arXiv:2303.00780v1 [quant-ph] 1 Mar 2023

在39量子比特量子处理器中学习相关噪声

Robin Harper[1], * 和 Steven T. Flammia[2, 3]

[1]悉尼大学工程量子系统中心、物理学院，澳大利亚新南威尔士州悉尼 *2006*[2]*AWS*量子计算中心，美国加利福尼亚州帕萨迪纳[3] *IQIM*，加州理工学院，美国加利福尼亚州帕萨迪纳（日期：2023年3月3日）

构建纠错量子计算机，关键在于测量并建模候选设备上的噪声。尤其是，要实现最优纠错，就必须了解设备执行纠错所需量子电路时产生的噪声。随着设备规模不断扩大，我们将愈发依赖高效的噪声模型。不过，这类模型仍必须保留优化纠错算法所需的信息。本文提出一种方法，用于提取设备运行综合征提取电路时噪声的详细信息。我们在一台超导器件上开展并执行了一项实验，在表面码中使用了该器件的39个量子比特，重复进行多轮综合征提取，但省略了电路中途测量和重置。我们展示了如何从20个数据量子比特中提取所需信息，以图模型的形式构建不同复杂程度的噪声模型。这些模型能够高效描述大规模设备中的噪声，旨在揭示纠错应对相关噪声的有效性。此外，我们的估计值十分精确：我们学习到一个一致的全局分布，其中所有单量子比特和双量子比特错误率的相对误差均已知为 ±0.1%。通过将实验学习得到的噪声模型外推至更低错误率，我们证明，准确的相关噪声模型对于成功预测量子纠错实验中的阈下行为越来越重要。

I. 引言

要充分发挥量子设备的潜力，必须执行大量高精度量子门 [1–5]。目前，多量子比特设备的单量子比特门平均错误率约为 10^{-3} [6–9]；这一数值高出好几个数量级，无法直接执行整数分解等计算所需数量的运算 [5]。容错量子纠错通过以更多物理量子比特换取更高的逻辑量子比特保真度，从而解决这一问题 [1, 10–12]。尽管已有许多纠错协议提案，也针对各种小型码开展了许多近期纠错实验 [13–17], ，但研究最广泛的提案基于表面码及其变体 [18–22]。近期研究表明，随着码的距离增加，表面码变体的逻辑错误率会降低 [22] [23]。

如果了解影响设备的噪声的某些细节 [22–28] ，并据此量身定制量子码和解码器 [22, 29–32]，就能显著改善纠错。然而，现有的大多数噪声表征技术可分为两类：层析重构或强噪声平均（例如随机基准测试）。基于完整噪声层析重构的技术 [33–36]难以扩展到少数几个量子比特以上。强力平均噪声的技术 [37–46] 试图提高可扩展性，但往往无法提供足够细致的噪声图景，因而难以得出诊断性结论或提出改进设备的建议。我们请在附录A中回顾这些方法。

幸运的是，有一些技术能够为大规模系统重构出详细泡利噪声模型的高效描述 [47, 48]。这些方法以图模型的形式学习噪声。图模型足够灵活，既能如实描述相关噪声，又保留了易于高效学习、并能根据噪声的相关特征量身定制量子码和解码器等优点。

这类图模型的一个例子是伊辛模型，其中包含 2^n 种结果的概率分布——平衡吉布斯分布——由哈密顿量和温度指定。如果不知道配分函数（通常无法高效计算），就无法计算这类模型中各个结果的概率。不过，概率比值和某些条件概率可以高效计算，而且通常也有高效的采样算法（例如使用 Metropolis采样）。对于由这类图模型描述的量子噪声，这些特性足以实现细致的建模和预测，还能进行优化，例如创建针对底层噪声相关性量身定制的最小权完美匹配解码器或张量网络解码器。例如，参考文献 [49]探讨了这类图模型与张量网络之间的对偶关系。因此，这类图模型可以直接实例化为张量网络，从而能够利用目前提出的缩并方法来解码综合征测量 [27, 28, 50, 51]。

在此，我们通过实验展示了如何学习一台 39 量子比特超导设备中泡利噪声的全面描述。该设备运行所需的量子电路，以便

* 通讯作者：robin.harper@sydney.edu .au

实现表面码量子纠错，但不进行量子电路中途的辅助量子比特测量和重置。我们以图模型的形式学习噪声，这意味着该描述具有较高效率，并能全局一致地描述设备中的错误，包括较大尺度的相关性。

我们重构得到的噪声估计值非常准确。例如，自助法分析（在 2σ 水平）显示，单量子比特错误率和双量子比特错误率的最大相对误差为 $\pm 0.1\%$。我们针对这些数据拟合了多个表达能力逐渐增强的图模型，以研究相关性如何影响量子纠错。我们假设码容量模型（即不存在测量和重置错误），并利用近似最大似然解码器（张量网络解码器 [52]，键维数为 8）测量逻辑失败率。即使不存在测量和重置错误，电路噪声转化后仍产生了至少为 0.166 ± 0.004的逻辑错误率，这高于观测到的平均单量子比特错误率 0.136 ± 0.001。

我们重构得到的噪声模型使我们能够回答该系统中此前难以探究的量子纠错相关问题。例如，在给定观测到的相关性的情况下，单量子比特错误率需要降低多少，逻辑失败率才会低于单量子比特裸错误率？为回答这一问题，我们将观测到的噪声参数化为由连续时间演化产生的噪声，该演化持续有限时间 T；这样既能保留观测到的相关结构，又能在 $T \to 0$ 时平滑地外推至零噪声。

或许令人惊讶的是，从最简单的模型（忽略相关错误）到最复杂的模型，得到的伪阈值都大致相同（物理错误率 $=$ 逻辑错误率 ≈ 0.1）。然而，与全局分布相比，较简单的模型低估了逻辑错误率；当物理错误率外推至零时，它们对逻辑失败率的预测则相差甚远。例如，当平均物理错误率为 0.031 时，较简单的模型预测的逻辑错误率为 0.006 ± 0.001，而从外推的全局概率分布得到的逻辑错误率则超过其两倍（0.0121 ± 0.002）。在此范围内，能够捕获相关错误的模型（例如伊辛模型）所给出的逻辑错误率与.....相当

或高于全局分布 $0.014 - 0.018$。

我们的结论是，要准确估计在该设备上执行纠错协议时的预期逻辑失败率，能够捕捉相关错误的模型不可或缺。我们的分析表明，一旦物理错误率足够低，使纠错成为可能，那么未将相关错误（例如由串扰引起的错误）纳入考虑的模型，可能会大幅低估预期逻辑失败率。然而，能够捕捉此类串扰的模型不仅能更可靠地估计纠错电路的性能，还能提供编写定制解码器所需的更细致信息。

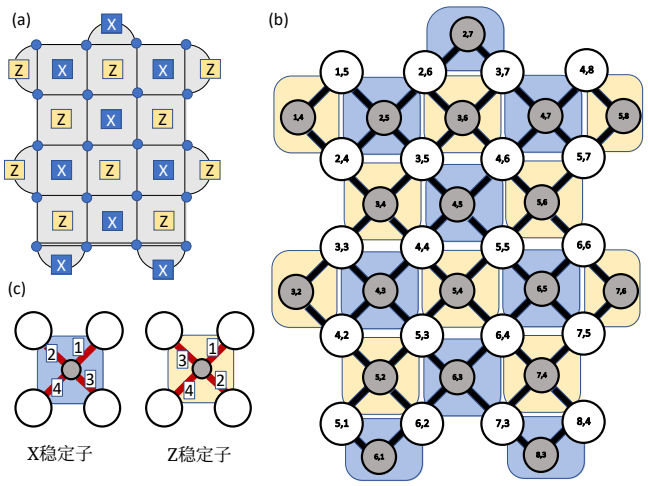


图 1. **(a)** 这里展示了旋转表面码的标准示意图。本例中，我们有一个由 4x5 个数据量子比特构成的网格，数据量子比特位于码的顶点上。各个面表示稳定子测量，在本例中为 Z 稳定子和 X 稳定子。码的主体部分中的稳定子权重为四。边界条件通过权重较小的稳定子处理，如图所示。**(b)** 该码在 Sycamore 器件上的实现。圆圈中的数字标示量子比特在设备网格中的位置。辅助量子比特（灰色）位于每个面的中心。数据量子比特以白色显示。黑线表示双量子比特门的连接；这些连接将用于执行相应量子电路，以制备辅助量子比特，使其能够接受测量，从而进行稳定子测量。**(c)** 为尽量减少错误的扩散，辅助量子比特必须按照非常特定的模式与数据量子比特耦合。这里展示了用作 Z 稳定子和 X 稳定子的辅助量子比特的双量子比特门激活时序模式。在完整的稳定子码实现中，稳定子制备电路完成后，会对辅助量子比特进行测量并重置。这里我们不进行辅助量子比特测量（见正文）。

II. 表面码协议

表面码是一种纠错码，似乎特别适用于由超导量子比特构成的二维网格。图1展示了典型的表面码布局，以及如何将抽象的码映射到 Google 使用的网格状量子比特设备上（有关该设备的更多细节，请参见附录 B ）。在本文中，我们考虑带有 X 型和 Z 型稳定子生成元的标准（CSS）表面码，不过需要指出的是，Google 设备上较新的实验 [23] 改用了密切相关的 XZZX 码 [22]。我们的结果同样适用于这种情况。

纠错是一种包含许多环节的技术，每个环节都有可能在系统中引入噪声。与任何复杂系统一样，如果所有环节都在运行，就很难诊断问题的根源。因此，考虑到这一点以及设备的技术限制，我们聚焦于纠错电路的简化模拟。具体而言，我们运行所需的电路

用于对数据量子比特进行非破坏性的四体稳定子测量，但不实际执行真实纠错实验所需的辅助量子比特测量或重置。我们将这些电路称为稳定子制备，因为我们只进行测量准备，而不实际执行测量。这里我们展示如何使用 [47] 和 [48] 中介绍的高效协议，在设备运行稳定子制备电路时，提取有关设备噪声的全面信息。

我们所采用的关键认识之一是，对表面码进行两轮稳定子制备，会在数据量子比特上实现恒等信道。鉴于交错的双量子比特门十分复杂，这一点可能并不显而易见，但使用克利福德电路模拟器可以轻松验证。在附录C中，我们详细介绍了两轮稳定子制备。

在实际的表面码量子电路中，每轮稳定子制备后都会对辅助量子比特进行测量和重置。然而，如果目前尚无法做到这一点，或者希望在不引入测量和重置所导致的额外噪声的情况下考察电路中固有的噪声，那么附录C 所示的电路提取就是所需电路的一个示例。也可以直接加入测量，不过在这种情况下需要格外谨慎（更多细节请参见附录C ）。

为了消除电路中的相干噪声，我们在电路中引入随机 Pauli 门。这些门用于随机化 Pauli 参考系，从而在平均意义下将噪声转化为泡利信道 [53–55]。通过 Pauli 参考系随机化，在不作进一步约简的情况下，用于描述噪声的参数数量为 4^d 个 Pauli 信道特征值，其中 d 是数据量子比特的数量。

如果不以一轮泡利门作为起始轮次，而是让每个两轮区块都以一轮单量子比特 Clifford 门开始，那么 [56] 中的分析就适用，我们可以对噪声进行局部平均，其含义如 [48] 所述，并在附录E中作了总结。对噪声进行这种局部平均，意味着我们只需提取 2^d 泡利信道特征值，这可以在这项实验过程中完成 [48]。这些2^d 参数只需通过提取泡利噪声信道的泡利 Z型特征值即可获知；由于这些特征值彼此对易，因此可以同时确定。

考虑到这些调整，该流程遵循了随机基准测试的成功核心思想 [57]：在初始化为乘积态后，我们取每个由两轮稳定子制备组成的区块，并按照上述方法进行适当平均，然后重复 m 步，且步数长度各异m。最后执行逆变换步骤后，我们在计算基上进行测量。通过这种方式获得的数据，使我们能够将初始轮次的量子态制备和测量误差，与稳定子提取电路两轮区块“单元胞”的错误区分开来。图2展示了表面码单个面元对应的该量子电路示例。所有必要步骤的完整说明见附录C 以及噪声估计的分析详见附录D。

III. 实验实现

我们在 Google 的 Sycamore 器件上测试了这些想法。该器件是一种 54量子比特超导器件，类型如 [58]中所述。为了正确处理边缘稳定子，54 个量子比特中只有 39 个可供使用，因此构成了一个 5×4表面码（即包含 20 个数据量子比特），其布局如图1(c)所示。对于 Sycamore 器件，我们使用的序列长度为 m （以表面码的双轮次计）$m = [0, 1, 2, 3, 4, 6, 8]$。我们运行了$1,770$ 条不同的序列，每条序列进行了$2{,}000$ 次测量。总运行时间约为8 小时，在该器件专用的8 小时时段内完成。

获得数据后，我们可以立即进行多项后处理。首先，只需将数据边缘化到每个量子比特，并按照标准的单量子比特随机基准测试实验，对每个边缘化结果进行拟合。这样便能以很高的精度得到单量子比特（以及双量子比特）的平均错误率，最大相对误差为 $\pm 0.1\%$。其次，如果我们只关心二体关联，就可以针对每对量子比特对数据进行边缘化，并计算两个量子比特之间的（归一化）相关性（X 与 Y、$\rho_{X,\,Y}$）：

$$\rho_{X,Y} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{E(X^2) - E(X)^2}\sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2}}, \qquad (1)$$

其中 E 是相关量子比特错误率的期望值。图 3展示了直接从实验中提取的此类数据示例。如图 3所示，设备中存在相关错误，这些错误大多局部聚集，但也存在一些显著的长程关联。虽然该实验旨在识别和表征错误，而非确定其成因，但图中所示的长程双体相关性，以及实验发现的多量子比特错误，可能是此类 Sycamore 器件中泄漏错误的征兆，详见

该实验中的现象是此类 Sycamore 器件发生泄漏错误的征兆，详见 [59]。

非零相关性对量子纠错有何影响？如果我们知道某个量子比特发生了错误（例如通过综合征测量得知），那么根据这种相关性，可以计算出与之关联的量子比特发生错误的概率会如何变化。朴素解码器假设，每个量子比特的错误率都独立于其他量子比特是否发生错误。因此，这些相关性能够向解码器提供变化后的平均错误概率，从而提升平均性能。事实上，要实现近最优性能，就必须纳入此类相关性 [23, 60]。

