arXiv:2303.00791v1 [math.CO] 1 Mar 2023

Scarf 算法与稳定婚姻

Yuri Faenza*、Chengyue He† 和 Jay Sethuraman‡

哥伦比亚大学

2023年3月3日

摘要

Scarf 算法为在向下单调多面体中寻找一种特殊顶点——支配顶点——提供了一种枢轴过程。本文研究了将 Scarf 算法用于在二分图中寻找稳定匹配时的表现。首先，本文证明 Scarf 算法可以在多项式时间内实现，从而在重要的应用场景中首次给出了关于其运行时间的肯定结果。其次，本文展示了一个无限实例族：无论采用何种枢轴规则、运行时间如何，Scarf 算法输出的匹配都来自所有稳定匹配中一个规模呈指数级小的子集，由此揭示了该方法在结构上的弱点。

1 引言

数十年来，算法与运筹学研究领域一直在研究稳定匹配理论。这项研究催生了多种算法，它们往往为同一问题提供互补的解决思路。例如，当边上给定权重时，可以通过组合算法、 [22], 任何线性规划求解器 [33, 35, 42], ，或将二者结合起来 [18]，在二分（婚姻）实例中找到总权重最大的稳定匹配。之后，还可以通过多种算法来解决在婚姻实例中寻找稳定匹配的问题，包括 Gale 和 Shapley 的延迟接受算法 [19], 、利用补偿链的机制 [14], 等（详见 [27] ）。

Scarf 引理 [37] 为在婚姻实例中寻找稳定匹配提供了另一种算法，其若干独特特征值得深入理解。首先，它本质上是几何方法，而大多数其他算法都是组合方法。其次，它适用于更一般的条件，远远超出了 Gale 和 Shapley 提出的经典婚姻设定。例如，它被用于为带有复杂侧约束的匹配市场设计启发式算法或（不一定是多项式时间的）精确算法，而这类问题尚无其他已知算法；此类侧约束的例子包括伴侣或预算的存在，以及满足比例性要求的需要 [7, 28, 29, 30]。Scarf 引理还被用于证明图、拟阵、偏序集和博弈理论中相关对象的存在性 [1, 2, 7]。它与 Sperner 引理 [25] 及纳什均衡 [43] 之间的联系也已得到研究。

本质上，Scarf 引理保证向下单调多面体中存在一个支配顶点（定义见第 1.1 节）。Scarf 最初给出的证明是算法性的，因为

*IEOR系，哥伦比亚大学，yf2414@columbia.edu
†IEOR系，哥伦比亚大学，ch3480@columbia.edu
‡IEOR系，哥伦比亚大学，jay@ieor.columbia.edu

它基于一条枢轴规则：从多面体的某个特定顶点出发，保证最终到达一个支配顶点。将其应用于二分图匹配多面体，可以保证婚姻实例中存在稳定匹配。将其应用于分数匹配多面体，并结合该多面体的半整数性，可以保证室友实例中存在稳定划分；这一结果最初由 Tan [38] 通过组合论证得到。然而，正如前文所述，Scarf 引理的适用范围要广泛得多：例如，将其应用于分数超图匹配多面体，可以证明超图 [2]中存在分数稳定匹配。许多无法保证存在整数解的分配问题，都可以建模为在超图 [7], 中寻找分数稳定匹配的问题，再将其舍入为整数的、近似可行的解 [29]。

然而，Scarf 结果的普适性也带来了计算代价：寻找向下单调多面体的支配顶点这一问题是 PPAD 完全的 [24]。特别地，在超图匹配多面体上，该问题仍然是 PPAD 完全的 [24], ，即使在相当受限的情形下也是如此 [12, 23]。

这些否定性结果使人们难以寻求在最一般意义下证明 Scarf 算法多项式时间收敛的方法。然而，Scarf 引理的广泛适用性要求对该算法进行更细致的分析。据我们所知，迄今为止，在任何相关情形下都尚未确立 Scarf 算法的多项式时间收敛性。这与组合学和组合优化中其他重要几何算法的诸多积极结果形成鲜明对比，其中包括割平面法 [10] 以及单纯形法等枢轴过程 [8, 31, 40]。

本文旨在通过聚焦于 Scarf 算法在婚姻模型中的应用，进一步阐明其优势与局限性。之所以限制于这一模型，有多方面原因。首先，婚姻模型可以说是 Scarf 引理成立的最重要的情形之一，而 Scarf 算法在市场设计中的应用依赖于婚姻模型的扩展 [29, 30, 28]。对于其中一些应用，我们尚不清楚能否将 Scarf 算法实现为多项式时间运行，因此，理解它们共同的特殊情形是自然的第一步。其次，计算实验表明，在其中一些市场中，Scarf 算法可以作为启发式算法使用 [7], ；因此，理解哪些底层结构能够带来较短的运行时间，是一个引人入胜且重要的问题。特别是，Biro 和 Fleiner [6] 提出了许多关于 Scarf 算法用于寻找稳定匹配时的特征的开放性问题。本文回答了其中一些开放性问题，见第 1.2 节和第 1.3 节。最后，匹配问题往往被证明处于发展可处理但又非平凡的理论与算法所需的“适当难度水平” [26]。

在深入探讨细节之前，我们先在下一节正式介绍 Scarf 引理及其相关算法，并在第 3 节中更详细地回顾它们。我们的结果将在第 1.2 节中正式陈述，相关文献将在第 1.3 节中讨论。第 2 节概述证明这些结果所用的技术，而第 5、6 和 7 节则给出完整细节。

1.1 Scarf 引理及其应用

考虑一个向下单调的 标准形式多面体 $P \subset \mathbb{R}^{(n+m)}$ ，即，

$$P = \{x \in \mathbb{R}^{n+m}_{\geq 0} : Ax = b\}, \text{ with } A = (I|A'), \tag{1}$$

其中 I 是 $n \times n$ 单位矩阵， $A \in \mathbb{Q}^{n\times(n+m)}_{\geq 0}$ 、 $A' = (a'_{i,\ j})$，以及 $b \in \mathbb{Q}^n_+$。我们称上述 A 处于标准形式。对于满足 (1) 可行的 A ，我们称其（按经典线性代数意义定义的）基 B 为一个（A， b）基。该定义依赖于 b ，以强调可行性。

A矩阵 $C = (c_{i,\ j}) \in \mathbb{Z}^{n\times(n+m)}$ 若具有互异的元素且满足$c_{i,\ i} < c_{i,\ k} < c_{i,\ j}$（其中 $i \neq j \in [n]$, $k \in [n+m] \setminus [n]$ 为任意值），并令 $[n] = \{1, \ldots, n\}$，则称其为序数矩阵。如我们稍后将看到的，

C 中唯一相关的信息是 C每一行中元素的相对顺序，因此不失一般性地，我们假设对所有 i, j，均有 $c_{ij} = O(n+m)$。

考虑由 C 的 n 列组成的集合 $D = \{j_1, \ldots, j_n\}$。对于每一行 $i \in [n]$，定义最小元素

$$u_i = \min_{k \in [n]} c_{i,j_k}. \tag{2}$$

固定 $j \in D$。根据定义，对于任意行索引 i，$u_i \le c_{i,\ j}$。我们简洁地用 $u \le c_j$ 表示这组关系。如果对于每一列 $h \in [m]$，都存在至少一个 $i \in [n]$ 使得 $u_i \ge c_{ih}$，则称集合 D 为 C 的序数基。与之关联的向量 $u \in \mathbb{Q}^n$ 称为该序数基的效用向量。下例说明了这些概念。

例 1. 下面的矩阵 C 是一个序数矩阵，而 $D = \{4, 5, 6\}$ 是一个序数基，其效用向量为 $u = (1,\ 1,\ 1)^T$。

$$C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 0 & 5 & 4 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right).$$

同时也是 C 的序数基的 (A, b) 基，称为 (A, b, C) 的支配基。给定 (A, b, C) 的支配基 B，与 B 对应的 (1) 中唯一顶点 x 称为 (A, b, C) 的支配顶点。接下来介绍的*Scarf* 引理 [37], 说明这样的顶点总是存在的。

定理 2 （Scarf 引理）。设 $A \in \mathbb{Q}_{\ge 0}^{n \times (n+m)}$ 为标准形式，$C \in \mathbb{Z}^{n \times (n+m)}$ 为序数矩阵，且 $b \in \mathbb{Q}_+^n$ 使得（1）有界。那么，对于（A，b，C），存在一个支配顶点。

定理 2 最初是通过一种枢轴操作算法证明的，该算法如下所述。

Scarf 算法。Scarf 算法首先令 $B = \{1, \cdots, n\}$ 和 $D = \{j_0, 2, 3, \cdots, n\}$，其中 j_0 从列 $k \in \{n+1, \ldots, m\}$ 中选出，以使 c_{1k}最大化。也就是说，$c_{1j_0} = \max_{k>n} c_{1k}$（在例 1 中，$j_0 = 5$和 $D = \{5, 2, 3\}$）。注意，$|B \cap D| \ge n-1$, B是一个（A, b）基，而 D 是 C的序数基。

算法始终满足以下性质：在每次迭代开始时，我们都有一个（A，b）基 B以及一个序数基 D，且满足 $|B \cap D| \ge n-1$。如果 $|B \cap D| = n$，则 $B = D$，算法停止并输出支配基 B。注意，在此情况下，B 是（A，b，C）的一个支配基。否则，我们令 $\{j_t\} = D \setminus B$并执行以下操作：

1 基数枢轴：选择一列 $j_\ell \in B \cap D$，使得 $B' := B \setminus \{j_\ell\} \cup \{j_t\}$ 是（A，b）的一个基。也就是说，j_t 进入，j_ℓ 离开 B。

2 序数枢轴：选择一列 $j^* \notin D$，使得 $D' := D \setminus \{j_\ell\} \cup \{j^*\}$ 是 C 的一个序数基。也就是说，j_ℓ 离开，j^* 进入 D。

随后算法进入下一次迭代，设置 $B = B'$ 和 $D = D'$。请注意，基数枢轴操作中的基变换与经典枢轴操作相同，例如单纯形算法中采用的操作。特别是，根据线性代数的基本原理，j_ℓ [5]始终至少存在一种可行选择——尽管当多面体退化时，可能存在多种选择。序数枢轴操作 在每一步都由 [37]唯一确定。

对于非退化多面体，Scarf [37] 证明该算法总会终止。对于退化多面体，通过归约到非退化情形可以证明，存在一种能够导向

收敛的枢轴规则，但据我们所知，这种枢轴规则是多面体特定的，与文献中研究的任何“标准”枢轴规则都不相同，例如单纯形法相关文献 [9]。

稳定婚姻的应用。 如引言中所述，将 Scarf 引理应用于某些多胞体时，可以用来证明特定组合对象的存在性。本节回顾与本文相关的设定，即稳定婚姻模型。

令 $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ 表示男性集合，令 $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$ 表示女性集合。不失一般性，我们假设 $|M| = |W| = k$，并且每一对可能的配对（m_i，w_j）都是可接受的：对于任意男性 $m \in M$，在 $W \cup \{m\}$ 上都有一个严格线性序，其中 m 排在最后（m 与 m 匹配意味着 m 未匹配）。众所周知，每个稳定婚姻实例都可以不失一般性地转换为具有这些性质的实例 [20]。我们将该顺序称为 m 的*偏好序*，并记作 $\succ_m$。每位女性 w 的偏好序也以类似方式定义，并记作 $\succ_w$。匹配是由不相交配对组成的集合 $\mu \subset M \times W$。给定一个匹配 μ，若一对（m，w）$\in M \times W$ 满足 $w \succ_m \mu(m)$ 且 $m \succ_w \mu(w)$，则称其为*阻塞对*；对于 $v \in M \cup W$，我们用 $\mu(v)$ 表示 v 在 μ 中的配偶（若存在），否则表示为 $\mu(v) = v$。若匹配 μ 中不存在阻塞对，则称其为稳定的。例如，Biró和Fleiner [7], 指出，可以运用 Scarf 引理证明婚姻实例中稳定匹配的存在性。

定理 3。 *考虑定义在二分图 $G(V, E)$上的婚姻模型实例 $\mathcal{I}$，并令 (1) 描述 $G(V, E)$的（经典）匹配多面体，其中 A' 是 G 的节点-边关联矩阵，且 b 的每个分量均为1。存在一个矩阵 C，使得 (A, b, C) 的每个支配顶点都是某个稳定匹配的特征向量。*

对于定理 3 中的 A、b、$\mathcal{I}$，我们称 A、b 由实例 $\mathcal{I}$ 诱导。

1.2 我们的贡献

Scarf 算法在婚姻模型中的多项式时间性。 作为首个结果，我们证明，对于输入 (A, b, C^*)，其中 A、b 如定理 3 所述，且 C^* 是使定理 3 成立的矩阵 C 中的一个特定选择，Scarf 算法可以在多项式时间内运行。特别是，由于匹配多面体是退化的，我们提出了一条枢轴规则（见算法 1）来控制基数枢轴。Biró 和 Fleiner [6] 提出了 Scarf 算法能否在多项式时间内对匹配博弈终止的问题；我们的结果在稳定婚姻博弈这一特殊情形下对此给出了肯定答案。

定理 4. *对于二分图 $G(V, E)$上的婚姻模型的任意实例 $\mathcal{I}$，都存在一种基数枢轴规则，使得 Scarf 算法在输入 (A, b, C^*)上能在多项式时间内运行，其中 $\{x \in \mathbb{R}^m_{\geq 0} : Ax = b\}$ 描述了 G 的匹配多面体，而 C^* 是一个使定理 3 成立的特定矩阵。特别地，输出将是一个稳定匹配的特征向量。*

作为定理 4 证明的一个构建模块，我们将深入理解连接序数基与可行基的枢轴操作，而 Scarf 算法可能会访问这些基。

通过多面体扰动实现多项式时间收敛。 我们证明，通过扰动底层的二分图匹配

多面体使其变为非退化多面体，也能实现这一点，见第 6 节。这一结果在计算方面可能具有意义，因为在非退化多面体上，Scarf 算法的行为是唯一确定的，因此无需实现临时设计的枢轴规则。此外，这一理论结果也为经验观察提供了依据：在对二分图匹配多面体进行标准扰动时，Scarf 算法能够快速收敛 [6]。

Scarf 算法的局限：表达稳定匹配。近期的研究重点是理解用于构造稳定匹配的算法的“表达能力”。例如，虽然 Gale 和 Shapley 的算法 [19] 至多可以生成两个稳定匹配，但带有补偿链的延迟接受算法能够输出所有稳定匹配 [14]。Biró和Fleiner [6] 提出疑问：Scarf 算法是否也能输出给定实例的所有稳定匹配。作为下一个结果，我们将证明，Scarf 算法的表达能力同样较弱，因为一般而言，它只能输出稳定匹配中一个指数级小的子集。

我们的结果要求 C 具有一致性 [1]。这是一项常见假设，粗略地说，即要求 C 能够正确刻画 $\succ$（形式化定义见第 2.3 节）。我们强调，定理3、4中讨论的所有序数矩阵 C，以及扩展到室友匹配情形、超图匹配 [1], 和夫妻匹配 [7], 的情形，都满足一致性。更一般地说，我们所知的 Scarf 算法在稳定匹配问题中的所有应用，都采用了一致矩阵 C。现在，令 $dom(A,b,C)$ 表示 (A, b, C) 的支配顶点族；对于婚姻实例 $\mathcal{I}$，令 $\mathcal{S}(I)$ 表示 $\mathcal{I}$的稳定匹配族。

定理5。存在一个通用常数 $c > 1$，并且对于无穷多个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个包含 n 个代理人的婚姻实例 $\mathcal{I}_n$，使得对于每个由 $\mathcal{I}_n$ 和与 $\mathcal{I}_n$ 一致的矩阵 C 所诱导的 A，b，我们都有：

$$\frac{|\mathcal{S}(\mathcal{I}_n)|}{|dom(A,b,C)|} = \Omega(c^n).$$

因此，要覆盖具有一致矩阵的支配顶点的婚姻实例中的所有稳定匹配，可能需要指数多个矩阵。特别地，对于每个一致的 C，都存在指数多个无法通过 Scarf 算法获得的稳定匹配，从而回答了 [6] 提出的问题。

1.3 相关文献

如引言中所述，Scarf 引理已被用于证明核和分数核 [6, 37], 、强分数核 [2], 以及超图中的分数稳定解 [1] 和稳定路径 [21]等对象的存在性。特别是，Biró和Fleiner [6] 研究了用于稳定匹配问题及其扩展的 Scarf 算法，并提出了许多关于 Scarf 算法特性的有趣问题，其中一些已在本文中得到研究（并获解），见第 1.2 节。对于一些更复杂的市场，许多两阶段舍入算法 [28, 29, 30] 将 Scarf 算法作为第一步，用来寻找一个分数点；随后通常在第二步将其舍入为可行解或准可行解。

据我们所知，在本研究之前，尚无关于 Scarf 算法多项式时间收敛的结果。相比之下，人们已知，寻找支配顶点这一问题是 PPAD 完全问题，即使在超图匹配 [12, 23, 24] 这类受限情形下也是如此。PPAD [32] 是一个复杂性类，包含某些相关判定版本的答案总是肯定、但其解可能并非易于求得的问题。PPAD 完全问题包括计算纳什均衡 [11, 13] 和布劳威尔函数的不动点 [32],。

以及其他问题，因此，存在能够为 PPAD 完全问题找到解的多项式时间算法，将令人惊讶。此外，已知有些例子中，Scarf 算法的路径有唯一确定的定义，且需要指数级的步数（这一点不依赖于任何复杂性理论假设）；即使相应的支配顶点可以在多项式时间内找到 [15]，也仍然如此。

我们的方法有一个关键组成部分：理解 Scarf 算法可能访问的二分图匹配多面体的可行序数基。相比之下，大多数关于匹配多面体的多面体文献只关注研究顶点及其邻接条件（例如，参见 [3, 36]），以便界定直径，或考察经典枢轴操作 [4]。另一种研究稳定匹配问题的多面体方法，探讨稳定婚姻多面体或室友多面体（即稳定匹配的凸包）的性质，重点关注其线性描述 [17, 18, 33, 35, 41, 42] 和直径 [16]等主题。

2 技术概述

2.1 婚姻模型中 Scarf 算法的多项式时间性

考虑一个婚姻实例 $\mathcal{I} := (G(V, E) \succ)$，其中 G 是一个二分图，其节点为 $V = M \cup W$，而 M 和 W 分别是男性和女性的集合。 $E = E^{\ell} \cup E^{v}$，其中 E^{ℓ} 是自环 的集合——每个顶点对应一个自环——而 E^{v} 是有效 边的集合（即非自环边）。回顾一下，我们假设底层图是完全图。 $|V| = |E^{\ell}| = n = 2k$ 和 $|E^{v}| = m = k^2$。对于 $v \in V$和 $e \in E$，若 v 与 e 关联，则称 v 是关联 的，即 $v \in e$。 $\succ$ 是一个偏好系统，使得对于每个 $v \in V$，$\succ_v$ 都对所有与 v 关联的边以及 v 上的唯一自环进行严格排序，并满足对于每个与 v关联的 e， $e \succ_v (v, v)$。令 $A = (I|A')$，其中 A' 是图的关联矩阵，而单位矩阵 I对应于自环（松弛变量）。令 $b = (1, 1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$。

如上所述，给定 A、b，(1) 定义了 $G(V, E)$ 的匹配多面体。对于固定的图 $G(V, E)$，我们将其与矩阵 C关联起来，使得 (A, b, C) 的每个支配顶点都是 $G(V, E)$ 的稳定匹配，见定理 20。 A 或 C 的列集合（特别是可行基或序数基）也将被解释为 G 的边集。

