \mathcal{F}_n$ 对任意 $n \geq 2$ 成立。那么，q^L 和 q^R 中恰有一个属于 $\mathcal{F}_{n-1}$。此外，

(1) if $q^L \in \mathcal{F}_{n-1}$, *then* $q^R = (q^L)^R$, *and*
(2) if $q^R \in \mathcal{F}_{n-1}$, *then* $q^L = (q^R)^L$.

证明。在 $\mathcal{F}$ 的构造中，$q \in \mathcal{F}_n$ 的两个父节点是 $\mathcal{F}$ 前 $n-1$ 层中的相邻有理数。因此，其中一个必定是另一个的父节点。另一方面，$\mathcal{F}$ 中有一条边从某个 $r \in \mathcal{F}_{n-1}$ 指向 q：这个 r 必定是 q 的父节点。

将 q 的另一个父节点记为 s。如上所述， s 必定是 r 的父节点：若 $r = q^L$，则 $r < q < s$，由此可得 $s = q^R$ 和 $s = r^R$。类似地，若 $r = q^R$，则 $s < q < r$，于是有 $s = q^L = r^L$。□

定义 4.13. 对于 $q \in \mathcal{F}$，我们将 $\mathcal{F}(q)$ 定义为以 q 为根节点的 $\mathcal{F}$ 的子树。等价地， $\mathcal{F}(q)$ 是 q 的所有后代以及 q 本身组成的集合。

注意，对于每个 q，都存在从 $\mathcal{F}(q)$ 到 $\mathcal{F}$ 的自然图同构，它将 q 映到 $_1{}_2$，并保持– $\mathbb{R}$ 上的顺序。因此，我们可以讨论子树 $\mathcal{F}(q)$ 的各层级 $\mathcal{F}_n(q)$。

Pr命题 4.14. 固定 $q \in \mathcal{F}$。对于任意 $s \in \mathcal{F}(q_L)$ （分别地， $s \in \mathcal{F}(q_R)$），存在一个序列 e

$$s = s_0, \ldots, s_k = q$$

使得对于 $i = 1, \ldots, k$， $s_i = (s_{i-1})^R$ （分别地， $s_i = (s_{i-1})^L$） 。

证明。 我们只考虑 $s \in \mathcal{F}(q_L)$ 这种情形，因为另一种情形类似。我们对包含 s 的 $\mathcal{F}(q_L)$ 的层级 n 使用归纳法。若 $n = 1$，则 $s = q_L$，且该序列

$$s_0 = q_L, s_1 = q$$

如所需。现在假设命题已对 $\mathcal{F}(q_L)$ 的前 s 个 $n-1$ 层中的所有对象得到证明，并令 $s \in \mathcal{F}_n(q_L)$。根据命题 4.12， s^L 和 s^R 中恰有一个属于 $\mathcal{F}_{n-1}(q_L)$。如果 $s^R \in \mathcal{F}_{n-1}(q_L)$，那么由归纳假设即可完成证明：只需将 s 添加到连接 s^R 与 q 的右父节点序列之前。反之，如果 $s^L \in \mathcal{F}_{n-1}(q_L)$，命题 4.12 表明 $s^R = (s^L)^R$。归纳假设意味着存在一个连接 s^L 与 q 的右父节点序列，记为

$$s^L, s^R, \ldots, q.$$

将 s 代入 s^L 后， s 所需的序列与下式完全相同：

$$s, s^R, \ldots, q.$$

证明完成。 □

5. The Farey tree as a model for PA(m) and Π(m)

的顶点通过 Farey 和运算依次生成更多顶点。我们将这一结构传递到 PA(m) 以及它们所生成的伪阿诺索夫映射族 Π(m) 中，并提取出动力学上的推论。本节最重要的结果是定理 5.4 和命题 5.10。

5.1. **的模型**PA(m)。当我们沿着 $\mathcal{F}$ 向下推进时，我们推导出主揉序列 $\nu(f)$ 的变换规律。不过，在陈述这一结果之前，我们先给出几个定义。

D定义 5.1。固定 $m \geq 2$。我们将 $\mathbf{0}_m$ 记作满足以下条件的 m 模态之字形映射： at

(1) $x = 1$ 在 $\mathbf{0}_m$ 下的轨道编码为（m）·（$m-2$）$^\infty$，并且（2） $\mathbf{0}_m$ 在 I_{m-1}上递减。我们还将 $\mathbf{1}_m$ 定义为 m模态之字形映射，使得（1） $x = 1$ 在 $\mathbf{1}_m$ 下的轨道编码为（m）$^\infty$，并且（2） $\mathbf{1}_m$ 在 I_{m-1}上递减。

令 $\overline{\mathrm{PA}(m)} = \mathrm{PA}(m) \cup \{\mathbf{0}_m, \mathbf{1}_m\}$。我们通过规定以下内容，将映射 Φ 扩展到 $\mathrm{PA}(m)$：

$$\Phi(\mathbf{0}_m) = \frac{0}{1} \quad \text{and} \quad \Phi(\mathbf{1}_m) = \frac{1}{1}.$$

定义 5.2. 固定 $m \geq 2$。若 $\Phi(f)$ $\Phi(g) \in \mathcal{F}$相容，则称 $\overline{f,\ g} \in \mathrm{PA}(m)$ 相容。此时，我们将 $\overline{f \oplus g} \in \mathrm{PA}(m)$ 定义为满足下列条件的区间映射：

$$\Phi(f \oplus g) = \Phi(f) \oplus \Phi(g).$$

我们还借用“父节点”和“子节点”这两个术语。若 $f = \Phi^{-1}(q)$，则定义 $\mathrm{PA}(m)$ 中的以下元素：

- $f^L = \Phi^{-1}(q^L)$,
- $f^R = \Phi^{-1}(q^R)$,
- $f_L = \Phi^{-1}(q_L)$，以及
- $f_R = \Phi^{-1}(q_R)$。

如推论2.23 所示，给定 $f \in \mathrm{PA}(m)$ 时，我们可以将主揉序列$\nu(f)$ 写成以下序列的串接

$$\nu(f) = (m) \cdot \mathbf{w}(f) \cdot \mathbf{k}, \quad \text{where} \quad \mathbf{k} = \begin{cases} (m-1, k_1) & \text{if } m \text{ is even} \\ (m-1, k_1, 0) & \text{if } m \text{ is odd.} \end{cases} \tag{10}$$

这里，$\mathbf{w}(f)$ 是隐式定义的，它是 $\nu(f)$ 的一部分，由斜率为 $\Phi(f)$ 的线段与 $\mathbb{R}^2$ 中的水平和垂直整数线的交点确定。

定义 5.3。固定 $f \in \mathrm{PA}(m)$。通过调整 $\nu(f)$ 的前缀或后缀，我们定义以下三个序列：

(1) $\overline{\nu(f)} = (m) \cdot \mathbf{w}(f) \cdot (m)^{\frown}$
(2) $\nu(f) = (m) \cdot \mathbf{w}(f) \cdot (m-2)$
(3) $\underline{\nu(f)} = (m-2) \cdot \mathbf{w}(f) \cdot \mathbf{k}$.

以下是 $\nu(f)$ 的变换规则。

定理 5.4。令 $f, g \in \mathrm{PA}(m)$ 与 $\Phi(f) < \Phi(g)$相容。于是

$$\nu(f \oplus g) = \overline{\nu(f)} \cdot \underline{\nu(g)}, \tag{11}$$

and

$$\nu(f \oplus g) = \widehat{\nu(g)} \cdot \nu(f). \tag{12}$$

*Pro*关于。记 $\Phi(f) = \frac{a}{b}$和 $\Phi(g) = \frac{c}{d}$。考虑如下参数化的折线段：

$$\mathcal{L}(t) = \begin{cases} (t, \Phi(f) \cdot t) & \text{if } t \in [0, b] \\ (t, a + \Phi(g) \cdot (t-b)) & \text{if } t \in [b, b+d]. \end{cases}$$

这条折线由两条直线段组成，一条斜率为 $\Phi(f)$，另一条斜率为 $\Phi(g)$。直线段 $\mathcal{L}_q$ 与 $\mathcal{L}$ 共享端点，但在平面中位于它的上方。考虑从 $\mathcal{L}$ 到 $\mathcal{L}_q$ 的同伦 $\mathcal{H}$，通过将 $\mathcal{L}$ 的非光滑点垂直拖向 $\mathcal{L}_q$ 来定义，同时保持该点通过线段与

端点 (0，0) 和 $(b+d,\ a+c)$ 相连。选择该同伦的参数化 $s \in [0,1]$，使得 $\mathcal{H}_0(\mathcal{L}) = \mathcal{L}$ 且 $\mathcal{H}_1(\mathcal{L}) = \mathcal{L}_q$。

我们可以从左到右，利用与水平和垂直整数线的交点来定义折叠序列 $\nu(s)$，即 $\mathcal{H}_s(\mathcal{L})$ 的折叠序列。具体而言，我们规定如下算法：

(1) 初始化 $\nu(s) = (m)$。(2) 对每个 $1 \le i \le b+d-2$：(a) 若 $\mathcal{H}_s(\mathcal{L})$ 与 $x = i+1$ 的交点是一个整点，则将$\mathbf{k}$ 追加到$\nu(s)$；(b) 否则，若 $\mathcal{H}_s(\mathcal{L})$ 与 $x = i$ 的交点是一个整点，则将 m 追加到$\nu(s)$；(c) 否则，若在 $x = i$ 和 $x = i+1$之间严格存在一个水平交点，则将 m 追加到 $\nu(s)$；(d) 否则，将 m 追加到 $\nu(s)$；(3) 将$\mathbf{k}$ 追加到 $\nu(s)$。

根据此算法，同伦的初始和终止折叠序列满足

$$\nu(0) = \nu(f) \cdot \nu(g),$$
$$\nu(1) = \nu(f \oplus g).$$

此外，$\nu(s)$ 的取值仅当其中一条线段在整点 $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ 处发生移位映射时才会改变。事实上，设对于某个 $s_0 > 0$，$\mathcal{H}_{s_0}(\mathcal{L})$ 的左线段经过整点 $(x,y) \neq (0,0)$。则该左线段的斜率为 y/x，它等于某个有理数 r，其分母整除 x，因而至多为 b，因为 $x \le b$。但该有理数 r 位于区间 $[\Phi(f)\ \Phi(g)]$, 中，所以命题 4.11 蕴含 x 至少与 $\Phi(f) \oplus \Phi(g)$ 的分母一样大，而后者为 $b+d$。由于 $d \ge 1$，我们得到矛盾：$\mathcal{H}_{s_0}(\mathcal{L})$ 的左线段除 (0, 0) 外不可能经过第二个整点。完全相同的论证表明，$\mathcal{H}_{s_0}(\mathcal{L})$ 的右线段除 $(a+c, b+d)$ 外也不可能经过第二个整点。