然而，我们还能做得更多。当量子比特数量相对较少时（例如不超过 30 个数据量子比特），也可以提取完整的概率

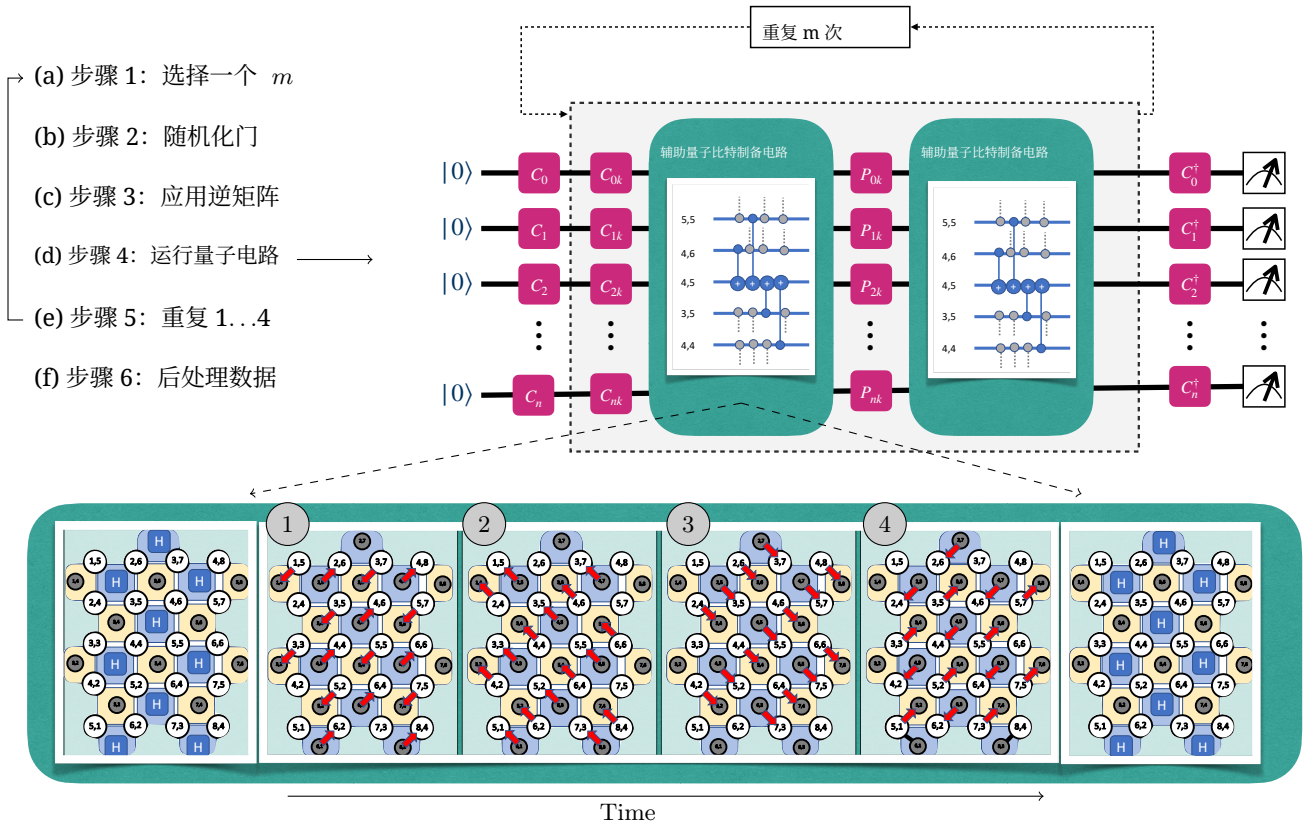


图 2. 协议中数据采集步骤的示意图。代表稳定子制备电路的方框表示一整轮稳定子制备（不包括辅助量子比特的测量或重置）；底部示意图详细展示了这样一轮制备。数字（位于底部示意图左上方）表示双量子比特门的执行顺序，如图 1(c) 所示，红色箭头表示双量子比特 CX 门。大号 H 方框（底部示意图的左右两个子图）表示对所覆盖量子比特施加哈达玛门。与随机基准测试一样，对于多个不同的电路长度，每种长度的电路都针对多个序列重复运行。具体步骤如下：(a) 随机选择电路长度 m，范围从 0（不包含稳定子制备电路）到灰色方框重复次数的最大值。对于 m，其最大值取决于设备中的错误，按经验应选择为一个方框平均错误率的倒数左右。(b) 对于一个 n 量子比特系统，随机选择 n 个起始克利福德门（$C_{0\ldots n}$）以及 $n \times m$ 个随机克利福德门和泡利门（分别为（$C_{0\ldots n,\ k}$）和（$P_{0\ldots n,\ k}$），其中 k 属于 $\{1 \ldots m\}$）。这些门用于对噪声进行局部平均。(c) 随机单量子比特克利福德门和泡利门可以通过量子电路进行对易运算，且这一运算可高效计算。应用所需的逆克利福德门，使每个量子比特回到计算基。注意，我们随机决定将量子比特返回 $|0\rangle$ 态或 $|1\rangle$ 态，并据此解读结果，以推导成功返回目标态的概率（即，如果测量结果与目标态一致，则记录 0；若表示发生错误，则记录 1）。(d) 运行量子电路若干次（我们的实验中为 2,000 次测量），并记录所得的无错误/错误比特模式。(e) 多次重复步骤 (a)–(d)，以便对结果取平均。(f) 收集数据后，我们可以对结果进行后处理，以获得所需的估计值。我们在附录 C中详细介绍数据拟合过程，但简而言之，可以将数据拟合到单指数衰减序列构成的模型，以估计平均电路的相关特征值。通过拟合衰减曲线，所得估计值不受态制备与测量误差的影响。

分布，其中包含设备中错误的分布以及所有更大尺度的相关性。这里的限制因素是，概率分布将有 2^n 个元素，并且很快就会变得过于庞大，无法存储。附录 C 中说明了如何实现这一点。由于我们希望表征规模更大的设备，因此需要应对完整概率分布的指数增长。实验本身仍然是可处理的，但如果要提取完整的概率分布，后处理的规模将按 $O(2^n)$增长。原则上，了解要实现最优解码，需要获得这一完整分布，但其复杂度高得令人望而却步，因此显然需要对这一完整分布进行近似。

本文其余部分将探讨如何在不重构完整概率分布的情况下，获得对噪声的有效估计。例如，用更紧凑形式表示噪声分布的图模型，或许能够为解码或其他用途提供足够准确的噪声描述，同时避免复杂度受到如此严重的限制。下一节中，我们将构建

量子比特	
(1, 5)	0.080
(2, 6)	0.152
(3, 7)	0.132
(4, 8)	0.105
(2, 4)	0.087
(3, 5)	0.150
(4, 6)	0.114
(5, 7)	0.102
(3, 3)	0.075
(4, 4)	0.168
(5, 5)	0.182
(6, 6)	0.097
(4, 2)	0.197
(5, 3)	0.215
(6, 4)	0.152
(7, 5)	0.108
(5, 1)	0.230
(6, 2)	0.136
(7, 3)	0.140
(8, 4)	0.092

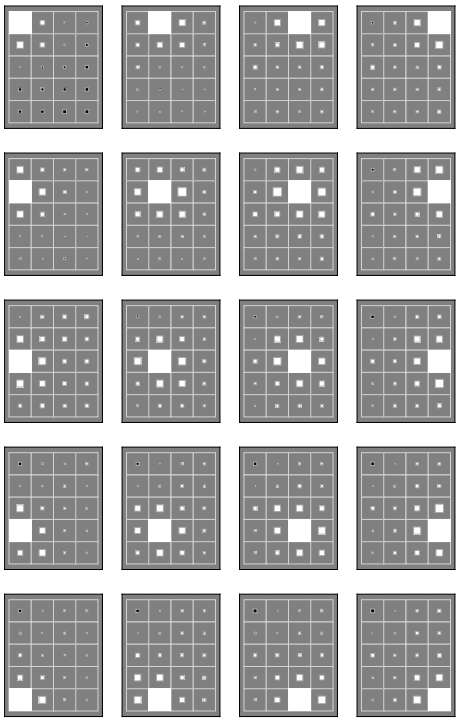


图3。这里我们展示了一些示例，说明如何以可扩展的方式，直接从这类实验中获取部分汇总数据。通过对结果进行边缘化，我们可以建立一个单轮表面码中各个错误率的表格（左侧）。这些错误率表示在稳定子制备电路的一个轮次中，相关量子比特发生任意泡利错误的概率。图的右侧展示了每个数据量子比特（相应子图中的实心白色量子比特）与码中其他每个数据量子比特之间的二体相关性。两个量子比特上的错误之间的相关性 X 和 Y ($\rho_{X,\ Y}$)可以根据矩计算，如式（1）所示。该欣顿图包含一个白色方块（负相关时为黑色），方块的面积与相关性的大小成比例。我们使用从原始测量序列进行的自助法来绘制两条σ 误差条，其显示为围绕方块的边界线宽度（在大多数情况下几乎不可见）。值得注意的是，数据量子比特之间的相关性似乎（主要）与邻近的数据量子比特更强（即根据设备连接，曼哈顿距离较近的数据量子比特）。

这类模型，并基于我们的实验进行分析；在 第五节 中，我们将回答这样一个问题：这类模型能否准确预测设备性能。

第四节. 构建和测试噪声模型

为了超越对全局概率分布的蛮力描述，我们简要回顾图模型的概念，并将其专门用于局部平均泡利噪声。对 n 个量子比特上的局部平均噪声模型，可以将其视为定义在 n 位比特串上的概率分布，

其中，第 i 位上是否存在错误（错误类型为 X、Y 或 Z）分别用 0 或 1 表示。在假设每种错误事件的概率均非零这一温和条件下，该概率分布可以用定义在比特串 $\boldsymbol{x}$ 上的哈密顿量 $H(\boldsymbol{x})$ 来描述，其中哈密顿量可取为 $H(\boldsymbol{x}) = \log p(\boldsymbol{x})$，即 $\boldsymbol{x}$ 的概率的对数。

在这种图景下，乘以常数因子的“能量平移”相当于改变概率分布的归一化，这在采样或建模时通常可以忽略。由于这是一种形式上的映射，因此无需援引温度的物理概念。我们希望将概率分布建模为图模型，其哈密顿量中每个量子比特涉及的相互作用数量有界，且每种相互作用至多涉及有界数量的其他量子比特，以便让学习过程易于处理。

这种映射最简单的例子是：以概率 p 发生单个非恒等泡利错误，否则不发生错误。此时 $H(0) = \log(1-p)$ and$H(1) = \log(p)$。这个哈密顿量可写作 $H(x) = f + hx$，其中 $h = \log(p/(1-p))$，而$f = \log(1-p)$控制（通常可选的）归一化。对于 n 个量子比特和一般的独立噪声，哈密顿量为 $H(\boldsymbol{x}) = \sum_k h_k x_k$ （此处及下文均省略归一化）。当所有k的 $h_k = h$ 时，便是同分布噪声这一特殊情况。要产生有趣的相关性，我们需要在哈密顿量中加入耦合项，自然会得到具有如下形式哈密顿量的模型

$$H(\boldsymbol{x}) = \sum_k h_k x_k + \sum_{j,k} J_{j,k} x_j x_k + \dots . \qquad (2)$$

例如，最简单的非平凡情形可能只包含最近邻二体关联。

对于这些模型，学习完整的概率分布等价于学习相应哈密顿量的耦合。此类模型的示例见图4。图4(a)中，我们假设只有独立同分布（IID）噪声（因此 $H(\boldsymbol{x}) = h\sum_k x_k$）。图4(b)中，我们保留独立性，但放宽同分布假设，考虑非独立同分布（IND）噪声，对应于$H(\boldsymbol{x}) = \sum_k h_k x_k$。图4(c)展示了最简单的最近邻关联模型，即一个带有$H(\boldsymbol{x}) = \sum_k h_k x_k + \sum_{\langle j,k\rangle} J_{j,\ k} x_j x_k$的伊辛型模型，其中第二个求和针对最近邻。最后，我们考虑一种将设备粗粒化为一维阵列的模型。这允许设备同一行内存在任意关联，但将垂直关联限制为相邻行量子比特之间的关联；如图4(d)所示。相应的粗粒化一维（CG1D）模型哈密顿量最多包含八体耦合项。

选择考察哪些图模型是有充分依据的。“伊辛风格”模型具有相关性，因为在设备中，错误从一个数据量子比特向另一个数据量子比特的长程扩散应受到限制；将数据量子比特与辅助量子比特耦合的门充当一种用于 Z 和 X 错误[61]的“单向”门。事实上，在附录H 中，我们

展示了数据如何证实（对于此设备而言），与其他表达能力相当的潜在分解方案相比，伊辛模型是一个不错的选择。出于类似的考虑，CG1D 模型也能够捕捉更长程的相关性，但代价是其中一个维度的宽度呈指数级缩放。对于更大的系统而言，这种方法可能存在问题，但在噪声高度偏置的系统中，它仍可能是一种有效的方法；此时，所提出的网格将是矩形而非正方形 [62, 63]。

尽管这些模型试图匹配设备中的相关结构，但某些模型误差不可避免。例如，伊辛模型假设局部相互作用（我们设想这些相互作用源于门错误），但还有许多其他噪声机制也会导致错误从一个量子比特传播到另一个量子比特。其中包括能态泄漏 [59], 控制信号泄漏和量子比特频率拥挤。在这种情况下，模型误差将表明此类过程正在发生。

测量模型误差的一种方法是使用相对熵，或者更灵活地使用其平滑对称化版本，即詹森-香农散度（JSD）[64]。可以测量全局分布与模型所包含的分布之间的 JSD，以量化模型误差。在这里，我们拥有进行这一计算所需的全部数据。然而，通常情况下这样做需要完整分布，因此这不是一种可扩展的解决方案。另一种潜在方法是构成每个分布所体现的协方差矩阵——这可以以可扩展的方式完成。（显然，图中的模型（a）和（b）4 没有量子比特间关联。）这些协方差矩阵只能捕捉分布中的二体关联，从技术上说，它们只能构成分布总变差距离（TVD）的下界（附录 G），但在大多数非病态情况下可以作为指导。我们在表 I中列出了这些计算。如表 I 所示，这并不令人意外：模型越丰富，我们就能捕捉量子比特之间相关性中的越多复杂性。

因此，问题不在于这些更复杂的模型是否能够捕捉简单模型无法捕捉到的噪声特性，而在于这些额外特性对于确定和／或预测设备的纠错特性是否重要。现在，我们将围绕

设备的逻辑错误率来探讨这一问题。

V. 逻辑错误率分析

为了生成噪声较少但仍具有相似相关结构的反事实错误分布，我们考虑与比特串上的概率分布p 相关联的以下单参数错误信道族。错误概率 p 可通过沃尔什-哈达玛变换 [47, 48, 66]与该量子信道超算符表示的特征值 λ 联系起来，表示为 W。事实上，我们有 $\lambda = Wp$，并且该映射

模型	JSD($D\|\|M$)	$\|\|\Sigma_D - \Sigma_M\|\|$
IID	0.229	0.124
IND	0.192	0.090
伊辛	0.167	0.056
CG1D	0.148	0.019

表 I. 观测误差分布（D）与各种模型（M）所体现分布的比较指标。两个误差度量分别是相应相关矩阵之间的范数和詹森-香农距离（JSD）（定义见正文）。这些模型包括独立同分布（IID）模型（独立同分布的错误），图 4（a）；IND 模型（相互独立但非同分布的错误），图 4（b）；仅包含最近邻双量子比特相关性的伊辛模型，图 4（c）；以及图 4（d）所示的粗粒化一维（CG1D）分布。

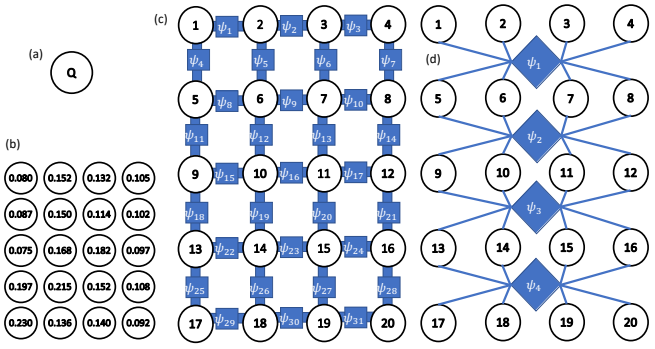


图 4. 用于建模观测误差分布的各种图模型。由“因子”连接的节点 ψ_i 可以通过支撑集位于因子相邻位置的任意哈密顿量耦合产生相关性。 **(a)** 用于解码器测试的典型模型。假设所有量子比特都具有相同的独立退极化噪声，因此只有一个节点。 **(b)** 这里量子比特仍然相互独立，但每个量子比特都有自己的错误率（此处显示的错误率见图 3）。该模型需要 n 个参数，即每个数据量子比特一个——本例中为 20 个。 **(c)** 这里使用伊辛模型对噪声进行建模，其中唯一的因子 ψ_i 位于相邻量子比特之间。 **(d)** 正文中将该模型称为粗粒化一维（CG1D）模型，即将表面码简化为一维图。