这里我们概述 Scarf 算法在与一对 (B, D)（分别为基数基和序数基）相关的一般迭代中的行为，并给出沿途发现的中间顶点的组合解释。我们用 E^{v}_{B} （分别用 E^{ℓ}_{B}）表示 B 中有效边（分别为自环边），并定义图（opti，带自环） $G_B = (V, E^{v}_{B} \cup E^{\ell}_{B})$。类似地，$G_D$ （分别为 E_D）是包含且仅包含 D 中所有边的子图（分别为边集）。从 (B, D) 开始执行一次基数枢轴操作和一次序数枢轴操作后得到的关联对记为 (B', D')。

接下来，我们介绍与给定迭代相关对象的定义和性质。读者可参考图1和图2了解示例。

1. **基的结构 B：单环森林**。 $F = (V, E^{v}_{B})$ 是一片森林，并且 F 的每个连通分量都恰好包含一条来自 E^{ℓ}_{B} 的边（即一个自环，见引理 21）。因此，我们称 G_B 具有单环森林结构。这一事实可能是众所周知的，但我们未能找到相关出处；为求完整起见，我们在附录 A.1 中给出证明。

2. **分隔符**。定义 $m_{k+1} = m_1$。算法访问的每个序数基都有唯一的分隔符。它是一个代理人 $m_i \in M$，除其他性质外，还满足以下条件：

   (i) 分隔符 m_i 与自环 e_i 及至少一条有效边相关联；

(ii) 对于 $i'=2$、.....、$i-1$、 $m_{i'}$，它至少与 G_D 的一条有效边相关联，且不与任何自环相关联；(iii) 对于 $i'=i+1$、.....、k、 $m_{i'}$，它在 G_D 中仅与自环 $e_{i'}$ 相关联。

参见命题 23 和第 5.4 节。

3. **效用向量**。回顾一下，效用 $u \in \mathbb{Q}^n$ 定义为 $u_i = \min\{c_{ij} : j \in D\}\ \forall i \in [n]$。如果从一个具有相关效用 u 的基出发进行一次序数枢轴，得到一个与 u' 相关联的基，并且对于某个 $i \in [n]$有 $u'_i > u_i$，则称 i 的效用增加。

4. **v-不喜欢的边**，其中 $v \in M \cup W$。如果 $e_i \in E_D$关于 D是 v_j-不喜欢的，则称其为 $c_{ij} = u_{i_o}$。这在序数基 D 中的边与代理人之间定义了一个双射，参见定义 18。

在每次迭代中，我们执行以下步骤:

1. **识别男性不喜欢的边和女性不喜欢的边**。我们将女性（分别为男性）不喜欢的边确定为对于某个代理人 v （该代理人为女性（分别为男性））而言是 v-不喜欢的边的集合。

2. **基数枢轴：** 令 Λ 为包含分隔符m_i的 G_B 连通分量。回想一下，下一个基的形式为 $B' = B \cup \{j_t\} \setminus \{j_\ell\}$，且 $G_{B'}$是一个单环森林。我们证明以下情况之一成立:

(a) Λ 是包含一个偶圈 C的 $G_{B\cup\{e_{j_t}\}}$ 连通分量。此时，可以选择 C的一条边作为e_{j_ℓ} 。见图1。(b) 在 $G_{B\cup\{e_{j_t}\}}$中， Λ 与 G_B的另一个连通分量相连，从而形成一个包含两个自环的连通分量 Γ 。此时，e_{j_ℓ} 可以选为一个自环，或连接这两个自环的路径上的一条边。见图2。

我们将在引理 28 中证明，若e_{j_t} 是男性不喜欢的，我们总能将e_{j_ℓ} 选为以下之一：(i) D 中的一条女性不喜欢的边（图1）；或 (ii) 与分隔符 m_i对应的自环（图2）。

3. **序数枢轴操作：** 新的序数基将具有 $D' = D\setminus\{j_\ell\}\cup\{j^*\}$ 的形式。回想一下，j^* 由 D、j_ℓ 唯一确定。在第 5.3.2 节中，我们证明，若基数枢轴分析中的情形 (i) 成立，则对于某个 $j \in \{2,3,\ldots,i-1\}$，e_{j^*} 是 D' 中一条男性不喜欢的有效边 m_j，见图3；而若情形 (ii) 成立，则 e_{j^*} 是 D' 中一条男性不喜欢的有效边 m_1，且 m_{i+1} 是 D' 中的分隔符（令 $m_{k+1} = m_1$），见图4。在这两种情况下，e_{j^*} 都是男性不喜欢的，这正是上述基数枢轴规则适用的确切条件。

然后，我们使用 (B', D') 继续下一次迭代。

我们的收敛性分析基于 $\mathbb{Z}^2$ 中逐分量单调演化的势向量，见第 5.4 节:

$$\left(i, \sum_{w\in W} u_w\right), \tag{3}$$

其中 i 是当前分隔符的索引。也就是说，在每次迭代中，势向量的一个分量严格增加，而另一个分量不会减少。具体而言，要么新的分隔符变为 m_{i+1}，且女性总效用（即受限于女性的 u子向量的 ℓ_1 范数）不会减少；要么女性总效用严格增加，而

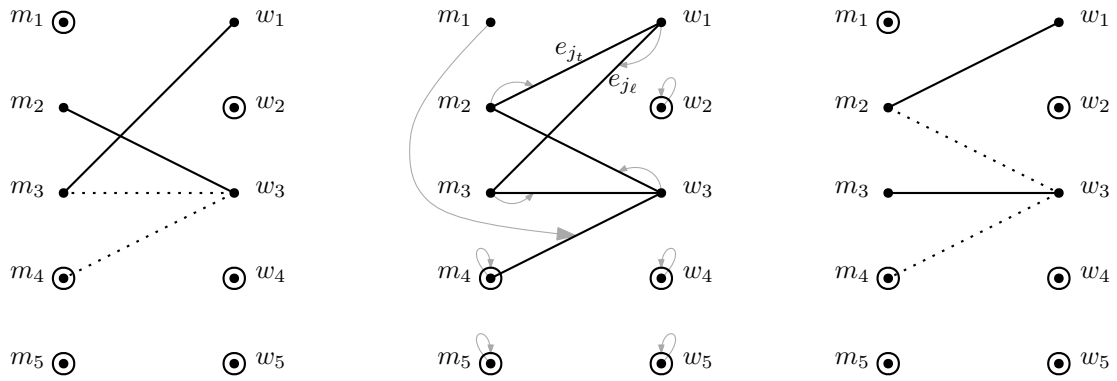

图1：婚姻情形中引入的若干概念示意图。我们令$V = \{m_1, \ldots, m_5;\ w_1、\ldots\ldots、\ w_5\}$，并给出出现偶圈时的枢轴规则。左图：图 G_B，其中约定，实线边对应 B 中x-值为1的变量，点线边对应 B 中 x-值为0的变量。可以看出， G_B 是一个带有单环的森林。边$e_{j_t} = (m_2,\ w_1)$将进入基，形成一个 x-交替环$Q = (m_2,\ w_1),\ (w_1,\ m_3),\ (m_3,\ w_3),\ (w_3,\ m_2)$。中图：图 G_D。所有边都是完整的，因为序数基没有关联的值。灰色箭头表示每个节点厌恶哪条边。可以看出， m_4 是分隔符。边e_{j_t} （进入 B）和e_{j_ℓ} （离开 B）已突出显示。特别地，进入边e_{j_t} 是 m_2不喜欢的，而将e_{j_t} 加入 E_B会形成一个含有偶圈的连通分量。右图：基数枢轴移除$e_{j_\ell} = (w_1,\ m_3)$，并得到新的可行基$B' = B \setminus \{e_{j_\ell}\} \cup \{e_{j_t}\}$。我们的枢轴规则表明，在这次迭代中，我们总能选择 Q 内部一条女性不喜欢的边离开。注意，我们也可以选择$(w_3,\ m_2)$作为离开边。存在多个选项时，我们任意选择其中一个。

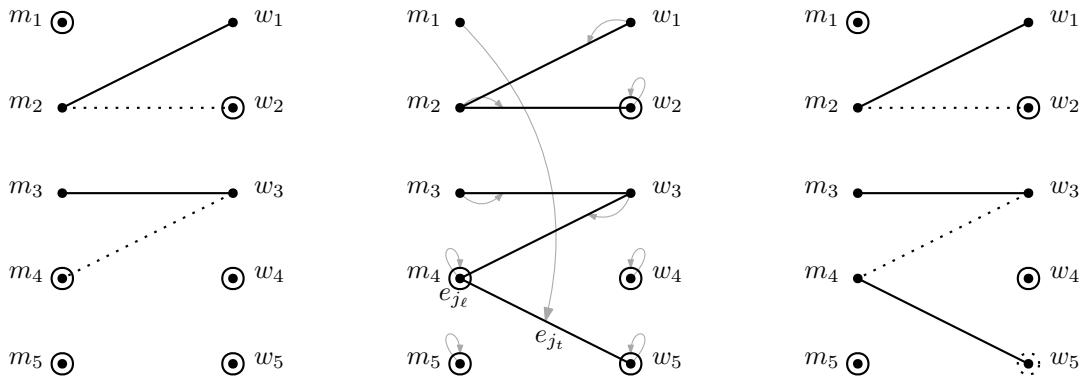

图2：当出现连接两个自环的路径时，枢轴规则的示意图。左侧：图 G_B。中间：图 G_D。可以看出， m_4 是分隔符。将 e_{j_t} 添加到 B 后，会形成一个包含两个自环的连通分量。右侧：基数枢轴操作移除了 e_{j_ℓ}，即自环 $(m_4,\ m_4)$，并得到新的可行基 $B' = B \setminus \{j_\ell\} \cup \{j_t\}$。

分隔符仍为 m_i。由于分隔符（男性）的数量和女性总效用都被 $O(n^2)$ 所界定，迭代次数为 $O(n^2)$，且显然每次迭代都能在多项式时间内完成。

对于枢轴规则的一种组合解释，可以将该算法理解为依次从队列 m_2、m_3、……、m_k、m_1 中逐个加入男性。在每次迭代中，分隔符表示

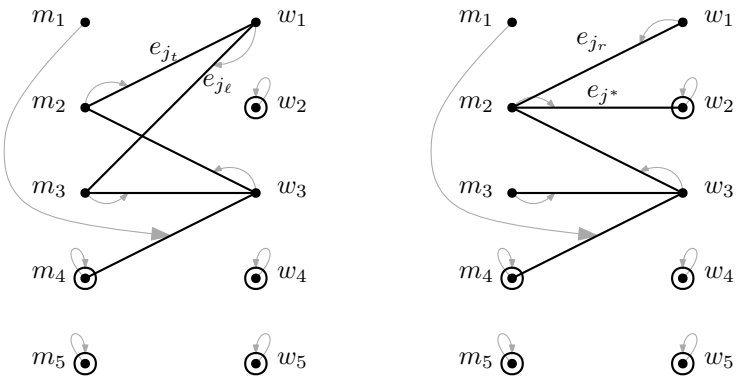

图3：作为图1后续步骤的序数枢轴。左侧：图 G_D，我们希望移出 w_1 厌恶的边（m_3，w_1）。然后，我们找到 w_1 的第二差选择，即参考边（m_2，w_1），它在 D 中受到 m_2 厌恶。右侧：图 $G_{D'}$，下一个入基变量 e_{j^*} 是一条受到 m_2 厌恶的有效边。在此序数枢轴过程中，$w_1 = i_\ell$ 的效用增加，$m_2 = i_r$ 的效用降低，而其他人的效用和厌恶边均不变。分隔符保持在 m_4。

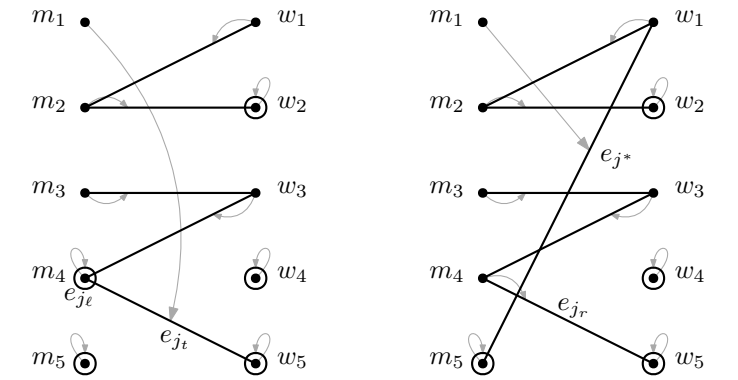

图4：作为图2后续步骤的序数枢轴。左侧：图 G_D，我们希望移出自环（m_4，m_4）。然后，我们找到受到 m_1 厌恶的边（m_4，w_5）作为参考边e_{j_r}。右侧：图 $G_{D'}$，下一个入基变量 e_{j^*} 是一条受到 m_1 厌恶的有效边。在此序数枢轴过程中，$m_4 = i_\ell$ 的效用增加，$m_1 = i_r$ 的效用降低，而其他人的效用和厌恶边均不变。分隔符从 m_4 变为 m_5。

最后引入的男性。可以证明，一旦获得“局部”稳定匹配，即仅限于男性 m_2、m_3、.....、m_i 和所有女性的稳定匹配，我们就会立即将分隔符从 m_i 更改为 m_{i+1}。在分隔符不发生变化的迭代中，该算法通过“改善”女性的匹配来调整当前匹配（因此 $\sum_{w\in W} u_w$ 会增加），直到获得“局部”稳定匹配。

2.2 通过对多面体进行扰动实现多项式时间收敛

在上一节中，我们证明了，采用恰当的枢轴规则，在二分图匹配多面体 $\mathcal{P}$ 上运行 Scarf 算法，就能在多项式时间内得到一个稳定匹配。不过，这种方法的实现并不简单，因为尤其需要处理

退化枢轴。出于实际考虑，最好能在 $\mathcal{P}$的某种扰动上运行 Scarf 算法，因为在非退化多面体上运行 Scarf 算法时，每一步枢轴操作都由此唯一确定 [37]，因此无需实现专门设计的枢轴规则。

在第 6 节中，我们展示了如何通过"经典"扰动，使用 Scarf 算法在多项式时间内找到稳定匹配。我们的方法如下。我们对 $\mathcal{P}$ 进行扰动，以构造一个非退化多面体 $\mathcal{P}^\epsilon$ （见（11））。因此，在 $\mathcal{P}^\epsilon$ 上执行 Scarf 算法，可以由一系列成对对象唯一确定：$(x_0^\epsilon, D_0) \to (x_1^\epsilon, D_1) \to \cdots \to (x_N^\epsilon, D_N)$，其中 x_I^ϵ是 $\mathcal{P}^\epsilon$的一个顶点，而 D_I 是 C的一个序数基，适用于 $0 \le I \le N$。这里的主要技术要点是证明：存在一系列 Scarf 对 $(B_0, D_0) \to (B_1, D_1) \to \cdots \to (B_N, D_N)$，它们在未扰动情形下（即算法 1）满足我们的枢轴规则，并且对于每个 I， B_I 在 $\mathcal{P}^\epsilon$ 中对应于x_I^ϵ。因此，根据定理 4，我们有 $N = poly(n)$，从而实现所声称的多项式时间收敛。具体细节见定理 42。

2.3 Scarf 算法的局限性：表达稳定匹配

正如我们接下来将要论证的，在关于 C 的（相当自然的）一致性假设下，Scarf 算法能够输出的稳定匹配集合，其规模可能呈指数级小于某个实例的全部稳定匹配集合。

定义 6。 如果一个序数矩阵 C与婚姻实例 $\mathcal{I} = (G(V, E) \succ)$ 满足以下条件，则称其与该实例 $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 一致：

(i) 对于任意满足 $v_i \in e_j$ 和 $v_{\bar{\imath}} \notin e_j$ 的 $i, \bar{\imath} \in [n]$ 和 $e_j \in E$，都有 $c_{i,j} < c_{\bar{\imath},j}$。

(ii) 对于任意满足 $v_i \in e_j, e_\ell$ 的 $i \in [n]$ 和 $e_j, e_\ell \in E$， $c_{ij} > c_{i\ell}$ 当且仅当 $e_j \succ_{v_i} e_\ell$。

在定义 6 中，(i) 是一个正则性条件，而 (ii) 表示 C 正确刻画了 $\succ$ 的顺序。在 C 一致的假设下，可以推导出，(A, b, C) 的每个支配顶点x 都是 $\mathcal{I}$ 的一个稳定匹配的特征向量，其中 A, b 由 $\mathcal{I}$ 诱导，见 [1]。我们强调，定理 3 、 4 中讨论的所有序数矩阵 C，以及推广到超图匹配 [1] 和夫妻匹配 [7] 的情形，都给出了一致的 C。

我们证明，当 C一致时， $dom(A, b, C)$总会得到一个 v最优的稳定匹配；也就是说，存在一位代理人 v，她在所有稳定匹配中都与自己最理想的伴侣匹配。顺便指出，由于我们在第 2.1 节和第 2.2 节讨论的 Scarf 算法实现均基于一致的 C，该定理同样适用于这些算法。

定理 7。 设 C 是一致序数矩阵，且 A, b 与定理 *3* 中相同。那么，(A, b, C) 的任意支配顶点，都是某个$v \in V$的 v最优稳定匹配的特征向量。

因此，任何"中间"稳定匹配（即没有将任何代理人与其最喜爱的稳定伴侣匹配的匹配）都不可能由 Scarf 算法输出，因为它甚至无法用支配顶点表示。我们在例 51 中展示了一个实例的无限族 $\mathcal{I}_n$ ，其中有 2 个对某个 v而言 v最优的稳定匹配，但稳定匹配的数量呈指数级增长，由此可得定理 5。

3 Scarf 算法回顾

这里我们讨论 Scarf 算法的一些经典性质，并介绍相关定义和符号。本节可供读者作为算法的入门介绍或回顾，

同时也介绍了后续章节论证中会用到的基础内容。缺失的证明可见于 [37]。

回想一下，Scarf 算法的输入是具有特殊性质的 $n \times (n+m)$ 个非负矩阵 A 和C 。我们将 C 称为序数矩阵（见第 1.1 节）。

3.1 基数主元和序数主元

为了使论证清晰，我们首先加入标准的非退化假设：与方程组 $Ax = b$ 的可行基 B 的 n 列相关联的所有变量都严格为正（Scarf 算法最初仅在这一设定下陈述 [37]）。回想一下，在 Scarf 算法的每一步，我们都会得到矩阵 B 和 D，其中 B 是一个 (A,b) 基，而 D 是 C 的序数基。D 的性质意味着以下结论。

命题8. 对于序数基 D 的任意一列 c，构造效用向量时恰有一个行最小元。更形式化地说，存在唯一一行 $i \in [n]$，使得 $u_i = c_i$。因此，对于其他各行 $\bar{\imath} \neq i$，有 $u_{\bar{\imath}} < c_{\bar{\imath}}$。

Prop命题 8 给出了序数基的 n 列与 n 行之间的一个双射 .