因此，对于 $\nu(s) = \nu(f \oplus g)$ 对所有 $s > 0$均成立。对 $\mathcal{H}_0(\mathcal{L})$ 的初始扰动将 $\mathbf{k}$ 在 f中的后缀替换为（m），并将 m 在 $\nu(g)$ 中的前缀替换为 $m-2$，从而验证了（11）。见图 3b。

为证明（12），我们采用完全相同的论证，只是将 $\mathcal{L}$ 定义为一条折线，其第一条线段的斜率为 $\Phi(g)$，第二条线段的斜率为 $\Phi(f)$。在此情形下，初始同伦将 $\mathbf{k}$ 在 $\nu(g)$ 中的后缀替换为（$m-2$），但不会改变 m在 $\nu(f)$ 中的前缀。见图 3a。 □

注 5.5。如果 $f = \mathbf{0}_m$ 或 $g = \mathbf{1}_m$，公式会略有不同。在第一种情形下，$g = \Phi^{-1}(1/n)$ 对某个 n成立，因此 $\mathbf{w}(g) = (m-2)^{n-2}$。于是，不难看出

$$\mathbf{w}(\mathbf{0}_m \oplus g) = (m-2)^{n-1}.$$

在第二种情况下，$f = \Phi^{-1}(1-1/n)$ 和 $\mathbf{w}(f) = (m)^{n-2}$。因此，

$$\mathbf{w}(f \oplus \mathbf{1}_m) = (m-1)^{n-1}.$$

从现在起，当我们为 $q \in \mathcal{F}$ 写作 $\nu(q)$ 时，我们指的是 $\nu\left(\Phi^{-1}(q)\right)$。定理 5.4 使我们能够沿着从 $1\ 2$ 到 q 的 $\mathcal{F}$ 行进时，计算 $\nu(q)$。 –

例 5.6。 我们逐步计算 $\nu(7/12)$。 中从 $1/2$ 到 $7/12$ 的路径如图 2所示。虚线箭头表示一种并非 的边的父子关系 $\mathcal{F}$。

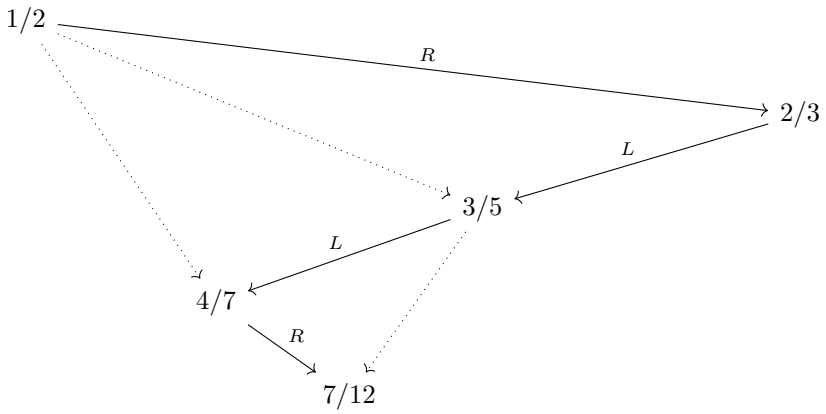


FIGURE 2. 从根节点 $1/2$ 到 $7/12$在法雷树中的唯一路径。点状箭头表示不属于 $\mathcal{F}$的一条边的父子关系。

我们从 $\nu\left(1/2\right) = \left(m\right) \cdot \mathbf{k}$开始。注5.5 告诉我们

$$\nu\left(\frac{2}{3}\right) = (m) \cdot (m) \cdot \mathbf{k}.$$

的左子节点是 $2/3$ ，即 $3/5$，其左父节点为 $1/2$，因此由（12）

$$\nu\left(\frac{3}{5}\right) = \widehat{\nu\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \nu\left(\frac{1}{2}\right)} = (m) \cdot (m, m-2, m) \cdot \mathbf{k}.$$

类似地， $3/5$ 的左子节点是 $4/7$，其左父节点仍为 $1/2$，从而得到

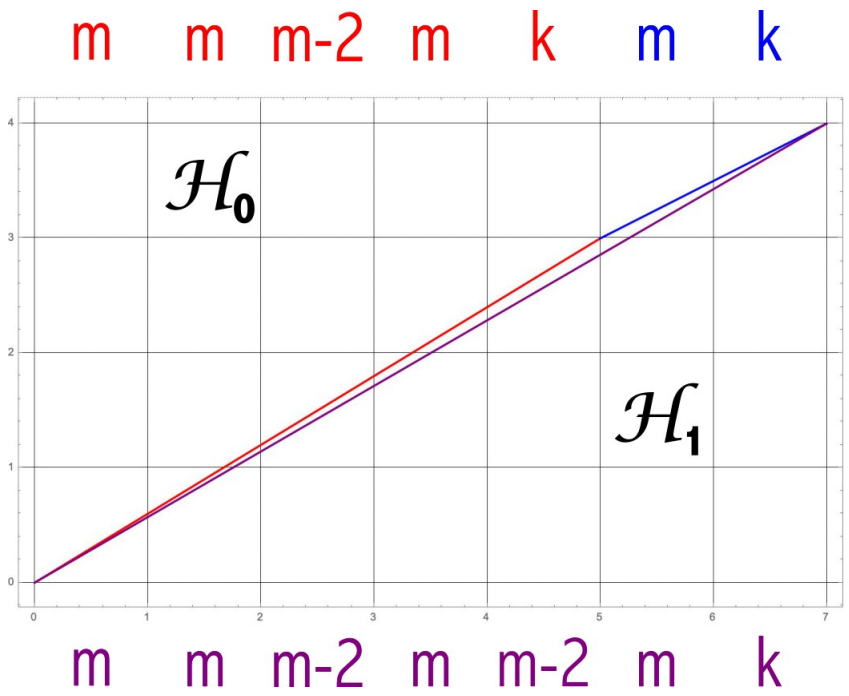
$$\nu\left(\frac{4}{7}\right) = \widehat{\nu\left(\frac{3}{5}\right) \cdot \nu\left(\frac{1}{2}\right)} = (m) \cdot (m, m-2, m, m-2, m) \cdot \mathbf{k}.$$

见图3a。最后我们得到 $7/12$，其左父节点和右父节点分别为 $4/7$ 和 $3/5$。应用（11）得

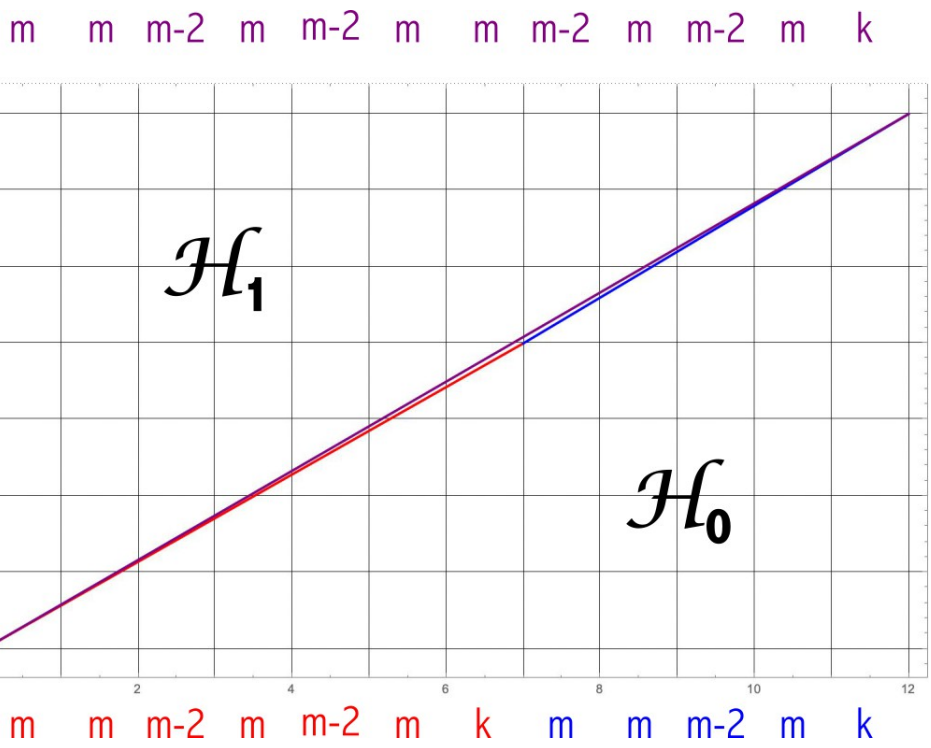
$$\begin{aligned}\nu\left(\frac{7}{12}\right) = \overline{\nu\left(\frac{4}{7}\right) \cdot \underline{\nu\left(\frac{3}{5}\right)}} &= (m) \cdot (m, m-2, m, m-2, m, m) \cdot (m-2, m, m-2, m) \cdot \mathbf{k} \\ &= (m) \cdot (m, m-2, m, m-2, m, m, m-2, m, m-2, m) \cdot \mathbf{k}.\end{aligned}$$

参见图 3b。

注 5.7。 在继续讨论 $\Pi(m)$ 之前，我们先停下来思考定理 5.4 和注 5.5所带来的影响。我们可以将其理解为：在 $\mathcal{F}$ 处于 $\Phi(f)$ 时进行一次转向