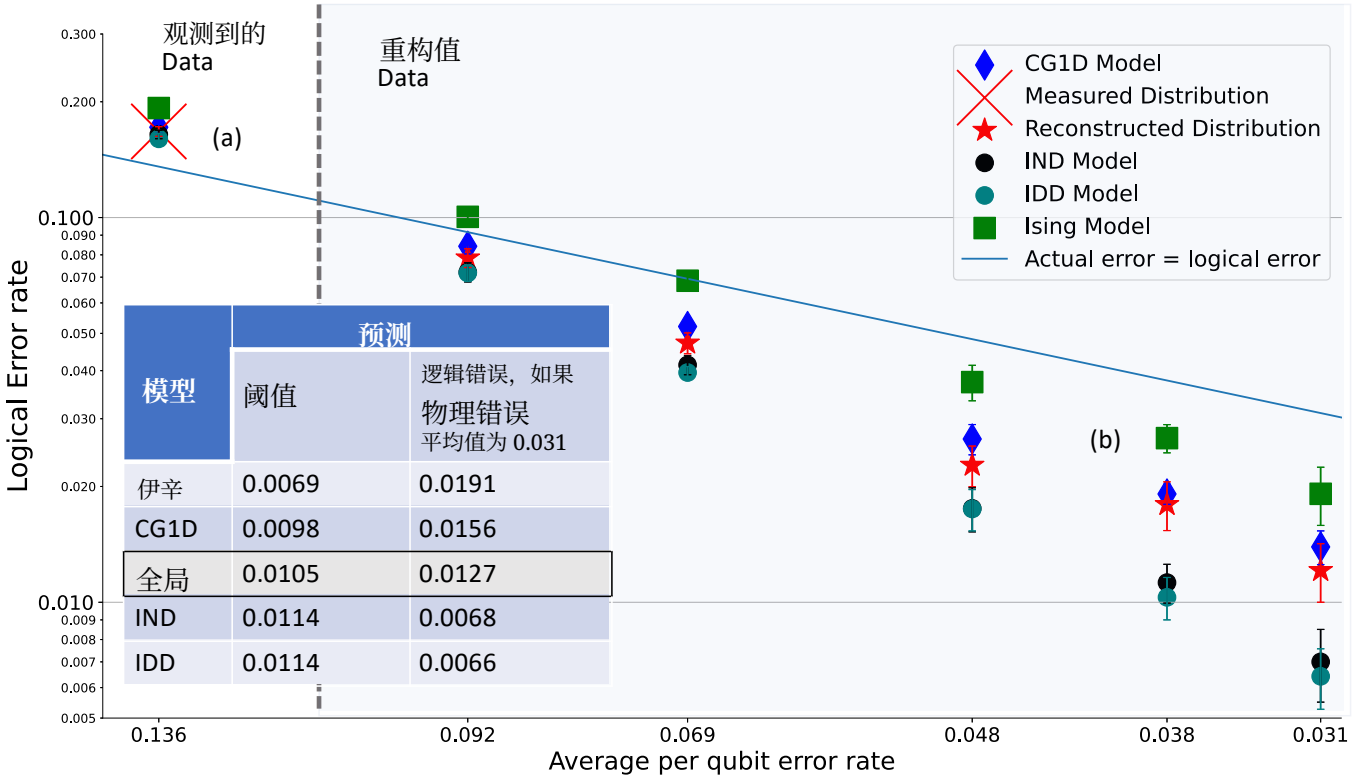
可逆，从而得到 $p = W^{-1}\lambda$。如果这个特征值为 λ 的超算符是由连续时间过程生成的，那么我们就可以生成特征值为以下数值的量子信道族

$$\lambda(t) = \exp(t \log \lambda(1)), \quad \lambda(1) = Wp. \tag{3}$$

当 $t = 0$ 时，这就是恒等信道，而 $t = 1$ 会返回原始噪声信道的特征值。我们可以通过考虑以下内容来研究这种分布的错误率

$$p(t) = W^{-1}\lambda(t) \tag{4}$$

对于 $t \geq 0$ 的各种取值，较小的取值对应较少的噪声，但其相关结构在定性上与真实信道 p(1) 相似。请注意



模型	预测 阈值	预测 逻辑错误，如果物理错误平均值为 0.031
伊辛	0.0069	0.0191
CG1D	0.0098	0.0156
全局	0.0105	0.0127
IND	0.0114	0.0068
IDD	0.0114	0.0066

图 5. 此处绘出了各种物理错误分布的逻辑错误率，我们使用通用的 QECSIM [65] 解码器（一种键维数为 $\chi = 8$ 的张量网络解码器）对错误症候进行解码。具体过程如下：1）使用 LACE 测量经验全局分布，相关讨论见本文。2）构造错误率较低的反事实全局错误分布（重构分布）。这一步的方法见正文和附录 I。3）针对这些分布（观测分布和重构分布），分别构建感兴趣的各个模型（见图 4）。4）随后对相关分布及各个模型进行抽样，得到它们各自生成的错误样本。对于每个样本，我们使用 QECSIM 解码器判断能否成功解码该错误症候。（为了使局部平均错误的抽样能够模拟完整的泡利分布，我们假设每个受影响位置上的泡利错误以相同的概率为 X、Y 或 Z。）5）对每个分布及其对应的每个模型抽取足够多的样本，以估算该分布／模型的逻辑错误率。6）重复步骤 4 和 5 共 10 次，以生成所报告的自助法误差条。

较大的整数值 $t = 2$，3，.....对应于多次施加噪声。

有一个重要的细微之处：即使在泡利噪声信道这一简单情形下，并非每个输入 p 都能“分解”为连续时间过程。因此，我们还增加了一步，将由方程（ $p(t)$）定义的 4）投影到概率单纯形上距离最近的点。关于使用此方法得到的概率分布，更多讨论和分析请参见附录I 。

总而言之，我们的实验得到了设备中实际噪声的观测分布，而我们的图模型则以便捷且可扩展的形式给出了对这种噪声的估计值。通过额外假设噪声由连续时间过程生成，我们使用式（3）和式（4）生成反事实理论噪声分布，这些分布是对设备中噪声的估计值，假设噪声信道的噪声程度有所降低，但仍保留观测噪声信道的相关性特征。我们还可以构建这种反事实噪声的模型。

以下逻辑错误率的计算基于另外两个重要假设。首先，如前所述，本实验省略了真正实现量子纠错所需的辅助量子比特测量和重置。这些操作无疑会给任何最终的电路带来复杂性、噪声、测量误差和时序问题。必须谨记这一点看待并讨论下文得出的数值。其次，由于使用的是通用解码器，我们并未尝试利用对噪声的了解来改进解码过程。这里使用的是 QECSIM [65] 提供的通用解码器。关于实际掌握噪声信息是否能提高解码成功率，仍有许多工作要做 [31]，；但这并非本文的工作——下文的分析更可视为给出了一个基准成功率，解码器或可在此基础上加以改进。编写这类解码器是正在开展的研究工作。

有鉴于此，我们现在可以计算观测到的噪声信道和构造出的噪声信道各自的逻辑错误率，并确定对噪声更复杂的模型是否比其简单版本更能预测可能的逻辑错误率。如果是，那么这些模型很可能捕捉到了简单模型无法体现的噪声关键特征。

图 5展示了不同噪声模型下这些逻辑错误率估计值的结果。在每种情况下，均取 10,000 个错误样本来估计逻辑错误率，并重复 10 次以提供误差条。图中值得关注的是平均每量子比特物理错误率约为 0.136 时的表现（图中的点 (a)）。这是设备中测得的噪声。在该点处，逻辑错误率高于这一数值（0.176）；但值得注意的是，从最基础的独立同分布模型到 CG1D 分布，再到完整的观测分布，各种模型之间的逻辑错误率几乎没有差异。在噪声信道谱的这一点上，简单的独立同分布噪声模型与其他模型一样准确（图中的点 (a)）。

然而，随着我们使用保真度更高的重构分布，明显的差异开始显现。当达到图中的点 (b) 时，较简单的模型所得到的逻辑错误率估计值明显低于完整重构分布所预测的逻辑错误率。在这一范围内，相关错误产生了影响，限制了通用解码器纠正错误的能力。（我们再次指出，针对这些噪声特征设计的解码器可能会表现得好得多。）这与人们关于机器中的相关噪声会影响逻辑错误率的看法一致。有趣的是，即使在这一范围内，CG1D 模型预测的逻辑错误率也处于完整重构分布预测结果的误差条范围内。

伊辛模型的预测偏于保守（预测的逻辑错误率更高）。我们认为，这是因为伊辛模型无法准确捕捉该设备中实际存在的长程关联。因此，伊辛模型的参数化会将这些长程关联纳入其能够建模的短程关联中，导致模型中的短程关联强于完整分布中的短程关联。

在这个小型（低距离）表面码实现中，正是这些较强的短程关联对逻辑错误率的影响最大。尽管存在这一限制，正如我们在附录中所示 H，如果我们将模型限制为仅使用数量有限的双量子比特因子，那么伊辛模型仍然是对此类分布的最优模型，能够最小化模型误差（并可能避免过拟合）。对于这些数据，我们可以确信：如果根据设备数据构建的分布伊辛模型低于阈值，那么实际设备也很可能低于阈值。

VI. 结论

我们提出并实现了一种方法，用于表征表面码的一个重要部分，即纠错量子电路中的稳定子制备部分。我们展示了如何利用随机基准测试类实验，测量码中所用数据量子比特的局部平均噪声和泡利噪声。我们还展示了如何构建噪声的图模型，并使其在表面码规模增大时仍然易于处理。这些模型使我们能够探究与设备执行纠错的能力相关的重要问题。最后，我们提供了实验证据，表明若要在设备错误率降低、关联范围缩短时准确预测错误，这些更复杂的模型似乎愈发不可或缺。我们从设备数据中进行外推，凸显了将此类错误纳入考量的重要性，也支持这样一种观点：考虑设备实际噪声的解码器有望实现具有更高阈值的纠错码实现。

VII. 代码和数据可用性

所有代码和数据可应合理要求提供。

VIII. 致谢

本实验是在 Y. Chen、J. Kelly 和 A. Megrant 的指导下，与 Google Quantum AI 硬件团队合作完成的。我们感谢团队在处理器制造与封装、低温和控制系统的搭建与配置、执行基线校准、优化处理器性能，以及提供运行实验所需工具等方面所做的工作。感谢 D. Debroy、B. Foxen、M. Harrigan 和 M. Newman 仔细审阅手稿并提出宝贵意见。RH 感谢 Robin Blume-Kohout 就本文相关问题进行的多次富有启发性的交流。RH 由悉尼量子学院资助；本研究得到美国陆军研究办公室 W911NF2110001 号资助。SF 对本项目的贡献是在其隶属于悉尼大学期间完成的。

[1] P. W. Shor, 《SIAM计算杂志》**26**，1484（1997）。

[2] Y. Cao、J. Romero、J. P. Olson、M. Degroote、P. D. Johnson、M. Kieferová、I. D. Kivlichan、T. Menke、B. Per-

opadre、N. P. D. Sawaya、S. Sim、L. Veis 和 A. Aspuru-Guzik，《化学评论》119，10856（2019年）。[3] J. Biamonte、P. Wittek、N. Pancotti、P. Rebentrost、N. Wiebe 和 S. Lloyd，《自然》549，195（2017年）。[4] A. Aspuru-Guzik、A. D. Dutoi、P. J. Love 和 M. Head- Gordon，《科学》309，1704（2005年）。[5] C. Gidney 和 M. Ekerå，《量子》5，433（2021年）。[6] N. Grzesiak、R. Blümel、K. Wright、K. M. Beck、N. C. Pisenti、M. Li、V. Chaplin、J. M. Amini、S. Debnath、J.-S. Chen 和 Y. Nam，《自然·通讯》11，2963（2020年）。[7] W. Huang、C. H. Yang、K. W. Chan、T. Tanttu、B. Hensen、R. C. C. Leon、M. A. Fogarty、J. C. C. Hwang、F. E. Hudson、K. M. Itoh、A. Morello、A. Laucht 和 A. S. Dzurak，《自然》569，532（2019年）。[8] E. H. Chen、T. J. Yoder、Y. Kim、N. Sundaresan、S. Srini- vasan、M. Li、A. D. Córcoles、A. W. Cross 和 M. Takita，《物理评论快报》128，110504（2022年）。[9] C. J. Ballance、T. P. Harty、N. M. Linke、M. A. Sepiol 和 D. M. Lucas，《物理评论快报》117，060504（2016年）。[10] E. Knill、R. Laflamme 和 W. H. Zurek，《科学》279，342 1998( )。[11] D. Aharonov 和 M. Ben-Or，载于第29届ACM计算理论研讨会（STOC）（美国纽约，1997年），第176–188页。[12] A. Y. Kitaev，《俄罗斯数学调查》52，1191（1997年）。[13] C. Ryan-Anderson、J. G. Bohnet、K. Lee、D. Gresh、A. Hankin、J. P. Gaebler、D. Francois、A. Chernoguzov、D. Lucchetti、N. C. Brown、T. M. Gatterman、S. K. Halit、K. Gilmore、J. A. Gerber、B. Neyenhuis、D. Hayes 和 R. P. Stutz，《物理评论X》11，041058（2021年）。[14] L. Egan、D. M. Debroy、C. Noel、A. Risinger、D. Zhu、D. Biswas、M. Newman、M. Li、K. R. Brown、M. Cetina 和 C. Monroe，《自然》598，281（2021年）。[15] S. Krinner、N. Lacroix、A. Remm、A. D. Paolo、E. Genois、C. Leroux、C. Hellings、S. Lazar、F. Swiadek、J. Her- rmann、G. J. Norris、C. K. Andersen、M. Müller、A. Blais、C. Eichler 和 A. Wallraff，《自然》605，669（2022年）。[16] N. Sundaresan、T. J. Yoder、Y. Kim、M. Li、E. H. Chen、G. Harper、T. Thorbeck、A. W. Cross、A. D. Córcoles 和 M. Takita，《多轮次子系统量子纠错实验的匹配与最大似然解码》（2022年）。[17] Y. Zhao、Y. Ye、H.-L. Huang、Y. Zhang、D. Wu、H. Guan、Q. Zhu、Z. Wei、T. He、S. Cao、F. Chen、T.-H. Chung、H. Deng、D. Fan、M. Gong、C. Guo、S. Guo、L. Han、N. Li、S. Li、Y. Li、F. Liang、J. Lin、H. Qian、H. Rong、H. Su、L. Sun、S. Wang、Y. Wu、Y. Xu、C. Ying、J. Yu、C. Zha、K. Zhang、Y.-H. Huo、C.-Y. Lu、C.-Z. Peng、X. Zhu 和 J.-W. Pan，《物理评论快报》129，030501（2022年）。[18] A. Kitaev，《物理年鉴》303，2（2003年）。[19] S. B. Bravyi 和 A. Y. Kitaev，《具有边界的晶格量子码》（1998年）。[20] A. G. Fowler、M. Mariantoni、J. M. Martinis 和 A. N. Cleland，《物理评论A》86，032324（2012年）。[21] D. K. Tuckett、S. D. Bartlett 和 S. T. Flammia，《物理评论快报》120，050505（2018年），arXiv:1708.08474。[22] J. P. Bonilla Ataides、D. K. Tuckett、S. D. Bartlett、S. T. Flammia 和 B. J. Brown，《自然·通讯》12，2172 2021( )。[23] R. Acharya、I. Aleiner、R. Allen、T. I. Andersen、M. Ans- mann、F. Arute、K. Arya、A. Asfaw、J. Atalaya、R. Bab- bush、D. Bacon、J. C. Bardin、J. Basso、A. Bengtsson、S. Boixo、G. Bortoli、A. Bourassa、J. Bovaird、L. Brill、M. Broughton、B. B. Buckley、D. A. Buell、T. Burger、B. Burkett、N. Bushnell、Y. Chen、Z. Chen、B. Chiaro、J. Cogan、R. Collins、P. Conner、W. Courtney、A. L. Crook、B. Curtin、D. M. Debroy、A. D. T. Barba、S. De- mura、A. Dunsworth、D. Eppens、C. Erickson、L. Faoro、E. Farhi、R. Fatemi、L. F. Burgos、E. Forati、A. G. Fowler、B. Foxen、W. Giang、C. Gidney、D. Gilboa、M. Giustina、A. G. Dau、J. A. Gross、S. Habegger、M. C. Hamilton、M. P. Harrigan、S. D. Harrington、O. Higgott、J. Hilton、M. Hoffmann、S. Hong、T. Huang、A. Huff、W. J. Huggins、L. B. Ioffe、S. V. Isakov、J. Iveland、E. Jeffrey、Z. Jiang、C. Jones、P. Juhas、D. Kafri、K. Kechedzhi、J. Kelly、T. Khattar、M. Khezri、M. Kieferová、S. Kim、A. Kitaev、P. V. Klimov、A. R. Klots、A. N. Korotkov、F. Kostritsa、J. M. Kreikebaum、D. Landhuis、P. Laptev、K.-M. Lau、L. Laws、J. Lee、K. Lee、B. J. Lester、A. Lill、W. Liu、A. Locharla、E. Lucero、F. D. Malone、J. Marshall、O. Mar- tin、J. R. McClean、T. McCourt、M. McEwen、A. Megrant、B. M. Costa、X. Mi、K. C. Miao、M. Mohseni、S. Montaz- eri、A. Morvan、E. Mount、W. Mruczkiewicz、O. Naaman、M. Neeley、C. Neill、A. Nersisyan、H. Neven、M. New- man、J. H. Ng、A. Nguyen、M. Nguyen、M. Y. Niu、T. E. O'Brien、A. Opremcak、J. Platt、A. Petukhov、R. Potter、L. P. Pryadko、C. Quintana、P. Roushan、N. C. Rubin、N. Saei、D. Sank、K. Sankaragomathi、K. J. Satzinger、H. F. Schurkus、C. Schuster、M. J. Shearn、A. Shorter、V. Shvarts、J. Skruzny、V. Smelyanskiy、W. C. Smith、G. Sterling、D. Strain、M. Szalay、A. Torres、G. Vidal、B. Villalonga、C. V. Heidweiller、T. White、C. Xing、Z. J. Yao、P. Yeh、J. Yoo、G. Young、A. Zalcman、Y. Zhang、and N. Zhu，《自然》614，676 (2023)。[24] A. Robertson、C. Granade、S. D. Bartlett、and S. T. Flammia，《应用物理评论》8，064004 (2017年)，arXiv:1703.08179。[25] N. H. Nickerson and B. J. Brown，《量子》3，131 (2019年)。[26] D. K. Tuckett、A. S. Darmawan、C. T. Chubb、S. Bravyi、S. D. Bartlett、and S. T. Flammia，《物理评论X》9，041031 (2019年)，arXiv:1812.08186。[27] C. T. Chubb，二维泡利码的通用张量网络解码 (2021年)。[28] C. T. Chubb and S. T. Flammia，《亨利·庞加莱研究所年刊D辑》8，269 (2021年)。[29] D. K. Tuckett、S. D. Bartlett、S. T. Flammia、and B. J. Brown，《物理评论快报》124，130501 (2020年)，arXiv:1907.02554 [量子物理]。[30] A. d. iOlius、J. E. Martinez、P. Fuentes、P. M. Crespo、and J. Garcia-Frias，现实量子硬件中的表面码性能 (2022年)。[31] K. Tiurev、P.-J. H. S. Derks、J. Roffe、J. Eisert、and J.-M. Reiner，使用表面码纠正非独立非同分布错误 (2022年)。[32] O. Higgott、T. C. Bohdanowicz、A. Kubica、S. T. Flammia、and E. T. Campbell，定制表面码的脆弱边界及电路级噪声的改进解码 (2022年)，arxiv:2203.04948。[33] I. L. Chuang and M. A. Nielsen，《现代光学杂志》44，2455 (1997年)，quant-ph/9610001。[34] S. T. Merkel、J. M. Gambetta、J. A. Smolin、S. Poletto、A. D. Córcoles、B. R. Johnson、C. A. Ryan、and M. Steffen，《物理评论A》87，062119 (2013年)，1211.0322。[35] R. Blume-Kohout、J. K. Gamble、E. Nielsen、K. Rudinger、J. Mizrahi、K. Fortier、and P. Maunz，《自然·通信》8，14485 2016 1605 07674 ( )，arXiv: . .