回顾一下，Scarf 算法的一次迭代包含两个主要步骤：基数枢轴和序数枢轴。基数枢轴与单纯形算法执行的枢轴操作类似，其中有：

引理 9. 设 $B = \{j_1, \cdots, j_n\}$ 是一个(A,b) 基，并设 j' 是一个不属于 B 的任意列。那么，如果 (1) 是非退化的，且可行集 $\{x | x \geq 0$ 和 $Ax = b\}$ 有界，则存在唯一的 $j_t \in B$，使得 $B \setminus \{j_t\} \cup \{j'\}$ 是一个(A,b) 基。

上述是线性规划中的一个标准结果，它表明我们可以任意选择一个基外的列进入基，同时有唯一的一列离开。序数枢轴也具有对称性质。算法访问的序数基中任意一列都可以被移除，并从基外引入唯一一列，使新的列集也成为序数基。

引理 10. 设 $D = \{j_1, \cdots, j_n\}$ 是 C 和 $\ell \in [n]$ 的序数基。那么存在唯一的列 $j^* \notin D$，使得 $D \cup \{j^*\} \setminus \{j_\ell\}$ 是 C 的序数基。

回想一下，寻找这样一个新列 j^* 的过程称为序数枢轴。我们给出序数枢轴的正式定义如下：

定义 11 (序数枢轴)。考虑一个序数基 D，以及其中要移除的特定列 j_ℓ。在由剩余列构成的 $n \times (n-1)$ 矩阵中，定义

$$\bar{u}_i = \min_{j \in D \setminus \{j_\ell\}} c_{i,j}.$$

恰有一列 j_r 在形成 $\bar{u}$ 时包含两个行最小元（根据命题*8*）。我们称 j_r 为参考列。在这两个最小化者中，一个是新的，另一个是原序数基的行最小元。设与前者关联的行为 i_ℓ（即 $c_{i_\ell, j_\ell} = u_{i_\ell} < \bar{u}_{i_\ell} = c_{i_\ell, j_r}$），与后者关联的行为 i_r（即$c_{i_r, j_r} = u_{i_r} = \bar{u}_{i_r}$）。令 K 表示 C 中的列，使得 $k \in K$ *if*

$$c_{i,k} > \bar{u}_i, \ \textit{for all } i \neq i_r. \tag{4}$$

从 K中的列里选出使 $c_{i_r,k}$最大的一列，即

$$j^* = \arg\max_{k \in K} c_{i_r,k}.$$

序枢轴步骤将列 j^* 引入序数基，从而形成新的序数基 $D' = D \setminus \{j_\ell\} \cup \{j^*\}$。

可以证明，只有 $j = j^*$和 j_ℓ 这两列能构成序数基 $D \setminus \{j_\ell\} \cup \{j\}$ 。这一事实表明，包含任意给定 $n-1$ 列的序数基数量只能是 0 或 2。这也说明序数主元是“可逆的”：如果从一个基中消去 j_ℓ 并引入 j^* ，那么随后可以从新基中消去 j^* ，从而得到原来的基。

分析序数主元步骤中效用向量的变化很有用。我们沿用定义 11 中的记号。

引理 12. 考虑分别与 D、 D'相关联的两个效用向量 u 和 u' 。那么，从 D 变为 D'时， i_ℓ 的效用会增加，而 i_r 的效用会降低，其他效用则保持不变。形式化地说，

$$u'_{i_\ell} = c_{i_\ell,j_r} > c_{i_\ell,j_\ell} = u_{i_\ell},$$
$$u'_{i_r} = c_{i_r,j^*} < c_{i_r,j_r} = u_{i_r},$$
$$u'_i = u_i, \ for\ i \in [n], \ i \neq i_\ell, i_r.$$

3.2 Scarf 对、近似可行序基与算法的终止条件

我们已在第 1.1 节讨论过，序数枢轴和基数枢轴操作的序列如何在有限时间内导向一个支配顶点。接下来，我们将更详细地介绍算法所访问的（序数）基以及算法的终止条件。

定义 13 (Scarf 对)。 假设 *Scarf* 算法以初始可行基 B_0 和序数基 D_0 开始。对于 $i \geq 1$，若 $B_{i-1} \neq D_{i-1}$，则第 i 次迭代 首先由一次基数枢轴操作$(B_{i-1}, D_{i-1}) \to (B_i, D_{i-1})$ 组成；接着，若 $B_i \neq D_{i-1}$，则进行一次序数枢轴操作$(B_i, D_{i-1}) \to (B_i, D_i)$，其中这些枢轴操作的定义见上一节。令

$$B_0, B_1, \ldots, B_I \quad and \quad D_0, D_1, \ldots, D_I$$

为 *Scarf* 算法访问的可行基（分别为序数基）序列，该算法在 $B_I = D_I$ 时终止。对于 $0 \leq i \leq I-1$, 我们称(B_i, D_i) 为一个Scarf 对。

因此，只要算法没有终止，每次迭代都从一个 Scarf 对开始，并以一个新的 Scarf 对结束。根据引理 9 和引理 10，任意 Scarf 对 (B_i, D_i) 都有 $|B_i \cap D_i| = n-1$。

引理 14. 在整个算法过程中， $B_{i-1} \neq D_{i-1}$ 当且仅当在第 i 次迭代中，列 1 离开基 B_{i-1} ，或者列 1 被引入序数基 D_{i-1}。这两种情况之一会在有限次迭代后发生，即定义 *13* 中的 $I < \infty$ 。特别地，支配顶点存在。

接下来，我们介绍算法所访问的序数基共有的性质。

定义 15 (近似可行序基)。 若序数基 $D = \{j_1, \ldots, j_n\}$ 满足 $1 \notin D$，且存在一个可行基 B，使得对于某个$t \in [n]$，有 $B = \{1, j_1, \ldots, j_{t-1}, j_{t+1}, \ldots, j_n\}$，则称其为近似可行。也就是说，$1 \in B$，且 $R = B \cap D$ 的基数为 $n-1$。我们称 B 与 D 相关联，并将集合 R 称为剩余列；令 A_R，D_R 分别表示 A，C 中与指标集 R对应的子矩阵。

根据引理 14，如果第 1 列进入序数基 D 或离开可行基 B，Scarf 算法就会终止。此外，在整个算法过程中，对于每个 Scarf 对（B，D），根据构造，B 和 D 至多有一个条目不同。因此，我们得到以下结论。

引理 16。 设 D 是 *Scarf* 算法在定理 *2* 的输入上某次执行过程中访问的一个序数基。那么，D 要么是算法访问的最终基，要么 D 是近似可行的。

3.3 处理退化

注意，在上述框架中，Scarf 算法的行为由输入唯一确定。相比之下，当 Scarf 算法应用于退化多面体时，即某个顶点处有严格多于 n 个约束是紧的，此时基数枢轴操作可能有多种选择。因此，Scarf 算法的输出并不唯一，而是取决于基数枢轴规则。此外，还可能发生循环。然而，第 3.2 节中的定义和性质仍然适用，但有限收敛除外，因为无法保证有限收敛。

引理 17。 $B_{i-1} \neq D_{i-1}$ 且 $B_i = D_i$ 当且仅当在第 i 次迭代中，列 1 离开基B_{i-1}，或列 1 被引入序数基 D_{i-1}。

在第 5 节中，我们处理高度退化的匹配多面体，并证明使用我们的基数枢轴规则，Scarf 算法能够收敛，而且在多项式时间内完成。

然而，处理退化还有另一种标准方法：扰动（婚姻情形将在第 6 节讨论）。具体而言，在开始时将右端向量扰动为 b'，使多面体变为非退化的。然后，Scarf 算法输出一个关于（A，b'，C）的支配基 B。这意味着 B 是 C 的序数基。如果 B 也是一个（A，b）基，那么 B 是一个（A，b）基 [5],，于是它支配（A，b，C）。因此，如果扰动足够小，使得每个（A，b）也都是一个（A，b'）基，那么输出基就对应于原多面体的一个支配顶点。

4 其他事实与记法

现在我们将讨论本文其余部分中会用到的一些事实和记法。

4.1 图、边与匹配

回顾一下，我们从输入 $\mathcal{I} = (G(V, E) \succ)$ 开始，其中 G 是一个图，其节点集合为 V，n 个节点；边集合 E 是 n 自环 E^{ℓ} 与 m 有效边 E^{v} 的（不相交）并集。对于 $v \in V$ 和 $e \in E$，如果 $v \in e$，我们称 v 与 e 关联。$\succ$ 是一个偏好系统，使得对于每个 $v \in V$，$\succ_v$ 都会对与 v 关联的所有边以及 v 上唯一的自环进行排序，并且对于每个与 v 关联的 $e \in E^{v}$，均有 $e \succ_v (v, v)$。当 $e = (v, u)$ $e' = (v, u')$ 时，我们也在 $e \succ_v e'$ 的情况下将其记作 $u \succ_v u'$。

对于图 $G(V, E)$，将节点 $v \in V$ 的度 定义为图 G 中（包括自环）与 v 关联的边数，并记作 $\deg_G(v)$。请注意，对于同一个节点 $v \in V$，其度取决于 G。例如，$\deg_{G_B}(v)$ 和 $\deg_{G_D}(v)$ 可能不同。

接下来，我们可以重新定义匹配的概念。如果边 e 的一个端点是节点 v，我们就说边 e 关联 于节点 v。匹配 是一个边集 μ，满足对于每个节点 v，恰有一条 边 $e \in \mu$ 与 v 关联。等价地，如果子图$G_\mu = (V, \mu)$ 中每个节点 $v \in V$ 都满足 $\deg^{G_\mu}(v) = 1$，那么 $\mu \subset E$ 就是一个匹配。若有效边 μ 与 v 关联，我们就说 μ 恰好匹配 v。因此，如果一个匹配 μ 没有恰好匹配节点 v，那么自环 $e \in \mu$ 意味着 v 在经典意义上未匹配。

4.2 基与相关对象

由于输入的结构，矩阵 A （分别地， C）恰好每个代理人对应一行，每条边（包括自环）对应一列。因此，我们有时会扩展符号的用法，用同一个符号表示代理人/边以及行/列，其确切含义总能根据上下文清楚判断。更准确地说：

- m、 w、 v （可能带有下标/上标）用于表示代理人（分别用 $m \in M$、$w \in W$ 和 $v \in V$ 表示），或表示 A 矩阵或 C 矩阵中相应的节点索引或行索引。
- （m， m）、（w， w）、（m， w）、（v_i， v_ℓ）表示边或 A 或 C 中相应的列索引。请注意，尽管所有图都是无向图，我们仍采用有序对表示法。这是因为有序对可以区分男性（第一项）和女性（第二项）。我们有时也用 e_j 表示一条边，其中 $j \le n$ 表示自环，$j > n$ 表示有效边。因此，a_j、 $c_j \in \mathbb{Q}^n$ 分别是矩阵 A、 C 中对应于 e_j 的列向量。

我们也对基／序数基采用如下扩展记法：

- B 是 A的某个可行基。它可以是 n 的列指标集，也可以是 G 中边的指标集（包括自环）。 A_B 是将 A 限制到 B中的列后得到的子矩阵。 $G_B = (V, E_B)$是 G的一个子图，只保留 B中的边。

- D 是 C的某个序数基。它可以是 n 的列指标集，也可以是 G 中边的指标集（包括自环）。 C_D 是将 C 限制到 D中的列后得到的子矩阵。 $G_D = (V, E_D)$是 G的一个子图，只保留 D中的边。

其他相关记法包括与基相关联的向量：

- $x \in \mathbb{R}^{n+m}$ 是目标多面体的一个可行解。它为E上的每条边赋予权重。边 x_e的-值 是 x 中与边e对应的连通分量的值。

- 对于可行基 B，令 x 为与 B相关联的基本可行解。定义 μ_B 为边由 $supp(x)$给出的匹配，即当且仅当 $x_e > 0$时， $e \in \mu_B$。
- 对于一个序数基 D，令 $u_D \in \mathbb{Z}^n$ 表示与 D相关联的效用向量，即 $(u_D)_i = \min_{j \in D} c_{ij}$。若不存在歧义，我们省略下标 D，仅用 u 表示 D的效用向量。

4.3 路径、环

我们如下重新定义图中的路径概念。令 $F \subset [n+m]$ 为列的子集，A_F为将 A限制在 F中的列上所得的子矩阵。考虑图 $G_F = (V, E_F)$，其中 E_F是与 F中的列相对应的边集。G_F 中的路径 P 定义为边的序列

$$P = (v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{\ell-1}, v_\ell)$$

满足 $v_1 \neq v_\ell$，使得某个括号中的两个节点可以重合，且没有重复的数对，并且 P 中的有效边在经典意义上构成一条路径。因此，路径可以包含自环。环Q 定义为经典意义上的环。我们分别用 V_P 和 E_P 表示一条路径的顶点和边。对于 Q，也采用类似的记法。有时，为了强调路径的顶点，在表示路径 P（分别表示环 Q）时，我们还会在相邻边对之间标出它们共有的顶点。

令 $x \in \mathbb{R}^{n+m}$。我们称 P（分别称 Q）为 x-交替的，如果边在 P（分别在 Q）上的 x-值在 0 和 1 之间交替。若 P 是 x-增广的，则称其为增广的；条件是它为 x-交替的，且第一条边是 x-值为 1 的自环，即 $v_1 = v_2$，并且 $x_{(v_1,v_1)} = 1$。图5展示了路径和环这两个概念。

4.4 v—厌恶边

得益于第 3 节中讨论的 Scarf 算法的其他性质，我们现在可以将第 2.1 节中首次提到的厌恶边概念形式化。

定义 18（v—厌恶边）。对于一个序数基 D 和 $i \in [n]$，令 $j \in D$ 满足 $u_i = c_{ij}$，其中 j 的存在性和唯一性由命题8保证。我们称 e_j 为 D中的 v_i—厌恶边。

换句话说，行（节点）与列（边）之间存在由 D给出的双射，我们通过称 v_i 厌恶e_j来表示这一双射。术语“厌恶”源于这样一个事实：如果将 C 中的条目解释为 v_i对 G 的所有边（包括那些不与 v_i关联的边）的评价，那么，对于在所有 $j \in D$ 上使 c_{ij} 最小化的唯一最小化者 $\bar{\jmath}$而言，v_i—厌恶边将是 $e_{\bar{\jmath}}$ 的边——也就是根据 v_i实现最差评价的边。一个重要的观察是，该双射受 D约束：当我们说 v_i 厌恶e_j时，需要明确指的是哪个 D；但如果不存在歧义，我们会省略 D。

5 多面体 性：Scarf 算法在婚姻模型中的多项式时间性质 1

5.1 二分图匹配多面体与婚姻实例相关的序数矩阵

这里我们介绍定理 4 中使用的序数矩阵 C 及其特征。有趣的是，C 是 [7]所定义矩阵的一个特例。

考虑一个有 k 名男性和 k 名女性的完全实例 $\mathcal{I}$，分别记作 $M = \{m_1, \ldots, m_k\}$ 和 $W = \{w_1, \ldots, w_k\}$，并将它们排列在完全图 G 中。对于 $i \in [k]$，我们也将 m_i 记作 v_i，将 w_i 记作 v_{k+i}。回想一下 $n = 2k$，$m = 2k + k^2$。对于边，我们用 e_1，…，e_n 表示包含节点 v_1，…，v_n 的自环；对于 $i \in [n]$，$e_{k(i+1)+1}$，$e_{k(i+1)+2}$，…，$e_{k(i+1)+k}$ 表示连接 m_i 与女性的边，这些女性按照 m_i 的偏好顺序递减排列。

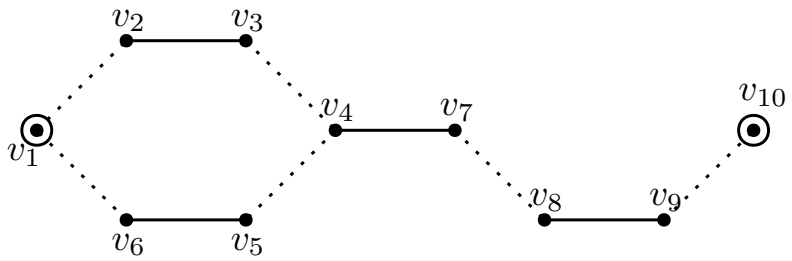

图5：路径和环概念的示意图，其中约定实线边（分别地，点线边）与来自 F 的、具有 x值为1（分别地， x值为0）的变量相关联。$P = (v_1, v_1)$、(v_1, v_2)、(v_2, v_3)、(v_3, v_4)、(v_4, v_7)、(v_7, v_8)、(v_8, v_9)、(v_9, v_{10})、(v_{10}, v_{10})是一条 x-增广路，而 P 的任意连续子集都是一条 x-交替路径。$Q = (v_1, v_2)$、(v_2, v_3)、(v_3, v_4)、(v_4, v_5)、(v_5, v_6)、(v_6, v_1)是一个环。 Q 不是 x-交替的，因为存在连续的0，例如(v_3, v_4)、(v_4, v_5)。

因此，根据第4.1节给出的边的定义，当 A 矩阵的条目 (i, j) 如下所示时，(1) 定义了 G 的匹配多面体：

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } e_j \text{ is incident to } v_i \\ 0, & \text{others} \end{cases}.$$

对于 C 的构造，我们定义

$$\mathcal{S} = \{0\}, \mathcal{M} = \{1, \ldots, k\}, \mathcal{L} = \{k+1, \ldots, k^2\}, \mathcal{XL} = \{k^2+1, \ldots, k^2+2k-1\}.$$

对于任意一行 i，赋值

$$c_{ij} = k + 1 - \ell, \text{ if } a_{ij} = 1 \text{ and } e_j \text{ is the } \ell\text{-th best candidate for node } v_i.$$

这意味着 $c_{ii} = 0 \in \mathcal{S}$，并且如果 e_j 是与 v_i 关联的有效边，则 $c_{ij} \in \mathcal{M}$。所有满足 j 不对应于与 i 关联的边的项 c_{ij} 都取值于 $\mathcal{L} \cup \mathcal{XL}$，如下所述。

如果 e_j 是有效边但不与 v_i 关联，则赋予 c_{ij} 一个属于 $\mathcal{L}$ 的数。这样的边有 k（$k-1$）条，与 $\mathcal{L}$ 的基数相同。我们从左到右按递减顺序将这些数分配到 $\mathcal{L}$ 中。换言之，如果 e_j、e_ℓ 不与 v_i 关联，且 j、$\ell > 2k$，那么 c_{ij}、$c_{i\ell} \in \mathcal{L}$，并且当且仅当 $j < \ell$ 时 $c_{ij} > c_{i\ell}$。

如果 e_j 是自环，但 $j \neq i$，则赋予 c_{ij} 一个属于 $\mathcal{XL}$ 的数。同样，我们在这些空位上从左到右按递减顺序将这些数分配到 $\mathcal{XL}$ 中。根据第 1.1 节和第 2.3 节给出的定义， C 是一个一致的 序数矩阵。

例 19. 给定具有 $k = 2$ 的实例以及以下偏好列表：

$$m_1 : w_2 \succ w_1, \quad m_2 : w_1 \succ w_2, \quad w_1 : m_2 \succ m_1, \quad w_2 : m_1 \succ m_2,$$

我们可以构造 C 矩阵：

$$\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} m_1 & m_2 & w_1 & w_2 & (m_1,w_2) & (m_1,w_1) & (m_2,w_1) & (m_2,w_2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 7 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 7 & 0 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 0 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 6 & 5 & 0 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

在这个实例中， $\mathcal{L} = \{3, 4\}$、 $\mathcal{XL} = \{5, 6, 7\}$，并且它们在每一行中从左到右按递减顺序排列。

我们在 $\mathcal{L}$、 $\mathcal{XL}$ 中分配数字的方式与下一个定理无关，因此有多个 C's 可以使以下结果成立。不过，我们按上述方式设置它们，目的是：(i) 满足序数矩阵条件（参见第 1.1 节）；(ii) 提供清晰的序数基结构，以便我们在下一节中以此为基础展开讨论。由于矩阵 C 是定理 3 中矩阵的一个特殊情形，依据 [7], ，我们得出以下结论。

定理 20 ([7])。 上文定义的 *(A,b,C)* 的任何支配基都对应于 $\mathcal{I}$ 的一个稳定匹配。

该算法的设计与分析遵循第 2.1 节所述多项式时间枢轴规则的高层次思路，组织如下。在第 5.2.1 节中，我们介绍相关定义，并展示匹配多面体的基所具有的单环森林结构。在第 5.2.2 节中，我们讨论序数基在算法运行过程中具备的性质，这些性质使我们能够定义分隔符并研究不喜欢关系。第 5.3.1 节和第 5.3.2 节分别介绍基数枢轴和序数枢轴的特点。我们在第 5.4 节证明该算法的收敛性。在第 6 节中，我们证明，如果将 Scarf 算法应用于二分图匹配多面体的适当非退化扰动，也可以证明其多项式时间收敛（回想一下，在非退化多面体中，Scarf 算法的运行过程是唯一确定的）。