(A) 由 $\nu(3/5)$ 和 $\nu(1/2)$ 计算 $\nu(4/7)$。



(B) 由 $\nu(4/7)$ 和 $\nu(3/5)$ 计算 $\nu(7/12)$。

FIGURE 3. 计算 $\nu(7/12)$ 的最后两个步骤。

相当于对点 $f^{b-1}(1) \in I_{m-1}$ 进行扰动。事实上，假设 $\Phi(f) = \frac{a}{b}$。那么对于任意左子节点 g 和任意右子节点 h，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{Pre}_b(\mathrm{It}_g(1)) &= \widehat{\nu(f)} &&= (m) \cdot \mathbf{w}(f) \cdot (m-2) \\ \mathrm{Pre}_b(\mathrm{It}_f(1)) &= \mathrm{Pre}_b(\nu(f)) &&= (m) \cdot \mathbf{w}(f) \cdot (m-1) \\ \mathrm{Pre}_b(\mathrm{It}_h(1)) &= \overline{\nu(f)} &&= (m) \cdot \mathbf{w}(f) \cdot (m) \end{aligned} \tag{13}$$

沿 $\mathcal{F}$ 向左（分别向右）下降，会将 $f^{b-1}(1)$向左（分别向右）扰动。正如我们将在第6节看到的，正是这种行为导致伸缩因子 $\lambda(f)$随 $\Phi(f)$单调变化。

最后，绘制有理数 q 与相应 $f = \Phi^{-1}(q) \in \mathrm{PA}(m)$的伸缩因子之间的对应关系 m，很有启发性。图4展示了 $m = 2$的情形。正如定理B所述，伸缩因子随旋转数单调递增。此外，我们还可以看到，每个伸缩因子的两侧都有间隙，使其与其他伸缩因子分隔开来。事实上，若 $\{q_k\}_k$ 是一个趋于 $q \in \mathcal{F}$的有理数列，且 $q_k \neq q$ 对所有 k均成立，那么 $\Phi^{-1}(q_k)$ 的伸缩因子与 q的伸缩因子之间有正距离。

应将这一现象视为 PA(m) 上法雷树结构的体现。例如，任意 $q \in \mathcal{F}$ 的左子节点都从下方趋近于 q：也就是说，q 的子节点在 $\mathbb{R}$ 的拓扑学中可以任意接近 q。然而，在法雷树中，这些子节点仍然远离 q。$\mathcal{F}$ q 出现得越深，q 与其子节点之间的间隔就越小，但这一间隔始终存在。实验证据表明，这些间隔并不对称。

Hall的论文中图12也出现了类似的图 [Hal94], 其中还分析了 $m = 1$的情形。在该图中，熵单调递减，但这一差异仅仅是 $\Phi(f)$ 定义造成的假象。事实上，如果我们定义 $\Phi'(f) = 1 - \Phi(f$，那么 Φ' 单调递减，并且根据定理 A，恰好等于 $\mathrm{rot}_\infty(\psi_f)$。

5.2. **关于 $\Pi(m)$ 的模型。** 定理5.4 和注记 5.5 说明，$f = \Phi^{-1}(q) \in \mathrm{PA}(m)$ 的马尔可夫划分和转移矩阵会如何随 $q \in \mathcal{F}$ 变化。这些变换法则在 $\psi(f) \in \Pi(m)$ 的马尔可夫划分和转移矩阵中以新的形式重现。不过，为简洁起见，本小节将描述一种从 $\Pi(m)$ 的角度来看更有意义的动力学拓扑变换法则。

定义 5.8。 若 f，$g \in \mathrm{PA}(m)$ 相容，则称伪阿诺索夫映射ψ_f，$\psi_g \in \Pi(m)$ 也相容。在这种情况下，定义 $\psi_f \oplus \psi_g$ 为元素$\Psi(f \oplus g) \in \Pi(m)$。

定义 5.9。 给定 $f \in \mathrm{PA}(m)$，用 $n_\infty(\psi_f)$ 表示 ψ_f 在奇点 ∞ 处的不变叶状结构的棱数。

注意，若 $\Phi(f) = \frac{a}{b}$，则 $n_\infty(\psi_f) = b$。

命题 5.10。 固定 $m \geq 2$，并设 $\phi, \psi \in \Pi(m)$ 相容。那么

$$\mathrm{rot}_\infty(\phi \oplus \psi) = \mathrm{rot}_\infty(\phi) \oplus \mathrm{rot}_\infty(\psi). \tag{14}$$

此外，

$$n_\infty(\phi \oplus \psi) = n_\infty(\phi) + n_\infty(\psi). \tag{15}$$

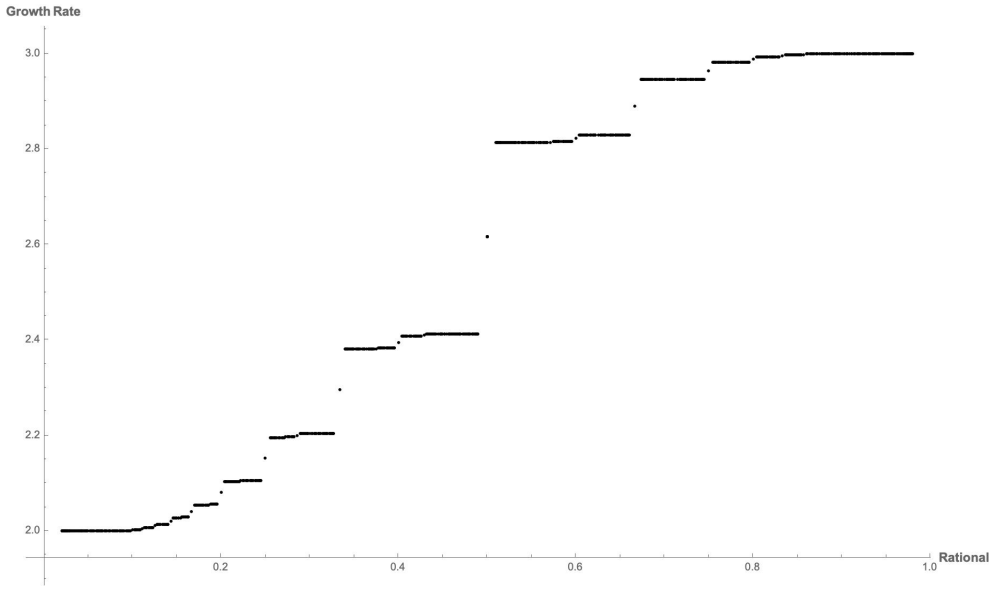


FIGURE 4. 我们绘制了 PA(2) 中元素的伸缩因子。给定 $f \in$PA(2)，我们绘制点 $(\Phi(f)\ \lambda(f)$。每个伸缩因子都位于一个间隙中，而有理数

证明。这些关系直接由我们的定义和定理 A得出。令 f，$g \in \mathrm{PA}(m)$ 为生成 ϕ和 ψ的相容映射。分别记 $\Phi(f) = \frac{a}{b}$和 $\Phi(g) = \frac{c}{d}$。那么

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}_\infty(\phi \oplus \psi) &= 1 - \left(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}\right) \\
&= \frac{b+d-(a+c)}{b+d} \\
&= \frac{(b-a)+(d-c)}{b+d} \\
&= \frac{b-a}{b} \oplus \frac{d-c}{d} \\
&= \left(1 - \frac{a}{b}\right) \oplus \left(1 - \frac{c}{d}\right) \\
&= \mathrm{rot}_\infty(\phi) \oplus \mathrm{rot}_\infty(\psi).
\end{aligned}$$

这就证明了等式（14）。由于对于任意 $h \in \mathrm{PA}(m)$ 分数 $\Phi(h)$ 总是处于最简形式，并且 ψ_h 在无穷远处的棱数等于 $\Phi(h$的分母，因此等式（15）便得证。□

6. MONOTONICITY OF ENTROPY

回顾一下，λ-之字形映射 f 的拓扑熵为 $\mathrm{h}(f) = \log(\lambda)$。在区间动力系统的研究中，许多单参数族的映射都已被证明表现出熵的单调性：也就是说，熵会随

参数单调增加或减少。在本节中，我们证明定理B，该定理可被视为这一现象的另一个例子。此处，参数为反旋转数 $\Phi\colon \mathrm{PA}(m) \to \mathcal{F}$。

定理 B. 设 $f, g \in \mathrm{PA}(m)$。则

$$\Phi(f) < \Phi(g) \iff \lambda(\psi_f) < \lambda(\psi_g).$$

证明。 该结果由以下等价关系链得出：

$$\Phi(f) < \Phi(g) \iff \mathrm{It}_f(1) <_E \mathrm{It}_g(1) \tag{6.10}$$
$$\iff \mathcal{K}_f \ll \mathcal{K}_g \tag{6.11}$$
$$\iff \lambda(f) < \lambda(g) \tag{6.12}$$
$$\iff \lambda(\psi_f) < \lambda(\psi_g).$$

最后一个等价关系是因为 $\lambda(f) = \lambda(\psi_f)$。 □

在第 6.1 节中，我们引入扭曲字典序 $\leq_E$，并在第 6.2 节中证明命题 6.10 和推论 6.12。

6.1. 折叠序列的排序。 本节回顾连续分段单调映射 $f\colon I \to I$ 的扭曲字典序，其中该映射有有限个临界点 $k_1, \ldots, k_m$。我们称这样的映射为 m-模态。所有定义都依赖于给定的此类 f的数据，因此我们常在记号中省略它。我们关注 f 为之字形映射的情形。

参见第2.5节，了解地址、轨道编码、折叠数据和主揉序列的定义。

定义 6.1。 f 的序列空间是集合

$$\Sigma_f = \{\mathrm{It}_f(x) : x \in I\}.$$

Σ_f 上的移位映射是唯一的映射 $\sigma\colon \Sigma_f \to \Sigma_f$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{f} & I \\ {\scriptstyle \mathrm{It}_f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{It}_f} \\ \Sigma_f & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma_f \end{array}$$

更具体地说，σ 将 $\mathrm{It}_f(x)$ 的所有项向左移一位，删除第一项。**定义 6.2。** f 的符号函数是映射 $E\colon \mathcal{A} \to \{-1, 0, +1\}$，满足

$$E(j) = \begin{cases} +1 & \text{if } f \text{ is increasing on } I_j \\ -1 & \text{if } f \text{ is decreasing on } I_j \\ 0 & \text{if } j = k_i \text{ is a critical point.} \end{cases}$$

注意，由于 f 是连续的，E 由 $E(0)$ 确定。在下面的讨论中，我们固定一个 f 以及它所定义的符号函数 E。

例 6.3. 设 $f \in \mathrm{PA}(m)$ 的符号向量为 E。那么对于 $0 \leq j \leq m$，

$$E(j) = \begin{cases} (-1)^j & \text{if } m \text{ is even} \\ (-1)^{j+1} & \text{if } m \text{ is odd.} \end{cases}$$