[36] T. Evans, W. Huang, J. Yoneda, R. Harper, T. Tanttu, K. Chan, F. Hudson, K. Itoh, A. Saraiva, C. Yang, A. Dzu- rak, and S. Bartlett, 《应用物理评论》17, 024068 (2022年). [37] J. Emerson, M. Silva, O. Moussa, C. Ryan, M. Laforest, J. Baugh, D. G. Cory, and R. Laflamme, 《科学》317, 1893 2007 0707 0685 ( ), arXiv: . . [38] E. Knill, D. Leibfried, R. Reichle, J. Britton, R. B. Blakestad, J. D. Jost, C. Langer, R. Ozeri, S. Seidelin, and D. J. Wineland, 《物理评论A》77, 012307 (2008年), arXiv:0707.0963.[39] E. Magesan, J. M. Gambetta, and J. Emerson, 《物理评论快报》106, 180504 (2011年). [40] A. Carignan-Dugas, J. J. Wallman, and J. Emerson, 《物理评论A》92, 060302 (2015年), arXiv:1508.06312. [41] A. K. Hashagen, S. T. Flammia, D. Gross, and J. J. Wallman, 《量子》2, 85 (2018年), arXiv:1801.06121. [42] A. Erhard, J. J. Wallman, L. Postler, M. Meth, R. Stricker, E. A. Martinez, P. Schindler, T. Monz, J. Emer- son, and R. Blatt, 《自然·通信》10, 5347 (2019年), arXiv:1902.08543.[43] J. Helsen, X. Xue, L. M. Vandersypen, and S. Wehner, npj《量子信息》5, 71 (2019年), arXiv:1806.02048. [44] T. J. Proctor, A. Carignan-Dugas, K. Rudinger, E. Nielsen, R. Blume-Kohout, and K. Young, 《物理评论快报》123, 030503 (2019年), arXiv:1807.07975. [45] T. Proctor, S. Seritan, K. Rudinger, E. Nielsen, R. Blume-Kohout, and K. Young, 《物理评论快报》129, 150502 (2022年). [46] J. Hines, M. Lu, R. K. Naik, A. Hashim, J.-L. Ville, B. Mitchell, J. M. Kriekebaum, D. I. Santiago, S. Ser- itan, E. Nielsen, R. Blume-Kohout, K. Young, I. Sid- diqi, B. Whaley, and T. Proctor, 展示通用门集合的可扩展随机基准测试 (2022年), arxiv:2207.07272.[47] S. T. Flammia and J. J. Wallman, 《ACM量子计算汇刊》1, 1 (2020年). [48] R. Harper, S. T. Flammia, and J. J. Wallman, 《自然·物理》16, 1184 (2020年). [49] E. Robeva and A. Seigal, 《信息与推断：IMA期刊》8, 273 (2018年). [50] H.-Y. Huang, R. Kueng, and J. Preskill, 《物理评论快报》127, 030503 (2021年). [51] T. Farrelly, N. Milicevic, R. J. Harris, N. A. McMahon, and T. M. Stace, 《物理评论A》105, 052446 (2022年). [52] S. Bravyi, M. Suchara, and A. Vargo, 《物理评论A》90, 032326 (2014年). [53] O. Kern, G. Alber, and D. L. Shepelyansky, 《欧洲物理学杂志D》32, 153–156 (2005年), arXiv:量子物理/0407262. [54] E. Knill, 《自然》434, 39 (2005年), arXiv: 量子物理 /0410199. [55] J. J. Wallman and J. Emerson, 《物理评论A》94, 052325 (2016年), arXiv:1512.01098. [56] R. Harper and S. T. Flammia, 量子科学与技术2, 015008 (2017年). [57] J. Emerson, R. Alicki, and K. Życzkowski, 《光学杂志B》7, S347 (2005年), quant-ph/0503243. [58] F. Arute, K. Arya, R. Babbush, D. Bacon, J. C. Bardin, R. Barends, R. Biswas, S. Boixo, F. G. S. L. Brandao, D. A. Buell, B. Burkett, Y. Chen, Z. Chen, B. Chiaro, R. Collins, W. Courtney, A. Dunsworth, E. Farhi, B. Foxen, A. Fowler, C. Gidney, M. Giustina, R. Graff, K. Guerin, S. Habegger, M. P. Harrigan, M. J. Hartmann, A. Ho, M. Hoffmann, T. Huang, T. S. Humble, S. V. Isakov, E. Jeffrey, Z. Jiang, D. Kafri, K. Kechedzhi, J. Kelly, P. V. Klimov, S. Knysh, A. Korotkov, F. Kostritsa, D. Landhuis, M. Lindmark, E. Lucero, D. Lyakh, S. Mandrà, J. R. McClean, M. McEwen, A. Megrant, X. Mi, K. Michielsen, M. Mohseni, J. Mutus, O. Naaman, M. Neeley, C. Neill, M. Y. Niu, E. Ostby, A. Petukhov, J. C. Platt, C. Quintana, E. G. Rieffel, P. Roushan, N. C. Rubin, D. Sank, K. J. Satzinger, V. Smelyanskiy, K. J. Sung, M. D. Trevithick, A. Vainsencher, B. Villalonga, T. White, Z. J. Yao, P. Yeh, A. Zalcman, H. Neven, and J. M. Martinis, 《自然》574，505（2019年）。[59] K. C. Miao, M. McEwen, J. Atalaya, D. Kafri, L. P. Pryadko, A. Bengtsson, A. Opremcak, K. J. Satzinger, Z. Chen, P. V. Klimov, C. Quintana, R. Acharya, K. Anderson, M. Ansmann, F. Arute, K. Arya, A. Asfaw, J. C. Bardin, A. Bourassa, J. Bovaird, L. Brill, B. B. Buckley, D. A. Buell, T. Burger, B. Burkett, N. Bushnell, J. Campero, B. Chiaro, R. Collins, P. Conner, A. L. Crook, B. Curtin, D. M. Debroy, S. Demura, A. Dunsworth, C. Erickson, R. Fatemi, V. S. Ferreira, L. F. Burgos, E. Forati, A. G. Fowler, B. Foxen, G. Garcia, W. Giang, C. Gidney, M. Giustina, R. Gosula, A. G. Dau, J. A. Gross, M. C. Hamilton, S. D. Harrington, P. Heu, J. Hilton, M. R. Hoffmann, S. Hong, T. Huang, A. Huff, J. Iveland, E. Jeffrey, Z. Jiang, C. Jones, J. Kelly, S. Kim, F. Kostritsa, J. M. Kreikebaum, D. Landhuis, P. Laptev, L. Laws, K. Lee, B. J. Lester, A. T. Lill, W. Liu, A. Locharla, E. Lucero, S. Martin, A. Megrant, X. Mi, S. Montazeri, A. Morvan, O. Naaman, M. Neeley, C. Neill, A. Nersisyan, M. Newman, J. H. Ng, A. Nguyen, M. Nguyen, R. Potter, C. Rocque, P. Roushan, K. Sankaragomathi, C. Schuster, M. J. Shearn, A. Shorter, N. Shutty, V. Shvarts, J. Skruzny, W. C. Smith, G. Sterling, M. Szalay, D. Thor, A. Torres, T. White, B. W. K. Woo, Z. J. Yao, P. Yeh, J. Yoo, G. Young, A. Zalcman, N. Zhu, N. Zobrist, H. Neven, V. Smelyanskiy, A. Petukhov, A. N. Korotkov, D. Sank, and Y. Chen, 《克服可扩展量子纠错中的泄漏》（2022年）。[60] M. McEwen, D. Kafri, J. Chen, J. Atalaya, K. Satzinger, C. Quintana, P. V. Klimov, D. Sank, C. M. Gidney, A. Fowler, F. C. Arute, K. Arya, B. B. Buckley, B. Burkett, N. Bushnell, B. Chiaro, R. Collins, S. Demura, A. Dunsworth, C. Erickson, B. R. Foxen, M. Giustina, T. Huang, S. Hong, E. Jeffrey, S. Kim, K. Kechedzhi, F. Kostritsa, P. Laptev, A. Megrant, X. Mi, J. Mutus, O. Naaman, M. Neeley, C. Neill, M. Y. Niu, A. Paler, N. Redd, P. Roushan, T. White, J. Yao, P. Yeh, A. J. Zalcman, Y. Chen, V. Smelyanskiy, J. Martinis, H. Neven, J. Kelly, A. Korotkov, A. G. Petukhov, and R. Barends, 《自然·通讯》12, 1761（2021年）。[61] R. Versluis, S. Poletto, N. Khammassi, B. Tarasinski, N. Haider, D. Michalak, A. Bruno, K. Bertels, and L. DiCarlo, 《物理评论应用》8，034021（2017年）。[62] C. Chamberland, K. Noh, P. Arrangoiz-Arriola, E. T. Campbell, C. T. Hann, J. Iverson, H. Putterman, T. C. Bohdanowicz, S. T. Flammia, A. Keller, G. Refael, J. Preskill, L. Jiang, A. H. Safavi-Naeini, O. Painter, and F. G. Brandão, 《PRX Quantum》3，010329（2022年）。[63] J. Napp and J. Preskill, 《量子信息与计算》13，490–510（2013年）。[64] J. Lin, 《IEEE信息论汇刊》37，145（1991年）。[65] D. K. Tuckett, 《定制表面码：利用偏置噪声改进量子纠错》，博士论文,

悉尼大学（2020年），（qecsim：https://github.com/qecsim/qecsim）。[66] E. v. d. Berg, Z. K. Minev, A. Kandala, and K. Temme，《在含噪量子处理器上利用稀疏 Pauli-Lindblad 模型进行概率误差消除》（2022年）。[67] R. Harper, I. Hincks, C. Ferrie, S. T. Flammia, and J. J. Wallman，《物理评论A》99，052350（2019年）。[68] H.-Y. Huang, R. Kueng, and J. Preskill，《自然·物理》16，1050–1057（2020年），arXiv:2002.08953。[69] J. Cotler and F. Wilczek，《物理评论快报》124，100401（2020年）。[70] R. Harper, W. Yu, and S. T. Flammia，《PRX Quantum》2，010322（2021年）。[71] S. T. Flammia and R. O'Donnell，《量子》5，549（2021年）。[72] S. T. Flammia，《平均电路特征值采样》（2021年），arXiv:2108.05803。[73] T. Wagner, H. Kampermann, D. Bru, and M. Kliesch，《量子》6，809（2022年）。[74] M. A. Fogarty, M. Veldhorst, R. Harper, C. H. Yang, S. D. Bartlett, S. T. Flammia, and A. S. Dzurak，《物理评论A》92，022326（2015年），arXiv:1502.05119。[75] R. W. Andrews, C. Jones, M. D. Reed, A. M. Jones, S. D. Ha, M. P. Jura, J. Kerckhoff, M. Levendorf, S. Meenehan, S. T. Merkel, A. Smith, B. Sun, A. J. Weinstein, M. T. Rakher, T. D. Ladd, and M. G. Borselli，《自然·纳米技术》14，747（2019年）。[76] M. A. Nielsen，《物理快报A》303，249（2002年）。[77] J. M. Hammersley and P. Clifford（1971年），见 http://www.statslab.cam.ac.uk/~grg/books/hammfest/hamm-cliff.pdf。[78] P. Abbeel, D. Koller, and A. Ng，《多项式时间内学习因子图与样本复杂度》，技术报告1207.1366（arXiv，2012年）。