5.2 基本性质

5.2.1 B的结构：单环森林

接下来的两个引理刻画了匹配多面体的基。证明相当标准（例如，参见网络多面体中基的刻画 [5]），为完整起见，列于附录 A.1。

引理 21. 设 B 是 A 的 n 列的集合， $E_B = E_B^v \cup E_B^\ell$ 是 G中对应边的集合，其中 E_B^v 由所有有效边组成，E_B^ℓ 由 E_B中的所有自环组成。当且仅当满足以下条件时， B 是 A的一个（可能不可行的）基：

1. $(V,\ E_B^v)$ 是一棵森林。
2. 该森林的每个连通分量在 E_B^ℓ中恰有一个自环。

引理 22。 考虑 A 的任意一个基 B 。经过行和列的置换后，与 B 对应的 A 的子矩阵 A_B 具有如下形式

$$A_B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_\tau \end{pmatrix} \qquad where\ B_\omega = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ & 1 & \ddots & * \\ & & \ddots & * \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

也就是说， B_ω 是一个对角线上为 1 的右上矩阵，对于 $\omega \in [\tau]$ （在上述矩阵中，没有条目表示 0，而 $*$ 表示 0 或 1）。此外，在每个矩阵 B_ω 中，第一列对应一个自环，而其他每一列恰好有两个等于 1 的条目。

引理 21 中介绍的结构称为单环森林。图1给出了一个示例。

5.2.2 D的结构：近可行性与分隔符

回顾一下，算法遍历的所有序数基都是近似可行的，并且 $|D \cap B| = n-1$ 对于某个可行基 B，使得 (B, D) 是一个 Scarf 对（见第 3.2 节和第 3.3 节）。还要回顾一下，对于一个近似可行基 D，我们令 E_D 为与 D中的列对应的边的集合（包括自环）。注意，如果 D 是一个近似可行序数基，那么 C_D 中存在一个大小为 $n \times (n-1)$ 的子矩阵，其结构与引理 22 中的结构相同，只是缺少 B_1 的第一列（该列对应于与节点 m_1关联的自环，例如第 1 列）。

本节旨在证明以下命题，其中包含关于近似可行序数基的性质。

命题 23。 设 D 是一个近似可行序数基， u是与之关联的效用向量。如果 $u_1 \in \mathcal{L}$ 和 D 至少有一个元素属于 $\{2, \ldots, k\}$，那么存在一个指标 i， $2 \le i \le k$，使得在图 $G_D = (V, E_D)$中：

1. m_i 同时关联一个自环和一条或多条有效边。
2. m_2， ⋯， m_{i-1} 仅关联有效边； m_{i+1}， ...， m_k 关联自环 *o* *nly.*
3. m_1 不与任何边关联。

按照第 *2.1* 节中的讨论，我们称 m_i 为 D的分隔符。

图1给出了命题 23 的示意图。我们指出，命题 23 及分隔符的相关定义仅在 $u_1 \in \mathcal{L}$时适用。正如我们将在第 5.4 节中看到的，当 $u_1 \in \mathcal{M}$时，我们将定义 m_1 为分隔符。

值得注意的是，我们将频繁使用关系 $B = R \cup \{1\}$, $D = R \cup \{j_t\}$。我们从近似可行基的效用向量的一些性质开始。

引理 24。 近似可行序数基 D 的效用向量满足

$$u_i \in \mathcal{S} \cup \mathcal{M}, \forall i \neq 1.$$

证明。 由于 D与一个可行基 B共有 $n-1$列，且不包含第一列，因此有 $B \setminus \{1\} \subset D$。根据引理 22，与可行基 B对应的任意子矩阵 A_B 都具有特殊对角形式。特别地，对于每一行 $i \neq 1$，与 v_i 关联的边（可能是一个自环）会出现在 R的列中。因此，对于除第一行外的每一行 i，都存在一列 $j \in R$ 使得 $c_{i,\ j} \in \mathcal{S} \cup \mathcal{M}$。所以， D 中这些行的最小元素必属于 $\mathcal{S} \cup \mathcal{M}$，从而证明完毕。

□

根据定义 18，我们可以在 D 中找到行与列的一一对应。回想一下，直观而言，对于每个节点 $v_i \neq v_1$， D 中行 i 的最小化者对应于 D 中所有与 v_i 关联的边之间最差的选择。

显然，如果自环 e_i 满足 $i \in D$，那么 e_i 不受 v_i 喜爱，因为 $c_{i,\ i} = 0$ 是最小化者。现在考虑一条有效边 $e_j = (m, w)$。列 c_j 中的数值均属于 $\mathcal{L}$，但行 m 和 w 除外。如果 $e_j \in E_D$，那么根据引理 24 的推论，只有 m、 w 或 m_1 会不喜欢 e_j:

推论 25. 设 D 是一个近似可行基。对于任意有效边 $e_j = (m, w)$，若 $e_j \in E_D$，则e_j 只能是被 m、 w 或 m_1 嫌弃，且恰好属于这三种情况之一。

引理 26. 设 D 是一个近似可行基，B 是与之关联的一个可行基。若 $u_1 \in \mathcal{L}$，则存在 $\bar{w} \in W$，使得 $(\bar{w}, \bar{w}) \in E_B \cap E_D$，且 $\bar{w}$ 在 μ_B 中没有得到恰当匹配。

证明。令 B为相应的可行基，使得 $D = B \cup \{j_t\} \setminus \{1\}$如定义 15 所述。于是$R \subset D$。$B$ 对应于一个可行匹配 μ_B。由于 $u_1 \in \mathcal{L}$，在 E_D中没有边与 m_1 关联，因此在 E_B中没有有效边与 m_1 关联，这意味着 m_1 在 μ_B中未被正确匹配。由于$|M| = |W|$，存在某个也未被正确匹配的女性 $\bar{w}$。因此 $x_{(\bar{w},\bar{w})} = 1$，即，自环 $(\bar{w}, \bar{w}) \in E_B \cap E_D$。 □

接下来的引理揭示了证明命题 23 过程中一个基本性质。

引理 27。考虑任意一个近似可行序数基 D，并假设 $u_1 \in \mathcal{L}$。那么：

(i) 若 $i \notin D$ $(2 \le i \le k)$ 且 $\ell \le i$，则 $\ell \notin D$。

(ii) 若存在 $2 \le i \le k$，使得 $i-1 \notin D$ 且 $i \in D$，则 D 中最右列对应一条有效边 (m_i, w)，且具有某个 $w \in W$。

证明。(i) 由于 D 几乎可行，因此我们总有 $1 \notin D$。$i = 2$ 的情况显然成立。考虑 $3 \le i \le k$ 和 $i \notin D$。反设存在 $2 \le \ell < i$，使得 $\ell \in D$。

设 $\bar{w}$ 为引理 26 保证存在的未被恰当匹配的女性。考虑边 $(m_\ell, \bar{w})$。我们证明 $(m_\ell, \bar{w}) \notin E_D$。反设 $(m_\ell, \bar{w}) \in E_D$。那么 $(m_\ell, \bar{w})$ 既不受 m_ℓ 厌恶，也不受 $\bar{w}$ 厌恶，因为 (m_ℓ, m_ℓ)、$(\bar{w}, \bar{w}) \in E_D$。根据推论 25，$(m_\ell, \bar{w})$ 受 m_1 厌恶。$(m_\ell, \bar{w})$ 是 D 中的最右列，因为根据 C 的定义，任何位于 $(m_\ell, \bar{w})$ 右侧的列 j 都满足 $c_{1j} < c_{1(m_\ell,\bar{w})}$，这与 $u_1 = c_{1(m_\ell,\bar{w})}$ 矛盾。用同样的论证，由于任何与 m_i 关联的有效边都对应于位于 $(m_\ell, \bar{w})$ 右侧的一列（回忆 $i > \ell$），因此 E_D 中没有有效边与 m_i 关联。此外，根据假设，我们知道 $(m_i, m_i) \notin E_D$。因此，在 B 中也没有边与 m_i 关联，矛盾。

因此，$(m_\ell, \bar{w}) \notin E_D$。由于 D 是一个序数基，存在 a 使得 $u_a > c_{a,\,(m_\ell,\bar{w})}$。注意，列 $(m_\ell, \bar{w})$ 中的项属于 $\mathcal{L}$，但行 $m_\ell, \bar{w}$ 除外，它们的项属于 $\mathcal{M}$。因此，根据引理 24，我们有 $a \in \{m_1, m_\ell, \bar{w}\}$。由于 $(m_\ell, m_\ell), (\bar{w}, \bar{w}) \in E_D$，我们有 $u_{(m_\ell,m_\ell)} = u_{(\bar{w},\bar{w})} = 0$。因此，$a = m_1$。回想一下上文，$u_1$ 是在 D 的最右列实现的。由于根据假设 $i \notin D$ 和 $\ell < i$，且根据构造，与节点 m_i 关联的所有边都位于 D 的所有列之后，我们有 $u_1 \le c_{(m_i,\mu_B(m_i))} < c_{(m_\ell,\bar{w})}$，从而得到所需的矛盾。

(ii) 根据 (i)，$1, \ldots, i-1 \notin D$ 以及 $i, i+1, \ldots, k \in D$。现在考虑 D 中被 m_1 厌恶的边 $e = (m_\ell, w)$。由于 $u_1 \in \mathcal{L}$, e 不与 m_1 关联，因此它是 D 中最右列。

如果 $\ell \le i-1$，那么 e 也被 m_ℓ 厌恶，因为当 $\ell \notin D$ 时，唯一被 m_ℓ 厌恶的边出现在与 m_ℓ 关联的列集合中最右边的那个条目处，而这恰好是 e。由于 $m_\ell \ne m_1$，这与定义 18 中的双射相矛盾。

如果 $\ell \ge i+1$，那么考虑边 $(m_i, \bar{w})$。如果 $(m_i, \bar{w}) \in E_D$，那么 m_i（因为 $(m_i, m_i) \in E_D$）、$\bar{w}$（因为 $(\bar{w}, \bar{w}) \in E_D$）以及 m_1（因为 $e \in E_D$）都不厌恶 $(m_i, \bar{w})$。这与推论 25 相矛盾。如果 $(m_\ell, \bar{w}) \notin E_D$，那么相应的列 $c_{(m_\ell,\bar{w})}$ 严格大于 u。两种情况都矛盾。

因此，对于某个 $w \in W$，$\ell = i$ and $e = (m_i, w)$ 是最右列。 □

现在证明命题 23。考虑图 $G_D = (V, E_D)$。令 $2 \le i \le k$ 使得$i-1 \notin D$ 且 $i \in D$。由于 $u_1 \in \mathcal{L}$, m_1 不与任何边关联，证明 3。$i \in D$ 意味着m_i 与一个自环关联，而引理 27 的 (ii) 部分意味着 m_i 在 G_D 中与一条有效边 (m_i, w) 关联。这证明了 1。根据引理 27 的 (i) 部分，$m_2, \ldots, m_{i-1}$ 不与自环关联，但根据近可行性的定义和引理 22，它们各自必须至少与一条有效边关联。另一方面，根据引理 27(i)，$m_{i+1}, \ldots, m_k$ 只与自环关联。这说明了 2，并完成了命题 23 的证明。

5.3 枢轴操作

在接下来的两节中，只要 $u_1 \in \mathcal{L}$，我们就会讨论 Scarf 算法如何执行一次一般的迭代。正如我们稍后将看到的，当 $u_1 \in \mathcal{M}$ 时，算法的行为也类似，但论证略有不同。

假设我们有一个 Scarf 对 (B, D)，其中 x 是与 B相关联的基本可行解，而 u 是与 D相关联的效用向量。我们令

$$B = \{1, j_1, \ldots, j_{t-1}, j_{t+1}, \ldots, j_n\},\ D = \{j_1, \ldots, j_t, \ldots, j_n\},\ R = B \cap D = B \setminus \{1\}. \tag{5}$$

根据命题 23，我们令 m_i 为当前分隔符。回想一下，一次迭代从一次基数枢轴开始，其中 j_t 进入 B，某个 $j_\ell \neq j_t$ 离开 B，从而得到一个与基本可行解 x'相关联的新可行基$B' = \{1, j_1, \ldots, j_{\ell-1}, j_{\ell+1}, \ldots, j_n\}$。如果 $j_\ell \neq 1$，则该迭代继续进行一次序数枢轴，其中 j_ℓ 离开 D，某个 $j^* \neq j_\ell$ 进入 D。因此，我们得到一个新的序数基 $D' = \{j^*, j_1, \ldots, j_{\ell-1}, j_{\ell+1}, \ldots, j_n\}$，它与新的效用向量 u' 相关联。

如果 $j^* \neq 1$，一次迭代就结束，并继续进行下一次迭代。

5.3.1 基数枢轴

本节讨论 Scarf 算法如何执行基数枢轴。由于给定了 j_t，执行基数枢轴后得到的基本可行解是唯一确定的（例如，参见 [5, 第 3 节。2]），我们用 x' 表示该解。另一方面，由于退化，可能有多个可以离基的指标 j_ℓ，因此对应于 x' 的基也可能有多个。因此，我们的任务是找出一个合适的 j_ℓ。具体而言，我们证明如下结果。

引理 28. *考虑 Scarf 算法的一次基数枢轴，其中 $u_1 \in \mathcal{L}$，且分隔符为 m_i。如果 j_t 是一条男性不喜欢的有效边（相对于 D），那么我们总能令离基列 j_ℓ 为自环 e_i 或某条女性不喜欢的边（相对于 D）。*

证明。我们证明，存在一个对应于 x' 的基 B'，其形式为 $B \cup \{j_t\} \setminus \{j_\ell\}$，其中 j_ℓ 或为自环（m_i, m_i），或为一条女性不喜欢的边。注意，可能出现 $x = x'$，和/或对应于 x' 的基不止一个。

根据引理 21，G_B 是一个带有单环的森林。将有效边 e_{j_t} 加入我们的图后，会发生以下情况之一：

(I) e_{j_t}连接 (V, E_B^v)中的两棵不同的树 T_1, T_2，从而形成一棵带有两个自环的更大的树 T.

(II) e_{j_t} 连接 (V, E_B^v)中的同一棵树 T_1 的两个节点。

假设情况 (I) 发生，并考虑连接 T的两个自环的路径 P。由于 $u_1 \in \mathcal{L}$，我们知道在 E_D中没有有效边与 m_1 关联，因此 P 不与 m_1关联。所以，P 的所有边都包含在 E_D中。

断言 29. *P 从带有一个自环的 m_i 出发，并以带有一个自环的女性 $\bar{w}$ 结束。此外，假设 P 与 p 个节点关联，其中*

$$P = (m_{i_1}, m_{i_1}), (m_{i_1}, w_{i_1}), (w_{i_1}, m_{i_2}), \ldots, (m_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}}), (w_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}}) \tag{6}$$

使得 $m_{i_1} = m_i$ 和 $w_{i_{\frac{p}{2}}} = \bar{w}$。那么，$P$ 的边不受₂的喜欢

$$m_{i_1}, m_1, w_{i_1}, m_{i_2}, w_{i_2}, \ldots, m_{i_{\frac{p}{2}-1}}, w_{i_{\frac{p}{2}-1}}, m_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}}$$

按此顺序。

断言 *29* 的证明。假设 P与 p个节点关联，因此具有 $p-1$条有效边，总共有 $p+1$条边（包括自环）。根据定义 18 和推论 25， P的每条边恰好被 $V_P \cup \{m_1\}$中的一个节点厌恶。特别地，被 m_1厌恶的边位于 P上，根据命题 23，它正是最右列 $(m_i, w) \in E_D$，其中 m_i是分隔符， w是某位女性。因此， P上的一个自环是 (m_i, m_i)，并且 P的第一个节点不失一般性地可假设为 m_i。另一方面，同样根据命题 23， P的最后一个节点是女性 $\bar{w}$。

因此，我们得到了 (6)，其中有 $m_{i_1} = m_i$、 $w_{i_1} = w$ 和 $w_{i_{\frac{p}{2}}} = \bar{w}$。显然，$(m_{i_{\frac{p}{2}}}, m_{i_{\frac{p}{2}}})$是 m_{i_1}-不喜欢的，(m_{i_1}, w_{i_1})是 m_1-不喜欢的，而 $(w_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}})$是 $w_{i_{\frac{p}{2}}}$-不喜欢的。于是，的 P的边受到不喜欢

$$m_{i_1}, m_1, w_{i_1}, m_{i_2}, w_{i_2}, \ldots, m_{i_{\frac{p}{2}-1}}, w_{i_{\frac{p}{2}-1}}, m_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}}$$

按此顺序。 ■

回顾一下，我们让某条男性不喜欢的有效边 e_{j_t} 进入基，其中有 $e_{j_t} \in P$。由于 $j_t \notin B$，我们有 $x_{j_t} = 0$。

情况 *1*： $x'_{j_t} = 1$。我们断言，存在一条从 m_i 开始的 x-增广路 P^A，带有一个自环，使得 $e_{j_t} \in P^A \subset E_D$. 事实上，考虑匹配 μ_x 和 $\mu_{x'}$。我们有 $e_{j_t} \notin \mu_x$ 和 $e_{j_t} \in \mu_{x'}$。现在定义边集 $E_{change} = \{e \in E_D | x_e \neq x'_e\}$。于是 $e_{j_t} \in E_{change}$。记 P^A 为 (V, E_{change}) 中包含 e_{j_t} 的连通分量。注意， P^A 中的每条边在 x 和 x' 上仍然不同，因此对于任意 $e \in P^A$， x_e和 x'_e 中一个取值为 1，另一个取值为 0。

考虑任意一个属于 P^A 的节点 v。 P^A 中恰有两条边（包括自环）与 v 关联，它们正是 v 在 μ_x 和 $\mu_{x'}$ 中关联的边（注意，根据第 4 节给出的匹配定义，每个节点在 μ_x 和 $\mu_{x'}$ 中都恰好与一条边关联）。由于 E_D 中没有环，且 P^A 是连通的， P^A 只能是一条路径。这条路径 P^A 是 x- 交替的，因为任何两个连续的边若其 x 值分别为 1 和 0，就会分别导致 x 和 x' 不可行。此外， P^A 是 x-增广的，因为根据极大性，其起始边和结束边只能是自环。因此， P^A 就是所需的、包含 e_{j_t} 的 x-增广路。根据 x-增广路的定义， P^A 的端点至少由两个自环组成。根据 E_D 的结构， E_D 中只有一条包含多个自环的路径，即 P。因此， $P^A = P$，这意味着根据断言 29， P 从带有自环的 m_i 开始。

剩下要证明的是， $B \cup \{j_t\} \setminus \{i\}$ 是一个可行基，其对应的顶点为 x'。我们先证明 $B' = B \cup \{j_t\} \setminus \{i\}$ 是一个线性无关集。观察图$G_{B'} = (V, E_{B'})$即可看出这一点。回想一下，根据引理 21， G_B具有单环森林结构。在 B 中加入j_t 并移除 i，仍能保持该结构，而且 $G_{B'}$ 的每个连通分量都恰好有一个自环。因此，再次利用引理 21可知， $B \cup \{j_t\} \setminus \{i\}$ 是一个基。为了得出它对应于x'，注意到 x' 的支撑包含于 $D \cup \{1, j_t\} \setminus \{i\} \subset B \cup \{j_t\} \setminus \{i\}$。

情况 *2*： $x'_{j_t} = 0$。因此，我们处于一个退化枢轴情形，且 $x' = x$。我们声称，在 E_D中不存在包含e_{j_t}的x-增广路 P^A。否则，若存在这样的 P^A，定义 $y \in \mathbb{R}^m$ 使得

$$y_e = \begin{cases} 1 - x_e, & \text{if } e \in E_{P^A}, \\ x_e, & \text{if } e \notin E_{P^A}. \end{cases}$$