特别地， $E(m) = +1$ 总是如此。

定义 6.4。 字母表$\mathcal{A}_m$ 中一个（可能无限的）词 A 的累积符号向量 是如下序列：$(s_i(A))_i$

$$s_i(A) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = 0 \\ E(A_{i-1}) \cdot s_{i-1}(A) & \text{if } i \geq 1. \end{cases}$$

注 6.5。 考虑 $f \in \mathrm{PA}(m)$，并记 $\Phi(f) = \frac{a}{b}$。由推论 2.23 可知， f 的主揉序列各项满足

$$\nu_i(f) \in \{m-2, m\} \text{ for all } 0 \leq i \leq b-2.$$

如例 6.3 所示，对于 $E(m) = E(m-2) = +1$ 的所有取值 m。因此， $\nu(f)$ 的累积符号满足

$$s_i(\nu(f)) = +1 \text{ for all } 0 \leq i \leq b-1. \tag{16}$$

现在我们在 Σ_f 上定义一个偏序。

定义 6.6。 设 f 是一个 m-模映射，其符号向量为 E。我们在 Σ_f 上定义扭曲字典序 $\leq_E$ 如下。首先，我们规定

$$0 <_E k_1 <_E 1 <_E k_2 <_E 2 <_E \cdots <_E k_m <_E m.$$

对于 A, $B \in \Sigma_f$ 现在定义 $A \leq_E B$，如果 $A = B$；否则，对于满足 $\mathrm{Pre}_l(A) = \mathrm{Pre}_l(B)$ 的最大指标 $l \geq 0$，有

$$\begin{cases} A_{l+1} <_E B_{l+1} & \text{if } s_l(A) = +1, \text{ or} \\ A_{l+1} >_E B_{l+1} & \text{if } s_l(A) = -1. \end{cases}$$

虽然严格来说，我们是在单个映射 f 的移位空间上定义了序关系 $\leq_E$，但请注意，该定义只依赖于符号函数 E 的输入数据。因此，比较具有相同符号函数 E 的两个映射 f 和 g 的移位空间中的序列是合理的。有鉴于此，我们现在在具有相同符号函数的映射的折叠数据空间上定义一个偏序。

回忆一下，如果 f 是一个 m 模态映射，那么 f 的折叠数据 是 f 的临界轨道序列所组成的有序组：

$$\mathcal{K}_f = (\mathcal{K}_1(f), \ldots, \mathcal{K}_m(f)).$$

定义 6.7。 设 f, g 是具有相同符号函数 E 的 m 模态映射。我们称$\mathcal{K}_f \ll \mathcal{K}_g$，如果对于所有 $j = 1, \ldots, m$，都有

$$\begin{cases} \mathcal{K}_j(f) \leq_E \mathcal{K}_j(g) & \text{if } E(j) = -1, \text{ and} \\ \mathcal{K}_j(f) \geq_E \mathcal{K}_j(g) & \text{if } E(j) = +1. \end{cases} \tag{17}$$

下面的命题表明，这种对揉捏数据的排序会影响具有相同符号函数的映射的拓扑熵。

命题 6.8 ([MT00]中的推论4.5)。 若 $\mathcal{K}_f \ll \mathcal{K}_g$, 则 $\mathrm{h}(f) \leq \mathrm{h}(g)$。

6.2. **完成定理 B 的证明。** 本节综合第 4 节和第 5 节的工作，以证明伸缩因子 $\lambda(f)$ 随反旋转数 $\Phi(f)$ 单调增长。

命题 6.9。对于所有 $f \in \mathrm{PA}(m)$，我们有

$$\mathrm{It}_{f^L}(1) <_E \mathrm{It}_f(1) <_E \mathrm{It}_{f^R}(1).$$

证明。当 f^L 和 f^R 都属于 $\mathcal{F}$时，这些不等式可直接由方程（13）和（16）得出。对于特殊情形 $f^L = \mathbf{0}_m$ 或 $f^R = \mathbf{1}_m$，我们则采用备注 5.5中的公式。□

现在我们可以比较 PA(m) 中元素的折叠数据了。

命题 6.10。固定 $m \geq 2$，令 f 和 g 为$\mathrm{PA}(m)$中的不同元素。那么

$$\Phi(f) < \Phi(g) \iff \mathrm{It}_f(1) <_E \mathrm{It}_g(1).$$

证明。令 r 为 $\Phi(f)$ 和 $\Phi(g)$ 的最近共同祖先，并设 $h = \Phi^{-1}(r) \in \mathrm{PA}(m)$。

假设 $\Phi(f) < \Phi(g)$。在一般情形下，r 不同于 $\Phi(f)$和 $\Phi(g)$，则有 $\Phi(f) \in \mathcal{F}(r_L)$，由命题4.14 可知，存在一个右父项序列

$$s_0 = \Phi(f), s_1, \ldots, s_k = r$$

将 $\Phi(f)$与 r连接起来。令 $f_i = \Phi^{-1}(s_i)$，则当 $f_i^R = f_{i+1}$取 $i = 0$，……，$k-1$时成立。命题6.9现推出

$$\mathrm{It}_f(f) <_E \mathrm{It}_{f_1}(1) <_E \cdots <_E \mathrm{It}_h(1).$$

涉及左父项的类似论证表明 $\mathrm{It}_h(1) <_E \mathrm{It}_g(1)$。

在特殊情形 $r = \Phi(f)$ 或 $\Phi(g)$ 下，分别有 $f = h$ 或 $g = h$。由此应用相同的论证，得到相同的结论。

反之，假设 $\Phi(f) \geq \Phi(g)$。那么实际上 $\Phi(f) > \Phi(g)$，重复上述论证可得 $\mathrm{It}_f(1) >_E \mathrm{It}_g(1)$。□

命题 6.11。对于任意 $m \geq 2$，令 f 和 g 为 $\mathrm{PA}(m)$ 中彼此不同的元素。则

$$\mathcal{K}_f \ll \mathcal{K}_g \iff \mathrm{It}_f(1) <_E \mathrm{It}_g(1).$$

*Pro*由。首先假设 m 为偶数。则 $E(j) = (-1)^j$，因此（17）中的条件变为

$$\mathcal{K}_f \ll \mathcal{K}_g \iff \begin{cases} \mathrm{It}_f(1) \leq_E \mathrm{It}_g(1) & \text{for } j \text{ odd, and} \\ 0^\infty \geq_E 0^\infty & \text{for } j \text{ even.} \end{cases}$$

由于 f 和 g 是 PA(m) 中彼此不同的元素，它们不可能具有相同的轨道编码，因此在这种情况下结论成立。

反之，假设 m 为奇数。则 $E(j) = (-1)^{j+1}$，因此（17）中的条件现在为

$$\mathcal{K}_f \ll \mathcal{K}_g \iff \begin{cases} \mathrm{It}_f(1) \leq_E \mathrm{It}_g(1) & \text{for } j \text{ odd, and} \\ 0 \cdot \mathrm{It}_f(1) \geq_E 0 \cdot \mathrm{It}_g(1) & \text{for } j \text{ even.} \end{cases}$$

由于 $E(0) = -1$，结论再次成立。□

推论 6.12。对于任意 $m \geq 2$，设 f 和 g 是 $\mathrm{PA}(m)$ 中彼此不同的元素。则

$$\lambda(f) < \lambda(g) \iff \mathrm{It}_f(1) <_E \mathrm{It}_g(1).$$

证明。若 $\mathrm{It}_f(1) <_E \mathrm{It}_g(1)$，则 $\mathcal{K}_f \ll \mathcal{K}_g$ 由命题 6.11，因此由命题 6.8 可得

$$\log \lambda(f) = \mathrm{h}(f) \leq h(g) = \log \lambda(g).$$

事实上，这个不等式必须是严格的，因为 $\mathrm{PA}(m)$ 中的元素具有不同的斜率，因此熵也各不相同。若 $\mathrm{It}_f(1) \geq_E \mathrm{It}_g(1)$，则实际上 $\mathrm{It}_f(1) > \mathrm{It}_g(1)$，而同样的论证可推出 $\lambda(f) > \lambda(g)$。□

7. The digit polynomial as other invariants

最后，我们将说明映射 $f \in \mathrm{PA}(m)$ 的数字多项式可以恢复若干著名的不变量，包括：

(1) 强马尔可夫多项式 $\chi_M(f;\ t)$ 的 f（第 7.1 节），(2) *Artin–Mazur* ζ函数 $\zeta_f(t)$ 的 f（第 7.3 节），(3) 的同调和辛多项式 ψ_f（第7.4 节），以及 (4) 任意辫子代表元的辛 *Burau* 多项式 $\chi_\beta(-1,\ t)$ β 对于 ψ_f（第 7.6 节）。

重要的是，所有这些多项式本质上都是的强马尔可夫矩阵的特征多项式；该矩阵可理解为 ψ_f 作用于某个特定不变轨道时的转移矩阵。

The定理 C. 令 $f \in \mathrm{PA}(m)$，并设 $n = |\mathrm{PC}(f)| = 1 + \deg(D_f)$。设 $\lambda = \lambda(f) = \lambda(\psi_f \quad)$.