附录 A：噪声表征

人们已经开发出许多表征技术，用于理解量子器件中的噪声。传统上，在设备尚处于起步阶段时，会使用过程层析等全面表征技术。对于小型设备，可以对量子比特进行全面表征，以深入了解噪声的根本成因。过程层析 [33]及其变体 [34–36]仍是表征工具箱中的重要工具。然而，这类方法的局限在于只能应用于少数量子比特。当量子比特数量超过几个时，可扩展性问题便使这些技术难以实际应用。

强噪声平均或部分表征是克服全面表征可扩展性问题的一种方法。一种常见的部分表征技术是随机基准测试及其变体 [37–46]。这些技术定义了一种自然的度量，用来衡量噪声块，并对设备中的噪声进行平均。通过定义一个经过多次应用后表现良好的噪声块，可以利用简单的衰减曲线估算参数，从而消除态制备与测量（SPAM）错误，并获得较小的误差条 [67]。重要的是，这些协议会对设备中的噪声进行平均；这种多次运行的平均会将噪声转化为等效的泡利信道，从而消除噪声中的相干效应。根据所采用的协议，泡利噪声本身还可能进一步被平均，通常会将噪声简化为单一数值，即整体信道的保真度。将噪声转换为泡利信道是合理的，因为在设备运行期间，也可以通过泡利框架随机化 [53–55] 等技术，将设备中的噪声本身转换为泡利信道。随后的强平均是一种表征上的便利做法。

与其试图测量整个泡利信道的平均噪声，后续研究已展示如何利用同时进行的单量子比特测量，从噪声中提取更多信息 [47, 48, 68–72]。近期研究表明，可以根据纠错综合征测量估计泡利噪声信道 [73], ，不过对于表面码式纠错，无论码的规模有多大，所能获取的信息都仅限于二体关联。在这里，我们将采用一些技术，从运行纠错电路的设备中提取全局错误分布 [47, 48]，并展示如何通过构建合适的噪声模型来驾驭这海量且呈指数级增长的数据。

附录 B：器件特性

这些实验所使用的设备与参考文献 [58]中的54 量子比特 Sycamore 处理器完全相同。我们从53 量子比特网格中选取了39个量子比特进行操作，其空闲频率和相互作用频率经过选择，旨在针对

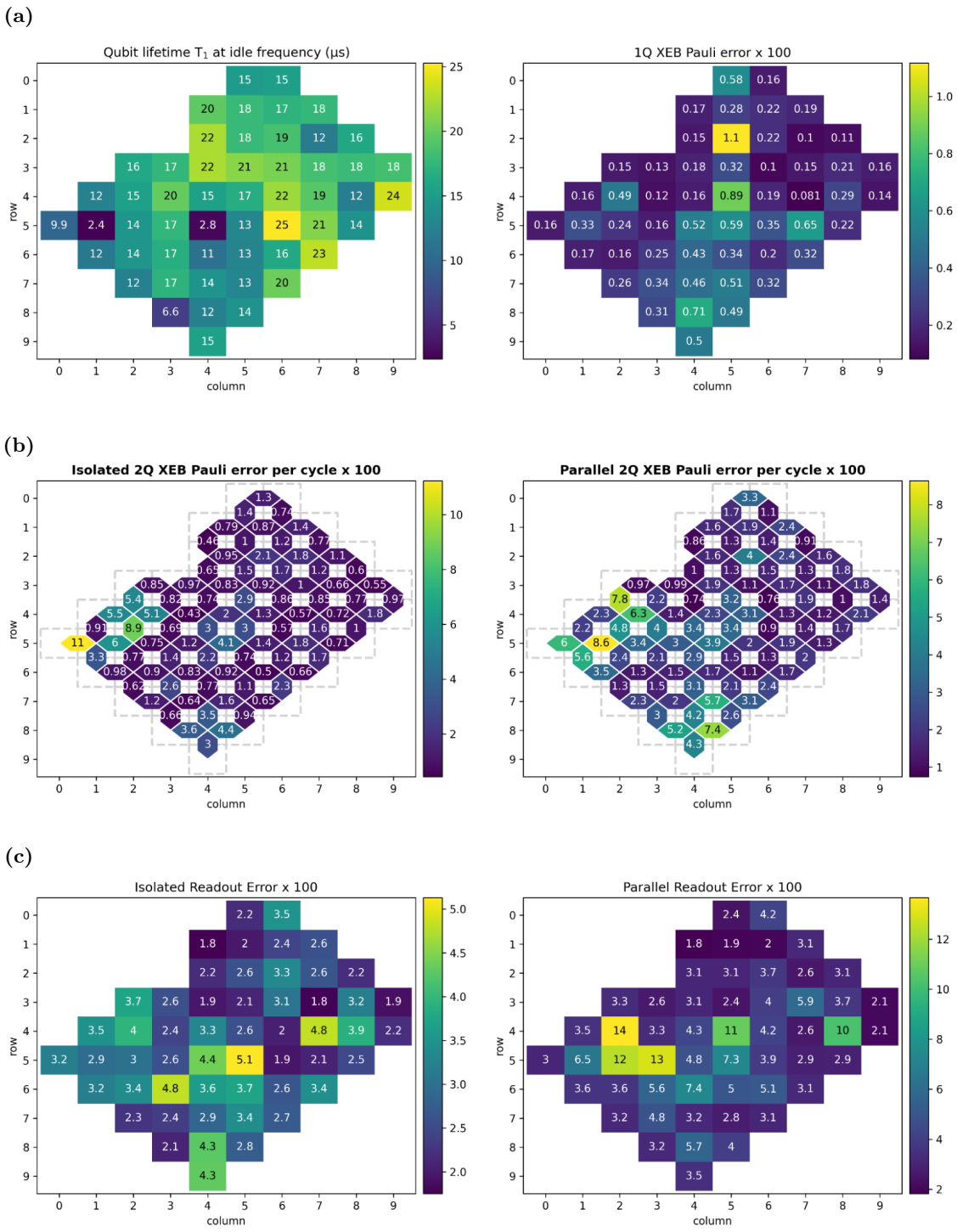


图6。 **(a)** 典型量子比特 T1 寿命及其频率和单量子比特泡利误差。 **(b)** 隔离和并行双量子比特XEB泡利误差。 **(c)** 隔离和同时进行的测量误差。所有情况下，详见附录 B 以了解更多详细信息。

共振 sqrt(iSWAP) 和 Sycamore门进行优化；在这39个量子比特上运行电路时，53 量子比特网格中未使用的量子比特以其正常工作频率处于空闲状态，并未偏置到低频。系统执行了自动校准，每周仅更新三次控制参数，且几乎无需人工干预。

在此期间，相干时间的不稳定性和电子设备漂移均未得到补偿。本文呈现的大多数数据是在上一次校准和控制参数更新约 60 小时后采集的。

紧接着每个自动校准周期之后，

对门和读出保真度进行了表征，以提供具有代表性的设备性能特征，如图 6 所示。图6（a）显示了量子比特在其空闲频率下的典型量子比特 T1 寿命，图 6（b）绘制了通过独立交叉熵基准测试（XEB）表征的单量子比特泡利误差，其中独立操作定义为仅对单个量子比特施加门操作，同时其余 52 个量子比特保持在各自的空闲频率。对于该处理器，我们仅观察到同时操作期间单量子比特门误差小幅增加（见参考文献 [58] 的图 2），但独立读出与同时读出，以及独立双量子比特门操作与同时双量子比特门操作之间存在显著差异。由于串扰的确切机制尚未得到充分理解，我们假设设备性能取决于具体同时操作的量子比特集合。为了对这些串扰影响提供具有代表性的估计，在图6（b）和图 6（c）中，我们给出了 Sycamore 门保真度和读出误差的独立测量值与同时测量值。注意：Sycamore 门保真度是在四层中进行表征的，以使用连接到每个量子比特的（最多）四个耦合器分别表征门操作。最后，我们再次指出，LACE 对态制备与测量误差具有稳健性，不过较高的态制备与测量误差会降低信号，因此需要增加测量次数才能达到相同的准确度。

虽然附录 C以克利福德门来描述运行的量子电路，但 Sycamore 器件原生使用 Sycamore门作为双量子比特门。CX 门会转换为两轮 Sycamore门

$$\mathrm{SYC} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\pi/6} \end{bmatrix}$$

，并配以适当的单量子比特旋转。单量子比特旋转（包括随机单量子比特克利福德门、Sycamore 门校正、随机泡利算符和所需的哈达玛门）也可以合并为单个相位 XZ 门，其定义如下

$$\mathrm{pXZ}(x,z,a) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{i\pi x/2}\cos(\pi x/2) & -i\mathrm{e}^{i\pi(x/2-a)}\sin(\pi x/2) \\ -i\mathrm{e}^{i\pi(x/2+z+a)}\sin(\pi x/2) & \mathrm{e}^{i\pi(x/2+z)}\cos(\pi x/2) \end{bmatrix}$$

通过使用相应的 Cirq 函数来优化适用于 Sycamore 器件的量子电路，即可自动完成此操作。

针对特定随机克利福德门和随机泡利门选择方案的量子电路提取示例如图 7(b)

附录 C：实验说明

与大多数能够测量非相干噪声率且对 SPAM 鲁棒的协议一样，实验设计运用了随机基准测试的许多特性。我们使用单量子比特克利福德门在局部对噪声进行平均，并在无法轻松使用克利福德门来消除表面码电路各轮迭代之间的相干噪声时，额外采用泡利框架随机化。

设计概览及相关的电路提取如图 7所示。完整流程如下：

1. 选择一个非负整数 m。

2. 对每个量子比特，随机决定是保持量子态不变，还是将其映射到一个正交态，以消除干扰模型参数（例如参见文献 [67, 74, 75]）。

3. 创建 m 个以下量子电路的实例：

   - 在每个量子比特上施加一个随机单量子比特克利福德门。
   - 施加一轮稳定子制备电路。
   - 在每个量子比特上施加一个随机泡利门。
   - 执行一轮稳定子制备电路。

   注意：如果 m 为 0，仍需在步骤 4 中应用单量子比特克利福德门和取逆门。

4. 选择所需的随机单量子比特克利福德门，将每个特定量子比特恢复到步骤 2 中选定的量子态。

5. 多次运行在 2–4 中构建的量子电路（在该实验中，我们选择了 2,000 次），并测量所有量子比特。记录测量得到的比特模式。

6. 对 m的不同取值重复步骤 1–5；在当前实验中，我们选择了 $m \in [0, 1, 2, 3, 4, 6, 8]$。参考文献 [67] 提供了指导，但通常需要使最大的 m 足够大，以便大多数量子比特的边缘化存活率达到 $\approx 60\%$。

7. 对每个选定的不同 m，重复步骤 1–6 足够多次，以获得合理的统计结果（在报告的实验中，每个 m 运行了 1,700 多次，但实际上，获得合理的误差条所需的运行次数要少得多）。

如果数据量子比特的数量（n）使得 2^n 是一个易于处理的数：

1. 对每个 m，将比特模式边缘化到数据量子比特，并使用这些缩减后的比特模式创建一个 2^n 结果经验概率分布。无需担心并非所有可能的比特模式都被观测到。这些模式在经验概率分布中的取值为 0。

2. 对这些 m 概率分布分别进行沃尔什-哈达玛变换，得到 m 特征值向量（每个特征值向量有 2^n 个条目）。

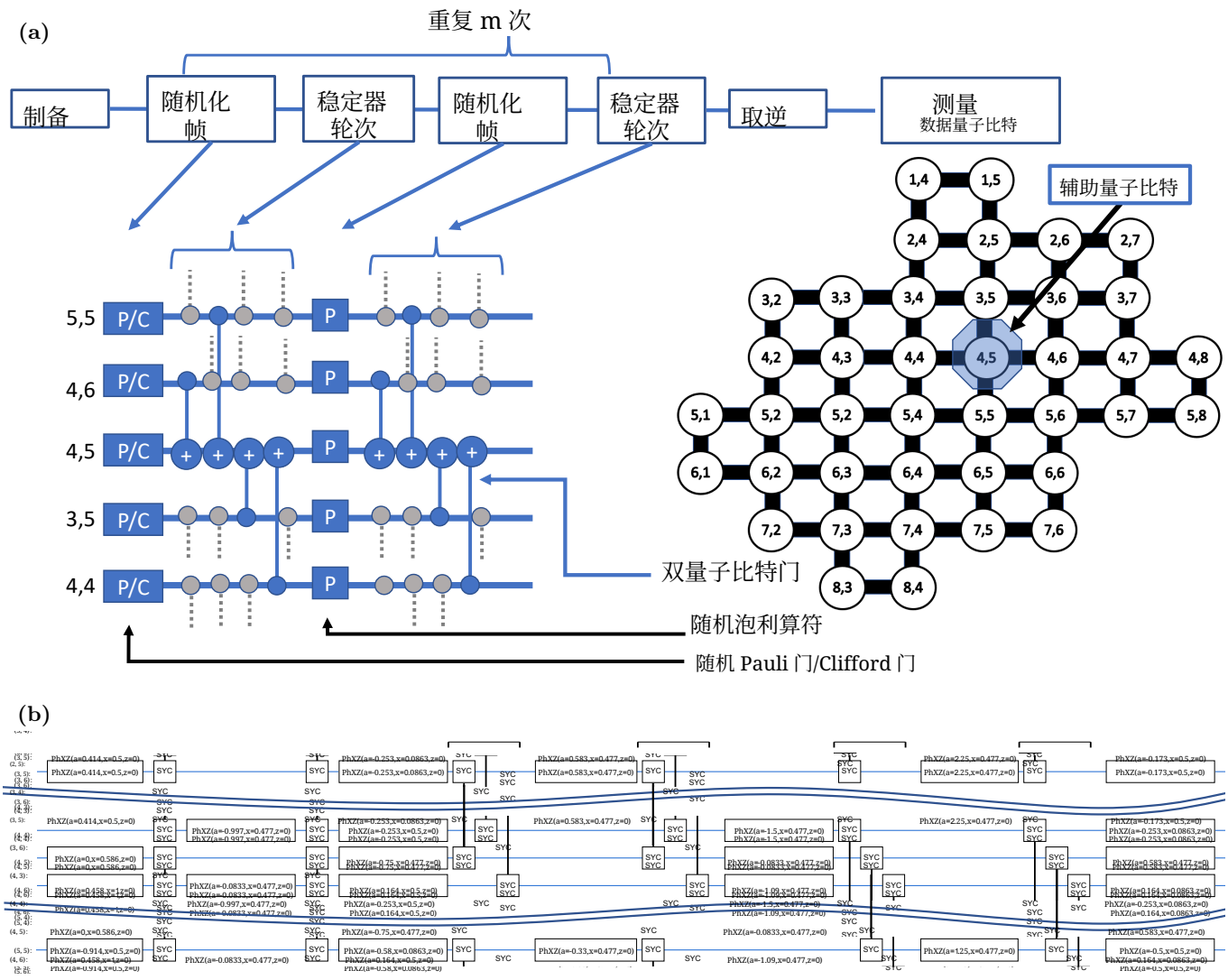


图 7. (a) 这里展示了一个我们进行测量的量子电路示例。这些量子电路与用于制备辅助量子比特以进行综合征提取的量子电路相同。这里只展示一个辅助量子比特（量子比特 4、5）的门。（我们用灰色显示了其他门的“影子”，以提醒读者，还有许多其他双量子比特门正与图中所示的门同时执行。）加入随机 Pauli 门可确保实现泡利框架随机化；对多次运行的结果取均值后，所收集的统计数据就相当于我们测量的噪声信道是泡利噪声信道时得到的数据。如果将第一轮泡利门替换为随机单量子比特克利福德门，就能以正文中更精确阐述的方式对噪声进行局部平均。这里展示的电路提取对应一轮门操作。每一轮结束后，量子比特都会返回计算基，但各量子比特上可能带有一个随机单量子比特泡利门（或克利福德门）。这很容易跟踪，并可在读出前立即取逆。通过制备并测量长度各异的量子电路序列（即改变 m 上图中的数值），我们能够将观测到的概率转换为特征值，并拟合出衰减曲线（见 [47, 48]）。文献 [47] 证明了此类量子电路的收敛性质，可用于估计系统中平均噪声的概率分布。在此例中，平均噪声对应于运行与我们关注的类型完全相同的量子电路时所产生的噪声。(b) 该设备上的原生双量子比特门是 Sycamore 门。实现一个受控非门（CX）需要两个 Sycamore 门（以及一些单量子比特门）。这里展示了上述电路提取的大部分一轮操作（其中使用了一些随机选取的单量子比特克利福德门），并详细列出了设备上实际执行的门。如果 Sycamore 门连接到此电路提取中未显示的量子比特，则只画出其中一条连线。