由于 P^A 是 x-增广的，因此我们有 $Ay = b$ 和 $y_{j_t} = 1 - x_{j_t} = 1$。设 v_j 为 P^A的一个端点，则 $y_{(v_j, v_j)} = 1 - x_{(v_j, v_j)} = 0$。定义 $B^{(y)} = B \cup \{j_t\} \setminus \{j\}$。与情况 1 类似，我们可以推得 $B^{(y)}$ 是 A 的一个基，且根据定义 $B^{(y)} y_{B^{(y)}} = b$。因此， y 是一个基本可行解，其中 $y_{j_t} = 1$，矛盾。

注意到 $E_P \subset E_D$，且 P 不是 x-增广的。因此，根据断言 29，至少存在一条边 $e \in P$，它要么是 m_{i_1}-男性不喜欢的，要么是女性不喜欢的，并且满足 $x'_e = x_e = 0$。接下来

采用与情况 1 类似的论证，我们可以让边 $e_{j_\ell} = e$ 离开基，从而得到与 $x' = x$ 相关联的基 $B' = B \cup \{j_t\} \setminus \{j_\ell\}$。

若发生 (II)，则进入的有效边 e_{j_t} 会在 T中形成一个环 Q，其中 Q 必为偶数。Q 至多关联一个自环。根据引理 21，枢轴操作会使 Q中的一条有效边离开基，从而形成 B'。假设 Q 有 p 条（有效）边关联到 p 个节点，并且回想一下， p是偶数。

断言 30。 Q 的其他每条边都是女性不喜欢的。

断言 *30* 的证明。情况 *1*： Q 包含 m_i。我们断言 (m_i, w) 属于 Q。如果 (m_i, w) 不属于 Q，那么根据推论 25， Q 的边必定为 $Q \setminus \{m_i\}$ 中的节点所不喜欢（因为m_i 不喜欢 (m_i, m_i)），这与定义 18 矛盾。现在令

$$Q = (m_{i_1}, w_{i_1}), (w_{i_1}, m_{i_2}), \ldots, (m_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}}), (w_{i_{\frac{p}{2}}}, m_{i_1}) \tag{7}$$

其中 $m_{i_1} = m_i$和 $w_{i_1} = w$。由于 (m_{i_1}, w_{i_1}) 是 m_1不喜欢的，因此 Q 上的边为.....所不喜欢

$$m_1, w_{i_1}, m_{i_2}, w_{i_2}, \ldots, m_{i_{\frac{p}{2}-1}}, w_{i_{\frac{p}{2}-1}}, m_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}}$$

按此顺序。

情况 *2*： Q 不包含 m_i。设

$$Q = (m_{i_1}, w_{i_1}), (w_{i_1}, m_{i_2}), \ldots, (m_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}}), (w_{i_{\frac{p}{2}}}, m_{i_1}).$$

由于唯一一条 m_1不喜欢的边不属于 Q（否则 m_i 与 Q 关联，此时属于情况 1），因此 Q 上的边必定交替地被男性和女性所厌恶。■

按照与 (I) 类似的论证，我们可以得到所需结果。具体来说，如果 Q 上的所有女性不喜欢的边的 x值均为 1，那么 Q就是 x交替的，其中 Q 上的所有女性不喜欢的边的x值均为 1，而所有男性不喜欢的边的 x值均为 0。定义 $y \in \mathbb{R}^m$ 为

$$y_e = \begin{cases} 1 - x_e, & \text{if } e \in E_Q, \\ x_e, & \text{if } e \notin E_Q. \end{cases}$$

不难验证， y是一个满足$y_{j_t} = 1$的基本可行解，而 $B' = B \cup \{j_t\} \setminus \{j_\ell\}$是对应于 y的一个基，其中 j_ℓ 选取为 Q的任意一条女性不喜欢的边。反过来，如果存在一条满足 $x_e = 0$的女性不喜欢的边 e，那么我们有 $x = x'$，并令$e_{j_\ell} = e$、 $B' = B \cup \{j_t\} \setminus \{j_\ell\}$，结论可类似地推出。

□

注 31. 在引理 *28* 的证明中，我们多次构造向量 y，它是匹配 μ_x 与交替子图（P 或 Q）的对称差。形式上， y 是 $\mu_x \Delta E_P$ （分别为 $\mu_x \Delta E_Q$）的特征向量。在二分图匹配理论中，众所周知，当且仅当不存在 μ-增广路时，匹配 μ 才是极大的。我们可以看到，这与重新定义的匹配问题有相似之处。

5.3.2 序数主元

这是上一节的延续。我们讨论 Scarf 算法如何在 j_ℓ 离开 D时找到进入列 j^*，从而形成 D'。我们仍然假设 $u_1 \in \mathcal{L}$，且 m_i 是D中的分隔符。

若在 D 中 e_{j_ℓ} 对 v_{i_ℓ} 不受欢迎，则根据定义 11，列 j_r 满足：$c_{i_\ell,\ j_r}$ 是 C_D 中行 i_ℓ 上第二小的元素。回想一下，我们将 j_r （分别地，e_{j_r}）称为参考列 （分别地，边）。假设参考边 e_{j_r} 相对于 D 对 v_{i_r} 不受欢迎。令 j^* 为序数枢轴中的进入列。由上一个定义可直接得出以下观察。

引理32。 在序数基 $D' = D \setminus \{j_\ell\} \cup \{j^*\}$ 中，e_{j_r} 对 v_{i_ℓ} 不受欢迎，且 e_{j^*} 对v_{i_r} 不受欢迎。

使用以上记号，以下性质在序数枢轴中起着关键作用：

引理 33。 $c_{i_\ell,\ j_r} \in \mathcal{M}$。

证明。 我们可以通过证明 $c_{i_\ell,\ j_r} \notin \mathcal{S} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{XL}$ 来说明这一点。

如果 $c_{i_\ell,\ j_r} = 0$，那么 $c_{i_\ell,\ j_r} < c_{i_\ell,\ j_r} = 0$，矛盾。因此 $c_{i_\ell,\ j_r} \notin \mathcal{S}$。

如果 $c_{i_\ell,\ j_r} \in \mathcal{L} \cup \mathcal{XL}$，那么 $c_{i_\ell,\ j_r} \geq k+1$。由于 $c_{i_r,\ j_\ell}$ 是 $\{c_{i_r,j}\colon\ j \in D\}$ 中第二小的元素，因此 E_D 中至多有一条边与 v_{i_r} 关联；若存在，该边必定是离开边 e_{j_ℓ}。根据第5.3节中的讨论，$B' = D \cup \{1\} \setminus \{j_\ell\}$ 是 Scarf算法访问过的一个基。然而，$E_{B'}$ 中没有边与 v_{i_r} 关联，这与 B' 的可行性相矛盾。因此$c_{i_\ell,\ j_r} \in \mathcal{M}$。

□

由注32和引理 33，我们可以立即推知 e_{j_r} 不是自环。

推论34。 在任意序数枢轴中，参考边 e_{j_r} 是一条有效边。

序数枢轴会改变效用向量 u，但只会改变其中的分量 u_{i_ℓ} 和 u_{i_r}。下面的引理将引理 12 中关于 Scarf 算法运行机制的一些基本事实转化为图论语言。

引理35. 序数枢轴给出 $(D, u) \to (D', u')$，其中 $u'_{i_\ell} > u_{i_\ell}$、$u'_{i_r} < u_{i_r}$ 和 $u'_i = u_i$, 对于 $i \neq i_\ell, i_r$。相应地，我们有：

1. v_{i_ℓ} 不喜欢 D 中的离开边 e_{j_ℓ}，也不喜欢 D' 中的参考边 e_{j_r}。

2. v_{i_r} 不喜欢 D 中的参考边 e_{j_r}，也不喜欢 D'中的进入边 e_{j^*}。

3. 任何其他节点在 D 和 D' 中都不喜欢同一条边。

作为引理 28 的延续，我们将看到，在序数枢轴中，离开环 e_i 或女性不喜欢的离开边总会返回一条新的男性不喜欢的有效边 e_{j^*}。

引理 36. 假设 $u_1 \in \mathcal{L}$、$\{2, \ldots, k\} \cap D \neq \emptyset$，且离开边 e_{j_ℓ} 是（相对于 D）女性不喜欢的。那么：

1. v_{i_ℓ} 是女性，v_{i_r} 是男性；

2. e_{j^*} 在 D' 中是男性不喜欢的；

3. 女性 v_i $_\ell$的效用增加，即 $u'_{i_\ell} > u_{i_\ell}$，而其他女性的效用均不变 .

证明。由于 e_{j_ℓ} 是女性不喜欢的，且 v_{i_ℓ}不喜欢（相对于 D），因此 v_{i_ℓ} 只能是女性。根据推论34，参考边 e_{j_r} 是有效边，且其关联的女性 v_{i_ℓ}并不讨厌它；因此，根据推论 25，它必定为某个男性所讨厌。所以，v_{i_r} 是男性。这证明了 1。

序数枢轴会将一条新的v_{i_r}不喜欢的边e_{j^*} 引入 D'。回想一下， m_i 是 D中的分隔符。反设e_{j^*} 是一个自环。于是e_{j^*} =(v_{i_r}, v_{i_r})。根据引理 27，新的序数基 D' 必须有一个分隔符。我们断言，这个分隔符只能是 m_{i-1}。事实上，对应于e_j的自环（其中 $j \geq i$）属于 D'。因此， m_1、……、m_{i-1}中必有一个是 D'中的分隔符。然而，如果对于某个 $j \leq i-2$， m_j 是分隔符，就会与引理 27(i)矛盾。因此， m_{i-1}是分隔符。

根据定义，与 D 关联并指向 m_i 的所有有效边都必须离开 D。根据引理 27(ii)，其中一条边是 m_1不喜欢的。这与e_{j_ℓ} 是女性不喜欢的这一事实矛盾。因此，e_{j^*} 是一条有效边。这证明了 2。

至于效用向量的变化，根据引理35第1部分，

$$u'_{i_\ell} = c_{i_\ell, j_r} > c_{i_\ell, j_r} = u_{i_\ell}.$$

由于v_{i_r} 是男性，根据引理35第3部分，所有其他女性的效用都不会改变。这表明了3。

□

我们指出，要使下面的基本引理成立，需要矩阵 C 具备一些额外性质，以区别于Biró和Fleiner在第 5.1 节中讨论的通用矩阵 [7], 。

Lemma 37. 假设 $u_1 \in \mathcal{L}$ ，且离开边e_{j_ℓ} 是自环(m_i, m_i)。 *n:*

1. $v_{i_\ell} = m_i$, $v_{i_r} = m_1$;

2. 设 u' 为通过*wal*枢轴得到的序数基 D' 的效用向量。此时，一条新的 m_1不喜欢的（相对于 D'）有效边e_{j^*} 进入，并且：

(i) 如果 $2 \leq i < k$、 e_{j^*} 与 m_{i+1} 关联，并且

$$u'_1 < u_1, \ but \ still \ u'_1 \in \mathcal{L}.$$

$$u'_i = u_i, \ for \ k < i \leq 2k.$$

(ii) 如果 $i = k$、 e_{j^*} 与 m_1 关联，并且

$$u'_1 < u_1, \ and \ u'_1 \in \mathcal{M}.$$

$$u'_i = u_i, \ for \ k < i \leq 2k.$$

证明。自环（m_i， m_i）相对于 D 是 m_i-不喜欢的，因此 $v_{i_\ell} = m_i$。根据引理 33， $c_{i_\ell,\ j_r} \in \mathcal{M}$，因此边 e_{j_r} 与 m_i 关联。根据引理 27(ii)， D 中的最右列也与 m_i 关联。此外， D 中的最右列恰好是 j_r，因为 m_i在所有边中的第二差选择 e_{j_r} 是所有有效边中的最差选择，而这对应于最右列。由于$u_1 \in \mathcal{L}$，最右列 j_r 是 m_1-不喜欢的，因此 $v_{i_r} = m_1$。这证明了 1。

注意，根据引理 26，存在一位女性 $\bar{w}$，其自环（$\bar{w}$， $\bar{w}$） $\in E_D$。我们利用这一事实来证明第 2 部分。

(i) 若 $2 \leq i < k$，则根据定义 11，进入列 j^* 满足

$$c_{hj^*} > \bar{u}_\ell \text{ for all } h \neq 1. \tag{8}$$

考虑边 $e_j = (m_{i+1}, \bar{w})$。列 c_j 满足上述条件，且 $j \notin D$ （根据引理 27(ii)， D 中最右列与 m_i 关联，因此与 m_{i+1} 关联的有效边均不属于 D）。因此，

$$u_1' = c_{1j^*} \geq c_{1,(m_{i+1},\bar{w})}. \tag{9}$$

因此 $u_1' \in \mathcal{L}$。注意， $u_1' < u_1$ 必须成立，否则 $c_{j^*} > u$，这就产生了矛盾。假设 $e_{j_r} = (m_i, w)$，那么

$$u_1' < u_1 = c_{1,(m_i,w)}. \tag{10}$$

(9) 和 (10) 意味着边 e_{j^*} 关联于 m_i 或 m_{i+1}。假设前者成立，那么根据 (10)， $c_{1,\ j^*} < c_{1,\ (m_i,w)} = c_{1,\ j_r}$，因此列 j^* 在 C 中位于列 j_r 的右侧，这意味着

$$c_{i,j^*} < c_{i,j_r} = \bar{u}_i.$$

这与 $\ell = i$ 的 (8) 矛盾。因此， e_{j^*} 必须关联于 m_{i+1}。

此序数枢轴仅改变 m_i 和 m_1 的行最小元。由于对应于女性的行最小元均未改变，我们有

$$u_i' = u_i, \text{ for } k < i \leq 2k.$$

(ii) 若 $i = k$，则考虑边 $e_j = (m_1, \bar{w})$。通过与 (i) 类似的论证，我们可以说明 e_{j^*} 只能关联于 m_1。现在假设 $e_{j^*} = (m_1, w')$。在此阶段，一条关联于 m_1 的有效边首次进入序数基。注意，

$$u_1' = c_{1,j^*} = c_{1,(m_1,w')} \in \mathcal{M}.$$

此外，每位女性的效用都不会改变，由此证明得证。 □

5.4 收敛

回顾一下，一旦选定进入当前序数基的列，序数枢轴操作便有唯一确定的定义。算法 1 中描述的基数枢轴规则将在多项式次迭代内使 Scarf 算法收敛。

回顾一下，在 Scarf 算法的第一次迭代中，我们有 $u_i \in \mathcal{L}$。

算法 1基数枢轴规则

设 B 为当前可行基， D 为效用向量为 u的当前序数基，且 j_t为将要进入 B的男性不喜欢的（相对于 D）边。**如果** $u_1 \in \mathcal{L}$ **那么**令 m_i 为分隔符。**否则**设定 $i = 1$。**结束如果** **如果** $e_i = (v_i, v_i)$ 是离基候选者 **那么**令 e_i 离基。**否则**选择任何一条女性不喜欢的有效边（相对于 D），只要它是离基候选者，就将其对应变量选为离基变量。**结束如果**

为证明多项式时间收敛，我们从一个辅助引理开始。

引理 38。 如果 *Scarf* 算法在$u_1 \in \mathcal{L}$时反复应用算法 *1* 来执行基数枢轴，那么经过 $O(k^2)$ 步后，我们将得到一个序数基，其中包含 $u_1 \in \mathcal{M}$ 。更具体地说，在每一步中，分隔符的下标（其中我们将 $k+1$ 与1对应）和女性$\sum_{w \in W} u_w$的总效用都不会降低，并且其中至少有一个会严格增加。

证明。 假设 $k \geq 2$，否则该结论显然成立。根据构造， $B_0 = \{1, 2, \ldots, n\}$ 和 $D_0 = \{3k+1, 2, 3, \ldots, n\}$，因为 $c_{1,\ 3k+1}$ 是第一行中前 n 列之外的最大元素（例 19 给出了示例）。

我们首先对迭代次数进行归纳，证明当 $u_1 \in \mathcal{L}$ 时，算法 1 的输入是良定义的；此外，总是存在一个离基候选变量，它要么形如 e_i （其中 m_i 是当前分隔符），要么是一条女性不喜欢的边（相对于当前序数基 D）。回顾一下，一次迭代定义为序数基和可行基同时发生变化。

对于基础情形，注意 $u_1 = c_{1,\ 3k+1} \in \mathcal{L}$、 $1 \notin D$ 和 $2 \in D$。由引理 27(ii)， m_2 是分隔符。在第一次迭代中，我们执行一次基数枢轴，使 e_{3k+1} 进入 B_0；如上所述，这是一条男性不喜欢的边。因此，算法 1 的输入是良定义的。结论的第二部分由引理 28 得出。

对于归纳步骤，我们来考察算法的一般迭代，即第 g 次迭代，其中 $g \in \mathbb{N}$。根据归纳假设，第 $g-1$ 次迭代中算法 1 的输入是定义良好的，离基变量被选为 e_i （其中 m_i 是当前分隔符）或一条女性不喜欢的边（相对于 D）。于是，我们可以应用引理 36 或引理 37，得出进入当前可行基 B 的边是男性不喜欢的。由于每个近似可行基都有一个分隔符（见命题 23），算法 1 的输入是定义良好的。结论的第二部分由引理 28 得出。

因此，Scarf 算法通过迭代应用算法 1 来选择基数枢轴规则，其定义良好。现在我们来论证该算法会收敛到一个具有 $u_1 \in \mathcal{M}$ 的序数基。注意，在一次序数枢轴操作中，要么分隔符从 i 移至 $i+1$ （当 $i = n$ 时，定义 $i+1 = 1$），而所有女性的效用保持不变（引理 37，第 2 部分）；要么分隔符不移动，但一名女性的效用增加，其他女性的效用均保持不变（引理 36，第 3 部分）。在整个算法过程中，女性的效用都属于 $\mathcal{S} \cup \mathcal{M}$。因此，经过 O（k^2）次迭代后，分隔符必定变为 m_1，这意味着 $u_1 \in \mathcal{M}$ （见引理 37，第 2 部分）。

□

考虑 $u_1 \notin \mathcal{L}$ 时的第一次迭代。此时 $u_1 \in \mathcal{M}$ ，而在此之前，与 m_1 关联的有效边不会出现在中间可行基 B 中（因为 $u_1 \in \mathcal{L}$ throuand wghout 算法的第一部分），因此 m_1 从未在与 Scarf 算法所访问的可行基相对应的任何匹配中被匹配。根据引理 38，在下一次迭代中，我们从 $u_1 \in \mathcal{M}$ 开始。

现在假设 $u_1 \in \mathcal{M}$，并将 m_1 定义为分隔符。我们继续进行基数枢轴，使某条 m_1 厌恶边进入我们的基。使用算法 1，我们可以重复类似于引理 27、引理 28、引理 36 和引理 37 的论证，从而得出以下结论。详细信息见附录 A.2。

引理 39。 考虑 *Scarf* 算法按照算法 *1* 执行至 $u_1 \in \mathcal{M}$ 后的一次迭代。令 D 为当前的近似可行序数基，并假设我们有 $u_1 \in \mathcal{M}$。则

(i) $1, 2, \ldots, k \notin D$.

(ii) D 中唯一的 m_1 厌恶边对应于 (m_1, w) ，其中 $w \in W$ 满足 .