(1) 数字多项式确定 f 的 *Artin–Mazur* ζ函数：

$$\zeta_f(t) = \frac{1}{\mathcal{R}(D_f(t))} = \frac{1}{\mathcal{R}(\det(tI - W_f))}.$$

(2) 数字多项式等于 f 的强马尔可夫多项式：

$$D_f(t) = \chi_M(f;t).$$

(3) 数字多项式确定 ψ_f 的同调多项式、辛多项式和穿孔多项式：

$$D_f(t) = h(\psi_f;t) = \begin{cases} s(\psi_f;t) & \text{if } n \text{ is odd} \\ s(\psi_f;t)(t+1) & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}$$

(4) 令 $\mathbb{S}$ 为从 ψ_f 的定向覆盖填充 ψ_f 中穿孔的1棱奇点的提升后得到的曲面。记 $\chi_+(t)$（分别地，$\chi_-(t)$）为 ψ_+（分别地，ψ_-）作用于 $H_1(\mathbb{S};\mathbb{Z})$上的特征多项式。则

$$D_f(t) = \chi_+(t) \quad \text{and} \quad D_f(-t) = \chi_-(t).$$

(5) 令 β_f 为通过将 $\infty \in S_{0,n+1}$ 裂开为一个边界圆而得到的 ψ_f 的任意 n-辫子代表元。令 $\mathbb{B}(\beta_f, z)$ 表示 β_f 的约化 *Burau* 矩阵，并设 $\chi(\beta_f;\ t) = \det(tI - \mathbb{B}(\beta_f, -1))$。那么

$$\chi(\beta_f;t)=\begin{cases}D_f(t) & \text{if } \chi(\beta_f;t) \text{ has } \lambda \text{ as a root}\\ D_f(-t) & \text{if } \chi(\beta_f;t) \text{ has } -\lambda \text{ as a root.}\end{cases}$$

此外，将 β_f 与全扭转 Δ_n^2 复合会改变变量 t的符号。

7.1. **马尔可夫分割**。由后临界有限区间映射 f 可通过在其 I 的弱后临界集处进行切割，得到一个自然分割：

$$\mathrm{WPC}(f):=\mathrm{PC}(f)\cup\{\text{the critical points of f}\}.$$

我们将由此得到的 I的分割称为 f的弱马尔可夫分割。如果 $|\mathrm{WPC}(f)|=r$，那么由所得的子区间 I_1、.....、I_{r-1} 按如下方式构造 f的弱马尔可夫矩阵 W_f：

$$(W_f)_{i,j}=\begin{cases}1 & \text{if } \overline{f(I_j)}\supseteq\overline{I_i}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

众所周知，W_f 的谱半径为 $\lambda=e^{\mathrm{h}(f)}$。佩龙-弗罗贝尼乌斯定理表明，$\lambda$ 也是 W_f 的一个特征值，因此是 f的弱马尔可夫多项式的一个根：

$$\chi_W(f;t)=\det(tI-W_f).$$

尽管弱马尔可夫分割具有若干良好性质，但如果 f 的某个临界点不在 $\mathrm{PC}(f)$ 中，那么该分割就比必要的更细。若我们只在 $\mathrm{PC}(f)$ 的元素处切割 I，则得到 f的强马尔可夫分割。相应的 f 的强马尔可夫矩阵 M_f按照与 W_f类似的方式定义：

$$(M_f)_{i,j}=\text{the number of times } \overline{f(J_j)} \text{ traverses } \overline{J_i}.$$

该强马尔可夫多项式的 f是 $\chi_M(f;\ t)=\det(tI-M_f)$。线性代数中的一个练习给出了以下关系。

命题 7.1。设 $r=|\mathrm{WPC}(f)|$和 $n=|\mathrm{PC}(f)|$。那么 $\chi_W(f;\ t)=t^{r-n}\chi_M(f;\ t)$。特别地，$e^{\mathrm{h}(f)}$是 $\chi_M(f;\ t)$的根节点。

在 [Far21] 作者指出，对于伪阿诺索夫型区间映射，M_f 是更自然的考察矩阵。事实上，$\mathrm{PC}(f)$中的点对应于 ψ_f的单尖点奇异点，而这些点之间的子区间则成为 ψ_f的轨道中的扩张边。特别是，M_f也是 ψ_f的马尔可夫转移矩阵。因此，f 的动力学决定了 ψ_f 作为伯努利系统的动力学。

7.2. **多项式的倒数多项式**。多项式 $p(t)\in\mathbb{C}[t]$ 的倒数是

$$\mathcal{R}(p(t))=t^{\deg(p)}p(t^{-1}).$$

如果 $\mathcal{R}(p(t))=p(t)$，则多项式 $p(t)$ 是互反的或对称的。

注释 7.2。注意，$D_f(t)$ 是互反的，由引理 2。

我们需要以下事实。

命题 7.3。对于任意 $f,\ g\in\mathbb{C}[t]$ 我们有

$$\mathcal{R}(f(t))=\mathcal{R}(g(t))\iff f(t)=t^{\deg(f)-\deg(g)}g(t).$$

7.3。 之字形映射的ζ函数。 本节将证明定理C中的陈述（1）和（2）。

设 $f\colon X \to X$ 是一个动力系统，使得这些集合

$$\operatorname{Fix}(f^i) = \{x \in X : f^i(x) = x\}$$

are 对每个 $i \geq 1$ 都是有限的。那么 f 的*Artin–Mazur ζ*函数 是形式幂级数 s

$$\zeta_f(t) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\operatorname{Fix}(f^i)|}{i} \cdot t^i\right).$$

设 f 是一个有 m 个临界点的 λ-之字形映射。若对某个最小的 $N \geq 1$， $f^N(1)$ 是一个临界点，则称 f 为简单的：

$$f^N(1) = \frac{k}{\lambda} \qquad \text{for some } 1 \leq k \leq m.$$

注 7.4. 注意，每个 $f \in \mathrm{PA}(m)$ 都是简单的，且具有 $k = 1$。

如果 f 是简单的，那么 f 的系数 是整数 c_i，其中 $0 \leq i \leq N-1$ 满足

$$c_i(f) = \begin{cases} A(f^i(1)) & \text{if } E(A(f^i(1))) = +1 \\ A(f^i(1)) + 1 & \text{if } E(A(f^i(1))) = -1. \end{cases}$$

Furt此外，我们设定 $s_i(f) = s_i(\mathrm{It} f(1))$，即 f 的轨道编码的累积符号。最后

定义
这些多项式

$$\rho_f(t) = k \cdot s_N(f) \cdot t^N + \sum_{i=0}^{N-1} s_i(f) c_i(f) t^i$$

and

$$\phi_f(t) = t \cdot \rho_f(t).$$

设 $f \in \mathrm{PA}(m)$。那么

$$1 - \phi_f(t) = \mathcal{R}(D_f)(t).$$

证明。 记 $\Phi(f) = \frac{a}{b}$,-以及 $\lambda = \lambda(f)$。那么 $N = b$，其中 $f^b(1) = \frac{1}{\lambda}$。此外，注记6.5表明 $s_j(f) = +1$对于 $0 \leq j \leq b-1$成立，而 $s_b(f) = s_b(\mathrm{It} f(1)) = -1$。因此，

$$1 - \phi_f(t) = 1 - t\rho_f(t) = 1 + t^{b+1} - \sum_{i=1}^{b} c_{i-1}(f) t^i.$$

另一方面，我们知道

$$D_f(t) = t^{b+1} + 1 - \sum_{i=1}^{b} c_i t^{b+1-i},$$

其中 c_i 满足（4）中的关系。取其逆即可得到

$$\mathcal{R}(D_f)(t) = t^{b+1} + 1 - \sum_{i=1}^{b} c_i t^i,$$

因此，只需证明对于 $1 \le i \le b$， $c_i = c_{i-1}(f)$。事实上，对于 $1 \le i \le b-1$，我们有

$$c_i = \nu_{i-1}(f) = A(f^{i-1}(1)) = c_{i-1}(f),$$

而引理 2告诉我们

$$c_b = m = (m-1)+1 = c_{b-1}(f).$$

□

结合上面的命题7.5 以及 [Suz17] 中的定理 1.1，可得：

命题 7.6. 固定 $f \in \mathrm{PA}(m)$。则 $\zeta_f(t)$ 在 $|t| < \lambda(f)^{-1}$中绝对收敛。此外，对于 $|t| < \lambda(f)^{-1}$，我们有

$$\zeta_f(t) = \frac{1}{\mathcal{R}(D_f(t))} = \frac{1}{\det(I - tW_f)}. \tag{18}$$

特别地，

$$\chi_W(f;t) = t^{m-1} D_f(t). \tag{19}$$

证明。 由于 f 是连续的，Suzuki 在 [Suz17]中定理 1.1 的证明所用的论证验证了 (18)。因此，

$$\mathcal{R}(D_f(t)) = \mathcal{R}(\det(tI - W_f)) = \mathcal{R}(\chi_W(f;t)).$$

由于 $\deg(D_f) = b+1$ 以及 $\dim(W_f) = b+1+(m-1)$，命题 7.3推出公式（19）。□

推论 7.7。固定 $f \in \mathrm{PA}(m)$。则 $\chi_M(f;\ t) = D_f(t)$。

证明。命题 7.1 表明 $\chi_W(f;\ t) = t^{m-1}\chi_M(f;\ t)$。现在由命题 7.6即可得到该结论。□

7.4。 D_f **是** ψ_f**的同调多项式**。 在 [BBK12], Birman-Brinkmann-Kawamuro 引入了伪阿诺索夫映射的若干相关多项式不变量 ψ，该映射作用于一个带有穿孔的闭、连通、可定向曲面 S 上，并将穿孔视为标记点。这些不变量包括：

- 同调多项式 $h(\psi;t)$，它记录了 ψ 在一个向量空间 W上对某个不变轨道的权函数所施加的作用；这些权函数满足转向条件。
- 某个斜对称双线性型在退化子空间 $Z \subseteq W$ 上的作用所对应的穿孔多项式 $p(\psi;t)$。该多项式是若干分圆多项式的乘积，还可以通过ψ 在 S的某个穿孔子集上的置换作用来重新解释。

记录 ψ 在 W/Z上作用的辛多项式 $s(\psi;t)$。

注意， $h(\psi;t) = s(\psi;t)\cdot p(\psi;\ t)$。辛多项式因而也是同调多项式，其模最大的根节点是伸缩因子 $\lambda(\psi)$。