3. 对于每个 m 特征值向量，在 $2 \dots 2^n$ 中取 i，提取 i^{th} 特征值（$\bar{\lambda}_i$），并拟合以下方程：

$$\bar{\lambda}_i(m) = A f_i^m \tag{C1}$$

记录拟合过程中得到的每个 f_i。

4. 构造新的特征值向量 $[1, f_2 \dots f_{2^n}]$。如有需要，可对其进行沃尔什-哈达玛变换，将其转换为概率分布，并投影到概率单纯形中的最近点。

如果 2^n 不是易于处理的数量，就将比特模式边缘化为易于处理的片段，并使用由此得到的

边缘概率分布来确定所选模型的参数。关于如何将（经验）边缘概率与无向图模型的模型参数联系起来，文中进行了详细讨论，见 [47, 第七节]；我们将在附录中更详细地说明如何为我们的模型进行参数估计，见附录F。

通过扩展需要纳入辅助量子比特测量和重置的量子电路，即可纳入对辅助量子比特的测量。不过需要谨慎处理，因为只有在两轮稳定子制备之后才能进行此类测量和重置（这与表面码的实际运行不同，实际运行中每轮稳定子制备后都会进行测量和重置）。先在不进行测量和重置的量子电路上开展实验，再在进行测量和重置的量子电路上开展实验，即可像交错基准测试那样提取与测量和重置相关的噪声。

附录 D：数据分析

将分析方法应用于稳定子制备电路的核心思路，是利用这类电路一轮操作的自反演特性，实现 [56] 中描述的协议。正如该论文所述，该协议适用于任意满足 A^2 且 $APA^\dagger$ 为克利福德群元素的“门”A（此处 P 为泡利算符）。在本例中，一轮稳定子制备电路可视为一个大型多量子比特门（由克利福德门组成），因而满足这些条件。具体而言，令 $\mathcal{S}$ 表示一轮稳定子制备电路，$\Lambda_{\mathcal{S}}$ 表示该轮操作上的噪声 $\widetilde{\ }$。与 $\mathcal{S}$ 中一样，我们用 $\sim$ 表示一个含噪“门”；此处它指稳定子制备电路一轮操作的含噪实现。由此可得

$$\widetilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S}\Lambda_{\mathcal{S}} \tag{D1}$$

$$\mathcal{S}\mathcal{S} = I \implies \mathcal{S} = \mathcal{S}^\dagger \tag{D2}$$

其中，在第一行中，我们任意地将噪声写在了门的右侧。（这不会影响任何结果。）

我们用 C_j 表示一系列 n 单量子比特门，下标表示一组单量子比特克利福德门的 j^{th} 次抽样，而 n 是用于实现一轮表面码所需的量子比特数（包括数据量子比特和辅助量子比特）。$\mathcal{C}$ 表示 C 所有可能取值的集合，$|\mathcal{C}|$ 是该集合的大小。类似地，P_j 表示 n 单量子比特泡利门，$\mathcal{P}$ 和 $|\mathcal{P}|$ 具有类似的含义。

用这种记法，协议的一轮如下所示：

$$\langle 0|^{\otimes n} C_{\text{inv}} \dots C_{j+1}\tilde{\mathcal{S}}P_{j+1}\tilde{\mathcal{S}}C_j\tilde{\mathcal{S}}P_j\tilde{\mathcal{S}}\dots|0\rangle^{\otimes n} \tag{D3}$$

还需注意以下三点：1）我们忽略了泡利门和单量子比特克利福德门各轮次中的噪声；与完整一轮表面码/稳定子制备电路中的噪声相比，这些噪声微不足道；在可能的情况下，转译器会将它们编译为物理实现的量子门；2）泡利门可以穿过一轮稳定子制备电路，变换为其他泡利门（因为该电路由克利福德门组成），即

$$P\mathcal{S} = \mathcal{S}P' \tag{D4}$$

以及 3）序列 $P\mathcal{S}$（即一轮完美泡利门操作后接一轮完美稳定子制备电路）是一个酉 1-设计。这意味着，对噪声信道施加 $P\mathcal{S}$共轭，并对所有泡利门取平均，将消除噪声中的相干性，使其化为泡利信道，即

$$\frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{P\in\mathcal{P}} P\ \tilde{\mathcal{S}}\ P'\ \mathcal{S} = = \frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{P\in\mathcal{P}} P\ \mathcal{S}\ \Lambda_{\mathcal{S}}\ \mathcal{S}\ P \tag{D5}$$

$$= \frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{P\in\mathcal{P}} (P\ \mathcal{S})\ \Lambda_{\mathcal{S}}(P\ \mathcal{S})^\dagger \tag{D6}$$

$$= \Lambda_{P\mathcal{S}} \tag{D7}$$

其中，在公式 (D5) 中，P' 的选取使其能够与 $\mathcal{S}$ 对易，从而变为 P；在公式 (D6) 中，我们利用了这样一个事实：对于泡利门以及稳定子制备电路的一轮，它们都等于自身的逆矩阵，见公式 (D2)。这里，$\Lambda_{P\mathcal{S}}$表示表面码单轮上的泡利随机化噪声信道，它是一个泡利信道。

有了这些，我们现在可以分析所提出的协议。该协议的重复部分如下：

$$C_{j+1}\tilde{\mathcal{S}}\ P_{j+1}\ \tilde{\mathcal{S}}\ C_j = C_{j+1}\ \mathcal{S}\ \Lambda_{\mathcal{S}}P_{j+1}\mathcal{S}\ \Lambda_{\mathcal{S}}\ C_j \tag{D8}$$

现在，我们可以将 P' 定义为 $P_{j+1}\mathcal{S} = \mathcal{S}P'$，并将$C'_{j+1}$ 定义为 $C_{j+1} = C'_{j+1}P'$。注意，如果随机选择了 C_{j+1}，那么 C'_{j+1} 也是一个随机的克利福德门。于是

$$C_{j+1}\ \mathcal{S}\ \Lambda_{\mathcal{S}}P_{j+1}\mathcal{S}\ \Lambda_{\mathcal{S}}\ C_j \tag{D9}$$

$$= C'_{j+1}\ P'\ \mathcal{S}\ \Lambda_{\mathcal{S}}P_{j+1}\mathcal{S}\ \Lambda_{\mathcal{S}}\ C_j \tag{D10}$$

$$= C'_{j+1}\ (P'\mathcal{S})\ \Lambda_{\mathcal{S}}\ (\mathcal{S}P')\ \Lambda_{\mathcal{S}}\ C_j. \tag{D11}$$

最后，我们可以将 C'_{j+1} 写为 $C''_{j+1}C_j^\dagger$

$$C''_{j+1}(C_j)^\dagger\big[\ (P'\mathcal{S})\ \Lambda_{\mathcal{S}}(\mathcal{S}P')\Lambda_{\mathcal{S}}\ \big]C_j, \tag{D12}$$

这使我们能够对噪声进行泡利随机化，并将其嵌入噪声的克利福德随机化中（对足够多的序列取平均时）。这种随机化的确切性质在 [56]中进行了详细分析。有人可能会问，为什么不直接使用若干轮单量子比特克利福德门来对噪声进行局部平均，而要采用上文分析的交替克利福德轮次和泡利轮次。原因在于，虽然单量子比特克利福德门确实可以穿过奇数轮表面码，但所得的克利福德门已不再属于同步单量子比特克利福德门群，而是由若干多量子比特克利福德门组成。沿着量子电路追踪这一过程，最终会得到一个多量子比特反演门，从而大幅削弱所测量的信号。

附录 E：局部平均噪声信道

局部平均噪声信道的含义在 [48],中得到了充分探讨，该文建立在 [47]中的证明之上。不过，为求完整，我们在此总结相关结果。众所周知，对从特定群中抽取的门序列所产生的观测分布取平均，会消除相干性，并以取决于所用群的方式对噪声取平均。这通常被称为对噪声进行“随机化”。参考文献 [43]对此进行了详细探讨。如果所用群是泡利群，那么对噪声进行随机化后，在重复的随机序列上取平均，所得结果等价于泡利噪声信道，即所有相干性均被消除的噪声。如果所用群是完整的克利福德群，那么噪声会变成一个保真度与原信道相同的量子退极化信道 [76], ，这是随机基准测试 [39]的关键要素之一。使用单量子比特克利福德门对噪声进行随机化，相当于对噪声取平均，使一个 n量子比特噪声信道的不同特征值数量，从泡利信道的 4^n个不同特征值减少到 2^n 个不同值。其实现方式是对泡利噪声进行局部平均。例如，在双量子比特信道中，泡利门 IX、 IY 和IZ 取平均，泡利门 XI、 YI 和 ZI 取平均，其余9个双量子比特泡利门则取平均。在这种情况下，可以通过测量 II、 IZ、 ZI 和 ZZ泡利门的特征值，恢复4个不同的特征值（2^2）。具体做法是观测相应的测量结果（它们构成一个含4种结果的概率分布），然后对该概率分布应用沃尔什-哈达玛变换。沃尔什-哈达玛变换是一种傅里叶变换，可在概率分布（可能是稀疏的）与信道的稠密特征值基之间相互转换（详情另见 [47] ）。

附录 F：因子参数估计

这里我们阐述如何利用局部平均噪声分布，可扩展地构建伊辛模型等马尔可夫网络。正如前文所述，对于具有 n 个数据量子比特的设备，这只是一个大小为 2^n 的经典概率分布。考虑定义在 n 个比特 $\boldsymbol{x} = x_1 x_2 \ldots x_n$ 上的此类分布，我们可以将其写作 $p(x)$。我们的目标是高效地表示这一分布。一种广为人知的方法是将其建模为无向图模型或吉布斯随机场 [77]。这里的概率分布与因子图中“变量”节点上的变量相关，而相互作用则位于“因子”节点上，用于描述如何耦合这些变量，具体如下。

这类图模型背后的基本假设是全局马尔可夫性质，它体现在每个特定因子图的结构中 G。在这样的图中（例如图8中的 (a)），我们将每个变量 x_j与一个数据量子比特关联，并将其标记为 x_j。“因子”节点连接这些变量，并以因子为标签，此处为 ψ_i。这些节点描述了根据全局马尔可夫性质， p 中可能存在的相关性。

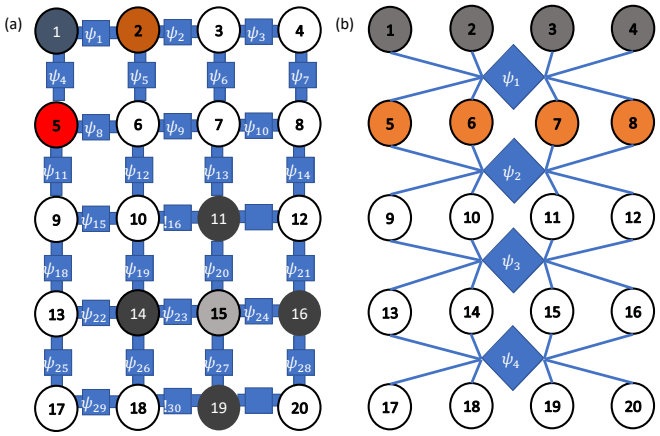


图 8. 这里展示了伊辛模型因子图和 CG1D 图中内置的马尔可夫毯假设。正如正文所述，给定与某个量子比特共享因子的量子比特后，该量子比特上的错误与所有其他量子比特上的错误相互独立。变量是数据量子比特，在图中对应圆形的“变量”节点，标记为 1 至 20。方形（对角线）节点表示“因子”节点。在图中，我们用不同颜色标记了部分量子比特，以便于识别下文的讨论。(a) 量子比特 1（深灰色）与两个因子（ψ_1 和 ψ_3）相连。这些因子所连接的其他量子比特只有量子比特 2 和 5（红色）。因此，该假设认为，给定量子比特 2 和 5 上的错误后，量子比特 1 上的错误与其他量子比特上的错误（量子比特 2 和 5 除外）相互独立。同样，量子比特 15（浅灰色）的马尔可夫毯由量子比特 11、14、16 和 19（黑色）组成。这意味着，模型内置的假设是：若已知量子比特 11、14、16 和 19 上的错误，则量子比特 15 上的分布与其他量子比特无关。该图需要 31 个因子，每个因子指定一个 2^2 分布，这意味着模型需要 124 个参数。(b) 正文中将该模型称为粗粒化一维（CG1D）模型，其中我们将表面码简化为一维图。在这种情况下，独立性假设可以从上到下读取：给定量子比特 5、6、7 和 8（橙色）后，量子比特 1、2、3 和 4（浅灰色）与量子比特 9 至 20 相互独立。该模型只有四个因子，但每个因子都有一个 2^8, 分布，这意味着要完整指定该模型需要 1024 个参数。这是唯一具有指数级缩放的模型；其规模随网格宽度呈指数增长。我们注意到，宽度和高度因子分解的选择是任意的；在此例中，我们选择宽度，因为这样因子会更小。实际上，这对所呈现的结果影响甚微。

为定义全局马尔可夫性质，假设在两组变量 $\boldsymbol{x}_A$ 和 $\boldsymbol{x}_B$ 之间存在一个包含变量 $\boldsymbol{x}_S$ 的顶点分离集 S （即 G 中连接 A 和 B 的每条路径都至少经过 S 中的一个顶点），则全局马尔可夫性质表明：

$$p(\boldsymbol{x}_A, \boldsymbol{x}_B | \boldsymbol{x}_S) = p(\boldsymbol{x}_A | \boldsymbol{x}_S) p(\boldsymbol{x}_B | \boldsymbol{x}_S) \tag{F1}$$

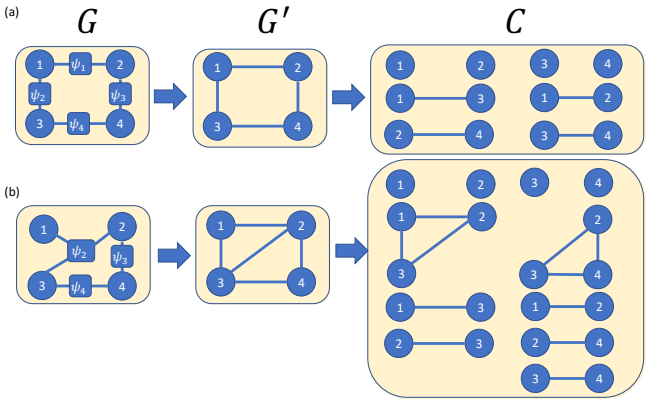


图 9. 这里展示了如何将因子图转换为相关团的集合，示例为两种不同类型的因子图。第一步，将连接到同一因子的各个节点彼此相连，并移除该因子。第二步，创建所有诱导子图的集合。

对于每个 A 和 B 以及任意分离集 S。也就是说，在给定分离子集 $\boldsymbol{x}_S$的取值后，关于 x_A 和 x_B 的边缘分布条件独立。我们在图 8 中通过示例对此进行说明。