(iii) 在任意基数枢轴中，设 B 是我们当前的可行基， $D = B \cup \{j_t\} \setminus \{1\}$ 是其关联的序数基。如果 e_{j_t} 是一条男性不喜欢的有效边，那么我们可以找到自环 e_1 或某条女性不喜欢的边 e_{j_ℓ} 离开 B，并得到 $B' = B \cup \{j_t\} \setminus \{j_\ell\}$ 作为新的可行基。

(iv) 如果离开边 e_{j_ℓ} 是女性不喜欢的边，那么我们不会终止。在接下来的序数枢轴中，设 e_{j_r} 为参考边。那么 v_{i_ℓ} 是一名女性，v_{i_r} 是一名男性。一条新的男性不喜欢的有效边 e_{j^*} 进入 D。此外，记新序数基 D' 的效用向量为 u'，则

$$u'_{i_\ell} > u_{i_\ell}, \quad u'_{i_r} < u_{i_r}, \quad u'_i = u_i \ for \ i \neq i_\ell, i_r.$$

特别地，$\sum_{w\in W} u_w$ 严格递增。

(v) 如果离开边是自环 e_1，那么列 1 离开 B，接着我们得到 $B' = D$，算法至此终止。

这些原则将指导我们继续进行防循环枢轴，并在 $O(k^2)$ 步后以 (v) 结束。结合引理 38 和引理 39，并在 $u_1 \in \mathcal{M}$ 的情况下，以类似于 $u_1 \in \mathcal{L}$ 时的方式对步数进行界定，我们可以界定算法的总运行时间。

定理 40。 如果 *Scarf* 算法通过迭代应用算法 *1* 来执行基数枢轴，那么它会在 $O(n^2)$ 步后收敛。

6 通过扰动二分图匹配多面体实现收敛

文献中常见的做法是在运行 Scarf 算法之前先施加扰动，使所得多面体成为非退化的 [6, 7]。回想一下，在这种情况下，Scarf 算法的行为是唯一确定的，见第 1.1 节。本节将从另一个角度阐释我们的枢轴规则，并将其与扰动方法联系起来。

注意到，形式（1）给出的二分图匹配多面体是高度退化的。对于第 5.1 节中给出的 A、b，我们定义一个非退化多面体

$$\{x \in \mathbb{R}^m_{\geq 0} : Ax = b + b(\epsilon)\}, \tag{11}$$

其中，$b(\epsilon) \in \mathbb{Q}^n_{\geq 0}$ 是由下式定义的参数化向量

$$b(\epsilon) := (\underbrace{\epsilon^{k+1}, \epsilon^{k+2}, \ldots, \epsilon^{2k}}_{\text{men}}, \underbrace{\epsilon, \epsilon^2, \ldots, \epsilon^k}_{\text{women}})^T.$$

观察 1。 在 (11) 中，对于每个女性 w，都有 $\sum_{m\in M} b_m(\epsilon) < b_w(\epsilon)$。特别地，与女性对应的每个约束的右端项都严格大于与男性对应的每个约束的右端项。

下面是线性代数中的一个经典事实，参见例如 [5, 练习 3.15]。

引理 41。 存在某个 $\epsilon^* > 0$，使得对于任意固定的 ϵ（满足 $0 < \epsilon < \epsilon^*$）

（*i*）由（*11*）定义的多面体的所有基本可行解都是非退化的。也就是说，（*11*）的每个基本可行解 x恰好有 n 个严格为正的分量。

(ii) 对于(11) 可行的每个基，对于原多面体也都是可行的。

对于任意一个使多面体非退化的固定 $b(\epsilon)$，Scarf 算法的迭代会生成一个 Scarf 对序列

$$(B_0, D_0) \to (B_1, D_1) \to \cdots \to (B_I, D_I). \tag{12}$$

回想一下，每一对都包含两个 n 集合，其中 $|B_I \cap D_I| = n-1$用于 $I < N$和 $B_N = D_N$。我们的枢轴规则（算法 1）可由一种特定的扰动来表示:

定理 42. 存在 $\epsilon > 0$，使得在原始二分图匹配多面体上，使用算法 *1* 给出的枢轴规则执行 *Scarf* 算法，所得序列与在其扰动 (11)上执行该算法所得的序列相同(12) 。

证明。 固定 $\epsilon = \min\{\frac{1}{2n+1}, \epsilon^*\}$，其中 ϵ^* 使引理 41 成立。于是 (11) 是非退化的。

设 B 是 (11) 的一个可行基，对应于顶点 x^ϵ。根据引理 41， B 对原始二分图匹配多面体也可行，并设 x 是与之对应的基本可行解。若 $j \in B$,

$$|(x^\epsilon - x)_j| = |(A_B^{-1} b(\epsilon))_j| = \left| \sum_{i=1}^{n} (A_B^{-1})_{ji} b_i(\epsilon) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} |(A_B^{-1})_{ji}||b_i(\epsilon)| \leq \frac{1}{2n+1} \sum_{i=1}^{n} |(A_B^{-1})_{ji}| < \frac{1}{2},$$

其中，最后一个不等式利用了 A 是全幺模的这一事实。

C结合上述不等式以及 $x_j = x_j^\epsilon = 0$ 对于 $j \notin B$这一事实，我们得到

断言 43。 对于任意 $j \in [n]$， $x_j = 1$ 当且仅当 $x_j^\epsilon > \frac{1}{2}$。

注意到引理 21 与右端项无关，因此多面体 (11) 的图表示 G_B仍具有单环森林结构。现在考虑该森林中带有自环的树 T。我们将 T 的根节点定义为节点 r，使得它的自环属于 E_B。于是 r 被唯一确定。

现在我们来研究限制在 T 上的向量 x 的性质。对于任意节点 v，回想一下，$\deg_T(v)$ 定义为与 v 在 T 中关联的边（包括自环）的数量。我们称 T 的节点 v 为 叶节点，如果 $v \neq r$ 且 $\deg_T(v) = 1$。 T 中与叶节点关联的每条边 e 都被唯一确定，随后我们便可以归纳地定义 T 中每条边 e 对应的 x_e 的其他取值。

我们的扰动意味着叶节点具有以下性质。

断言 44。 如果 v 是 T 的叶节点，那么 v 是男性。

断言 *44* 的证明。如果女性 w 在 T 中的度为 1，且 $(w, w) \notin E_B$，那么考虑唯一的边 $(m, w) \in E_B$。根据观察 1，我们有 $x^\epsilon_{(m,w)} = 1 + b_w(\epsilon) \geq 1 + \epsilon^k > 1 + b_m(\epsilon)$，这与 B 的可行性相矛盾，因为我们要求 E_B 中与 m 关联的任意边的 x^ϵ 值非负。■

断言 45。对于任意女性 w，我们有 $\deg_T(w) = 1$ 或 $\deg_T(w) = 2$。

断言 *45* 的证明。如果 T 只包含 w，那么我们有 $\deg_T(w) = 1$，因为自环 (w, w) 是 T 上唯一的边。在证明的其余部分，我们假设 T 至少有两个节点。

因此假设 T 至少包含两个节点。如果 w 不是根节点，那么根据断言 44，我们知道 $\deg_T(w) \neq 1$。设 $\deg_T(w) \geq 3$。由于当 $b(\epsilon)$ 为零向量时，(11) 是整数的，因此存在至少两个不同的男性 m_a, m_b， 使得 $e_j = (m_a, w) \in E_T$, $e_k = (m_b, w) \in E_T$， 且 $x_j = 0, x_k = 0$。对于 m_a， 存在另一条与 m_a 关联的边 $e_{j'}$， 使得 $x_{j'} = 1$ （同样使用多面体的整数性）。$e_{j'} = (m_a, w_a)$ 的另一个端点是女性 w_a， 但根据断言 44，它不能是叶节点，这意味着存在至少一名男性 $m_{a'}$， 使得 $e_{j''} = (m_{a'}, w_a) \in E_T$， 其中 $x_{j''} = 0$ （同样利用整数性）。继续延长这条路径，我们得到一个序列 $(w, m_a, w_a, m_{a'}, \dots)$，其中每条边都由 T 中的两个连续节点构成。除非该序列包含根节点，否则它不会终止。注意，以相同方式定义的序列 $(w, m_b, w_b, m_{b'}, \dots)$ 也适用同样的论证。由于 T 中有一个根节点，且 T 没有环，我们必有 $m_a = m_b$，矛盾。

如果 w 是根节点，那么 $\deg_T(w) \neq 1$ ， 因为 T 不是单例。假设 $\deg_T(w) \geq 3$。那么存在一个男性 m_a ， 使得 $e_j = (m_a, w) \in E_T$ ， 且 $x_j = 0$ （再次由整数性可知）。同理,

与之前一样，我们可以用另一条边 $e_{j'} = (m_a, w_a)$ 延续这条路径，使得 $x_{j'} = 1$，依此类推。我们得到一个序列 $(w, m_a, w_a, \ldots)$。由于 T 是有限的，这个序列必定以一个根节点结束；但由于 T 上只有一个根节点 w，且 T 没有环，因此我们得出矛盾。■

根据断言 45 和断言 44，我们得出，限制在 T 上的向量 x 具有非常规则的结构，下一条断言将对此进行讨论。

断言 46。对于 G_B的单环森林结构中的任意一棵树 T，都有：

1. 从根节点 r 出发、位于 T 上的任意路径都是 x-交替的。

2. 如果根节点是男性 m，那么自环具有 $x_{(m,m)} = 1$。

3. 如果根节点是女性 w，那么当 T 只有一个节点 w时，自环具有 $x_{(w,w)} = 1$ 。如果 T至少有两个节点，那么 $x_{(w,w)} = 0$。

断言 *46* 的证明。

1. 若 T 仅包含一个节点，那么根据第 4 节中的定义，它显然是 x-交替的.

假设 T至少包含两个节点。固定一条路径 P，使其位于 T中且满足 $r \in V_P$。注意，根据断言 45，由于可行性，一个女性不可能关联两条满足 $x_e = x_{e'} = 0$ 的边 e、e'。因此，若沿着路径 P出现两个连续的 0，即 e、$e' \in E_P$、 $e \cap e' \neq$和 $x_e = x_{e'} = 0$，那么对于某个男性有$e \cap e' = m$。根据可行性，我们可以找到第三条边 $\tilde{e}$，使得 $m \in \tilde{e}$ 且 $x_{\tilde{e}} = 1$。˜然而，我们可以从 $\tilde{e}$出发，找到另一条 x-交替路径 P，它从 m 开始，且与 P 边不相交；因为根据可行性，我们总能为一条入射 0 边的男性找到后继节点˜，并根据度数计数为女性找到后继节点。与断言 45 的证明类似，路径 P必定终止于根节点，这与 $E_P \cap E_{\tilde{P}} = \emptyset$矛盾。这就证明了 1。

2 和 3。考虑以下奇偶性论证：当 T 不是单例时，根据断言 45，必定存在一个叶节点，我们 m。 m 会生成一条从 e 出发、以 $m \in e$ 和$x_e = 1$作为 x交替条件的路径，并以根节点为终点。于是 2 和 3 成立。■

根据断言 46， T 必定属于以下四种类型之一，如图 6 所示 :

(a) 一棵以男性 m为根节点、至少有两个节点的树。 $x_{(m,m)} = 1$ 且从根节点到叶节点的每条路径都满足 x交替条件。(b) 一棵以女性 w为根节点、至少有两个节点的树。 $x_{(w,w)} = 0$ 且从根节点到叶节点的每条路径都满足 x交替条件。(c) 一个男性单例 m ，其 $x_{(m,m)} = 1$。(d) 一个女性单例 w ，其 $x_{(w,w)} = 1$。

我们现在研究 x^ϵ。我们的关键观察是，对于类型 (a) 和类型 (b) 的 T ，x^ϵ-值具有单调性：

断言 47。设 T 是类型 *(a)* 或类型 *(b)* 的 G_B 的一棵树。固定一条从根节点 r 到叶节点的任意路径 $P = r$, f_0, r, f_1, v_1, f_2, ..., f_p, v_p, 其中 $f_0 = (r,\ r)$ 是自环， $f_i = (v_{i-1},\ v_i)$ 对应于 $i \in [p]$, 且根据断言 *44*, v_p 是男性。那么对于 $0 \leq i < j \leq p$, 有：

1. 如果 $x_{f_i} = x_{f_j} = 0$, 那么 $\frac{1}{2} \geq x^\epsilon_{f_i} > x^\epsilon_{f_j} > 0$。

2。如果 $x_{f_i} = x_{f_j} = 1$, 那么 $\frac{1}{2} < x^\epsilon_{f_i} < x^\epsilon_{f_j}$。此外，当且仅当 $j = p$ 时， $x^\epsilon_{f_j} > 1$ 。

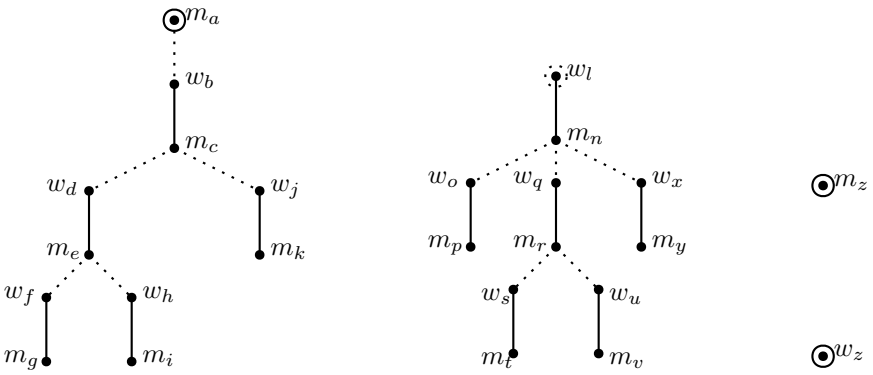

图 6：四种类型的 T示意图。从左到右依次对应类型 (a)、(b)、(c)、(d)。实线边（相应地，点线边）对应 x值 1（相应地，0）。注意，从根节点到叶节点的每条路径都是 x交替的。

断言 *47* 的证明。考虑一种简单情形： T 本身是一条路径。因此， $P = T$。然后，我们可以通过反转在 P 中访问节点的顺序，直接得到 x^ϵ 的值。事实上，根据可行性，我们有：

$$
\begin{aligned}
&x^\epsilon_{f_p} = 1 + b_{v_p}(\epsilon),\\
&x^\epsilon_{f_{p-1}} = 1 + b_{v_{p-1}}(\epsilon) - x^\epsilon_{f_p} = b_{v_{p-1}}(\epsilon) - b_{v_p}(\epsilon),\\
&x^\epsilon_{f_{p-2}} = 1 + b_{v_{p-2}}(\epsilon) - x^\epsilon_{f_{p-1}} = 1 + b_{v_{p-2}}(\epsilon) + b_{v_p}(\epsilon) - b_{v_{p-1}}(\epsilon),\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

我们可以利用归纳法得到公式

$$
x^\epsilon_{f_{p-k}} = \begin{cases} 1 - \left(\sum_{\ell=1}^{k/2} b_{v_{p-k+2\ell-1}}(\epsilon) - \sum_{\ell=0}^{k/2} b_{v_{p-k+2\ell}}(\epsilon)\right), & \text{if } k \text{ is even} \\ \sum_{\ell=1}^{(k+1)/2} b_{v_{p-k+2\ell-1}}(\epsilon) - \sum_{\ell=0}^{(k-1)/2} b_{v_{p-k+2\ell}}(\epsilon), & \text{if } k \text{ is odd} \end{cases}. \tag{13}
$$

注意， k 为偶数当且仅当 $x_{f_{p-k}} = 1$，也当且仅当 v_{p-k} 是男性。公式 (13) 可以转化为一种更直观的形式。对于一般的树 T（不一定是路径），我们称 v（相应地， e）是 v_k在 T上的之后 节点（相应地，边），如果存在一条路径 $P = r$、f_0、r、f_1、v_1、f_2、……、f_p、v_p，使得移除边 f_k后， v（相应地， e）与 v_k 仍然连通。注意，v_k 总是在其自身之后。

回到 T 为路径的情况，可以很容易地从 (13) 推导出以下结论。若$x_{f_k} = 1$，则

$$
x^\epsilon_{f_k} = 1 + \sum_{m \text{ is a man after } v_k} b_m(\epsilon) - \sum_{w \text{ is a woman after } v_k} b_w(\epsilon), \tag{14}
$$

否则，若 $x_{f_k} = 0$，则

$$
x^\epsilon_{f_k} = \sum_{w \text{ is a woman after } v_k} b_w(\epsilon) - \sum_{m \text{ is a man after } v_k} b_m(\epsilon). \tag{15}
$$

不难看出，(14) 和 (15) 一般都成立。事实上，如果存在 v 使得 $\deg_T(v) \geq 3$，我们就称 T在 v处有一个分支（出现在 v）。我们证明这两个公式仍然成立。首先注意，根据断言 45，分支只能出现在某个男性处。设 v_k 是一个满足 $\deg_T(v_k) \geq 3$的男性。假设 v_k之后的每条边在 T上都使 (14) 和 (15) 成立。记 $P^{(\alpha)} =$

$r, f_0, r, f_1, v_1, f_2, \ldots, f_k, v_k, f_{k+1}^{(\alpha)}, v_{k+1}^{(\alpha)}, \ldots$ 为经过 v_k 且对于 $\alpha = 1, \ldots, \deg_T(v_k) - 1$具有不同分支 $f_{k+1}^{(\alpha)}$ 的路径。于是根据可行性，

$$
\begin{aligned}
x^{\epsilon}_{f_k} &= 1 + b_{v_k}(\epsilon) - \sum_{\alpha=1}^{\deg_T(v_k)-1} x^{\epsilon}_{f_{k+1}^{(\alpha)}} \\
&= 1 + b_{v_k}(\epsilon) - \sum_{\alpha=1}^{\deg_T(v_k)-1} \left(\sum_{\substack{w \text{ is a woman after } v_{k+1}^{(\alpha)} \\ \text{(including } v_{k+1}^{(\alpha)})}} b_w(\epsilon) - \sum_{m \text{ is a man after } v_{k+1}^{(\alpha)}} b_m(\epsilon) \right) \qquad (16) \\
&= 1 + \sum_{\substack{m \text{ is a man after } v_k \\ \text{(including } v_k)}} b_m(\epsilon) - \sum_{w \text{ is a woman after } v_k} b_w(\epsilon).
\end{aligned}
$$

因此，(14) 对 v_k 成立。对于 (15)，由于 v_k 是一名女性，我们有 $\deg_T(v_k) \le 2$。因此，在 v_k 处不会出现分支，根据 (14) 对 v_{k+1} 成立这一事实以及可行性，我们立即可得 (15)。通过从叶节点到根节点进行归纳法，我们可以验证 T 上的任意边都满足 (14) 和 (15)。

注意，对于任意 $m \in M$、$w \in W$，我们始终有 $\sum_{m \in M} b_m(\epsilon) < b_w(\epsilon)$。因此，(14) 和 (15) 的累积影响分别使单调性 2 和单调性 1 成立。事实上，如果 $x_{f_i} = x_{f_j} = 0$ 和 $i < j$，那么 f_i 比 f_j 更接近 r。根据 (15)，v_i 之后的女性多于 v_j 之后的女性，这使得 $x^{\epsilon}_{f_i}$ 更大，因为对于任意 $w \in W$，$\sum_{m \in M} b_m(\epsilon) < b_w(\epsilon)$。由于断言 43，$x^{\epsilon}_{f_i} \le \frac{1}{2}$ 成立。我们同样可以得到断言 47 的第二个陈述。■

现在，我们已经具备了完成定理 42 证明所需的所有要素。只需证明：若 (B, D) 是当前的 Scarf 对，那么按照算法 1 在原始二分图匹配多面体上执行 Scarf 算法，以及在扰动后的多面体 (11) 上执行 Scarf 算法，都会移动到同一个新的 Scarf 对 (B', D')。我们假设 $u_1 \in \mathcal{L}$，并据此证明。与第 5.4 节中的讨论类似，类似的论证也能解决 $u_1 \in \mathcal{M}$ 的情形。

根据归纳假设，在这两种情形下，进入 B 的变量都是包含在 $D \setminus B$ 中的唯一变量，我们照例将其记为 j_t。在非退化情形下，我们将 $x^{\epsilon}_{j_t}$ 从 0 增加到某个严格正值（这是因为不存在退化），直到出现 $j_\ell \in B$ 使得 $x^{\epsilon}_{j_\ell} = 0$。由于 (11) 是非退化的，$j_\ell$ 的选择是唯一的。