在本节中，我们证明定理C的陈述（3）。

定理 7.8. 固定 $f \in \mathrm{PA}(m)$ 以及由其生成的伪阿诺索夫映射 ψ_f。令 $n = |\mathrm{PC}(f)|$。那么

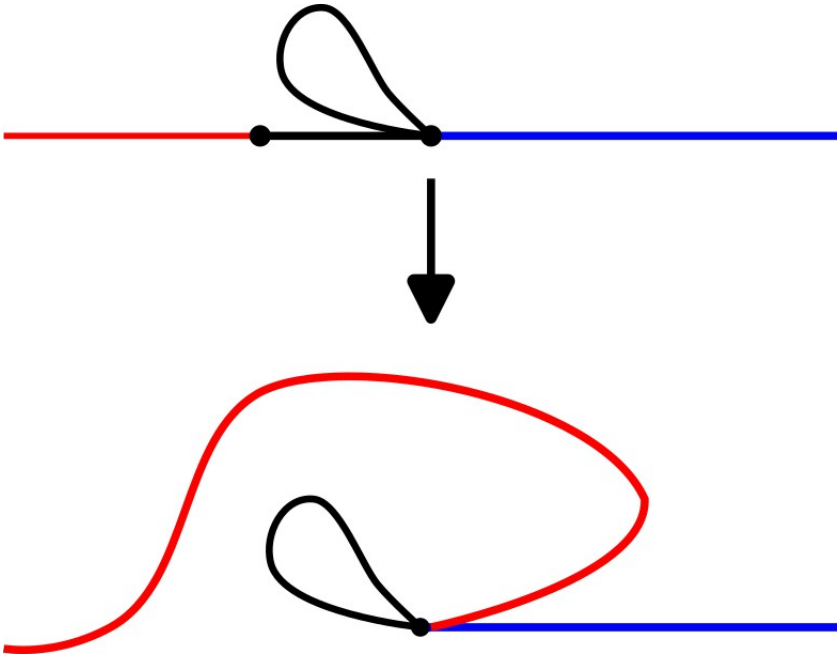


FIGURE 5. 定理7.8的证明中所用的折叠操作。环和中间的边是无穷小边，而另外两条边是扩张边。这两条无穷小边在 f下的像相同。因此，我们可以将它们识别起来，得到一个边数少一条的新图 τ'。对 τ 中的每个非极端环应用此操作，就会得到一个满足 [BBK12]要求的 Bestvina-Handel 火车轨道。重要的是，新火车轨道映射的转移矩阵在限制到扩张边时，与原映射的转移矩阵相同。

$$D_f(t) = h(\psi_f; t) = \begin{cases} s(\psi_f; t) & if\ n\ is\ odd \\ s(\psi_f; t)(t+1) & if\ n\ is\ even. \end{cases}$$

证明。 回忆一下，同调多项式 $h(\psi_f;\ t)$ 等于 ψ_f 在底层图上满足转向条件 的权空间上的作用的特征多项式 (参见 [BBK12]中的定理 2.1。) 我们首先计算这个权空间的维数，记为 $W(G, f)$，并证明它等于 $\deg(D_f) = n - 1$。

我们对火车轨道作了些细微调整，因此它的形式与 Birman-Brinkmann-Kawamuro 所假定的并不完全相同。关于我们火车轨道的一般形式，请参阅[Far21]的第 5 节。回想一下，每个环 γ τ 都对应于 PC(f) 的一个元素。 τ 的非极端环是指那些不对应于 $x = 0$ 的环，在 I中。对于每个非极端环，我们都执行如图 所示的折叠操作 （见图 5）。由此得到的火车轨道 τ'仍是 ψ_f的不变量，且具有相同的转移矩阵 M_f，但现在是 Bestvina-Handel 轨道。特别是，它满足[BBK12]中的假设。

这个新轨道的底层图 G τ' 有 $n-1$ 条扩张边、 n 个无穷小环以及 n 个顶点。按照 Birman-Brinkmann-Kawamuro 的术语，所有顶点都是部分的，因此我们得到计数式

$$\begin{aligned}\deg(h(\psi_f;t)) = \dim W(G,f) &= \#\text{edges of } G \text{ - } \#\text{non-odd vertices of } G\\ &= (n-1+n)-n\\ &= n-1.\end{aligned}$$

为了证明 $h(\psi_f;\, t) = D_f(t)$，还需为 $W(G,\ f)$ 找到一组基。存在一组自然的基：每条扩张边 e_i 都与两个无穷小环相邻， γ_{i-1} 和 γ_i。定义$\eta_i \in W(G,\ f)$ 为满足下述条件的权函数

$$\eta_i(e_i) = 1, \qquad \eta_i(\gamma_{i-1}) = \eta_i(\gamma_i) = 1/2,$$

以及 $\eta_i = 0$ 这三条边之外的部分。函数 $\{\eta_i\}_{i=1}^{n-1}$ 线性无关，因为对任意一条扩张边，它们当中恰有一个赋予非零权。因此，这些η_i构成了 $W(G,\ f)$ 的一组基。此外，根据轨道的构造，ψ_f 对 τ' 的扩张边的作用，恰好等同于 f 对强马尔可夫分割的子区间的作用。因此，

$$h(\psi_f;t) = \chi_M(f;t) = D_f(t).$$

接下来我们计算穿孔多项式 $p(\psi_f;\ t)$。回忆一下，这个多项式是 ψ_f在某个退化子空间 Z上的作用的特征多项式，该子空间属于 $W(G,\ f)$。 Z 的维数等于 S_0中穿孔的数量；这些穿孔由 $n+1$ 中的一个具有偶数个角的环表示（参见 τ' 中的命题 3.3（参见 [BBK12]）。这种环的角数恰好等于该穿孔处奇点的棱数。因此，无穷远处的穿孔是唯一可能计入 Z维数的穿孔；且当它有偶数个棱时才计入，即当 $n-2$ 为偶数时。因此，

$$\deg(p(\psi_f;t)) = \dim(Z) = \begin{cases}0 & \text{if } n \text{ is odd}\\ 1 & \text{if } n \text{ is even.}\end{cases}$$

特别地，由于 $p(\psi_f;\ t)$ 是分圆多项式的乘积，且 $D_f(1) \neq 0$，我们有

$$p(\psi_f;t) = \begin{cases}1 & \text{if } n \text{ is odd}\\ t+1 & \text{if } n \text{ is even.}\end{cases}$$

因此，辛多项式 $s(\psi_f;\ t)$ 满足

$$s(\psi_f;t) = \frac{h(\psi_f;t)}{p(\psi_f;t)} = \begin{cases}D_f(t) & \text{if } n \text{ is odd}\\ D_f(t)/(t+1) & \text{if } n \text{ is even.}\end{cases}$$

□

7.5. **的定向双覆盖。** 本节证明定理 C 的陈述（4）。

若存在一个定义在曲面 S 上的向量场 X，它在 $\mathcal{F}$ 的奇点处为零，而在其他所有位置都非零且与 $\mathcal{F}$ 相切，则称奇异叶状结构 $\mathcal{F}$ 是可定向的。否则，我们称 $\mathcal{F}$ 为不可定向。类似地，我们也可以说轨道 $\tau \subseteq S$ 是

可定向：如果能为 τ 的每条边选择一个方向，使得当存在一条从 e_1 到 e_2 的光滑路径时，e_2 的方向与沿该路径流动至 e_2 的 e_1 的方向一致，则称 τ 是可定向的。

由于关于这一主题的文献浩如烟海，而且人们对这些可定向性概念之间的关系存在一些混淆，我们在此简要总结相关性质。

命题 7.9. 设 $\psi : S \to S$ 是紧致连通定向曲面 S 上的一个伪阿诺索夫映射。那么，以下条件等价：

(1) ψ 的不稳定叶状结构可定向。*(2)* ψ 的稳定叶状结构可定向。*(3)* ψ 的任意不变轨道均可定向。*(4)* 映射 $\psi_* : H_1(S;\mathbb{Z}) \to H_1(S;\mathbb{Z})$ 的谱半径是伸缩因子 λ，且事实上 ψ 的 λ 和 $-\lambda$ 中恰有一个是 ψ_* 的特征值。

证明。 文献 [BB07] 中引理 4.3 的证明给出了以下等价关系

$$(1) \iff (2) \iff (4).$$

还需证明 (1) 与 (3) 等价。若 $\mathcal{F}$ 的 ψ 不稳定叶状结构可定向，那么 τ 的 ψ 任意不变轨道都会承载 $\mathcal{F}$，因而特别继承 $\mathcal{F}$的定向。反过来，可定向的轨道 τ 只承载可定向的不变叶状结构（参见文献 [Los10]中的引理 2.6）。□

定义 7.10。 如果伪阿诺索夫映射 ψ 满足 命题 7.9中的任一等价条件，我们就称其为可定向的。

因此，伪阿诺索夫映射的可定向性是一项重要的不变量。从不可定向的伪阿诺索夫映射构造出可定向伪阿诺索夫映射，有一种标准构造。这一构造称为定向双覆盖，也是 [BB07], [BBK12],˜和 [Los10] 中所用方法的基础。简言之，取分歧双覆盖 $p : S \to S$，其分支沿着˜ ˜具有奇数条棱的 ψ 奇点进行。记 $\iota : S \to S$ 为该覆盖唯一的非平凡覆盖变换，我们便可得出 $\iota^2 = 1$。因此，我们有如下分解：

$$H_1(\tilde{S};\mathbb{Z}) = V_+ \oplus V_-,$$

其中， $V_\pm$ 是 ι_* 对应特征值 ± 1的特征子空间。伪阿诺索夫映射 ψ 可提升为两个˜ ˜映射 ψ_1， $\psi_2 : S \to S$，它们都与 ι 可交换，并满足 $\psi_1 = \iota \circ \psi_2$。

以下命题结合了 [BB07]和 [BBK12]的工作。

命题 7.11. 设 $\psi : S \to S$ 是伸缩因子为˜ ˜ $\lambda > 1$的不可定向伪阿诺索夫映射，且设 $p : S \to S$ 是 ψ的定向双覆盖。设 $\iota : S \to S$ 是此覆盖唯一的非平凡覆盖变换。那么：

(1) ψ_1 和 ψ_2 都是伸缩因子为 λ的可定向伪阿诺索夫映射。˜*(2)* p_* 的核恰为 $\ker(p_*) = V_- \subseteq H_1(S;\mathbb{Z})$。*(3)* $(\psi_1)_*$ 和 $(\psi_2)_*$ 在 V_+ 上的作用都与 ψ_* 在$H_1(S;\mathbb{Z})$上的作用共轭。*(4)* $(\psi_1)_*$ 和 $(\psi_2)_*$ 中恰有一个以 λ 为特征值，而另一个以 $-\lambda$˜为特征值。分别将相应的 S 同胚记为 ψ_+ 和 ψ_-。

(5) $(\psi_+)_*$ 和 $(\psi_-)_*$ 作用于 V_- 时的特征多项式满足

$$\det(tI-(\psi_+)_*|_{V_-})=h(\psi;t)\qquad and\qquad \det(tI-(\psi_-)_*|_{V_-})=h(\psi;-t).$$