Hammersley-Clifford 定理 [77] 指出，对于因子图 G，任何满足全局马尔可夫性质的严格正概率分布，都可以按其 G因子节点进行分解，例如图 8 (a) 所示的图。也就是说，$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{Z}\prod_k \psi_k$，其中 ψ_k 是因子函数，Z 是归一化因子，而每个因子节点对应的因子 ψ_k都是正函数。

由于函数 ψ_k 为正，它们可以（而且通常确实会）重新参数化为 $\psi_k = \exp(H_k)$，其中 H_k 是一个实值函数（抽象的“哈密顿量”），且仅是至多一个因子邻域内变量的函数。在这种情况下，归一化因子 Z可解释为总哈密顿量 $H = \sum_k H_k$在逆温度 $\beta = 1$下的吉布斯分布的配分函数。这种物理学表述很有帮助，不过我们还是要提醒伊辛模型爱好者：这里的变量是比特，$x \in \{0, 1\}$，因此基于自旋变量的一些直觉在此情境下可能会产生误导。

哈密顿量的一种特别方便的形式H 是通过以下构造，将其表示为变量节点乘积之和。对于因子图中的每个因子 k，我们都可以用图中的局部补图替换该因子节点及其邻域。也就是说，所有与该因子k 相连的变量节点都连接成一个完全图（因为它们之前彼此不相邻），而该因子则与图断开连接。我们将这个修改后的因子图（此时舍弃已断开的因子节点）称为 G'。最后，令 C 为 G' 中的所有团构成的集合，也就是所有完全诱导子图的集合。我们在图 G 中展示从 G' 到 C 以及团集合的变换，见图9。采用这一记号，对于某些实数，我们有

J_b 一般形式

$$H(\boldsymbol{x}) = -\sum_{b\in C} J_b \prod_{a\in b} x_a \,. \tag{F2}$$

前面的负号纯粹是一种约定。这些项各自充当局部“耦合”，作用于团 b，并且每当 b 中的所有变量都等于 1 时，就会使能量降低 J_b。

从这种映射中我们还可以看出，$H(\mathbf{0}) = -J_\emptyset$是一个常数“能量平移”。既然已经定义了配分函数，这个因子就是多余的，可以设为零。采用这一约定，我们得到结果：$p(\mathbf{0}) = \frac{1}{Z}\prod_k \exp(H(\mathbf{0})) = \frac{1}{Z}$。或者，我们也可以省略配分函数（设定 $Z = 1$），并将 $J_\emptyset = -\log p(\mathbf{0})$保留为吉布斯系综的“自由能”。在计算中，这第二种约定有时便于记账。无论采用哪种方式，鉴于 J_b，这个归一化因子通常很难计算。不过，对于量子计算机中极低的错误率，或许可以根据采样数据直接估计 $p(\mathbf{0})$。遗憾的是，当系统规模足够大时，该值最终会变得指数级小，因此无法通过采样进行实际估计。

因此，我们将目标放宽为指定整个概率分布 $p(\boldsymbol{x})$（在归一化意义下）；这现在等同于指定耦合常数 J_b的值，每个非空团 b inG'对应一个耦合常数。如果邻域大小至多为 d的因子最多有 f 个，那么整个概率分布至多由 $f2^d$ 个实数指定，这远少于我们关注的情形中的 2^n；在该情形下，f 与n 成线性关系，而 d 为常数。

如何实例化这些因子，即在已知（或假设）因子图 G 的情况下学习参数 J_b？首先考虑一组变量$\boldsymbol{x}_r$，其中 $r \in C$。假设我们考虑这样一个事件：r之外的每个变量（记为 $\boldsymbol{x}_{r^c}$）都为零。那么，任何包含 r之外变量的 x_a 乘积都会消失。也就是说，如果 $b \not\subseteq r$，那么 $\prod_{a\in b} x_a$ 至少包含一个 0。此时，对数概率可大幅简化为

$$-\log p(\boldsymbol{x}_r, \mathbf{0}_{r^c}) = \sum_{b\in C} J_b \prod_{a\in b} x_a \Big|_{\boldsymbol{x}_{r^c}=\mathbf{0}} \tag{F3}$$

$$= \sum_{b\subseteq r} J_b \prod_{a\in b} x_a \,. \tag{F4}$$

这就得到一组线性方程：当我们遍历 $2^{|r|}$ 比特串 $\boldsymbol{x}_r$时，它们将对数概率与耦合常数联系起来。举例来说，假设 $|r| = 2$，并将 $p(x_1x_2, \mathbf{0})$ 记作 $p(\boldsymbol{x}_r, \mathbf{0}_{r^c})$。那么我们会得到以下四个方程

$$\begin{aligned}
-\log p(00,\mathbf{0}) &= J_\emptyset \\
-\log p(01,\mathbf{0}) &= J_\emptyset + J_{01} \\
-\log p(10,\mathbf{0}) &= J_\emptyset + J_{10} \\
-\log p(11,\mathbf{0}) &= J_\emptyset + J_{01} + J_{10} + J_{11} \,.
\end{aligned} \tag{F5}$$

这里我们采用这样的约定：子集 b 的标签就是一个比特串，其中 $\mathbf{1}$ 表示集合成员关系的指示函数。

现在我们对这个问题做两项重要的简化。一般而言，概率 $p(\boldsymbol{x}_r, \mathbf{0}_{r^c})$ 会非常小，即使在独立噪声的情况下也是如此。即使 $|r|$ 是一个较小的常数，也无法通过采样高效地学习这些概率，因为它们会随着总比特数 n 的增加而呈指数衰减。因此，我们注意到，可以利用我们放宽后的目标——在归一化意义下进行学习——在等式两边加上 $\log p(\mathbf{0}_{r^c})$。根据贝叶斯定理，$p(\boldsymbol{x}_r, \mathbf{0}_{r^c}) = p(\boldsymbol{x}_r|\mathbf{0}_{r^c})p(\mathbf{0}_{r^c})$，因此左侧变为一个条件概率，即 $-\log p(\boldsymbol{x}_r|\mathbf{0}_{r^c})$。令 ∂r 表示 r 邻域中的节点集合。那么，∂r 构成一个分离集，而利用全局马尔可夫性质可进一步将左侧化简为 $-\log p(\boldsymbol{x}_r|\mathbf{0}_{\partial r})$。如果每个因子的大小都有界，且每个变量参与的因子数量都有界，那么这个边界集 ∂r 的大小也将有界。因此，左侧变为涉及有界数量变量的条件概率分布，可以通过经验估计以合理的效率求得。为使右侧平衡，项 $J_\emptyset = -\log p(\mathbf{0})$ 将变为 $J_{\mathbf{0}_r} := -\log p(\mathbf{0}_r|\mathbf{0}_{\partial r})$。请注意，$J_{\mathbf{0}_r}$ 并未出现在我们的哈密顿量方程 (F2) 中，因此在某种意义上，我们对它的估计是一个干扰参数。

总之，我们现在得到一个等价的方程组，左侧各量可以进行合理的经验估计值；以 $|r| = 2$ 为例，估计值为

$$\begin{array}{rcl} -\log p(00|\mathbf{0}_{\partial r}) &=& J_{00} \\ -\log p(01|\mathbf{0}_{\partial r}) &=& J_{00} + J_{01} \\ -\log p(10|\mathbf{0}_{\partial r}) &=& J_{00} + J_{10} \\ -\log p(11|\mathbf{0}_{\partial r}) &=& J_{00} + J_{01} + J_{10} + J_{11}\,. \end{array} \tag{F6}$$

我们只需针对 $\boldsymbol{x}_r \neq \mathbf{0}_r$ 求解这些关于 $J_{\boldsymbol{x}_r}$ 的方程。

采用这种二进制排序，我们定义一个矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\otimes |r|}, \tag{F7}$$

这样，我们的方程通常具有以下简洁形式

$$-\log p(\boldsymbol{x}_r|\mathbf{0}_{\partial r}) = A J_{\boldsymbol{x}_r}\,. \tag{F8}$$

注意，A 可逆，其逆矩阵为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{\otimes |r|}. \tag{F9}$$

因此，子集 r 中的耦合的一般解为

$$J_{\boldsymbol{x}_r} = -A^{-1}\big(\log p(\boldsymbol{x}_r|\mathbf{0}_{\partial r})\big)\,. \tag{F10}$$

将条件概率替换为条件概率的经验估计值，我们可以直接得到任意给定团 r 中耦合常数的经验估计值。

关于这一估计过程的理论精度，需要说明一点。首先，A 的条件数为 $\big(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\big)^{|r|} \approx 2.61^{|r|}$，因此当 $|r|$ 较大时，线性求逆的条件会变差。其次，为了使取对数后的误差仍处于可接受范围，对 $-\log p$ 进行有用的估计，需要以相对精度 $p(1 \pm \epsilon)$ 估计 p。当 p 较小时，这一过程代价高昂。尽管存在这些理论上的挑战，我们通过实验证实，该过程的表现相当出色。我们将寻找具有更好保证的估计量留待未来工作。

当因子图是一维的，或者如图 8(b) 所示，在经过某种粗粒化后为一维时，估计问题会大幅简化。在这种情况下，只需估计一维几何结构上最近邻之间的边缘分布（而非条件边缘分布）。这可以通过反复应用贝叶斯定理并结合全局马尔可夫性质得到，下面将对此进行说明。考虑变量链 $\boldsymbol{x}_{1:n} = x_1 x_2 \ldots x_n$，这些变量不一定是二元变量，因为它们可能源自某种粗粒化。应用贝叶斯定理，继而利用全局马尔可夫性质，可得

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}_{1:n}) &= p(x_1|\boldsymbol{x}_{2:n})p(\boldsymbol{x}_{2:n}) \\ &= p(x_1|x_2)p(\boldsymbol{x}_{2:n}) \\ &= \frac{p(x_1, x_2)}{p(x_2)} p(\boldsymbol{x}_{2:n})\,. \end{aligned}$$

现在，我们可以从 x_2 开始，将这一思路递归地应用于链中的其余部分，从而得到

$$p(\boldsymbol{x}_{1:n}) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{p(x_k, x_{k+1})}{p(x_{k+1})} \times p(x_n)\,.$$

这样，对于一维结构，估计模型参数时可以进一步提高效率，因为现在只需根据最近邻边缘分布的（估计值）即可重建这些参数。

对于表面码所提出的这类模型，计算任何特定因子最多涉及 8 个量子比特。如前所述，对于局部平均噪声，只需进行一次“RB 风格”的实验，即可确定所有可能的 8 量子比特分组的联合分布。尽管这项计算以底层概率分布确实满足全局马尔可夫全局性质为前提（设备中的实际噪声未必如此），但参考文献 [78] 表明（我们的数值结果也显示，在实验环境下）这一过程的性能会平稳退化；也就是说，计算得到的近似值确实能够近似底层概率分布。需要注意的是，虽然我们可以填充各个因子，但计算配分函数（为图归一化，使其成为概率分布所需）仍然需要进行随规模呈指数增长的计算。不过，当我们只需知道相对概率而不需要知道具体概率时，

这并不是问题。重要的是，这意味着在大多数感兴趣的情况下，我们可以以可扩展的方式从模型中采样。

附录 G：协方差界

假设我们有两个有限概率分布 p和 q。现在考虑一个随机变量 X，它是一个实向量，其分布遵循 p 或 q。令 X 的协方差矩阵以及 X 相对于分布 p 的均值为

$$\begin{aligned}\Sigma_p &= \mathbb{E}_p\big[(X-\mu_p)(X-\mu_p)^T\big] \\ &= \mathbb{E}_p\big[XX^T\big] - \mu_p\mu_p^T\,, \qquad \text{(G1)} \\ \mu_p &= \mathbb{E}_p[X]\,. \qquad \text{(G2)}\end{aligned}$$

我们希望根据 p 和 q 之间的距离以及 X_j某种长度度量，证明差值 $\|\Sigma_p-\Sigma_q\|$的算子范数的一个上界。我们有以下定理。

定理 1。令 $C=\mathrm{conv}\{X_j|j\in S\}$ 为向量 X_j在 $S=\mathrm{supp}(p-q)$中的凸包，其中 $p-q$为支撑集。令 $D=\mathrm{diam}(C)$ 为 C 在欧几里得距离下的直径，并令 $T=T(p,q)=\frac{1}{2}\|p-q\|_1$为 p 与 q之间的统计（*1*-范数）距离。那么我们有

$$\|\Sigma_p-\Sigma_q\| \le T\big(D^2-\tfrac{1}{4}\|\mu_p-\mu_q\|^2\big)\,. \qquad \text{(G3)}$$

此外，TD^2 无法通过任何常数因子进一步改进。

证明。我们引入一些新变量，

$$\begin{aligned}m &= \frac{p+q}{2}\,, \qquad \text{(G4)} \\ \mu &= \mathbb{E}_m[X] = \frac{\mu_p+\mu_q}{2}\,, \qquad \text{(G5)} \\ \delta &= \frac{\mu_p-\mu_q}{2}\,, \quad \text{and} \qquad \text{(G6)} \\ Y_j &= X_j-\mu\,, \qquad \text{(G7)}\end{aligned}$$

使得 $\mu_p=\mu+\delta$、$\mu_q=\mu-\delta$ 和 $\mathbb{E}_m[Y]=0$。用这些变量表示，我们有

$$\begin{aligned}&\Sigma_p-\Sigma_q \\ &= \mathbb{E}_p\big[(Y-\delta)(Y-\delta)^T\big] - \mathbb{E}_q\big[(Y+\delta)(Y+\delta)^T\big] \\ &= \sum_j (p_j-q_j)Y_jY_j^T - \sum_j (p_j+q_j)(\delta Y_j^T + Y_j\delta^T) \\ &\quad + \sum_j (p_j-q_j)\delta\delta^T \\ &= \sum_j (p_j-q_j)Y_jY_j^T\,. \qquad \text{(G8)}\end{aligned}$$

最后一步中，中间项消失了，因为 $\mathbb{E}_m[Y]=0$；最后一项则恒为零，因为 $\sum_j(p_j-q_j)=0$。现在我们将总和分成以下两组：

$$j_+=\{j:p_j>q_j\}\,, \quad j_-=\{j:p_j<q_j\}\,, \qquad \text{(G9)}$$

因此，对两边取范数可得

$$\begin{aligned}&\|\Sigma_p-\Sigma_q\| \\ &= \Big\|\sum_j (p_j-q_j)Y_jY_j^T\Big\| \\ &= \Big\|\sum_{j\in j_+}|p_j-q_j|Y_jY_j^T - \sum_{j\in j_-}|p_j-q_j|Y_jY_j^T\Big\| \\ &= \|M_+-M_-\|\,. \qquad \text{(G10)}\end{aligned}$$

在最后一个等式中，我们引入的矩阵 $M_\pm$ 都是半正定的，$M_\pm\ge 0$，因为它们是半正定矩阵的正系数组合。但对于任意两个半正定矩阵 $M_\pm$，有

$$\begin{aligned}&\|M_+-M_-\| \\ &= \max_{v:\|v\|=1}|v^T(M_+-M_-)v| \le \max\{\|M_+\|,\|M_-\|\}\,. \qquad \text{(G11)}\end{aligned}$$

不失一般性，我们假设 $\|M_+\|\ge\|M_-\|$。由于 p 和 q 都是概率分布，因此有

$$\sum_{j_+}|p_j-q_j| = \sum_{j_-}|p_j-q_j| = \frac{1}{2}\|p-q\|_1 = T(p,q)\,. \qquad \text{(G12)}$$

利用式G11中的不等式、三角不等式、霍尔德不等式以及式G12，可得

$$\begin{aligned}\|\Sigma_p-\Sigma_q\| &\le \max\{\|M_+\|,\|M_-\|\} \qquad \text{(G13)} \\ &\le \sum_{j\in j_+}|p_j-q_j|\,\big\|Y_jY_j^T\big\| \qquad \text{(G14)} \\ &\le \sum_{j\in j_+}|p_j-q_j|\max_{k\in S}\big\|Y_kY_k^T\big\| \qquad \text{(G15)} \\ &= T\max_{k\in S}\big\|X_k-\mu\big\|^2\,. \qquad \text{(G16)}\end{aligned}$$