根据引理 28，当 j_t 进入时，有两种可能的情况：

(I) e_{j_t} 连接两棵不同的树 T_1、T_2 属于 (V, E_B^v) 的两棵树，从而形成一棵更大的树 T，其中有两个自环；或者

(II) e_{j_t} 连接 (V, E_B^v) 的同一棵树 T_1 中的两个节点，

在这两种情况下，V_{T_1} 都包含分隔符 v_i。因此，T_1 属于类型 (a)。

假设我们处于情形 (I)。那么根据命题 23，并利用 $j_t \in E_D$, T_2 不可能包含男性处的自环。因此，T_2 只能是类型 (b) 或类型 (d)。令 P 为连接两个自环的 (6) 型路径。根据断言 29，当 e_{j_t} 是男性不喜欢的边之一时，所有使其 x 值减小的边都是女性不喜欢的，除了自环 (m_i, m_i)，它是男性 m_i 不喜欢的。对于 x^{ϵ}，这一点同样成立，因为变化的符号与 b 向量无关。此外，所有减小的变量都会同等地改变 [1]。因此，我们将从所有减小的变量中选出那个

[1]基数枢轴以 $A_B x_B + A_{j_t} x_{j_t} = b + b(\epsilon)$ 的意义保持可行性，因此 $x_B = A_B^{-1}(b + b(\epsilon))$ $-$ $A_B^{-1} A_{j_t} x_{j_t}$ x_{j_i} x_{j_t} $A_B^{-1} A_{j_t}$ $_{j_i}$ A_B^{-1} A_{j_t} 。因此，将随着 的变化而变化，其导数为 ( )。由于 和 都是全幺模矩阵，如果导数为负，则它只能是 -1，因此所有递减变量都将以相同的速度变化。

最小的使 x^ϵ 中的值离开基的变量，因为该变量会最先达到 0。

如果 T_2属于类型 (b)，那么根据断言 46，我们知道 $x_{(w_{i_{\frac{p}{2}}},w_{i_{\frac{p}{2}}})}=0$，接着根据断言 47，我们有 $x^\epsilon_{(w_{i_p},w_{i_p})} \leq \frac{1}{2}$。因此，$e_{j_\ell}$一定是女性不喜欢的，因为我们知道 $x^\epsilon_{(m_i,m_i)} > \frac{1}{2} \geq x^\epsilon_{(w_{i_p},w_{i_p})}$，所以最小的条目不可能是 $x^\epsilon_{(m_i,m_i)}$。

如果 T_2属于类型 (d)，那么 $x_{(w_{i_{\frac{p}{2}}},w_{i_{\frac{p}{2}}})}=1$，根据可行性 $x^\epsilon_{(w_{i_{\frac{p}{2}}},w_{i_{\frac{p}{2}}})} = 1+b_{w_{i_{\frac{p}{2}}}}(\epsilon) > 1$。事实上，该路径$P$是 x-增广的。根据断言 47 的第二个陈述，P中递减幅度最小的变量是 $x^\epsilon_{(m_i,m_i)}$，因为 $x^\epsilon_{(m_i,m_i)} < 1 < x^\epsilon_{(w_{i_p},w_{i_p})}$，并且根据单调性，对于 $E_P \cap E_{T_1}$上的任意女性不喜欢的边，我们都有 $x^\epsilon_{(m_i,m_i)} < x^\epsilon_e$。

因此，如果情况 (I) 发生，则按照算法 1 的规则选择离开边。

如果情况 (II) 发生，当 e_{j_t} 是男性不喜欢的时，根据断言 30，递减变量全部对应于女性不喜欢的边，因此 e_{j_ℓ} 必须是女性不喜欢的边，这同样遵循算法 1 的规则。

□

7 将稳定匹配表示为支配顶点

7.1 表示中间匹配的失败

自然会想到，使用 Scarf 算法（采用任意枢轴规则）可以输出哪些稳定匹配。在假设 C 一致的情况下（见第 2.3 节），我们给出了婚姻模型中某个稳定匹配能够由支配基表示的必要条件。结合例 51，我们的结果表明，将稳定匹配表示为支配顶点的想法具有局限性，即在最坏情况下，稳定匹配的数量呈指数级增长，远多于与 $\mathcal{P}_M$ 的支配顶点相对应的稳定匹配数量。回顾一下，如果对于某个代理人 v 而言，稳定匹配 μ 中的 v 与 μ 匹配，且在所有稳定匹配中与她匹配的所有伴侣里，μ 是她最喜欢的伴侣，则称稳定匹配 μ 对该代理人 v 是 v-最优的（见第 2.3 节）。

定义 48 (中间稳定匹配)。如果不存在任何 μ 中间，使得 $v \in V$ 满足 μ 是 v-最优，我们就称稳定匹配为中间稳定匹配。

和往常一样（参见第 1.1 节中的讨论），我们将范围限定为男性和女性人数相同的完全实例。

定理 49。假设我们有一个婚姻实例 $\mathcal{I} = (G(V, E) \succ)$，其偏好列表完整，且男性和女性人数相同。任取一个一致序数矩阵 C （参见定义 6）。如果稳定匹配 μ 是中间的，那么就不存在支配顶点 x，使得 x 是 μ的特征向量。

定理 49 告诉我们，在一致性条件下，无法用任何支配顶点表示中间稳定匹配。因此，Scarf 算法的任何实现方式或枢轴规则都不会导向这类稳定匹配。为证明这一点，我们使用以下众所周知的结果，参见 [20]。

引理 50。考虑一个由图 $G(M \cup W, E)$定义的婚姻实例 $\mathcal{I}$。那么，存在两个稳定匹配 μ_0 和 μ_z，使得对于任意 $m \in M$ （分别为 $w \in W$），μ_0 （分别为 μ_z）是 m-最优（分别为 w-最优）的。

定理 *49* 的证明。 固定一个中间稳定匹配 μ （我们假设它存在，否则结论显然成立）。固定 (A, b, C)，使得 (A, b) 定义该实例的匹配多面体，且 C 是一致的。反设存在 (A, b, C) 的一个支配顶点 x ，使得 x 是 μ 的特征向量，即 $x_e = 1$ 当且仅当 $e \in \mu$。

考虑与顶点 x 对应的任意支配基 B 。注意，若 $e_j \in \mu$，则 $j \in B$。因此，对于与序数基 B 相关联的.....向量，任意 $i \in [n]$ 都有，

$$u_i = \min_{j \in B} c_{ij} \leq c_{i,(i,\mu(i))}. \tag{17}$$

注意，根据引理 21， E_B 中至少存在一个自环。假设对于某个 ℓ，$(v_\ell, v_\ell) \in E_B$ 。那么，根据 C 的一致性，我们有

$$u_\ell = \min_{j \in B} c_{\ell j} = c_{\ell,(v_\ell,v_\ell)}. \tag{18}$$

不失一般性，假设 $v_\ell \in M$ 是一名女性。令 μ_0 为男性最优稳定匹配。考虑边 $e = (m^*, v_\ell)$，其中 $m^* = \mu_0(v_\ell)$ 是 v_ℓ 在 μ_0 中的伴侣。注意，m^* 存在，因为我们假设男性和女性人数相同，且偏好列表完整。根据引理 50，在所有稳定匹配中， v_ℓ 是 m^* 能获得的最佳伴侣。将对应于 e 的列记为 c_e，那么根据 C 的一致性以及式 (18)，

$$c_{v_\ell,e} > c_{v_\ell,(v_\ell,v_\ell)} = u_\ell. \tag{19}$$

请注意，在所有与 m^* 匹配的稳定匹配对象中， v_ℓ 是最佳伴侣，而 $\mu(m^*)$ 对 m^* 的偏好程度较低，因为 μ是中间匹配。结合这一观察与 (17)，我们得到

$$c_{m^*,e} > c_{m^*,(m^*,\mu(m^*))} \geq u_{m^*}. \tag{20}$$

由于节点 $v \neq v_\ell, m^*$ 不与 e 关联，且 C具有一致性，因此我们有

$$c_{v,e} > u_v, \forall v \neq v_\ell, m^*. \tag{21}$$

现在，根据 (19)、(20) 和 (21)，我们找到一列 c_e ，使得 $c_e > u$，这与 B 是支配基相矛盾。于是得证。

□

7.2 一个具有指数多个中间匹配的例子

例 51. 我们给出一个无限族实例，其中 v-最优稳定匹配构成所有稳定匹配集合的一个小得多的子集，其规模小了一个指数级。

对于 $n = 2k \in 2\mathbb{N}$，考虑男性 $m_0,\ldots,m_{k-1}$、女性 $w_0,\ldots,w_{k-1}$所构成的实例。对于 $i \in \{0,\ldots,k-1\}$，男性 m_i 的偏好列表如下：

$$m_i : w_i \succ_{m_i} w_{i+1} \succ_{m_i} w_{i+\frac{k}{2}+1} \succ_{m_i} w_{i+\frac{k}{2}+2},$$

其中，索引以 k 为模。女性的列表长度也为 4 ，并且满足：女性 w_j 将男性 m_i 列在第 ℓ 位，当且仅当男性 m_i 将女性 w_j 列在第 $5-\ell$ 位。也就是说，对于 $i \in \{0,\ldots,k-1\}$ ，我们有：

$$w_i : m_{i-\frac{k}{2}-2} \succ_{w_i} m_{i-\frac{k}{2}-1} \succ_{w_i} m_{i-1} \succ_{w_i} m_i,$$

其中下标均按模 n 计算。示例请参见表*1*。

0	0	1	6	7	0	3	4	9	0
1	1	2	7	8	1	4	5	0	1
2	2	3	8	9	2	5	6	1	2
3	3	4	9	0	3	6	7	2	3
4	4	5	0	1	4	7	8	3	4
5	5	6	1	2	5	8	9	4	5
6	6	7	2	3	6	9	0	5	6
7	7	8	3	4	7	0	1	6	7
8	8	9	4	5	8	1	2	7	8
9	9	0	5	6	9	2	3	8	9

表1：为 $n = 20$ 在例 51 中构造的实例。左侧给出男性的偏好列表，右侧给出女性的偏好列表。

列表是不完整的，但众所周知，可以通过将缺失条目添加到偏好列表末尾来补全它们，而不会改变稳定匹配的集合，参见例如 *[20]*。因此，定理 *49* 的假设成立；为便于说明，我们研究使用不完整列表的实例。对于 $i = 0$、.....、$k-1$，男性 m_i 将女性 w_i 列为其首选。因此，男性最优稳定匹配 μ_0 将男性 m_i 分配给女性 w_i。类似地，女性最优稳定匹配 μ_z将每位女性分配给她最喜欢的男性。

接下来，我们证明例 51 所需的性质。下面的断言表明，男性最优稳定匹配和女性最优稳定匹配是仅有的、对某个 v 而言为 v-最优的稳定匹配。

断言52。 设 μ 是某个 $v \in M \cup W$ 下的 v-最优稳定匹配。那么 $\mu \in \{\mu_0, \mu_z\}$。

另一方面，该实例有指数多个稳定匹配。

断言53。 设 $S \subset \{0, \ldots, \frac{k}{2} - 1\}$。那么，对于 $i \in S$，将男性 $i, i + \frac{k}{2}$ 分配给他们的第三偏好伴侣；对于 $i \in \{0, \ldots, \frac{k}{2} - 1\} \setminus S$，将男性 $i, i + \frac{k}{2}$ 分配给他们的第二偏好伴侣，所得的匹配是稳定的。

我们来证明断言52和断言53推出了该论题。根据断言53，这个实例至少有 $\sqrt{2}^k$ 个稳定匹配。另一方面，根据断言52，对于某个代理人 v，恰有2个稳定匹配是 v最优的。

断言52和断言53的证明需要引入经典概念在某个匹配中显露的轮换，详见附录A.3。

7.3 当 C 不一致时

例如，在下一个例子中，即使我们去掉 C 一致这一条件，更广泛的所有序数矩阵 C 这一类也无法帮助我们表示所有稳定匹配，即使我们允许作出这样的选择：C，使得（A，b，C）的一些支配顶点不是稳定匹配。我们通过下面这个在许多稳定匹配情境中都广为研究的例子来说明这一事实，例如见 [14]:

例54. 考虑以下6 位代理人的偏好列表：

我们有三种稳定匹配：男性最优 $\mu_1 = \{(m_1, w_1), (m_2, w_2), (m_3, w_3)\}$，中间匹配$\mu_2 = \{(m_1, w_2),(m_2, w_3),(m_3, w_1)\}$，以及女性最优 $\mu_3 = \{(m_1, w_3), (m_2, w_1), (m_3, w_2)\}$。

1	1	2	3		1	2	3	1
2	2	3	1		2	3	1	2
3	3	1	2		3	1	2	3

表2：为 $n = 6$ 构造的实例，见例54。左侧给出男性的偏好列表，右侧给出女性的偏好列表。

我们去掉了对 C 一致性的要求（参见第 *2.3* 节）。我们希望找到一个序数矩阵 $\tilde{C}$，使得(A, b, C) 的所有支配顶点都包含多面体$\mathcal{P}_{FM}$中的三个顶点 x_1, x_2, x_3。该多面体由(A, b) 定义，且 x_i是 μ_i关于 $i = 1, 2, 3$的特征向量。请注意，我们甚至不考虑如何实现 *Scarf* 算法来获得这些顶点。鉴于该实例$\tilde{C}$的规模，完全枚举所有矩阵 C 并得出这样的 C 不存在$\tilde{C}$并不困难（请回想，只有 C 中各项的相对顺序才有影响）。

8 结论与未来工作

据我们所知，本文首次证明了 Scarf 算法在相关情形下能够多项式时间收敛，并首次给出了关于支配顶点表达能力的否定性结果，从而也否定了依赖 Scarf 结果的方法。一方面，我们提供了支持性证据，表明在相关情形下可以证明 Scarf 算法能在多项式时间内运行，尤其是在能够利用输入的组合解释时。另一方面，我们表明，Scarf 算法可能存在结构性局限，其程度远超过与之相关的搜索和枚举问题所具有的局限。

理解 Scarf 算法在序数矩阵的二分图匹配多面体上的运作机制是一个颇具吸引力的理论问题，尽管据我们所知，目前还没有采用更一般矩阵来研究二分图匹配多面体的模型。这里有两个具体问题值得提出。首先，尽管我们预计非一致矩阵无法用于将稳定匹配表示为支配顶点，但这一陈述仍需要证明；如果能将定理5推广到非一致矩阵，将会很有用。其次，若要理解对于任意序数矩阵，Scarf 算法是否能在二分图匹配多面体上以多项式时间收敛，也将非常有意义。这需要对该问题进行超越稳定婚姻的理解。

未来的工作还包括研究更一般设置下的 Scarf 算法，以及我们的枢轴规则与该领域经典算法之间的关系，例如 Tan 的算法和 Roth-Vande Vate 的通向稳定的随机路径。

致谢。

Yuri Faenza 和 Chengyue He 感谢美国国家科学基金会项目的支撑*CAREER*：匹配市场的算法理论。

参考文献

[1] Ron Aharoni 和 Tamás Fleiner。论 Scarf 的一个引理。组合理论杂志 *B*辑，87(1)：72–80，2003年。[2] Ron Aharoni 和 Ron Holzman。有向图中的分数核。组合理论杂志，73(1)：1–6，1998年。

[3] Michel Louis Balinski。关于最大匹配和最小覆盖。载于 数学规划研讨会论文集，第301–312页。普林斯顿大学出版社，1970年。[4] Roger E Behrend。分数完美 b-匹配多面体 I：一般理论。线性代数及其应用，439(12)：3822–3858，2013年。[5] Dimitris Bertsimas 和 John N Tsitsiklis。线性优化导论，第6卷。[6] Péter Biró 和 Tamás Fleiner。容量约束 NTU 博弈的分数解及其在稳定匹配中的应用。离散优化，22：241–254，2016年。[7] Péter Biró、Tamás Fleiner 和 Robert W Irving。使用 Scarf 算法匹配伴侣。数学与人工智能年刊，77(3)：303–316，2016年。[8] Alexander Black、Jesús De Loera、Sean Kafer 和 Laura Sanità。关于 0/1 多面体的单纯形法。*arXiv* 预印本 *arXiv:2111.14050*，2021年。[9] Robert G Bland。单纯形法的新有限枢轴规则。运筹学数学，2(2)：103–107，1977年。[10] Karthekeyan Chandrasekaran、László A Végh 和 Santosh S Vempala。割平面法对于完美匹配是多项式时间的。运筹学数学，41(1)：23–48，2016年。[11] Xi Chen 和 Xiaotie Deng。双人纳什均衡的复杂性问题得以解决。载于 *2006*年第*47*届 *IEEE* 计算机科学基础年度研讨会（*FOCS'06*），第261–272页。IEEE，2006年。[12] Gergely Csáji。稳定超图匹配、稳定多商品流及相关问题的复杂性。2021年。[13] Constantinos Daskalakis、Paul W Goldberg 和 Christos H Papadimitriou。计算纳什均衡的复杂性。*SIAM* 计算杂志，39(1)：195–259，2009年。[14]Piotr Dworczak。带补偿链的延迟接受。运筹学，69(2)：456–468，2021年。[15] Jack Edmonds、Stéphane Gaubert 和 Vladimir Gurvich。Scarf OIK。离散数学电子札记，36：1281–1288，2010年。ISCO 2010——国际组合优化研讨会。[16] Pavlos Eirinakis、Dimitrios Magos 和 Ioannis Mourtos。从一个稳定婚姻到下一个：路途有多长？*SIAM* 离散数学杂志，28(4)：1971–1979，2014年。[17] Pavlos Eirinakis、Dimitrios Magos、Ioannis Mourtos 和 Panayiotis Miliotis。稳定婚姻的多面体方面。运筹学数学，39(3)：656–671，2014年。[18] Yuri Faenza 和 Xuan Zhang。仿射可表示格、稳定匹配与选择函数。数学规划，第1–40页，2022年。[19] David Gale 和 Lloyd S Shapley。大学录取与婚姻稳定性。美国数学月刊，69(1)：9–15，1962年。

[20] Dan Gusfield 和 Robert W Irving。《稳定婚姻问题：结构与算法》。麻省理工学院出版社，1989年。[21] Penny E Haxell 和 Gordon T Wilfong。边界网关协议（BGP）的分数模型。载于第十九届*ACM-SIAM*离散算法年会论文集，第193–199页，2008年。[22] Robert W Irving、Paul Leather 和 Dan Gusfield。一种求解“最优”稳定婚姻的高效算法。*ACM*学报（*JACM*），34(3):532–543，1987年。[23] Takashi Ishizuka 和 Naoyuki Kamiyama。关于稳定分数超图匹配的复杂性。载于第*29*届国际算法与计算研讨会（*ISAAC 2018*）。Schloss Dagstuhl-Leibniz-Zentrum fuer Informatik，2018年。[24] Shiva Kintali、Laura J Poplawski、Rajmohan Rajaraman、Ravi Sundaram 和 Shang-Hua Teng。分数稳定性问题之间的可约性。*SIAM* 计算杂志，42(6):2063–2113，2013年。[25] Tamás Király 和 Júlia Pap。关于核与 Sperner 引理的一则注记。《离散应用数学》，157(15):3327–3331，2009年。[26] László Lovász 和 Michael D Plummer。匹配理论，第367卷。美国数学学会，2009年。[27] David Manlove。偏好匹配算法，第2卷。世界科学出版社，2013年。[28] Hai Nguyen、Thành Nguyen 和 Alexander Teytelboym。具有复杂约束的匹配市场中的稳定性。管理科学，67(12):7438–7454，2021年。[29] Thành Nguyen 和 Rakesh Vohra。存在伴侣时的近似可行稳定匹配。美国经济评论，108(11):3154–69，2018年。[30] Thành Nguyen 和 Rakesh Vohra。具有比例约束的稳定匹配。运筹学，67(6):1503–1519，2019年。[31] James B Orlin。一种求解最小费用流的多项式时间原始网络单纯形算法。数学规划，78(2):109–129，1997年。[32] Christos H Papadimitriou。关于奇偶性论证的复杂性及其他低效存在性证明。计算机与系统科学杂志，48(3):498–532，1994年。[33] Alvin E Roth、Uriel G Rothblum 和 John H Vande Vate。稳定匹配、最优分配与线性规划。运筹学数学，18(4):803–828，1993年。[34] Alvin E Roth 和 John H Vande Vate。双边匹配中通向稳定的随机路径。《计量经济学：计量经济学会期刊》，第1475–1480页，1990年。[35] Uriel G Rothblum。将稳定匹配刻画为多面体的极点。数学规划，54(1):57–67，1992年。[36] Laura Sanità。分数匹配多面体的直径及其困难性推论。载于*2018*年*IEEE*第*59*届计算机科学基础年会（*FOCS*），第910–921页。IEEE，2018年。

[37] Herbert E Scarf。N人博弈的核心。《计量经济学：计量经济学会期刊》，第50–69页，1967年。[38] Jimmy JM Tan。稳定匹配与稳定划分。《国际计算数学杂志》，39(1-2):11–20，1991年。[39] Jimmy JM Tan 和 Hsueh Yuang-Cheh。稳定匹配问题的一种推广。《离散应用数学》，59(1):87–102，1995年。[40] Robert E Tarjan。通过欧拉遍历将动态树用作搜索树，并将其应用于网络单纯形算法。数学规划，78(2):169–177，1997年。[41] Chung-Piaw Teo 和 Jay Sethuraman。分数稳定匹配的几何性质及其应用。运筹学数学，23(4):874–891，1998年。[42] John H Vande Vate。线性规划带来婚姻美满。《运筹学快报》，8(3):147–153，1989年。[43] Rakesh Vohra。

Scarf 引理及其应用，2019年。于加州大学伯克利分校西蒙斯研究所演讲 .