考虑 $f\in \mathrm{PA}(m)$，其中 $n=|\mathrm{PC}(f)|$。伪阿诺索夫映射 ψ_f 定义在 $S=S_{0,\ n+1}$ 上，其奇点集与 S 的穿孔点集重合：$\mathrm{PC}(f)$ 中的每个点都对应一个带穿孔的一棱奇点，而最后一个穿孔处有一个具有 $n-2$ 棱的奇点。ψ_f 的定向双覆盖是曲面

$$\widetilde{S}\cong\begin{cases}S_{\frac{n-1}{2},\ n+1} & \text{if } n \text{ is odd}\\ S_{\frac{n-2}{2},\ n+2} & \text{if } n \text{ is even.}\end{cases}$$

$\widetilde{}$在 S 中有 n 个带穿孔的二棱奇点，它们位于 S 中的一棱奇点之上。其余的穿孔（有一个或两个）投影到 S 的最后一个穿孔上。无论哪种情况，命题 7.11 都蕴含

$$H_1(\widetilde{S};\mathbb{Z})\cong H_1(S;\mathbb{Z})\oplus V_-\cong\mathbb{Z}^n\oplus\mathbb{Z}^{n-1},\tag{20}$$

并且，$(\psi_f)_+$ 和 $(\psi_f)_-$ 的作用保持此分裂。

现在我们可以证明定理4的陈述（C）。

$\widetilde{}$**定理 7.12**。设 $\mathbb{S}$ 为通过填补 S 中 ψ_f 的穿孔1-棱奇点的提升而得到的曲面。记 $\chi_+(t)$（分别记 $\chi_-(t)$）为 ψ_+（分别为 ψ_-）作用在 $H_1(\mathbb{S};\mathbb{Z})$上的特征多项式。则

$$D_f(t)=\chi_+(t)\qquad and\qquad D_f(-t)=\chi_-(t).$$

证明。我们证明 $D_f(t)=\chi_+(t)$，因为另一个断言可立即推出。填补 S 中的二棱奇点会消去式（20）中 $H_1(S;\mathbb{Z})$ 的因子。因此，$(\psi_+)_*$ 在 $H_1(\mathbb{S};\mathbb{Z})$ 上的作用与 $(\psi_+)_*$ 在 V_- 上的作用共轭。由命题 7.11 的陈述（5），我们得到

$$\chi_+(t)=h(\psi;t)=D_f(t),$$

其中最后一个等式已在定理7.8中证明。 □

7.6. **Burau表示**。本节完成定理C的证明。

固定 $n\geq 2$，并记 B_n 为 n 股辫群。维数为 n 的约化 Burau 表示是一个同态

$$\mathbb{B}(\cdot,z):B_n\to \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{Z}[z,z^{-1}]).$$

因此，$\mathbb{B}(\beta,\ z)$ 中一个 n 股辫 β 的像是一个（$n-1$）$\times(n-1$ 矩阵，其元素是变量 z 的劳朗多项式。Burau 表示可以用 B_n 的阿廷生成元写出显式公式；例如参见 [Bir75] 的第 3 章。

定义 7.13。辛表示 是一个同态

$$\mathbb{B}(\cdot,-1):B_n\to \mathrm{GL}(n-1,\mathbb{Z})$$

通过在 $z=-1$ 处对 $\mathbb{B}(\cdot,\ z)$ 进行特化得到。我们将 $\beta\in B_n$ 的 辛 *Burau* 多项式 定义为 $\mathbb{B}(\beta,-1)$ 的特征多项式：

$$\chi(\beta;t)=\det(tI-\mathbb{B}(\beta,-1)).$$

注意， $\chi(\beta;\ t)$ 的次数为 $n-1$。

众所周知，相对于其边界圆 ∂D_n， n 穿孔圆盘 D_n 的映射类群是

$$\mathrm{Mod}(D_n,\partial D_n)\cong B_n.$$

此外， B_n 的中心由全扭转 Δ_n^2生成，即绕 ∂D_n 的德恩扭转。用一个带孔圆盘封住这个边界分支，会消去 B_n 中的这个元素，从而得到同构

$$B_n/\Delta_n^2\cong \mathrm{Mod}(S_{0,n+1},p),$$

右侧的群是 Mod($S_{0,n+1}$) 中固定封盖圆盘内穿孔 p 的子群。因此，给定 $\psi\in$ Mod($S_{0,n+1},p$)，我们可以将其对应到一个辫子 $\beta\in B_n$；该辫子在相差 Δ_n^2 的某个幂次的意义下是良定义的。

备注 7.14. 可以证明 $\mathbb{B}(\Delta_n^2,-1)\ =-I_{n-1}$。因此，

$$\chi(\Delta_n^2\beta;t)=\chi(\beta;-t).$$

特别地，伪阿诺索夫映射$\psi\in$ Mod($S_{0,n+1},p$) 的辫子代表元的辛 Burau 多项式几乎是 ψ 本身的不变量：唯一的不确定性是变量 $t\mapsto -t$ 可能发生变化。

给定 $f\in$PA(m)，其中 $|$PC(f)$|\ =\ n$ 伪阿诺索夫映射 $\psi_f\colon S_{0,\ n+1}\ \to\ S_{0,\ n+1}$ 有一个唯一奇点 ∞，其有 $n-2$ 棱，必然是一个不动点。将这个穿孔撕开为一个边界分支后，我们得到一个 n-辫子 β_f，其定义只差一个 Δ_n^2 的乘法因子。不过，无论选择哪个 β_f，它总是一个伪阿诺索夫映射，在 D_n 的每个穿孔处有一个 1-尖点奇点，并且在 ∂D_n处有一个 $(n-2)$-棱奇点。此外， β_f 的伸缩因子等于 ψ_f的伸缩因子 λ。

鉴于这一备注，我们陈述本节的主要结果。

定理 7.15. 固定 $f\in$PA(m)，并令 β_f 为将$\infty\in S_{0,\ n+1}$ 撕开为一个边界圆后得到的 ψ_f 的一个辫子代表元。则

$$\chi(\beta_f;t)=\begin{cases}D_f(t) & \text{if } \chi(\beta_f;t) \text{ has } \lambda \text{ as a root}\\ D_f(-t) & \text{if } \chi(\beta_f;t) \text{ has } -\lambda \text{ as a root.}\end{cases}$$

我们的论证很大程度上依赖 Band-Boyland 在 [BB07]中的工作。关于细节，请读者参阅该文第 2 节和第 3 节。约化 Burau 矩阵 $\mathbb{B}(\beta,z)$ 描述了˜优选提升 h 将 β 提升到 D_n 的某个覆盖上时，在第一同调群上的作用，该覆盖记为$D_n^{(\infty)}$。覆盖 $\tilde{p}\colon D_n^{(\infty)}\to D_n$ 的覆盖变换群同构于 $\mathbb{Z}$，因此对于每个$k\geq 1$，我们都可通过商映射 $\xi_k:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$得到一个覆盖 $p_k\colon D_n^{(k)}\to D_n$，以及 β的优选提升 $h^{(k)}:D_n^{(k)}\to D_n^{(k)}$。

重要的是，通过将$\mathbb{B}(\beta,\ z)$取值为 k次单位根，可以获得关于 $h_*^{(k)}\colon H_1(D_n^{(k)})\ \to\ H_1(D_n^{(k)})$的信息。

命题 7.16 （ [BB07]中的定理 3.4）。令 $k \geq 1$ 取值为 ζ_k，其中它是一个本原的 k次单位根。存在一个不变子空间 $S_{\mathbb{C}}^{(k)}$，属于 $H_1(D_n^{(k)}; \mathbb{C})$，使得 $h_*^{(k)}$在该子空间上的作用为

$$\mathbb{B}(\beta, 1) \oplus \mathbb{B}(\beta, \zeta_k) \oplus \cdots \oplus \mathbb{B}(\beta, \zeta_k^{k-1}). \tag{21}$$

此外，令 T 为覆盖变换群 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ 的生成元，其中 $p_k: D_n^{(k)} \to D_n$。于是，在（*21*）中，矩阵 $\mathbb{B}(\beta, \zeta_k^j)$ 是 $h_*^{(k)}$在 T 的特征子空间上对应特征值 ζ_k^j 的作用。

最后，$h_*^{(k)}$中任何不属于 $S_{\mathbb{C}}^{(k)}$ 的特征向量，其特征值都是单位根。

回顾一下，根据命题 7.9，伸缩因子为 λ 的伪阿诺索夫映射 ψ 是可定向的，当且仅当 λ 或 $-\lambda$ 是 ψ_*的特征值。Band-Boyland 利用这一事实得出以下结论。

定理 7.17 （ [BB07]中的定理 5.1）。设 $\beta \in B_n$ 是伸缩因子为 $\lambda > 1$的伪阿诺索夫辫。则以下命题等价：

(1) $\mathbb{B}(\beta, -1)$ 的谱半径为 λ，且 -1 是唯一能产生此结果的单位根。*(2)* 不变叶状结构 $\mathcal{F}^u$ 和 $\mathcal{F}^s$ 在 D_n 的每个穿孔处（不包括边界）都有一个奇数阶奇点，而 $\mathcal{F}^u$ 和 $\mathcal{F}^s$ 在 D_n 内部的所有其他奇点均为偶数阶。*(3)* $D_n^{(2)}$是 β的定向双覆盖。

现在我们可以证明定理 7.15了。由此将完成定理 C的证明。

定理 *7.15*的证明。设 β_f 是通过将 ψ_f 沿着 $\infty \in S_{0,n+1}$ 撕开至 D_n 的边界圆而得到的任意伪阿诺索夫辫。那么 β_f 具有以下奇点数据：

- D_n的每个穿孔处都有一个 1-尖点奇点，且
- 在 ∂D_n 上有一个具有 $n-2$ 个棱的奇点。

因此，β_f 满足定理 2（7.17）中的条件。由此可知，$D_n^{(2)}$是 β_f的定向双覆盖。在这种情况下，p_2 的覆盖变换群：$D_n^{(2)} \to D_n$ 由 $T = \iota$生成，它是 $D_n^{(2)}$的双曲 involution。