从几何上看，$\max_{k\in S}\|X_k-\mu\|$ 是向量 X_k 与某个点 μ 之间的最大距离，该点必须位于它们的凸包 C内。显然，这个距离不超过 D，即 C的直径，从而得到较弱的界 $\|\Sigma_p-\Sigma_q\|\le D^2T$。

为了得到这个定理更精确的表述，我们还需要一个观察。定义 $X^\star=X_{k^\star}$，其中$k^\star=\arg\max_{k\in S}\|X_k-\mu\|$ 是任意一个最大化项的指标（若不止一个，我们任意选取一个）。由于 C的直径为 D，因此还必须有 $r_p:=\|X^\star-\mu_p\|\le D$和 $r_q:=\|X^\star-\mu_q\|\le D$。但距离 $\|\mu_p-\mu_q\|$是固定的，因此我们关心的距离

$r := \|X^\star - \mu\|$不可能达到 D 那么大，除非 $p = q$，因为到中点的距离通常更短。实际上，最大距离将是由三个点 μ_p、μ_q、$X^\star$构成的三角形的中线。初等几何表明，这个距离的平方有如下界

$$r^2 = \|X^\star - \mu\|^2 = \frac{2r_p^2 + 2r_q^2 - \|\mu_p - \mu_q\|^2}{4} \le D^2 - \frac{\|\mu_p - \mu_q\|^2}{4}. \quad \text{(G17)}$$

至此，较强不等式的证明完成。

为说明上界无法对任意常数 $c < 1$加强为 cTD^2，考虑以下例子。对于概率分布 $p = (1, 0), q = (1-a, a)$（其中 $1 \ge a \ge 0$），我们有

$$T = \tfrac{1}{2}\|p - q\|_1 = a\,. \quad \text{(G18)}$$

若考虑标量随机变量 $X_0 = 0, X_1 = D$，那么相对于每个概率分布的协方差就是方差。只有 q 给出的方差非平凡，其值为 $D^2a(1-a)$，因此该界在 a的主导阶上确实是紧的。 □

在重构 $(n \times n)$ 泡利协方差矩阵的情形下，我们保证 p 与其估计值 q 之间在 1-范数下收敛，其中 p为待估对象；向量 X_j的直径为 $D = \sqrt{n}$，这里 n 是量子比特的数量。因此，我们使用初始密度估计报告的协方差估计是一致的，不过可能存在一定偏差。此外，在这种情况下，定理中证明的上界缩放很可能只是一个假象，原因如下。当 j将标签对应为高权重错误时，p_j 和 q_j 都会变小，因此在求和中这些取值对应的 $\|X_j\|$ 会受到抑制。该界是最坏情况界，无法反映这一点。只需让它对权重呈 $1/w$ 依赖，就能消除关于 n的缩放，因此实际上很可能不存在这种对 n 的依赖。

最后我们指出，无法仅根据随机变量的协方差矩阵，给出比特串上两个有限概率分布之间全变差距离的上界。

设 q 为所有长度为 $n = 2^k$ 的字符串上的均匀分布，设 p 为从哈达玛矩阵各行及其补码得到的 $2n$ 个字符串上的均匀分布。容易计算得出，p 与 q 之间的 TVD 为 $1 - n2^{1-n}$。但是，p 与 q 之间的协方差恒为 0。事实上，一阶矩和二阶矩都为零。

附录 H：用数据证明伊辛模型的合理性

如正文所述，对于这台特定设备，伊辛模型无法捕捉设备中似乎存在的一些较长程相关错误。这就引出了一个问题：我们能否绘制另一种二因子图（例如），将 .....连接起来

Data 量子比特	替代方案 量子比特	CE 替代方案	条件熵伊辛模型	伊辛量子比特
6	[5, 7, 10, 11]	0.8166	0.8167	[5, 7, 2, 10]
13	[9, 14, 18]	0.874	0.875	[9, 14, 17]
18	[13, 14, 17]	0.797	0.799	[14, 17, 19]

表 II. 对于设备中的每个数据量子比特（按图 4 所示顺序标记），从图中读取伊辛模型下与该量子比特相连的量子比特。使用条件熵（CE）评估所有包含相同数量数据量子比特的可能组合，并找出取值最低的量子比特。除上述所列情况外，它们与伊辛模型拟设相同。我们注意到，即使在这些情况下，每个“最优”屏蔽集中的量子比特也只有一个与伊辛模型中的不同，并且所有情况下，最优量子比特与伊辛拟设之间的 CE 差异都小于 0.5%。通过自助法确定误差条，结果显示所有情况下的 95%置信水平都小于 $\pm 2 \times 10^{-5}$。

量子比特 1 和 9，而不是 1 和 2）是否能更好地表示底层概率分布?

鉴于我们可以获取完整的分布，事实上，这是一个我们可以尝试回答的问题。

对于（经典）随机变量 $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$，$\mathcal{Y}$ 给定 $\mathcal{X}$ 的条件熵 (CE) 定义如下：

$$H(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) = -\sum_{x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}} p(x,y) \log \frac{p(x,y)}{p(x)} \quad \text{(H1)}$$

并量化了在已知随机变量 $\mathcal{X}$ 的取值时，描述随机变量 $\mathcal{Y}$ 的结果所需的信息量。我们可以利用这一度量，确定在图中相互连接的最优量子比特。$\mathcal{Y}$ 的条件熵越低，与 $\mathcal{X}$ 的连接就越“强”。如果我们规定每个特定量子比特 (q) 最多允许有 n 条连接，那么对于每个候选量子比特 (q)，我们都可以搜索哪些 n 量子比特组合能使条件熵最低。这些就是我们可以考虑在图中连接的量子比特。

如果我们决定将“已连接”量子比特的数量限制为与伊辛模型中的数量相同（例如，对于角落处的量子比特，我们希望连接到另外两个量子比特；对于中间的量子比特，则允许其连接到另外四个量子比特），那么在当前设备上，通过穷举搜索来寻找最适合连接在一起的量子比特是完全可行的。

执行这一过程后，我们发现提取的数据证实，伊辛模型中的连接是最强的连接，只有三种例外情况，这些情况列于表II中。即使在这些例外情况下，“最优”连接也与伊辛模型中的连接极为接近：所有情况下都只相差一个量子比特，且其条件熵与伊辛模型拟设的条件熵相差不到 0.5%。我们使用从原始数据中自助抽样得到的不同分布，将这一过程重复了 100 次（由此得到了表中所述的置信水平）。结果始终一致，为我们提供了很高的信

心，表明基于量子比特物理位置的伊辛模型拟设是一个合理的选择。

附录 I：重构噪声信道

正如正文所述，沃尔什-哈达玛变换可用于在观测错误概率域与泡利信道特征值（或者如本文所示，局部平均信道特征值）之间进行转换。利用这一变换，即使从观测概率分布出发，也能轻松计算信道多次作用的效果。例如，信道作用两次的效果可通过将特征值平方来计算。随机基准测试中拟合衰减曲线，正是利用了这一性质。

同样，也可以轻松地对信道“部分”作用的效果进行建模。例如，将特征值开平方，即可计算出一个信道，该信道作用两次后会得到原始观测信道。回想一下，泡利信道在泡利基下的超算符表示是一个对角矩阵，其对角元素就是该信道的泡利特征值，便能最直观地理解这一点。将这些对角元素开平方后，得到的信道作用两次（即与自身相乘）便会得到原始信道。

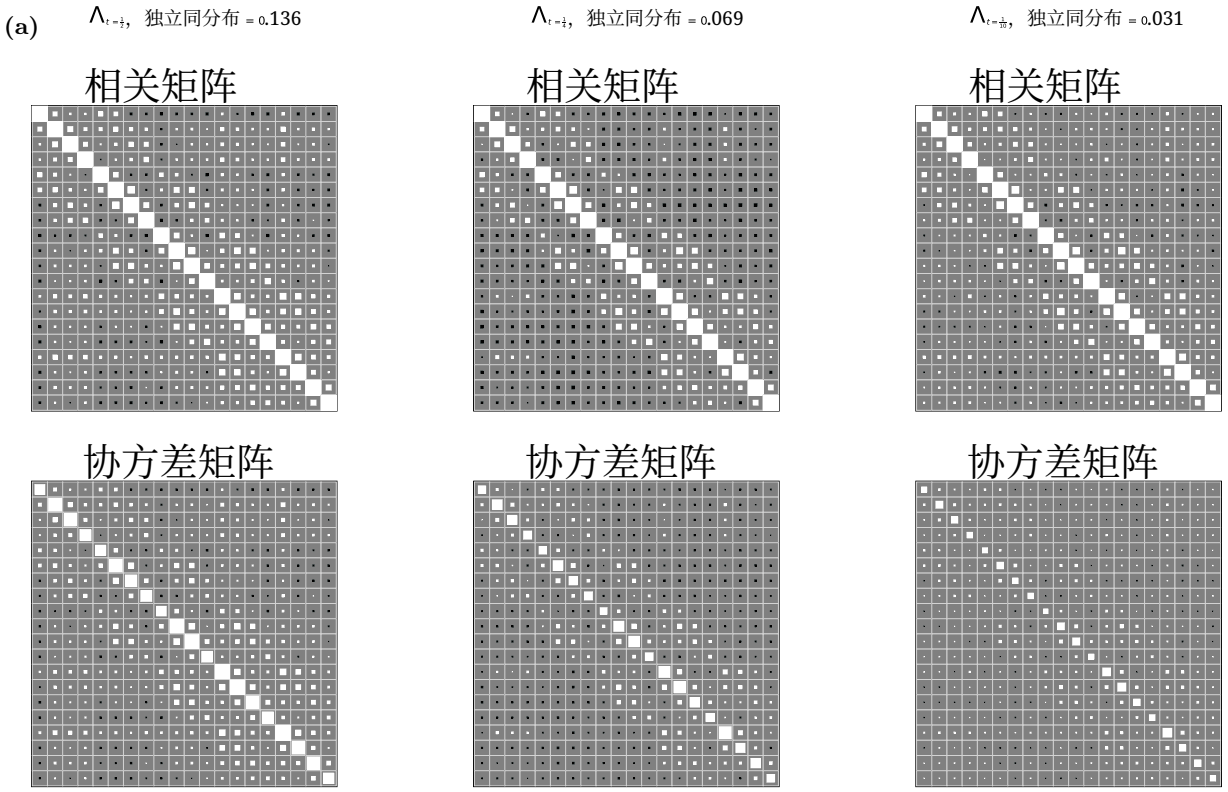
如果假设噪声由连续时间过程产生，我们便可以更精确地表述这一点。在这种情况下，令 p 为通过我们的协议测得的概率分布，并令 W 为沃尔什-哈达玛变换，则结合式（3）和式（4），可得：

$$p(t) = W^{-1} \exp(t \log(Wp)) \tag{I1}$$

如正文所述，并非所有噪声信道（包括泡利噪声信道）都能以这种方式分解。问题在于，按照式（I1）的方法构造出的对象，可能并不对应于完全正迹保持映射。实际上在实践中，尤其是考虑到量子信道的规模和数值精度问题，未经处理的变换后信道往往会出现若干很小的负“概率”。因此，作为一种实际处理方式，我们将所得概率分布投影到最近的概率单纯形上。需要再次说明的是，这样做的目的并非生成能够在设备中实现的信道，而是“构造”出错误率低于观测分布的反事实理论信道，同时尽可能保留原始测得噪声中所有“有趣”的特征和相关性。例如，图10（a）显示，这些理论信道包含的二体关联与原始观测信道以及彼此之间的二体关联大体相似。

最后，我们预期，保真度更高的噪声映射（它们代表对观测噪声映射的部分应用）中，高权重错误占总概率“预算”的比例会更低。这是因为，随着这些映射被多次应用，较低权重的错误可能会组合成较高权重的错误，例如，IX 错误和 XI 错误会组合成 XX 错误。图10(b)展示了各种噪声映射中不同权重错误的出现频率，证实了这一现象。

当我们的观测信道可能未低于阈值（即逻辑错误率高于物理错误率）时，这将使人们能够根据噪声的特性探究阈值在何处（或是否）被跨越。



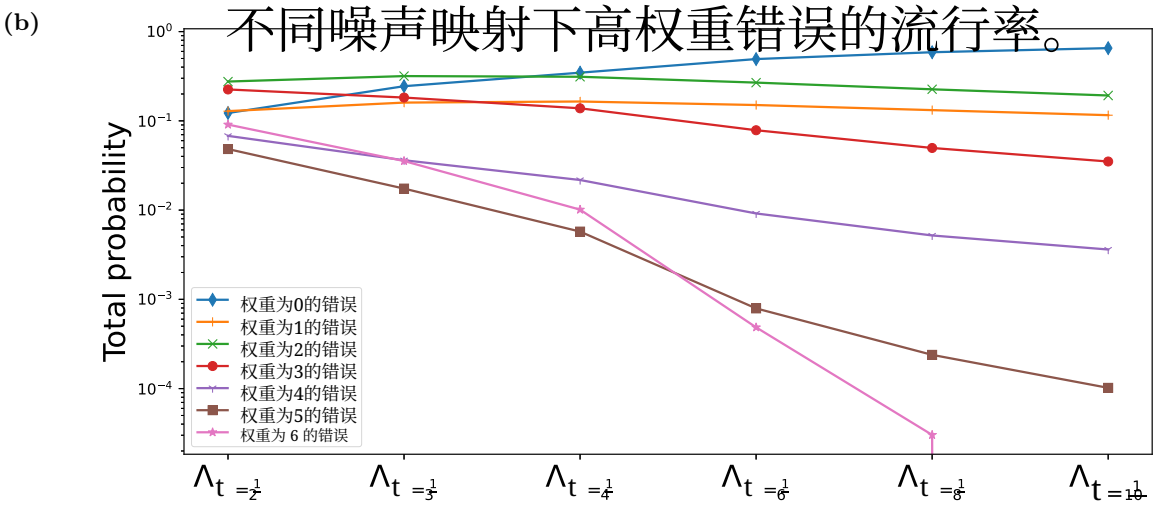


图 10. (a) 若干重构噪声信道示例的相关矩阵和协方差矩阵的欣顿图（见附录 I）。量子比特按数据量子比特 $0 \to$ 数据量子比特 19 的顺序排列。相关性/协方差的数值与方块面积相关。对于相关矩阵，完整方块的值为 1。例如，对角线上的方块全都是 1（完整的白色方块），因为每个量子比特都与自身相关。白色表示正相关，黑色表示负相关。对于协方差矩阵，量程保持不变，完整方块的值为 $= 0.18$（这是三个示例图中的最大值）。第一个示例 $\Lambda_{t=\frac{1}{2}}$ 展示了表示一轮辅助量子比特制备电路的噪声信道的相关矩阵。每个图的标题还显示了边缘化数据量子比特错误率的平均值（即简单独立同分布模型中使用的数值）。其他图展示了相同数据在 t 不同取值下的情况，例如，$\Lambda_{t=\frac{1}{4}}$ 图表示重构信道的相关矩阵；该信道应用两次后会得到与 $\Lambda_{t=\frac{1}{2}}$ 相同的信道。可以看出，随着 $t \to 0$ 增加，平均量子比特错误率会降低，但各信道的相关模式仍相当一致，且重要的是，保留了设备中有趣的噪声特征。正如预期，随着信道保真度提高，量子比特之间协方差的原始数值会降低，但其模式仍保持一致。(b) 具有特定“权重”的错误的总概率，即影响指定数量量子比特的错误。可以看出，随着 t 降低，高权重错误会减少。这符合预期，因为多次应用这些更高保真度的映射时，较低权重的错误可能会组合成较高权重的错误。不过，设备中的噪声特性使得权重为 ≥ 3 的错误即使在噪声最小的映射中仍然很常见。