A 缺失的证明

A.1 引理 21 和引理 22 的证明

引理 *21* 的证明。首先假设 B 是一个基，即 $rank(B) = n$。为证明第一个结论，若E_B^v 包含一个环，那么它就是一个偶圈。偶圈意味着对应的列在 B中线性相关，矛盾。

假设存在一个单节点 v_i，它既没有被有效边覆盖，也没有被其自环覆盖。那么 B 的行 v_i 全为 0，这使得 $rank(B) \leq n-1$，矛盾。

回顾以下线性代数事实：写作 $B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix}$，并假设 $B_4 = 0$ 和B_3 有 q 行。那么 B_3 至少有 q 列[2]。考虑一个至少有两个节点的树 T（因此至少有一条有效边），先假设 E_B^v 的一棵树没有与任何自环关联。于是，我们可以将 B_3 的行取为 T的节点集，并将其列取为 T 的边集，对 B 应用上述结论，从而得到矛盾。反过来，若 E_B^v 的一棵树与两个或更多自环关联，我们可以将 B_3 的行取为除 T的节点之外的所有节点，并将 B 中对应于不与 T中的节点关联的边的所有列作为列，应用上述结论，再次得到矛盾。

另一方面，假设这两个图条件均满足。众所周知，树的关联矩阵可以通过置换变为如下形式

$$\begin{array}{c} \\ v_{i_1} \\ v_{i_2} \\ v_{i_3} \\ \vdots \\ v_{i_{t+1}} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} e_{j_1} & e_{j_2} & \cdots & e_{j_t} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & * & & * \\ 1 & * & & * \\ 0 & 1 & & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

[2]根据秩的次可加性可知这一事实；否则，$n = rk\ B \leq rk\ B_1 \quad B_2 \ + rk\ B_3 \ + rk\ B_4 \ < (\,)(\,,\,)(\,)(\,)$，这就矛盾了。$n - q + q + 0 = n$

其中任意节点 v_{i_1} 都可以作为第一行（这一事实可以通过归纳法证明），并且每一列恰有两个 1。我们可以将这一事实推广到关联着一个自环 $e_{j_{t+1}}$ 的树，不失一般性地，设自环关联于v_{i_1}。添加自环列后，新的 $t \times t$ 方子矩阵的行列式为 1，这意味着它满秩。我们可以将此方法应用于森林中的每棵树，从而得到 B 满秩，因此它是一个基。

□

引理 *22* 的证明。 根据引理 21，假设这些边 E_B 可以分解为 τ 个连通分量。那么对于每个 $\omega \in [\tau]$，考察第 ω 个连通分量，其局部关联矩阵在行和列重新排列后对应一个方形子矩阵 B_ω。因此，我们得到了所需结果。

□

A.2 引理 39 的证明

证明。 设 (B, D) 是应用算法 1 得到的第一个满足 $u_1 \in \mathcal{M}$ 的 Scarf 对。我们已经论证过，在先于 (B, D) 的 Scarf 对中，有 $u_1 \in \mathcal{L}$。于是我们可以应用引理 37 第 2(ii) 部分，推得引理 39 中的 (i)、(ii) 成立，并且 e_{j_t} 是一条男性不喜欢的有效边。

现在设 (B, D) 是算法访问的一个一般 Scarf 对，并假设它满足 $u_1 \in \mathcal{M}$、引理 39 中的 (i)、(ii)，且 e_{j_t} 是一条男性不喜欢的有效边。我们证明 (B, D) 满足引理 39 中的 (iii)。由 (iii) 可知，算法要么继续执行，要么终止。若继续执行，则得到 (iv)，并且算法访问的下一个 Scarf 对 (B', D') 满足 $u'_1 \in \mathcal{M}$、引理 39 中的 (i)、(ii)，且 e_{j^*}（其中 $\{j^*\} = D' \setminus D$）是一条男性不喜欢的有效边。反之，若算法终止，则得到 $B' = D$（即，(v) 得到验证）。证明完毕。

我们先提出一些辅助断言。回想一下，基结构（即引理 21）独立于序数基和效用向量。考虑包含 m_1 的 G_B 的树 T（带有一个自环，但下文不再重复“带有一个自环”）。不同于 $u_1 \in \mathcal{L}$ 的情形，现在 T 不再是单例，因为我们从 (ii) 知道存在一条有效边 $(m_1, w) \in E_D$。

断言 55。 进入边 $e_{j_t} (\notin E_B)$ 与 T 关联。换言之，e_{j_t} 和 T 至少有一个共同节点。

断言 *55* 的证明。由于 $e_{j_t} \notin E_B$，根据引理 21，e_{j_t} 要么连接两棵树，要么在一棵树中形成一个偶圈。这两种情况都会在 $E_{B \cup \{e_{j_t}\}}$ 中产生一个连通分量 Γ，其中边的数量比节点的数量多一。由于 $e_{j_t} \in E_\Gamma$，只需证明 m_1 位于 Γ 上。

如果 m_1 不在 Γ上，那么 Γ 上的所有边都包含在 E_D 中，因为 $D = B \cup \{j_t\} \setminus \{1\}$。根据推论 25，$E_D$ 中的任意边在 D 中都会被 m_1 或其某个端点所不喜欢。注意，在Γ 上，根据归纳假设 (ii)，没有边会在 D 中被 m_1 所不喜欢。因此，Γ 上的任意边都会在 D 中被同样位于 Γ 上的某个节点所不喜欢；但这是不可能的，因为 Γ上的边数与节点数不匹配。■

下面说明，即使我们没有 $u_1 \in \mathcal{L}$，引理 26 仍然成立 .

断言56。 </style}要么是，要么存在，使得 ($\bar{w}$，$\bar{w}) \in E_{B'} \cap E_{D'}$，并且 $\bar{w}$ 在 $\mu_{B'}$中没有被正确匹配，其中 $\mu_{B'}$ 是与可行基 B'相对应的匹配。

断言*56*的证明。令 x, x' 分别为与基 B, B'相关联的基本可行解。假设 $B' \neq D$。如果 $x'_{(m_1,m_1)} = 1$，那么我们知道匹配 μ'_B 并未恰当地匹配所有代理人。因此，存在某位女性 $\bar{w}$ 也未被恰当地匹配。因此，$x'_{(\bar{w},\bar{w})} = 1$且 $(\bar{w}, \bar{w}) \in E_{B'}$。由于 $B' \neq D$，我们有 $B' \setminus \{1\} \subseteq D'$，这意味着 $(\bar{w}, \bar{w}) \in E_{B'} \cap E_{D'}$。因此，只需证明 $x'_{(m_1,m_1)} = 1$。

现在假设我们处于满足 $u_1 \in \mathcal{M}$ 且 $x'_{(m_1,m_1)} = 0$的第一次迭代。此时我们有 $x_{(m_1,m_1)} = 1$ 且 $x'_{(m_1,m_1)} = 0$，即一次非退化基数枢轴会使值 $x_{(m_1,m_1)}$ 减小。我们将证明，根据算法 1， $x_{(m_1,m_1)}$ 是离基变量，因此根据引理 14，$B' = D$，矛盾。

令 Γ 为 $G_{B\cup\{j_t\}}$ 中包含 e_{j_t}的连通分量。

如果 Γ 包含一个偶圈，那么根据断言 55 Γ 恰好包含一个自环（m_1, m_1）。由于枢轴操作是非退化的，x_{j_t} 会从 0 变为 1。由于 e_{j_t} 属于一个偶圈，该环必定是 x-交替的，并且权重只会在该环内发生变化。若要将 $x_{(m_1,m_1)}$ 从 1 变为 0，必然会违反可行性。因此，$x'_{(m_1,m_1)} = 0$ 是不可能的。

另一方面，如果 e_{j_t} 连接了 G_B中的两棵不同的树，那么 Γ上就有两个自环。在 e_{j_t} 处出现的权重变化将导致 Γ上 x-增广路的权重发生变化，进而导致这些自环上的权重发生变化。因此，$x'_{(m_1,m_1)} = 0$，并且根据算法 1，$B' = D$。

因此，一旦在某次迭代中 $x_{(m_1,m_1)} = 1$ ，那么在此后的所有迭代中，直到算法终止，始终有 $x'_{(m_1,m_1)} = 1$ 。因此，1 没有匹配对象，必定存在一位未匹配的女性 $\bar{w}$ ，证明得证。■

为了证明 (iii) 的正确性，我们可以运用上述结果，并重复引理 28 中的相同论证，只需作如下两处细微修改:

首先，对于证明中的公式（6）：

$$P = (m_{i_1}, m_{i_1}), (m_{i_1}, w_{i_1}), (w_{i_1}, m_{i_2}), \ldots, (m_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}}), (w_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}}).$$

我们指定 $m_{i_1} = m_1$，以及 $w_{i_{\underline{p}}} = \bar{w}$。那么， P 的边会按顺序被2厌恶

$$none, m_1, w_{i_1}, m_{i_2}, w_{i_2}, \ldots, m_{i_{\frac{p}{2}-1}}, w_{i_{\frac{p}{2}-1}}, m_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}}$$

（注意， E_D 中不存在 (m_{i_1}, m_{i_1}) =(m_1, m_1)，因为 $1 \notin D$，因此记为“none”-厌恶）。

其次，对于圈的情形下包含 m_1 的 Q ，公式（7）为:

$$Q = (m_{i_1}, w_{i_1}), (w_{i_1}, m_{i_2}), \ldots, (m_{i_{\frac{p}{2}}}, w_{i_{\frac{p}{2}}}), (w_{i_{\frac{p}{2}}}, m_{i_1}).$$

这里 $m_{i_1} = m_1$ 和 $w_{i_1} = w$ ，其中 w 是引理 39(ii)中定义的女性。 Q 上的边仍然依次受到 m_1、w_{i_1}、 m_{i_2}、 w_{i_2}、.....、 $m_{i_{\frac{p}{2}-1}}$、 $w_{i_{\frac{p}{2}-1}}$、 $m_{i_{\frac{p}{2}}}$、 $w_{i_{\frac{p}{2}}}$的厌恶。

利用引理 28 证明中的其余论证，我们可以推导出 (iii)。

为证明 (iv)，假设 e_{j_ℓ} 是相对于 D而言女性不喜欢的。则 v_{i_ℓ} 是一个满足 $c_{i_\ell,\ j_\ell} < c_{i_\ell,\ j_r} \in \mathcal{M}$的女性。因此，$e_{j_r}$ 是一条有效边，另一个端点对应于一名男性，即 v_{i_r}。于是 v_{i_ℓ} 的效用增加，而 v_{i_r} 的效用降低。

我们仍需证明 e_{j^*} 是相对于 D'而言男性不喜欢的有效边。由于 v_{i_r}是一名男性，因此它是男性不喜欢的。现在假设 e_{j^*}是一个自环，则 e_{j^*} =(v_{i_r}, v_{i_r})。如果 $v_{i_r} = m_1$，我们将在 (B', D')处终止算法，因为 $1 \in D'$。然而，由于自环 (m_1, m_1) 没有离开 E_B，根据我们的枢轴规则，我们知道 $x'_{(m_1,m_1)} = 1$ ，这意味着 m_1 没有被 $\mu_{B'}$正确匹配，因此 $\mu_{B'}$ 不是稳定匹配，这与定理 3 矛盾。因此，$v_{i_r} \neq m_1$。由于 v_{i_r} 是一名男性，$(v_{i_r}, \bar{w})$是一条有效边。如果 $(v_{i_r}, \bar{w}) \notin E_{D'}$，则对应的列 $c_{(v_{i_r},\bar{w})}$ </style}严格大于 u'。否则，如果 $(v_{i_r}, \bar{w}) \in E_{D'}$，则这条边不可能受到 D'中的任何人的厌恶，因为 v_{i_r} 和 $\bar{w}$ 厌恶自己的自环，而 m_1 厌恶一条与 m_1关联的边。这两种情况都与支配基的定义矛盾。

由于进入边 e_{j^*} 不可能是自环，我们将为 (B', D') 保持 (i)。此外，根据 (iv)，我们知道 u_1 永远不会增加，因此 v_{i_ℓ} 是女性。因此，(ii) 对 (B', D') 也成立。

当 1 小于或等于 aves B，算法终止。如果我们处于 (v)，那么就停止归纳法。 □

A.3 第7节缺失的证明

为了证明断言52和断言53，我们介绍旋转这一经典概念及其相关性质。关于旋转的详尽论述，以及本文所述旋转基本事实的证明，请参阅 [20]。给定一个稳定匹配 μ， μ-交替环是一个环（在经典意义下），其边交替属于 μ 和 $E \setminus \mu$。令

$$\rho = m_{i_0}, e_0, w_{i'_0}, e'_0, m_{i_1}, e_1, w_{i'_1}, \ldots, m_{i_{\ell-1}}, e_\ell, w_{i'_{\ell-1}} \tag{22}$$

是一个 μ-交替环。若对于 $j = 0$，.....，$\ell - 1$，满足.....，则称 ρ 是在 μ 处显露的轮换。

1. 在 μ 中，m_{i_j} 与 w_{i_j} 匹配，且

2. 根据 m_{i_j} 的偏好列表，$w_{i_{j+1}}$ 是第一个比起 μ 中的伴侣更偏好 m_{i_j} 的女性，

其中下标模 ℓ 取值。

轮换使我们能够从一个稳定匹配转到另一个稳定匹配。更形式化地，定义对称差算子 Δ 后，有如下结论。

引理57。 设 ρ 是在某个稳定匹配 μ 中暴露的轮换。那么 $\mu' := \mu \Delta E_\rho$ 是一个稳定匹配。此外，对于每个男性 $m \in M$，他要么在 μ 和 μ' 中匹配到同一位女性，要么更喜欢在 μ 中分配给他的伴侣，而非在 μ' 中分配给他的伴侣。

引理58。 设 μ 是一个稳定匹配。那么存在一个稳定匹配序列 μ_0， μ_1，.....，μ_s，满足：

1. μ_0 是男性最优稳定匹配，而 $\mu_s = \mu$；

2. 对于 $i = 1$，... ， s，存在一个在 μ_{i-1} 中暴露的轮换 ρ_i，使得 $\mu_i = \mu_{i-1} \Delta E_{\rho_i}$。

现在来证明一个中间结论。

命题 59。 在 μ_0 中暴露的唯一轮换是

$$\rho_0 = m_0, w_0, m_1, w_1, \ldots, m_{k-1}, w_{k-1}.$$

此外， $\mu' := \mu \Delta E_{\rho_0}$ 是一个稳定匹配，其中所有男性都与其列表中的第二位女性匹配。

命题 *59* 的证明。由于该实例具有稳定匹配 $\mu_z \neq \mu_0$，根据引理58，必然至少有一个轮换 ρ 如（22）所示，在 μ 中暴露。无妨设 $i_0 = i$ 对于某个 $i = 0$、.....、$k-1$ 成立。于是，根据轮换的定义， $i'_0 = i$ 和 $i'_1 = i+1$。因此， $i_1 = i+1$。迭代可得，$\rho = \rho_0$。此外，所有男性和所有女性都包含在 ρ 中。由于在一个稳定匹配中暴露的所有轮换在顶点上互不相交（再次参见 [20]）， ρ_0 是 μ_0处暴露的唯一轮换。

μ' 的稳定性由引理57以及以下事实得出：根据对称差的定义，每个男性都与其列表中的第二位女性匹配。■

现在我们可以证明断言52和断言53了。

断言*52*的证明。根据引理58，所有稳定匹配都可以通过从 μ_0 出发，依次与某个序列中的轮换取对称差而得到，并且每个对称差的部分序列都会产生一个稳定匹配。根据命题 59，在 μ_0 中唯一暴露的轮换是 ρ_0。因此，除 μ_0 外的所有稳定匹配都可以通过从 μ' 出发，经过一系列轮换消除而得到。根据引理57，与一个已暴露的轮换取对称差时，没有男性会获得更理想的伴侣

。因此，除 μ_0 之外，在任何稳定匹配中，都没有男性的伴侣比他在 μ' 中的伴侣更合心意。再次运用命题 59，我们知道，对于任何 v， μ' 都不是 v-最优的。由此可知，对于任何男性 m， μ_0 都是唯一的 m-最优匹配。

为完成该断言的证明，只需证明，对于任意女性 w， μ_z 是唯一的 w-最优稳定匹配。这可由如下观察得出：

$$m_i \leftrightarrow w_{i+\frac{k}{2}+2} \text{ for } i = 0, \ldots, k-1$$

在我们的实例类与男性和女性角色互换的实例之间定义了一个双射（与通常一样，下标按模 k 计算）。也就是说，对于 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$，新实例的偏好列表为：

$$w_i : m_i \succ m_{i+1} \succ m_{i+\frac{k}{2}} \succ m_{i+\frac{k}{2}+1} \quad \text{and} \quad m_i : w_{i-\frac{k}{2}-2} \succ w_{i-\frac{k}{2}-1} \succ w_{i-1} \succ w_i.$$

该命题随后由证明的第一部分得出。 ■

断言*53*的证明。再次考虑命题 59 中定义的匹配 μ'。对于 $i = 0,\ldots, \frac{k}{2} - 1$，有

$$\rho_i := m_i, w_{i+1}, m_{i+\frac{k}{2}}, w_{i+\frac{k}{2}+1}$$

是 μ' 中暴露的一个旋转。众所周知（再次参见 [20]），若 ρ, ρ' 是稳定匹配 μ 中暴露的旋转，则 ρ' 是 $\mu\Delta\rho$ 中暴露的一个旋转。因此，对于断言假设中的每个 S，都有 $(((\mu'\Delta\rho_{i_1})\Delta\rho_{i_2}) \ldots \Delta\rho_{i_{|S|}})$ 是一个稳定匹配，其中 $S = \{\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \ldots, \rho_{i_{|S|}}\}$。显然，所有这些匹配均不相同。结论成立。■