另一方面，可以取 ψ_f 的定向覆盖：$S_{0,\ n+1} \to S_{0,\ n+1}$，从而得到$\widetilde{\ }$曲面 S 及其自身的双曲 involution ι'。正如之前所述，ψ_f 有两个提升，分别为 ψ_+ 和 $\psi_- = \iota' \circ \psi_+$。

我们将关联以下两个作用：

(1) 优选提升 $\beta_f^{(2)}$ 在 $V_-(\iota)\widetilde{\ }$上的作用；(2) ψ 的一个提升 ψ 在 $V_-(\iota')$上的作用。

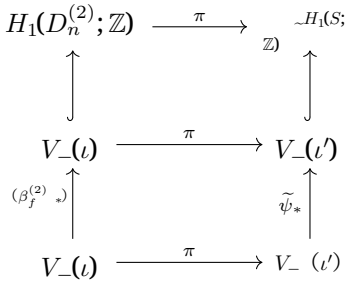
由命题 7.16 可知，作用（1）的特征多项式为

$$\det\left(tI - \left(\beta_f^{(2)}\right)_*\Big|_{V_-(\iota)}\right) = \det(tI - \mathbb{B}(\beta_f, -1)) = \chi(\beta_f; t).$$

对于作用（2），Birman-Brinkmann-Kawamuro 的工作告诉我们：

$$\det\left(tI - \left(\widetilde{\psi}\right)_*\Big|_{V_-(\iota')}\right) = \begin{cases} h(\psi_f; t) & \text{if } \widetilde{\psi} = \psi_+ \\ h(\psi_f; -t) & \text{if } \widetilde{\psi} = \psi_-. \end{cases}$$

存在自然同构 $\pi\colon\ H_1(D_n^{(2)};\ \mathbb{Z}) \to H_1(\widetilde{S};\ \mathbb{Z})$，其通过用带孔圆盘封闭 $D_n^{(2)}$ 的每个边界分支而得到。此外，下面的图表是交换的：



此处，$\widetilde{\psi}$ 是 ψ_f 通过封闭 $\beta_f^{(2)}$ 得到的唯一提升。现在可以看出，作用 (1) 和 (2) 共轭，因此它们的特征多项式相同。为完成证明，我们应用定理7.8 得出

$$\chi(\beta_f;t) = \begin{cases} D_f(t) & \text{if } \widetilde{\psi} = \psi_+ \\ D_f(-t) & \text{if } \widetilde{\psi} = \psi_-. \end{cases}$$

□

注记7.18。 定理7.15 是 Warren Michael Shultz 的论文中证明的一个结果的特例，参见 [Shu21]中的定理1.0.1。该定理的陈述有一处小错误：具体而言，第 (1) 项未包含我们在注记7.14中指出的可能符号歧义。

8. Future directions

在 [法雷21]期间以及本文中，我们研究了一个特定的区间映射族 PA(m)，它可以实现为伪阿诺索夫映射的火车轨道映射。在我们的情形下，PA(m) 是一个由单个临界轨道决定的单参数族。此外，我们证明了该族呈现出法雷树 $\mathcal{F}$的结构，即与 $q_1 \oplus q_2$ 相关联的映射的临界轨道，本质上是与 q_1 和 q_2相关联的映射的临界轨道的串接。

8.1. **树状族**。 我们强烈怀疑，类似的结果也适用于以下更一般的情形。设 $f : I \to I$ 是一个伪阿诺索夫型的后临界有限区间映射。由于ψ 置换单尖点奇异点的集合， f 也会置换 PC(f) 的元素。我们猜想，固定除一个后临界轨道之外的所有轨道，并允许最后一个轨道变化，将得到一个伪阿诺索夫型的树状区间映射族。分支源于修改轨道的不同方式。对于 PA(m)，我们唯一的选择是将 $x = 1$ 的轨道向右或向左扰动，从而分别决定在 $\mathcal{F}$中向左或向右下降（参见注5.7）。

可以设想，对不变量 $\Phi(f)$ 作某种推广，或许能让我们追踪它们在伪阿诺索夫映射的树状族中的演变过程，但我们尚不清楚这种行为的具体细节。首先，同一个旋转数似乎可能对应不同的映射，这与 PA(m) 中的情况不同。

8.2. **推广定理 C**。 更明确的是，如何将定理 C 中的结论推广到任何伪阿诺索夫型区间映射。对于一般的这类映射， D_f的自然替代是强马尔可夫多项式 $\chi_M(f;\ t)$。由于之字形映射的临界值只有 $x=0$ 和 $x=1$，且 $x=0$ 要么是不动点，要么属于 $x=1$的轨道，因此我们可以仅根据 $x=1$的轨道编码提取 $\chi_M(f;\ t)$。因此，我们无法一般性地定义 $D_f(t)$。

然而，对定理 C 的证明进行分析可见，除证明 $D_f(t)=\chi_M(f;\ t)$ 外，其他论断并不依赖于之字形映射的任何特殊性质。关键事实是， $\chi_M(f;\ t)$ 是 ψ_f 的火车轨道映射的特征多项式。由于对于一般的 f，若 $n=\deg(\chi_M(f;\ t))+1$ 为奇数，则 $t-1$ 的一个因子可能出现，因此论断 3 必须略作修改；但将 $D_f(t)$ 替换为 $\chi_M(f;\ t)$ 后，论断 1、4 和 5 仍然原样成立。

8.3. **由伪阿诺索夫映射得到的区间映射**。 一个具有 $|\mathrm{PC}(f)|=p$ 的后临界有限区间映射 f，其类型为伪阿诺索夫型，会生成一个伪阿诺索夫映射 $\psi_f\colon S_{0,\ p+1}\to S_{0,\ p+1}$ 且至多有一个奇点具有两个或更多棱。将仅有一个此类奇点的伪阿诺索夫映射称为超极型，因为每个 1-尖点奇点都是相关二次微分的极点 。

此外，如果一个伪阿诺索夫映射具有一个不变轨道 τ，该轨道由一串扩张边组成，并且每个顶点处都有一个无穷小环，则称其为类区间伪阿诺索夫映射。因此，每个类区间伪阿诺索夫映射都是超极型的。正如我们所见，作为 $f\colon\tau\to\tau$ 基础的后临界有限区间映射的动力学决定了类区间伪阿诺索夫映射的动力学。因此，自然会提出以下问题。

问题 8.1。 哪些超极型伪阿诺索夫映射是类区间的?

在即将与 Karl Winsor 合作发表的论文中，我们证明了这两类伪阿诺索夫映射相同。

定理 8.2。 每个超极型伪阿诺索夫映射都是类区间的。

因此，可以说超极型伪阿诺索夫映射具有后临界有限区间映射的动力学。不过，为了真正利用这一联系，进一步理解一个后临界有限区间映射何时属于伪阿诺索夫型将会很有帮助。在 [Far21] 中，我们利用组合数据明确处理了之字形映射的情形。一般而言，人们希望能够得到一组依赖于给定区间映射的折叠数据的判据，以确定该映射是否属于伪阿诺索夫型。

问题 8.3. 给定一个后临界有限区间映射 f，是否存在一组取决于 f 的折叠数据的判据，等价于 f 是伪阿诺索夫型?

References

[BB07] Gavin Band 和 Philip Boyland。辫子的熵的 Burau 估计。

Algebr. Geom. , : – .[BBK12] Joan Birman、

Topol. 7 1345 1378, 2007

Peter Brinkmann 和 Keiko Kawamuro。伪阿诺索夫映射的多项式不变量。 *J. Topol. Anal.*, 4(1):13–47, 2012。[BH95] M. Bestvina 和 M. Handel。曲面同胚的列车轨道。

Topology 34 1 109 140, , ( ): – .[Bir75] Joan S.

1995

Birman。 *Erratum: "Braids links and mapping class groups" (Ann. of Math. Studies, ,,。普林斯顿大学出*

No. 82, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1974)

版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1975。基于 James Cannon 的讲义。[BvS15] Henk Bruin 和 Sebastian van Strien。实多峰映射熵的单调性。

J. Amer. , ( ): –61, 2015。

Math. Soc. 28 1 1

[dC05] Andr ´ *Graphs and patterns in mathematics and theoretical physics* 73 *Proc. Sympos. Pure Math.* e de Carvalho。广义伪阿诺索夫映射的扩张、商映射与推广。载于 , 第 卷 , 第 315–338 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005。[dCH04] Andr´e de Carvalho 和 Toby Hall。单峰广义伪阿诺索夫映射。 *Geom. Topol.*, 8 1127 1188, 2004 : – .[Far21] Ethan Farber。由扩张区间映射构造伪阿诺索夫映射。 *arXiv:2101.01721*, 2021。[Hal94] Toby Hall。马蹄的产生。 *Nonlinearity*, 7(3):861–924, 1994。[Hat22] Allen Hatcher。 *Topology of Numbers*。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2022。[Khi97] A. Ya. Khinchin。 *Continued fractions*。Dover Publications, Inc.，纽约州米尼奥拉，俄文版，1997。附有 B. V. Gnedenko 的序言，为 1964 年译本的重印版。[Los10] J ´ *Ergodic Theory* erˆome Los。无限列无不动点的伪阿诺索夫同胚。, ( ): – . *Dynam. Systems* 30 6 1739 1755, 2010 [MS80] M. Misiurewicz 和 W. Szlenk。分段单调映射的熵。 *Studia Math.*, 67(1):45– 63, 1980。[MT00] John Milnor 和 Charles Tresser。实三次映射的熵与单调性。 *Comm. Math.* , ( ): – . 附录由 Adrien Douady 和 Pierrette Sentenac 撰写。 *Phys.* 209 1 123 178, 2000 [Shu21] Warren Michael Shultz *The Homology Polynomial and the Burau Representation for Pseudo-Anosov Braids* 2021 。ProQuest LLC，密歇根州安娜堡，。学位论文（博士）——密歇根州立大学。[Suz17] Shintaro Suzuki。广义β变换的 Artin–Mazur ζ函数。 *Kyushu J. Math.*, 71 1 85 103, 2017 ( ): – . [Thu88] William P. Thurston。曲面微分同胚的几何与动力学。 *Bull. Amer.* , ( ): – . [*Math. Soc. (N.S.)* 19 2 417 431, 1988 Thu14] William P. Thurston。一维中的熵。载于 *Frontiers in complex dynamics*, 第 51 卷 *Princeton Math. Ser.*, 第 339–384 页。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2014。